Integrales (3)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Integrales racionales

Son integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{donde } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ son funciones polinómicas.}$$

Podemos suponer que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

En caso contrario haciendo la división obtendríamos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right)\,\mathrm{d}x$$

con $R(x)$ de menor grado que $Q(x)$.

A continuación consideraremos el caso en que el denominador es un polinomio de primer o segundo grado.

Casos en que la integral es inmediata

- Denominador de primer grado:

$$\int \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{2}{5x-1}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{5}\ln|5x-1| + C$$

- Denominador de segundo grado con raíz doble y numerador constante:

$$\int \frac{2}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x+3} + C$$

$$\int \frac{4}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2x+1} + C$$

- Denominador de segundo grado con raíces complejas y numerador constante:

$$\int \frac{5}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{2^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 5\cdot\frac{1}{2}\operatorname{artg}\frac{x}{2}+C$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3^2+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{x+1}{3}+C$$

- Numerador igual a la derivada del denominador:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-7}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+3x-7\right|+C$$

$$\int \frac{x+2}{2x^2+8x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+8}{2x^2+8x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+8x-1\right|+C$$

Dos raíces reales

Sea la integral $\displaystyle\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$

Se descompone en fracciones simples:

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8} = \frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

De aquí resulta $A = 4,\ B = 1$.

Sustituyendo:

$$\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = 4\ln|x-4| + \ln|x+2| + C$$

Una raíz doble

Sea por ejemplo $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

y se obtiene $A = 2,\ B = -3$.

Entonces:

$$\int \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C$$

Raíces complejas

Sea la integral $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$.

Vamos a ver que esta integral es suma de una función logaritmo y otra arcotangente:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = c_1\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x + c_2\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$$

Las constantes c_1 y c_2 las obtenemos como en los casos anteriores $c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = -5$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - 5\int \frac{1}{3+(x+2)^2}\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{5}{\sqrt{3}}\ \mathrm{artg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención