Geometría (3). Posiciones relativas de rectas y planos

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

Posición relativa de dos planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ A_1x + B_1y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_2 &: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Consideremos las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

- rango $M =$ rango $M^* = 2$: sistema compatible indeterminado. Los planos se cortan en una recta.
- rango $M = 1$ rango $M^* = 2$: sistema incompatible. Los planos son paralelos.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

- rango $M =$ rango $M^* = 1$: sistema compatible indeterminado. Los planos son coincidentes.

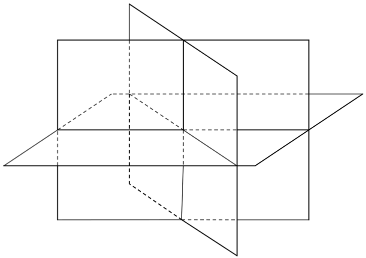
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Posición relativa de tres planos

$$\pi_1 : \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\pi_3 : \; A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$



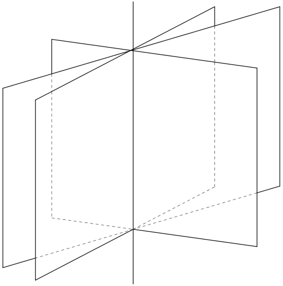
$$\text{rango } M = 3$$
$$\text{rango } M^* = 3$$

Posición relativa de tres planos

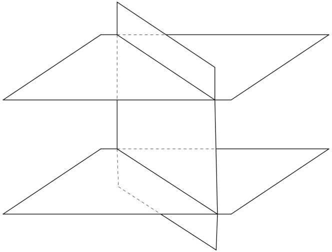
$$\pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\pi_3 : \ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

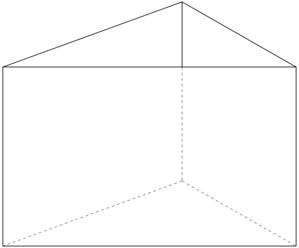
$$M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$



rango $M = 2$
rango $M^* = 2$



rango $M = 2$
rango $M^* = 3$



rango $M = 2$
rango $M^* = 3$

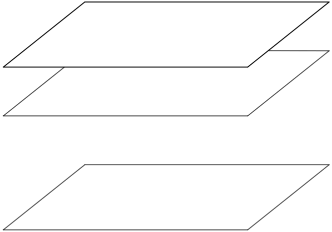
Posición relativa de tres planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 &: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 &: \; A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

rango $M = 1$
rango $M^* = 1$



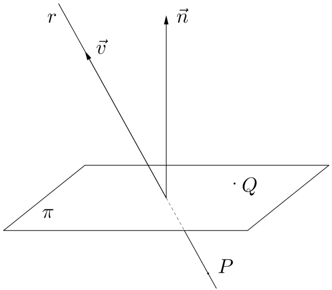
rango $M = 1$
rango $M^* = 2$

Posición relativa de una recta y un plano

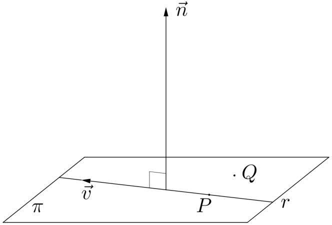
$$r:\ P,\ \vec{v}$$
$$\pi:\ Q,\ \vec{n}$$

$$\pi:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$r:\begin{cases}A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{cases}$$

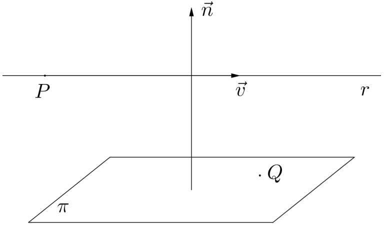
$$M^*=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$$



$$\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$$



$$\vec{v}\cdot\vec{n}=0$$
$$P\in\pi$$

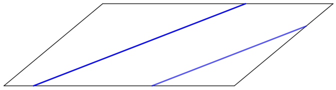


$$\vec{v}\cdot\vec{n}=0$$
$$P\notin\pi$$

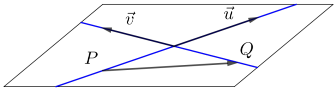
Posición relativa de dos rectas

$r: \; P, \; \vec{u}$

$s: \; Q, \; \vec{v}$

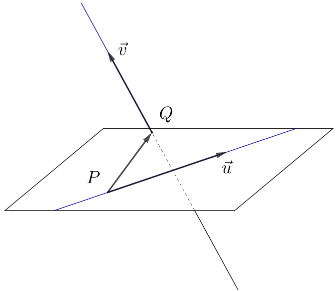


$\vec{u} \parallel \vec{v}$



$\vec{u} \nparallel \vec{v}$

$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = 0$



$\vec{u} \nparallel \vec{v}$

$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$

Calcular la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x - 2y + z - 3 = 0 \; ; \qquad \pi_2 : 2x - y - 3z + 1 = 0 \; ; \qquad \pi_3 : x + 4y - 9z + 11 = 0$$

Solución:

Formamos el sistema con las tres ecuaciones. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -9 & 11 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & 14 \end{pmatrix} = 2$$

Como el rango de la matriz de coeficientes también es igual a 2, el sistema es compatible indeterminado.

Los tres planos se cortan en una recta.

♠♠♠♠

Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \, ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.

El vector director de la recta es

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En el primer caso, el vector normal al plano es:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{u} \cdot \vec{n_1} \neq 0$$

El plano y la recta se cortan en un punto.

En el segundo caso:

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \qquad \vec{u} \cdot \vec{n_2} = 0$$

O bien son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Como el punto $A(2, 1, 4)$ está en la recta pero no está en el plano, son paralelos.

♠♠♠♠

Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

se pide estudiar su posición relativa.

Solución:

Las dos rectas no son paralelas.

Sea $P(2,1,0)$ un punto de la recta r y $Q(-1,3,5)$ un punto de la recta s.

Para distinguir si se cortan o se cruzan formamos el producto mixto:

$$[\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}]= \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

♠♠♠♠

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención