Integrales (2)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Integrales inmediatas

Hemos visto que

$$F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Las integrales que pueden calcularse a partir de las reglas de derivación se llaman **integrales inmediatas**.

Por ejemplo:

$$\frac{\mathrm{d}\,\operatorname{tg} x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$$

Integrales inmediatas: funciones potenciales

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^{\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$\int x^{-2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$$

Integrales inmediatas: funciones exponenciales

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\, a^x + C$$

Integrales inmediatas: funciones circulares

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arsen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arsen} \frac{x}{k} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{artg} x + C$$

$$\int \frac{1}{k^2+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k} \operatorname{artg} \frac{x}{k} + C$$

Funciones compuestas

Por la regla de derivación de funciones compuestas:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(u)\,u'\,\mathrm{d}x = F(u) + C$$

La notación con diferenciales hace más clara la aplicación de esta regla puesto que:

$$\int f(u)\,u'\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

Por ejemplo:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

Integral de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$

De las fórmulas trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{cases}$$

se deduce:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención