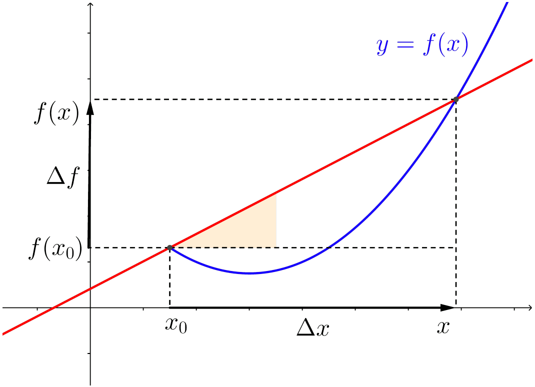
Derivadas (2)

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Derivada en un punto



La derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 se define como:

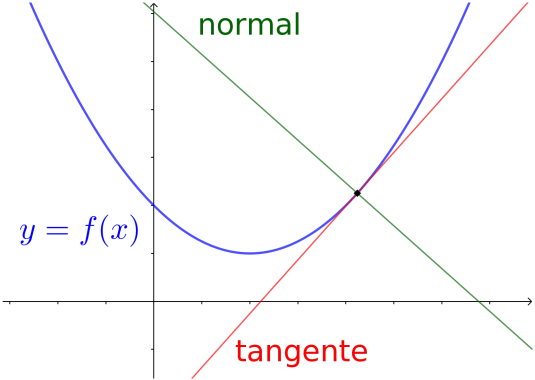
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si existe la derivada $f'(x_0)$ la función es continua en x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Derivada y tangente



La derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0.

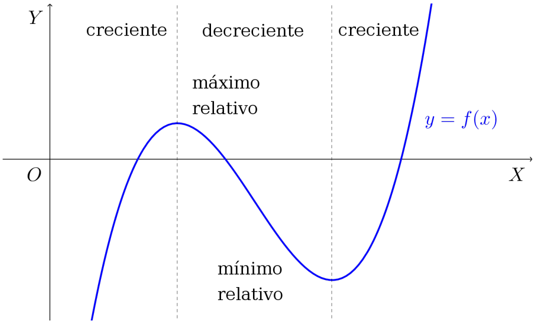
La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

y la ecuación de la normal:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Monotonía: funciones crecientes y decrecientes



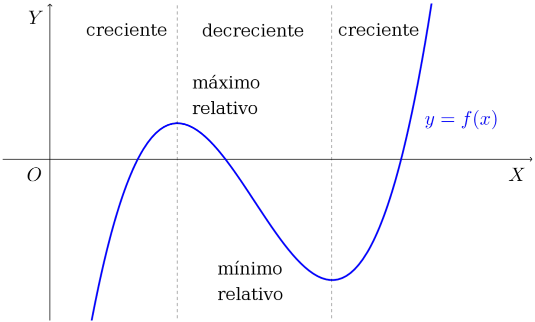
Una función f es creciente en un intervalo, si para cualesquiera x_1, x_2 del intervalo:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una función f es decreciente en un intervalo, si para cualesquiera x_1, x_2 del intervalo:

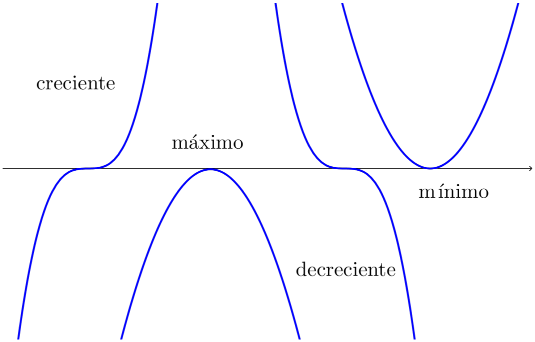
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Monotonía y derivada



- $f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ decreciente en x_0
- Si $f'(x_0) = 0$ la función puede ser creciente, decreciente o tener un máximo o mínimo relativo.

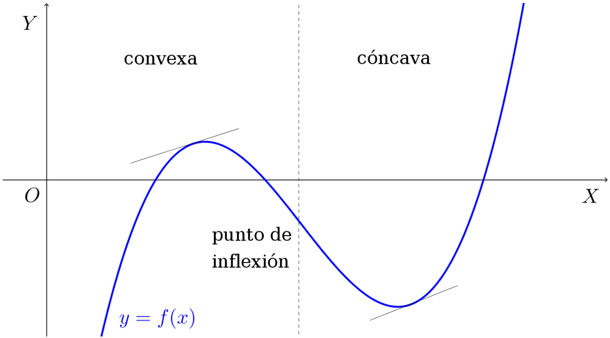
Puntos de tangente horizontal



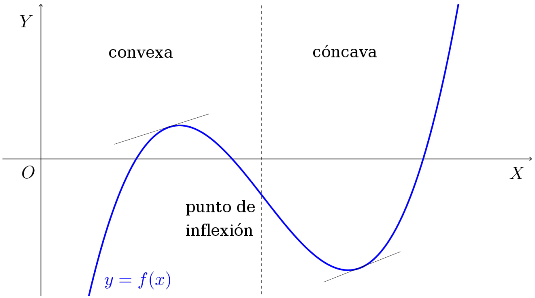
Si $f'(x_0) = 0$ pueden darse estos casos:

- Si la función es creciente (decreciente) a la izquierda y la derecha de x_0 también es creciente (decreciente) en x_0.
- Si la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha, la función tiene un máximo en x_0.
- Si la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha. la función tiene un mínimo en x_0.

Curvatura: funciones cóncavas y convexas

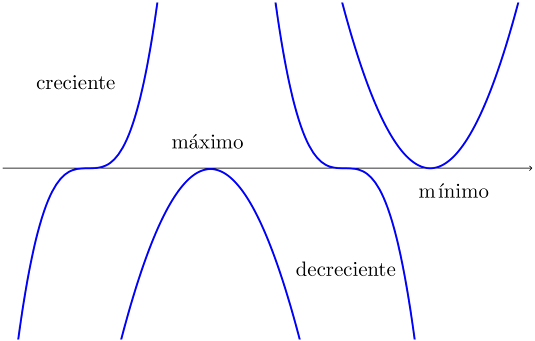


Curvatura y derivada segunda



- $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ cóncava en x_0
- $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ convexa en x_0
- Si $f''(x_0) = 0$ pueden darse estos casos:
    - Si la función es cóncava (convexa) a la izquierda y la derecha de x_0 también es cóncava (convexa) en x_0.
    - Si la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava, la función tiene un punto de inflexión en x_0.
    - Si $f'''(x_0) \neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en x.

Máximos y mínimos y derivada segunda



Puesto que en un máximo la función es convexa y en un mínimo es cóncava, tenemos el siguiente criterio para distinguir máximos y mínimos relativos:

Sea $f'(x_0) = 0$:

- Si $f''(x_0) > 0$ la función tiene un mínimo en x_0
- Si $f''(x_0) < 0$ la función tiene un máximo en x_0

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención