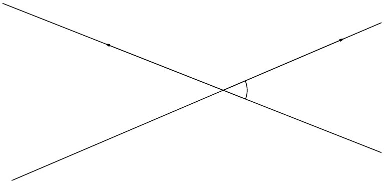
# Geometría (5)

Jesús García de Jalón de la Fuente

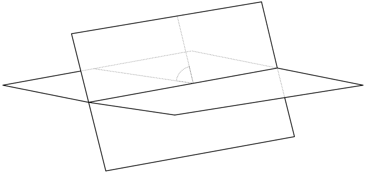
2022

### Ángulo de dos rectas



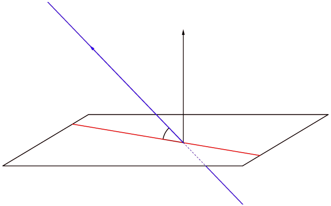
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

### Ángulo de dos planos



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

### Ángulo de recta y plano



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

# Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Calcular el **plano mediador** de los puntos $A(-1, 3, 2)$ y $B(2, -5, 3)$.

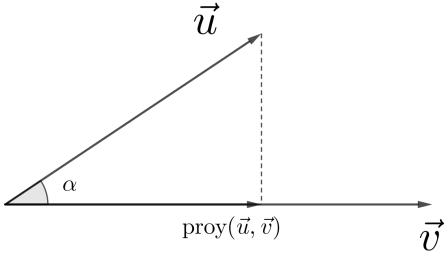
Sea $X(x, y, z)$ un punto del plano mediador:

$$\begin{aligned}
&D(X, A) = d(X, B)\\
&(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2 + (z-3)^2\\
&x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4\\
&\qquad = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 6z + 9\\
&2x + 1 - 6y + 9 - 4z + 4 = -4x + 4 + 10y + 25 - 6z + 9\\
&6x - 16y + 2z - 24 = 0\\
&3x - 8y + z - 12 = 0
\end{aligned}$$

Calcular la ecuación de la **superficie esférica** de centro $C(3, 2, -1)$ y radio $r = 5$.

Sea $X(x, y, z)$ un punto de la superficie esférica:

$$\begin{aligned}
&d(X, C) = 5\\
&(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25\\
&x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z - 11 = 0
\end{aligned}$$




La proyección de un vector $\vec{u}$ sobre un vector $\vec{v}$ es:

$$\text{proy}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

y el módulo de esa proyección es:

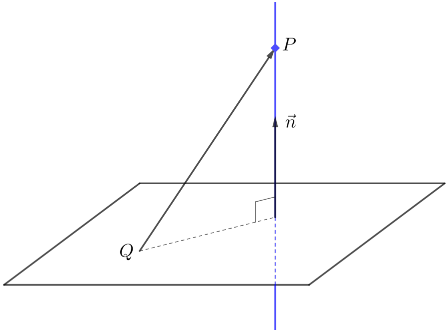
$$|\text{proy}(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

# Distancia de un punto a un plano

Sean el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Sea $Q(x_1, y_1, z_1)$ un punto del plano $\pi$:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$




La distancia del punto $P$ al plano $\pi$ es el módulo de la proyección del vector $\overrightarrow{QP}$ sobre el vector $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix}; \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d &= |\mathrm{proy}(\overrightarrow{QP}, \vec{n})| \\ &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

### Distancia del origen a un plano

La distancia desde el origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es:

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

### Distancia entre dos planos paralelos

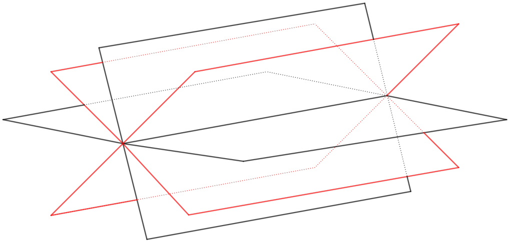
Sean los planos:

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi_2 : Ax + By + Cz + D' = 0$$

$$d = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

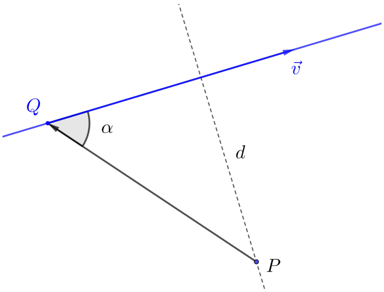
**Planos bisectores**

Sean los planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$



$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$
$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

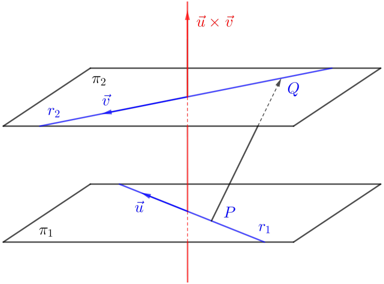
## Distancia de un punto a una recta




$$d = |PQ| \operatorname{sen}\alpha = |PQ| \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}|}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{v}|}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

## Distancia entre dos rectas




$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

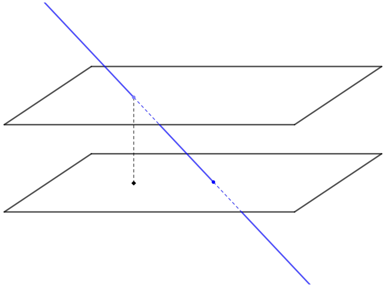
# Problema

Hallar los puntos de la recta

$$r: \ \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

cuya distancia al plano $\pi: \ 2x - y + 2z + 1 = 0$

es igual a 1.



# Problema

Hallar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$

es igual a 1.

**Solución:**

**Primer método:**

Sea $P(3+\lambda, 5+\lambda, -1-\lambda)$ un punto cualquiera de la recta:

$$d(P, \pi) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|2(3+\lambda) - (5+\lambda) + 2(-1-\lambda) + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad |-\lambda| = 3$$

De aquí resulta $\lambda = 3$ o $\lambda = -3$. Los puntos son $P_1(6, 8, -4)$ y $P_2(0, 2, 2)$.

**Segundo método:**

Los planos a distancia 1 del plano dado son $2x - y + 2z + D = 0$ donde:

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{4+1+4}} = 1 \; ; \qquad |D-1| = 3 \; ; \qquad D - 1 = \pm 3$$

Los planos son

$$2x - y + 2z + 4 = 0$$
$$2x - y + 2z - 2 = 0$$

Las intersecciones de estos planos con la recta dada son los puntos que buscamos:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 4 = 0 \\ x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z - 2 = 0 \\ x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $P_1(6, 8, -4)$ y $P_2(0, 2, 2)$.

♠♠♠♠

# Agradecimiento

Gracias por vuestra atención