Geometría (4). Tres problemas.

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

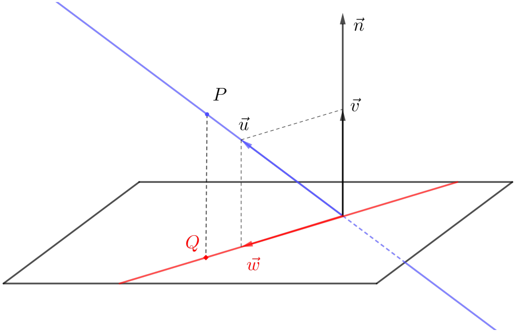
Proyección de una recta sobre un plano

Se consideran el plano $\pi : \ 2x + y - z = 0$ y la recta r dada por el punto $P(2,1,1)$ y el vector $\vec{u} = (-1,0,2)$:

(a) Calcular la proyección de P sobre π.

(b) Calcular el vector director de la proyección de la recta sobre el plano.

(c) Calcular las ecuaciones de esta proyección.



(a)
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \implies Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

(b)
$$\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n} = \frac{-1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)}{4 + 1 + 1}\,\vec{n} = -\frac{2}{3}\,\vec{n}$$

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + \lambda \\ y = \frac{1}{3} + 2\lambda \\ z = \frac{5}{3} + 4\lambda \end{cases}$$

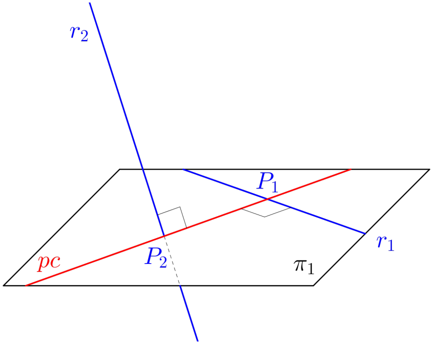
$$\begin{vmatrix} x - 2 & 2 & -1 \\ y - 1 & 1 & 0 \\ z - 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x - 3y + z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Dadas las rectas:

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-3}; \quad r_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

hallar la ecuación de la recta pc perpendicular común a ambas.



$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -5 - 3\lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = -4 + 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

$$P_1(1 + 2\lambda, 5 + 3\lambda, -5 - 3\lambda); \quad P_2(3 + \mu, -4 + 2\mu, 2 - \mu)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} \mu - 2\lambda + 2 \\ 2\mu - 3\lambda - 9 \\ -\mu + 3\lambda + 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2(\mu - 2\lambda + 2) + 3(2\mu - 3\lambda - 9) - 3(-\mu + 3\lambda + 7) = 0 \\ 1(\mu - 2\lambda + 2) + 2(2\mu - 3\lambda - 9) - 1(-\mu + 3\lambda + 7) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu - 2\lambda - 4 = 0 \\ 6\mu - 11\lambda - 23 = 0 \end{cases} \implies \lambda = -1 \; ; \quad \mu = 2$$

$$P_1(-1, 2, -2) \qquad P_2(5, 0, 0)$$

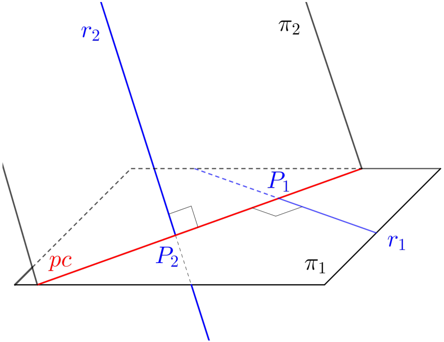
$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

Perpendicular común a dos rectas

Dadas las rectas:

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-3}; \quad r_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

hallar la ecuación de la recta pc perpendicular común a ambas.



$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -5 - 3\lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = -4 + 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 1 \\ \vec{j} & 3 & 2 \\ \vec{k} & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene a r_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-5 & 3 & -1 \\ z+5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \, ; \quad y + z = 0$$

El plano que contiene a r_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 3 \\ y+4 & 2 & -1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \, ; \quad x - 4y - 7z - 5 = 0$$

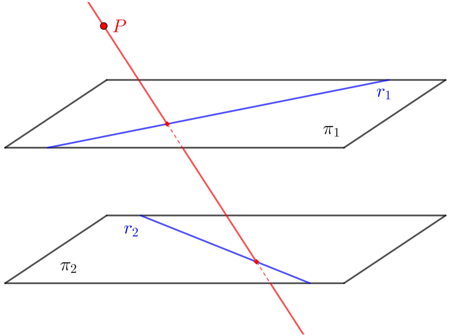
La perpendicular común es:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 4y - 7z - 5 = 0 \end{cases}$$

Recta por un punto que corta a otras dos

Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(2,0,-1)$ corta a las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}; \qquad r_2 : \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$$



$$r_1 : P_1(2,2,-1), \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 : P_2(-1,-3,0), \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta que buscamos está dada por:

$$r : P(2,0,-1), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Si r corta a r_1 y r_2:

$$[\vec{v}, \vec{v_1}, \overrightarrow{PP_1}] = 0, \qquad \begin{vmatrix} v_x & 2 & 0 \\ v_y & -1 & 2 \\ v_z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$[\vec{v}, \vec{v_2}, \overrightarrow{PP_2}] = 0, \qquad \begin{vmatrix} v_x & -3 & -3 \\ v_y & 3 & -3 \\ v_z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

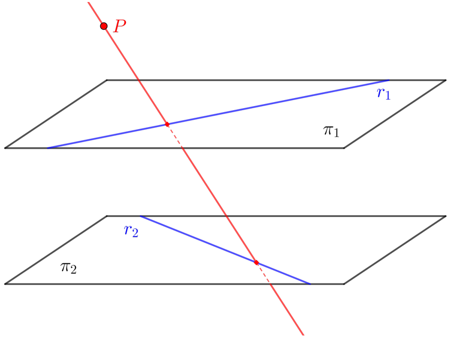
$$\begin{cases} -v_x + 0v_y + 4v_z = 0 \\ v_x + 0v_y + 3v_z = 0 \end{cases} \implies \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La recta es $r : \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$

Recta por un punto que corta a otras dos

Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(2,0,-1)$ corta a las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}; \qquad r_2 : \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$$



$$r_1 : P_1(2,2,-1), \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 : P_2(-1,-3,0), \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Plano que contiene a P y a r_1:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ y & -1 & 2 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies x - 2z + 4 = 0$$

Plano que contiene a P y a r_2:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 & -3 \\ y & 3 & -3 \\ z+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies x + 3z + 1 = 0$$

La recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x - 2z + 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención