Geometría (1). Vectores.

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

Geometría del espacio

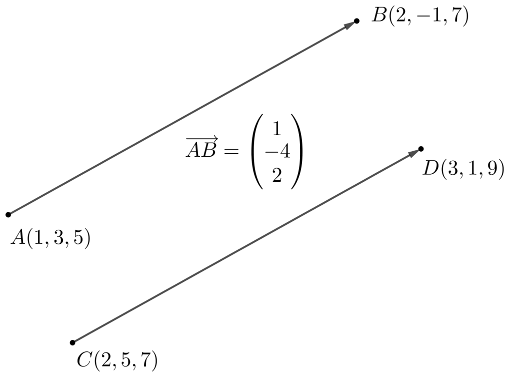
El modelo matemático para representar el espacio está formado por:

- **Puntos**. Un punto está formado por 3 números. Por ejemplo $A(1,3,5)$ o $B(2,-1,7)$.
- **Vectores**. Un vector también está formado por 3 números:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Una **correspondencia** entre puntos y vectores:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,3,5) \\ B(2,-1,7) \end{array}\right\} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Operaciones con vectores

Sean los vectores:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

La suma y el producto por números se definen por:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$$

$$\alpha\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_x \\ \alpha u_y \\ \alpha u_z \end{pmatrix}$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (son paralelos) si:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = \alpha\vec{v}$$

Es decir, los vectores tienen la misma dirección si son linealmente dependientes. Si $\alpha > 0$, los dos vectores tienen además el mismo sentido. Si $\alpha < 0$, los dos vectores son de sentido contrario.

Cualquier vector $\vec{u}$ puede escribirse como:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = u_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_x \vec{\imath} + u_y \vec{\jmath} + u_z \vec{k}$$

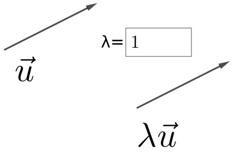
donde

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;; \qquad \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;; \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

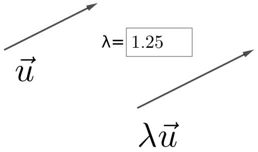
El conjunto de vectores $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ forman una **base** del espacio vectorial y los números u_x, u_y, u_z son las **coordenadas** del vector $\vec{u}$ en esa base.

Interpretación gráfica de las operaciones

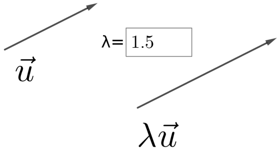
Interpretación gráfica de las operaciones



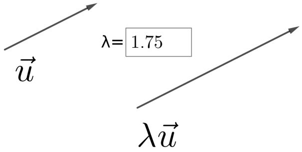
Interpretación gráfica de las operaciones



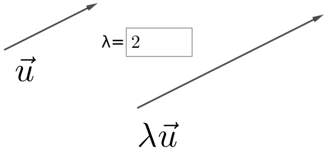
Interpretación gráfica de las operaciones



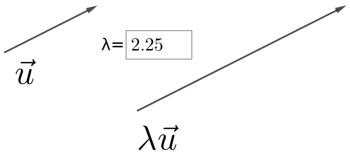
Interpretación gráfica de las operaciones



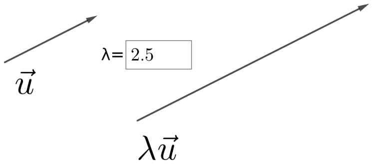
Interpretación gráfica de las operaciones



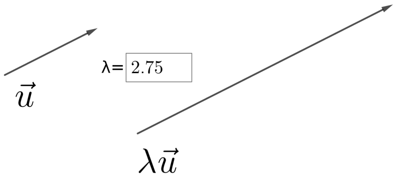
Interpretación gráfica de las operaciones

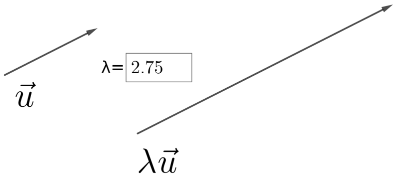


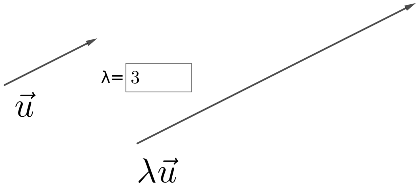
Interpretación gráfica de las operaciones



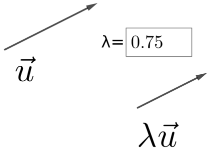
Interpretación gráfica de las operaciones



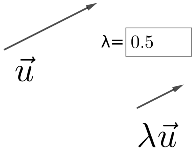

λ= 2.75
$\vec{u}$
$\lambda\vec{u}$


λ= 3
$\vec{u}$
$\lambda\vec{u}$

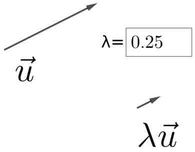
Interpretación gráfica de las operaciones



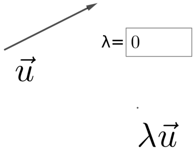
Interpretación gráfica de las operaciones



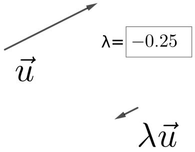
Interpretación gráfica de las operaciones



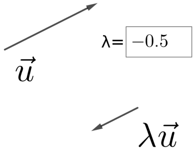
Interpretación gráfica de las operaciones



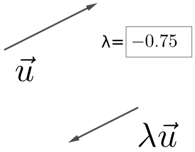
Interpretación gráfica de las operaciones



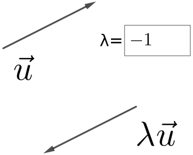
Interpretación gráfica de las operaciones



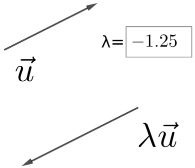
Interpretación gráfica de las operaciones



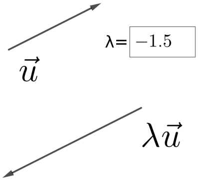
Interpretación gráfica de las operaciones



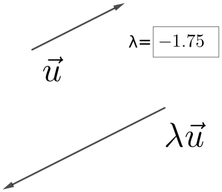
Interpretación gráfica de las operaciones



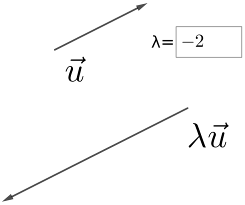
Interpretación gráfica de las operaciones



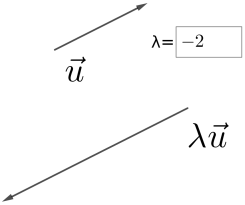
Interpretación gráfica de las operaciones

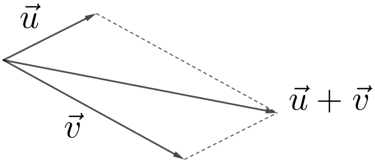


Interpretación gráfica de las operaciones

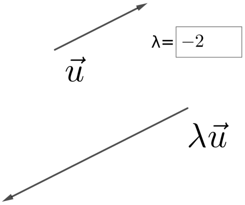


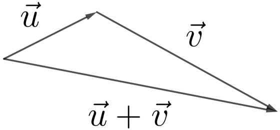
Interpretación gráfica de las operaciones

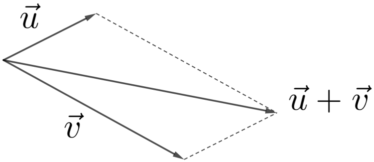


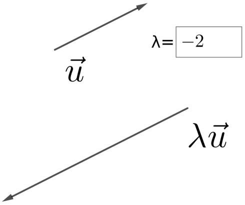


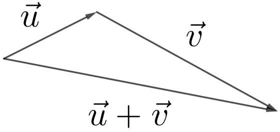
Interpretación gráfica de las operaciones

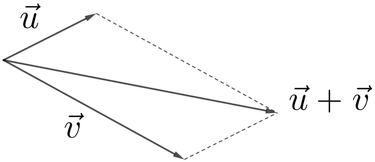


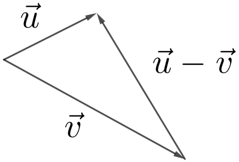





$\vec{u}$
λ= −2
$\lambda\vec{u}$


$\vec{u}$
$\vec{v}$
$\vec{u} + \vec{v}$


$\vec{u}$
$\vec{v}$
$\vec{u} + \vec{v}$


$\vec{u}$
$\vec{u} - \vec{v}$
$\vec{v}$

Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **es un número** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ que cumple:

- $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0\,;\qquad \vec{u}\cdot\vec{u}=0 \implies \vec{u}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

El **módulo** de un vector $\vec{u}$ es la raíz cuadrada positiva de $\vec{u}\cdot\vec{u}$:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Un vector es **unitario** si tiene módulo 1.

Se llama **base ortonormal** la formada por 3 vectores ortogonales y unitarios.
La base $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ es ortonormal.

Producto escalar en una base ortonormal

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}\ ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k})\cdot(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}) \\ &= u_xv_x(\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}) + u_yv_y(\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}) + u_zv_z(\vec{k}\cdot\vec{k}) \\ &= u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z \end{aligned}$$

El ángulo de dos vectores se define por:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\ ; \qquad \cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\,\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

Proyección de un vector en una dirección

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = |\text{proy}(\vec{u}, \vec{v})||\vec{v}|$$

Y si $\vec{n}$ es unitario:

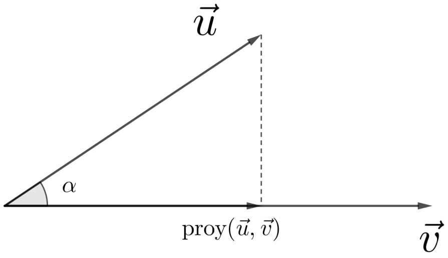
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = |\text{proy}(\vec{u}, \vec{n})||\vec{n}| = |\text{proy}(\vec{u}, \vec{n})|$$

De forma que:

$$\text{proy}(\vec{u}, \vec{n}) = (\vec{u} \cdot \vec{n})\, \vec{n}\,; \qquad |\text{proy}(\vec{u}, \vec{n})| = |\vec{u} \cdot \vec{n}|$$

Si el vector $\vec{v}$ no es unitario, lo es $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$:

$$\text{proy}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\, \vec{v}\,; \qquad |\text{proy}(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



En las dos primeras igualdades hemos supuesto que el ángulo α es agudo.
Si fuese obtuso habría que añadir un signo $-$.
Las siguientes igualdades son ciertas aunque el ángulo sea obtuso.

Sean los vectores:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a descomponer $\vec{u}$ en suma de un vector paralelo a $\vec{v}$ y uno perpendicular a $\vec{v}$.

Según lo visto:

$$\vec{u}_{\parallel} = \frac{2+5+1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y la componente perpendicular:

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Sean los vectores:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \; ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

El producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{cases} u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \\ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \end{cases}$$

$$w_x = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \; ; \qquad w_y = \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} \; ; \qquad w_z = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

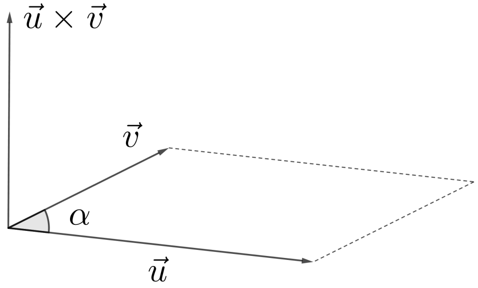
Se puede recordar así:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & u_x & v_x \\ \vec{\jmath} & u_y & v_y \\ \vec{k} & u_z & v_z \end{vmatrix}$$

Producto vectorial: propiedades

Propiedades:

- $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$
- $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \quad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \quad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \parallel \vec{v}$



Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & -1 \\ \vec{\jmath} & -1 & 0 \\ \vec{k} & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Producto mixto

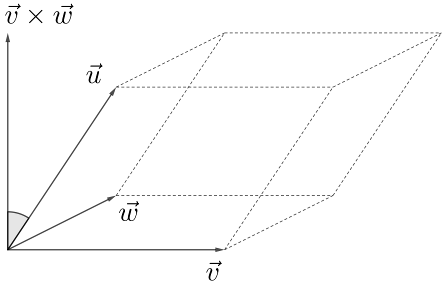
Sean los vectores:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

El producto mixto de estos tres vectores es:

$$\begin{aligned}
[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\
&= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{\imath} & v_x & w_x \\ \vec{\jmath} & v_y & w_y \\ \vec{k} & v_z & w_z \end{vmatrix} \\
&= u_x \begin{vmatrix} v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} v_z & w_z \\ v_x & w_x \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Propiedades del producto mixto



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

- El producto mixto es cero si y solo si los tres vectores son dependientes.
- Si se intercambian dos de los vectores, el producto mixto no cambia en valor absoluto pero sí de signo.
- El producto mixto es igual al volumen con signo del paralelepípedo que tiene como aristas los tres vectores.

Gracias por vuestra atención