Integrales (6)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Teorema del valor medio del cálculo integral

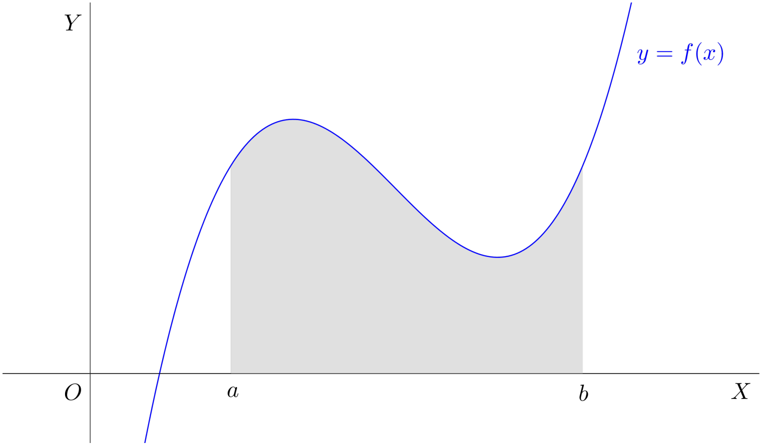
Teorema (del valor medio)

Si f es una función continua en a, b la integral de f en $[a, b]$ es igual a la longitud del intervalo por el valor de f en un punto intermedio:

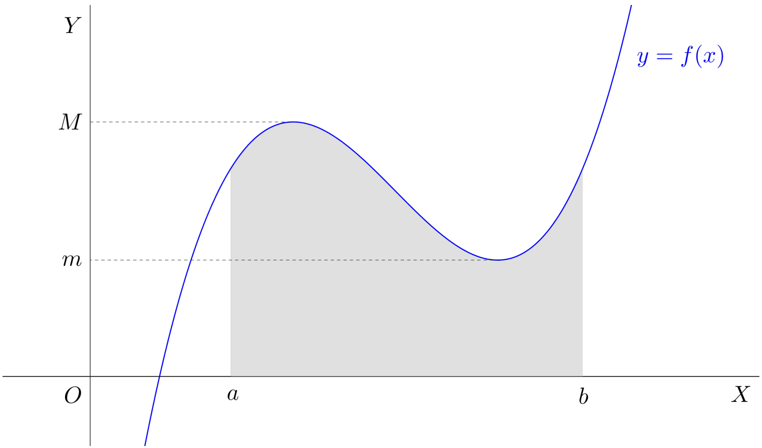
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi) \qquad \xi \in (a, b)$$

Teorema del valor medio del cálculo integral

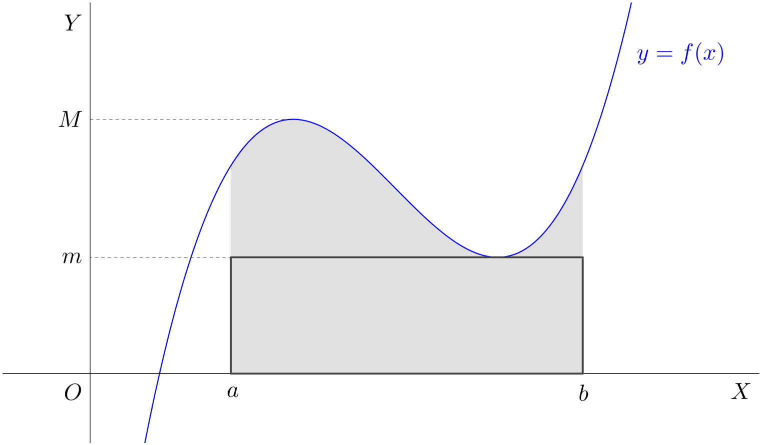
Teorema del valor medio del cálculo integral



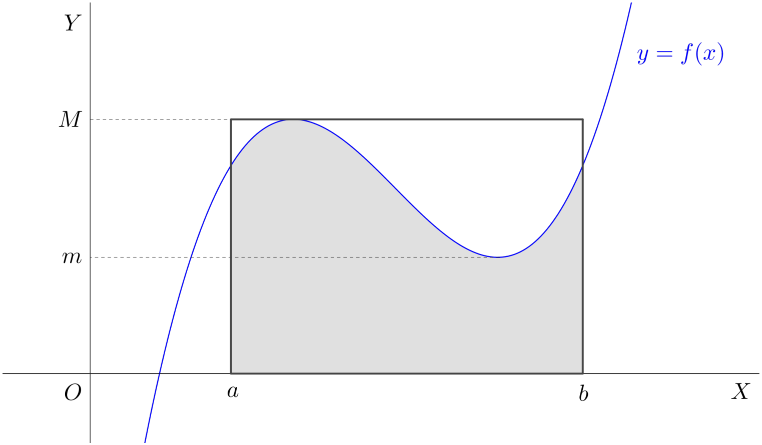
Teorema del valor medio del cálculo integral



Teorema del valor medio del cálculo integral



Teorema del valor medio del cálculo integral



Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza unos valores M y m máximo y mínimo absoluto. Entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Dividiendo por $b-a$;

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

Por el teorema de Bolzano, la función f toma todos los valores intermedios entre m y M. Por tanto, existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

y por consiguiente:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema (Teorema fundamental del cálculo integral)

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. La función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

dependiente del límite superior de la integral, es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$.

Regla de Barrow

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$ y F una primitiva cualquiera de f. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

Regla de Barrow: demostración

Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. Por el teorema fundamental:

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Para $x = a$:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) + C = 0 \Longrightarrow C = -F(a)$$

de modo que:

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

y sustituyendo $x = b$ resulta el teorema.

Ejemplos

Calculemos la integral $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$

Por partes. Llamemos:

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x &= \Big[-x \cos x \Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \Big[-x \cos x + \operatorname{sen} x \Big]_0^\pi \\ &= (-\pi \cos \pi + \operatorname{sen} \pi) - (-0 \cos 0 + \operatorname{sen} 0) \\ &= -\pi \cos \pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

Sea ahora la integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen} t & \mathrm{d}x &= \cos t\,\mathrm{d}t \\ x &= 0 & t &= 0 \\ x &= 1 & t &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 0\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención