Integrales (4)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Integración por partes

De la fórmula de la derivada del producto:

$$\mathrm{d}\,(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$

se deduce que

$$u\,\mathrm{d}v = \ \mathrm{d}\,(uv) - v\,\mathrm{d}u$$

e integrando

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Esta es la fórmula de integración por partes. Veremos seguidamente su aplicación en algunos ejemplos.

Integración por partes: ejemplos

Sea la integral:

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x$$

Llamemos:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo:

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

A veces es preciso aplicar varias veces la integración por partes. Sea la integral:

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integremos por partes con:

$$u = x^2 \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

Así:

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integramos de nuevo por partes con:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

y obtenemos:

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

Sea la integral $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

Integramos por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^x & \mathrm{d}u &= e^x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos x \, \mathrm{d}x & v &= \operatorname{sen} x \end{aligned} \qquad \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^x & \mathrm{d}u &= e^x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \right) = e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x \right) - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando, resulta:

$$2 \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x \right) \quad \Longrightarrow \quad \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x \right) + C$$

Cambio de variable

Se trata de sustituir en la integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

la variable x por una nueva variable t definida por $x = \varphi(t)$, con lo cual $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Con el cambio de variable la integral queda:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Se calcula esta integral con la variable t y finalmente se deshace el cambio con la sustitución $t = \varphi^{-1}(x)$.

Integración por cambio de variable: ejemplos

Sea la integral: $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Hagamos el cambio $\sqrt{x} = t$ o bien $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t = 2\left(t - \ln(1+t)\right) + C$$

Deshaciendo ahora el cambio, resulta finalmente:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

Sea ahora la integral $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Hagamos el cambio $x = \operatorname{sen} t,\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención