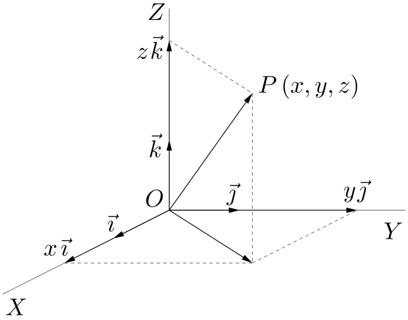
Geometría (2)

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022



Un sistema de referencia en el espacio está formado por un punto O llamado **origen de coordenadas** y una **base del espacio vectorial** $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

A cada punto P se le asocia un vector llamado **vector de posición** del punto P y es el vector $\overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto.

Las coordenadas del punto P son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$.

Las rectas que pasan por el origen y tienen la dirección de los vectores de la base se llaman **ejes de coordenadas**.

- Vector entre dos puntos:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

- Punto medio de un segmento:

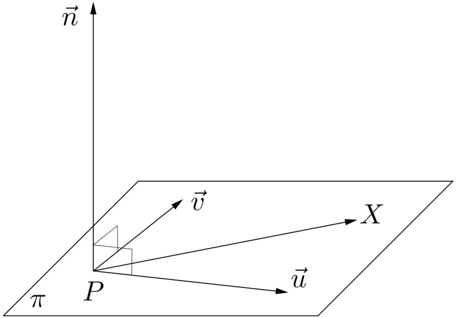
$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} \qquad\qquad M = \frac{A+B}{2}$$

- Puntos alineados:

$$A, B, P \text{ alineados} \iff \overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} \iff P = (1-\alpha)A + \alpha B$$

- Puntos coplanarios:

$$A, B, C, P \text{ coplanarios} \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} \text{ dependientes} \iff [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = 0$$
$$\iff P = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$



Ecuación vectorial del plano

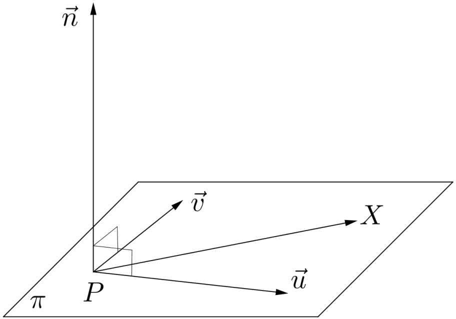
$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_0 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases}$$



Ecuación del plano como determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_x & v_x \\ y - y_0 & u_y & v_y \\ z - z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación general o implícita:

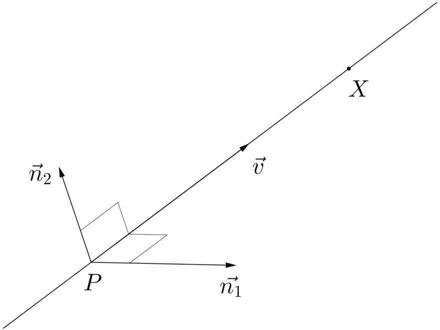
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ecuación normal:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



Ecuación vectorial de la recta

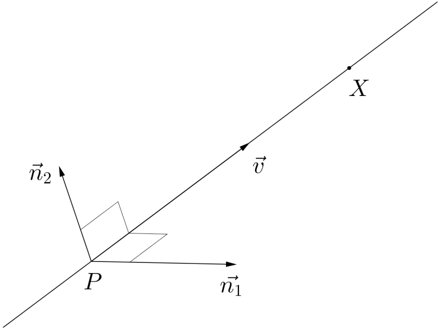
$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}$$



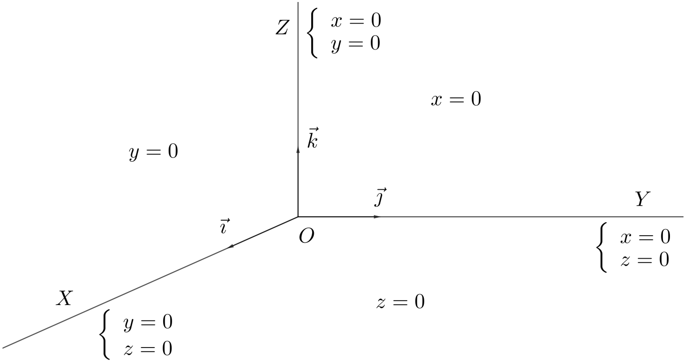
Ecuación de la recta en forma continua

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Ejes de coordenadas. Planos coordenados



Haz de planos

Sea la recta:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

El conjunto de planos que contiene a esta recta se puede expresar como:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Sea ahora el plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Los planos paralelos a este tienen por ecuación:

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} 3x - y + 5z - 2 = 0 \\ x + 2y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos un punto de la recta. Por ejemplo para $z = 0$:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $P(1, 1, 0)$.

El vector director de la recta es perpendicular a los vectores normales a los planos.

Podemos tomar como vector director el producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 3 & 1 \\ \vec{\jmath} & -1 & 2 \\ \vec{k} & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 1 + 11\lambda \\ z = 7\lambda \end{cases}$$

♠♠♠♠

Calcular la ecuación del plano que contiene al punto $P(1,2,-1)$ y a la recta:

$$r:\begin{cases}3x-y+5z-2=0\\ x+2y-2z-3=0\end{cases}$$

Solución:

Según hemos visto en el ejercicio anterior, un punto y un vector director de r son:

$$Q(1,1,0),\qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}-8\\11\\7\end{pmatrix}$$

El plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & -8 & 0\\ y-2 & 11 & -1\\ z+1 & 7 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$9x+4y+4z-13=0$$

El haz de planos de r es:

$$\lambda(3x-y+5z-2)+\mu(x+2y-2z-3)=0$$

Si el plano debe pasar por $P(1,2,-1)$:

$$\lambda(3-2-5-2)+\mu(1+4+2-3)=0$$

$$-3\lambda+2\mu=0\ ;\qquad \lambda=2,\quad \mu=3$$

El plano que buscamos es:

$$2(3x-y+5z-2)+3(x+2y-2z-3)=0$$

$$9x+4y+4z-13=0$$ ♠♠♠♠

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención