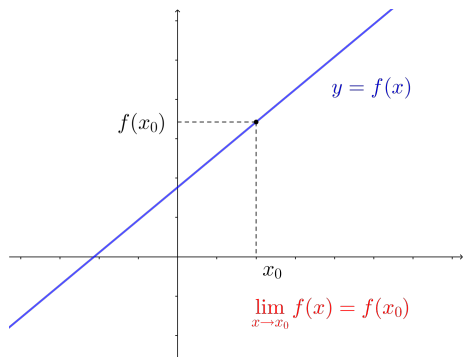


Límites y continuidad (5)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020



Definición

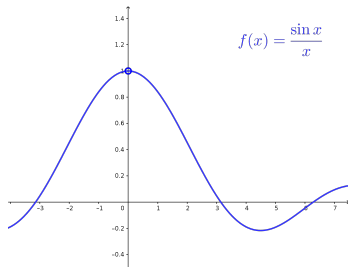
Una función $f(x)$ es **continua** en x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

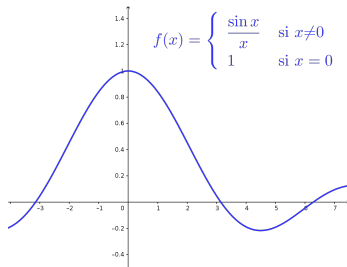
Hay cuatro caso de discontinuidad:

- **Evitable** Existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito.** Existen los límites laterales pero no coinciden.
- **Salto infinito.** El límite de la función es infinito.
- **Esencial** No existen los límites laterales ni son infinitos.

Discontinuidad evitable



$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



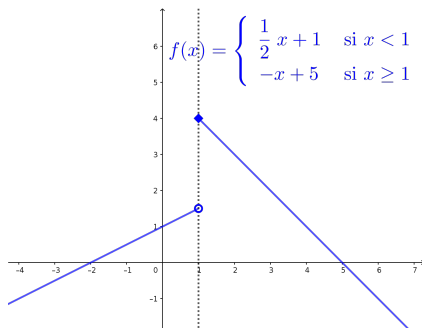
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Definición

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad **evitable** en $x = x_0$ si

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Discontinuidad de salto finito

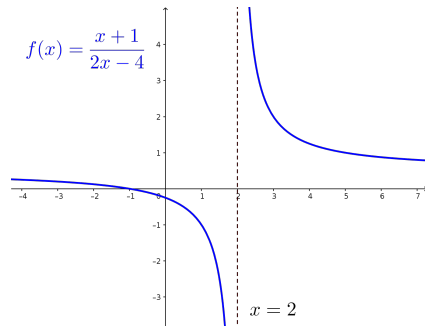


Definición

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo **salto finito** en $x = x_0$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Discontinuidad de salto infinito

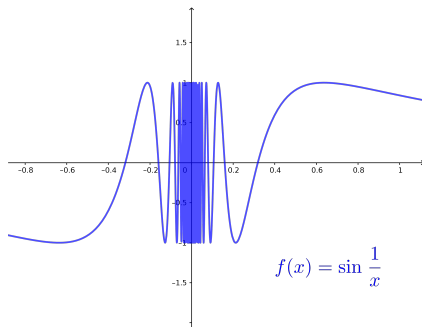


Definición

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo **salto infinito** en $x = x_0$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Discontinuidad esencial

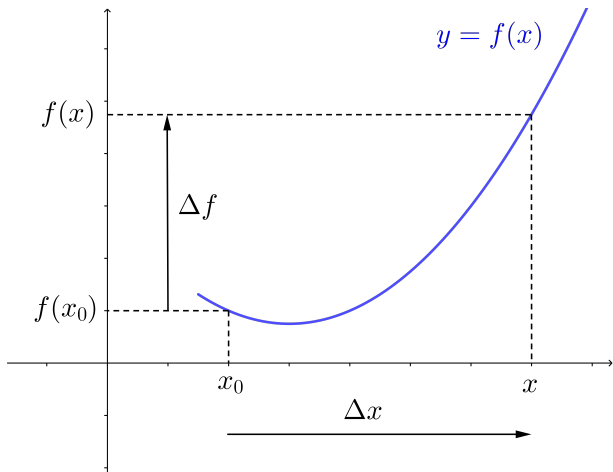


$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

Definición

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad **esencial** en $x = x_0$ si para ese valor, no existen los límites laterales ni son infinitos.

Nueva definición de continuidad



Nueva definición de continuidad

Teniendo en cuenta que $\Delta x = x - x_0$ y por consiguiente:

$$x \rightarrow x_0 \iff \Delta x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} f \text{ continua en } x_0 &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \\ &\implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \end{aligned}$$

Definición

Una función es continua si a variaciones infinitesimales de la variable independiente corresponden variaciones infinitesimales de la variable dependiente.

Ejemplo

Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

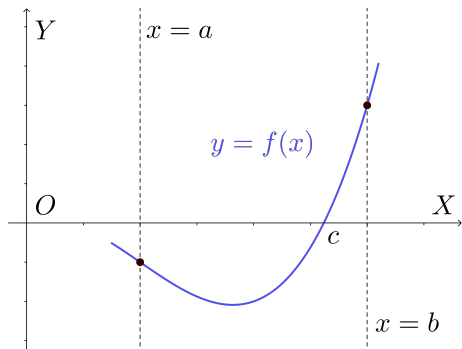
Los puntos de discontinuidad son $x = -3$ y $x = 3$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6-12}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x+3} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

En $x = -3$ hay un salto infinito y en $x = 3$ hay una discontinuidad evitable.



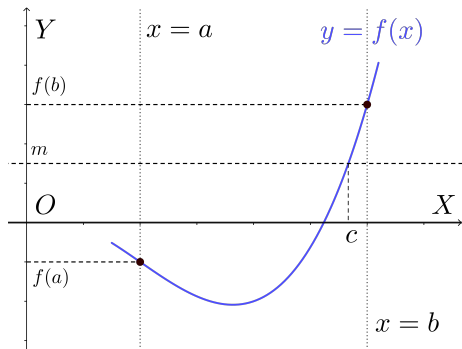
Teorema de Bolzano



Teorema (Bolzano)

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $\text{signo} f(a) \neq \text{signo} f(b)$, entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de Darboux

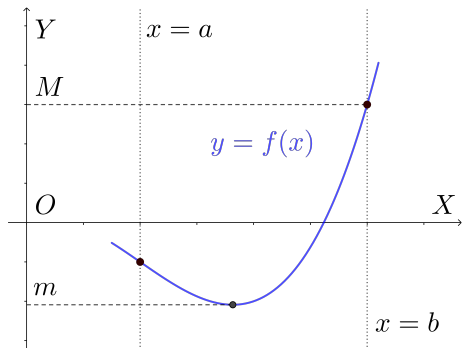


Teorema (Darboux)

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ toma en (a, b) todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

$$f \text{ continua en } [a, b], \quad m \in (f(a), f(b)) \quad \implies \quad \exists c \in (a, b) \mid f(c) = m$$

Teorema de Weierstrass



Teorema (Weierstrass)

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, los valores de $f(x)$ en $[a, b]$ tienen un valor máximo y un valor mínimo absolutos.

Demostrar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto y calcular la parte entera de la abscisa de ese punto.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ se hace cero para algún valor de x :

$$\begin{cases} f \text{ es continua en } [1, 2] \\ f(1) = \cos 1 - 1 + 1 = \cos 1 > 0 \\ f(2) = \cos 2 - 2 + 1 = \cos 2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$. La curva corta al eje OX en $(c, 0)$.

La parte entera de c es igual a 1.



Gracias por vuestra atención