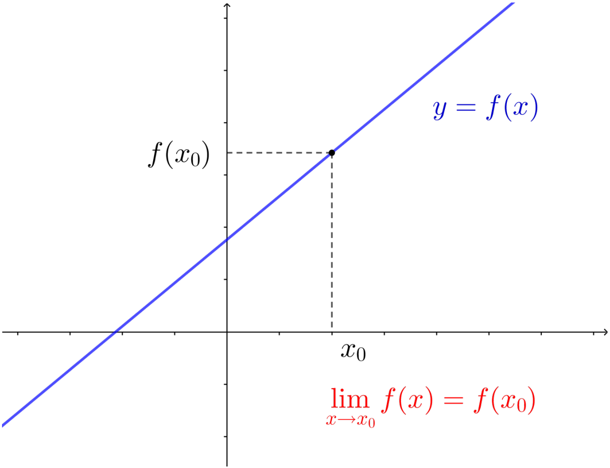
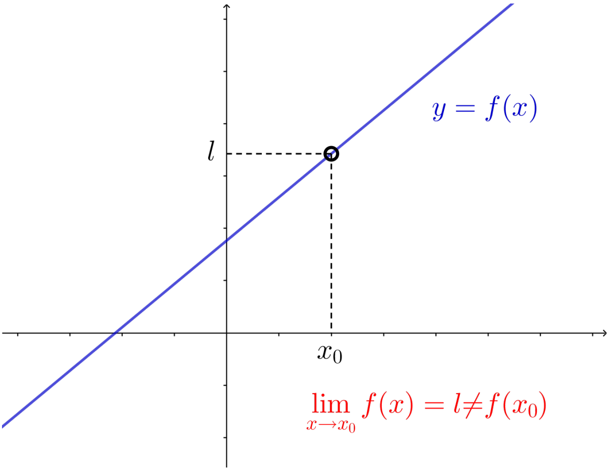
Límites y continuidad (3)

Jesús García de Jalón de la Fuente

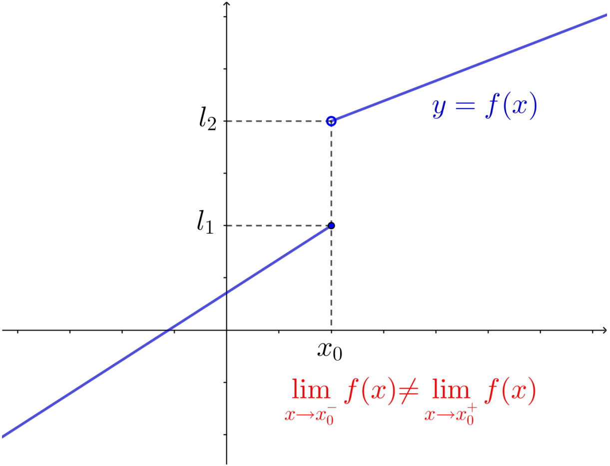
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Límite cuando $x \to x_0$

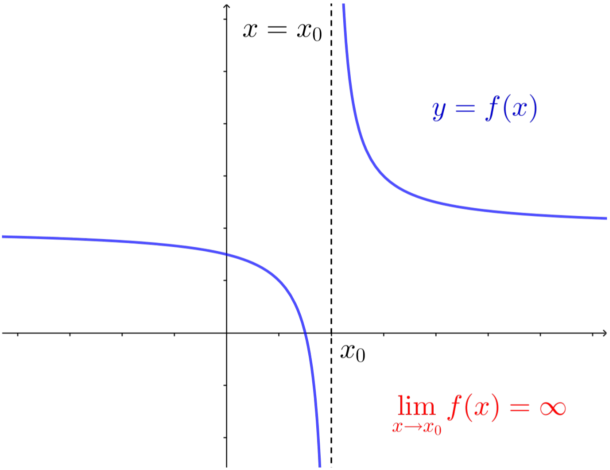



$y = f(x)$
l
x_0
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$

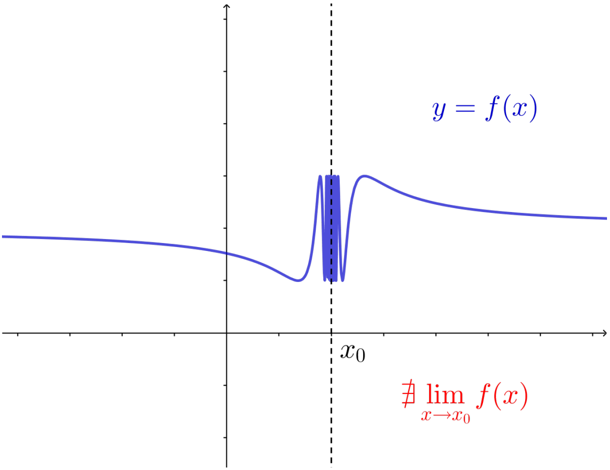
Límite cuando $x \to x_0$



Límite cuando $x \to x_0$



Límite cuando $x \to x_0$



Límite cuando $x \to x_0$

Cuando $x \to x_0$ pueden darse cinco situaciones posibles:

Límite cuando $x \to x_0$

Cuando $x \to x_0$ pueden darse cinco situaciones posibles:

- **Función continua**. El límite es igual al valor de la función:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Límite cuando $x \to x_0$

Cuando $x \to x_0$ pueden darse cinco situaciones posibles:

- **Función continua**. El límite es igual al valor de la función:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- **Discontinuidad evitable**. Existe el límite pero no coincide con el valor de la función:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

- **Discontinuidad de salto finito**. Existen límites laterales pero no coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- **Discontinuidad de salto finito**. Existen límites laterales pero no coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- **Discontinuidad de salto infinito**. El límite de la función es infinito.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Límite cuando $x \to x_0$

- **Discontinuidad de salto finito**. Existen límites laterales pero no coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

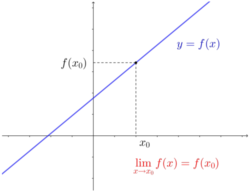
- **Discontinuidad de salto infinito**. El límite de la función es infinito.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

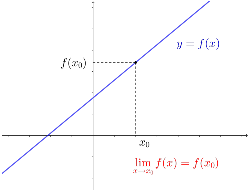
- **Discontinuidad esencial**. No existen límites laterales ni son infinitos

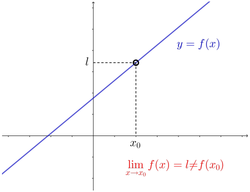
Límite cuando $x \to x_0$

Límite cuando $x \to x_0$

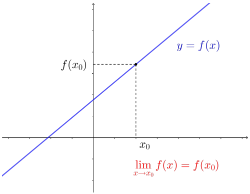


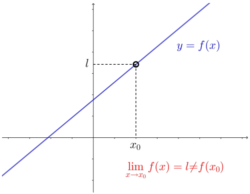
Límite cuando $x \to x_0$

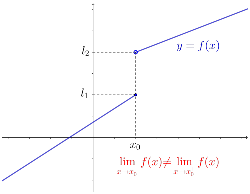




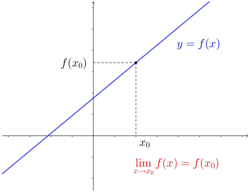
Límite cuando $x \to x_0$

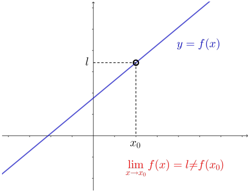


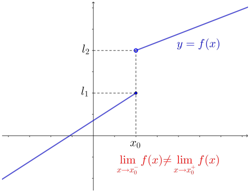


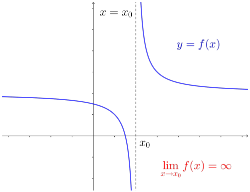


Límite cuando $x \to x_0$

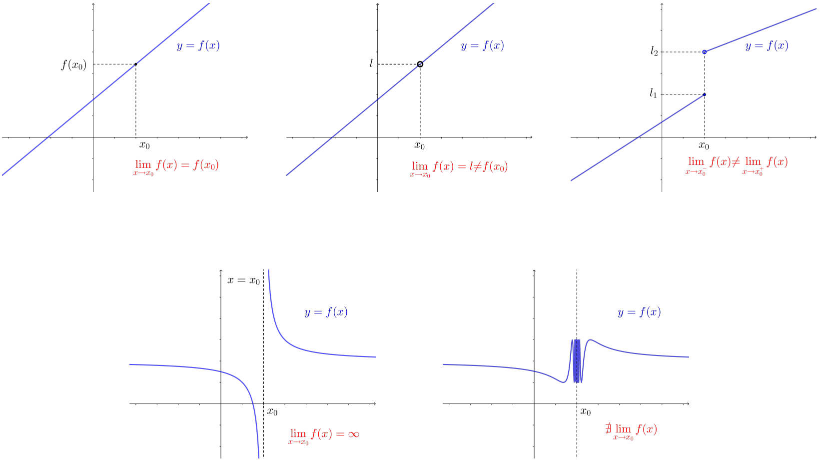








Límite cuando $x \to x_0$



Cálculo de límites cuando $x \to x_0$

Cálculo de límites cuando $x \to x_0$

- Las funciones elementales potenciales, exponenciales, logarítmicas y circulares son continuas en todo su dominio de definición.

Cálculo de límites cuando $x \to x_0$

- Las funciones elementales potenciales, exponenciales, logarítmicas y circulares son continuas en todo su dominio de definición.
- Por ello, para calcular el límite de estas funciones se aplica la definición de función continua:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cálculo de límites cuando $x \to x_0$

- Las funciones elementales potenciales, exponenciales, logarítmicas y circulares son continuas en todo su dominio de definición.
- Por ello, para calcular el límite de estas funciones se aplica la definición de función continua:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Si al hacer la sustitución de x por x_0 se obtiene una expresión indeterminada es preciso aplicar procedimientos específicos para cada tipo de función.

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$$

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)}$$

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+5}$$

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+5} = \frac{5}{10}$$

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+5} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+5} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}$$

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+5} = \frac{5}{10}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1}$$

Cálculo de límites. Funciones polinómicas

Si al calcular un límite del tipo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

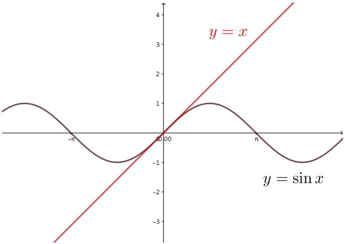
donde f y g son funciones polinómicas resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, la indeterminación se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{x}{x+5} = \frac{5}{10}$$

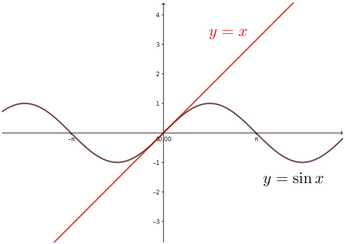
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty$$

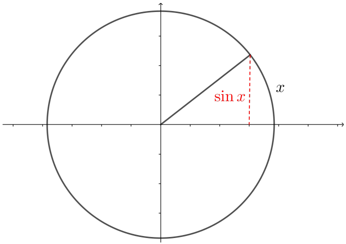
Cálculo de límites. Funciones circulares

Cálculo de límites. Funciones circulares

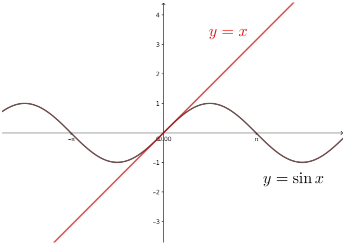


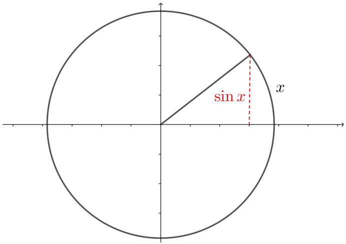
Cálculo de límites. Funciones circulares





Cálculo de límites. Funciones circulares

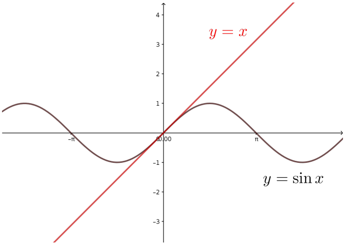


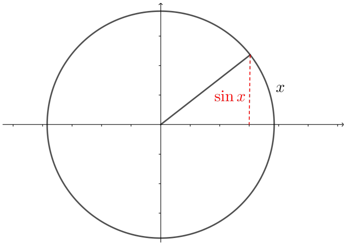


La función seno cumple que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Cálculo de límites. Funciones circulares





La función seno cumple que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esto significa que cuando el ángulo es muy pequeño $\operatorname{sen} x$ y x son equivalentes y escribimos:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

Cálculo de límites. Funciones circulares

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}
\end{aligned}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}
\end{aligned}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Hemos encontrado una nueva equivalencia cuando $x \to 0$:

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

En general, para calcular límites cuando x tiende a cero se pueden aplicar las siguientes equivalencias:

Cálculo de límites. Funciones circulares

En general, para calcular límites cuando x tiende a cero se pueden aplicar las siguientes equivalencias:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

En general, para calcular límites cuando x tiende a cero se pueden aplicar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \end{aligned}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

En general, para calcular límites cuando x tiende a cero se pueden aplicar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

En general, para calcular límites cuando x tiende a cero se pueden aplicar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \\ 1-\cos x &\sim \frac{1}{2}x^2 \\ \operatorname{arsen} x &\sim x \end{aligned}$$

Cálculo de límites. Funciones circulares

En general, para calcular límites cuando x tiende a cero se pueden aplicar las siguientes equivalencias:

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

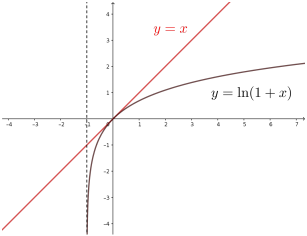
$$\operatorname{tg} x \sim x$$

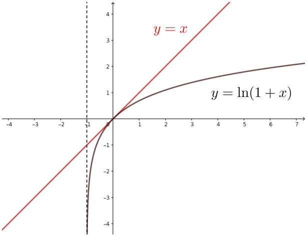
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\operatorname{arsen} x \sim x$$

$$\operatorname{artg} x \sim x$$

Funciones logarítmicas y exponenciales

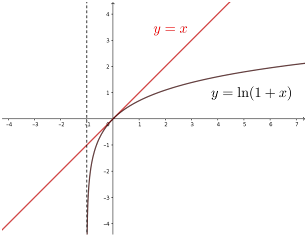




La función logaritmo cumple que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Funciones logarítmicas y exponenciales

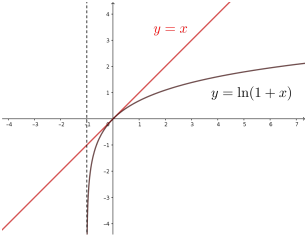


La función logaritmo cumple que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Esto significa que, cuando x tiende a cero:

$$\ln(1+x) \sim x \ ;$$



La función logaritmo cumple que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Esto significa que, cuando x tiende a cero:

$$\ln(1+x) \sim x \; ; \qquad e^x - 1 \sim x$$

Si cuando $x \to 0$:

$$\ln(1 + x) \sim x$$

Si cuando $x \to 0$:

$$\ln(1+x) \sim x$$

Llamando $u = 1 + x$, podemos decir que cuando $u \to 1$:

$$\ln u \sim u - 1$$

Si cuando $x \to 0$:

$$\ln(1+x) \sim x$$

Llamando $u = 1 + x$, podemos decir que cuando $u \to 1$:

$$\ln u \sim u - 1$$

Entonces, si $u \to 1$:

$$u^v$$

Si cuando $x \to 0$:

$$\ln(1+x) \sim x$$

Llamando $u = 1 + x$, podemos decir que cuando $u \to 1$:

$$\ln u \sim u - 1$$

Entonces, si $u \to 1$:

$$u^v = e^{v \ln u}$$

Si cuando $x \to 0$:

$$\ln(1+x) \sim x$$

Llamando $u = 1 + x$, podemos decir que cuando $u \to 1$:

$$\ln u \sim u - 1$$

Entonces, si $u \to 1$:

$$u^v = e^{v \ln u} \sim e^{(u-1)v}$$

Si cuando $x \to 0$:

$$\ln(1+x) \sim x$$

Llamando $u = 1 + x$, podemos decir que cuando $u \to 1$:

$$\ln u \sim u - 1$$

Entonces, si $u \to 1$:

$$u^v = e^{v \ln u} \sim e^{(u-1)v}$$

Esta aproximación es útil para calcular límites indeterminados del tipo 1^∞.

Ejemplos

Ejemplos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\, x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)\,2x}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\, x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)\, 2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)\, 2x}
\end{aligned}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right) 2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right) 2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1-x+1}{x-1}\, 2x}
\end{aligned}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1-x+1}{x-1}\,2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x}{x}}
\end{aligned}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1-x+1}{x-1}2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x}{x}} \\
&= e^4
\end{aligned}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención