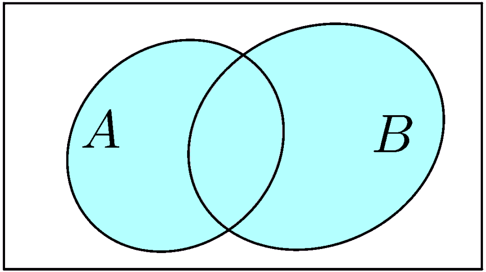
Combinatoria (2)

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

Regla de la suma



El número de elementos de $A \cup B$ es igual al número de elementos de A más el número de elementos de B menos el número de elementos de $A \cap B$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Regla del producto

Dados dos conjuntos A y B se llama **producto cartesiano** de los dos conjuntos $A \times B$ el conjunto formado por los pares (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$ el producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Si los dos conjuntos son iguales:

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

La regla del producto se puede enunciar de forma general como:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Sea un conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ de m elementos distintos.

Se llaman **permutaciones** de estos m elementos a las distintas maneras de **ordenar** los m elementos. El número de permutaciones es:

$$P_m = m! = m(m-1)(m-2)\dots 1$$

Se llaman **variaciones** de los m elementos tomados de n en n a las distintas manera de **elegir y ordenar** n de los elementos del conjunto. El número de variaciones es:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) = (m)_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Se llaman **combinaciones** de los m elementos tomados de n en n a las distintas manera de **elegir** n de los elementos del conjunto. El número de combinaciones es:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Supongamos que tenemos un conjunto de tres elementos $A = \{a, b, c\}$ y formamos listas ordenadas de 5 elementos del conjunto en las que los elementos pueden repetirse:

$aaaaa$	$aaaab$	$aaaac$	$aaaba$	$aaabb$	$aaabc$	$aaaca$	$aaacb$	$aaacc$	$aabaa$	$aabab$	$aabac$	$aabba$	$aabbb$	$aabbc$
$aabca$	$aabcb$	$aabcc$	$aacaa$	$aacab$	$aacac$	$aacba$	$aacbb$	$aacbc$	$aacca$	$aaccb$	$aaccc$	$abaaa$	$abaab$	$abaac$
$ababa$	$ababb$	$ababc$	$abaca$	$abacb$	$abacc$	$abbaa$	$abbab$	$abbac$	$abbba$	$abbbb$	$abbbc$	$abbca$	$abbcb$	$abbcc$
$abcaa$	$abcab$	$abcac$	$abcba$	$abcbb$	$abcbc$	$abcca$	$abccb$	$abccc$	$acaaa$	$acaab$	$acaac$	$acaba$	$acabb$	$acabc$
$acaca$	$acacb$	$acacc$	$acbaa$	$acbab$	$acbac$	$acbba$	$acbbb$	$acbbc$	$acbca$	$acbcb$	$acbcc$	$accaa$	$accab$	$accac$
$accba$	$accbb$	$accbc$	$accca$	$acccb$	$acccc$	$baaaa$	$baaab$	$baaac$	$baaba$	$baabb$	$baabc$	$baaca$	$baacb$	$baacc$
$babaa$	$babab$	$babac$	$babba$	$babbb$	$babbc$	$babca$	$babcb$	$babcc$	$bacaa$	$bacab$	$bacac$	$bacba$	$bacbb$	$bacbc$
$bacca$	$baccb$	$baccc$	$bbaaa$	$bbaab$	$bbaac$	$bbaba$	$bbabb$	$bbabc$	$bbaca$	$bbacb$	$bbacc$	$bbbaa$	$bbbab$	$bbbac$
$bbbba$	$bbbbb$	$bbbbc$	$bbbca$	$bbbcb$	$bbbcc$	$bbcaa$	$bbcab$	$bbcac$	$bbcba$	$bbcbb$	$bbcbc$	$bbcca$	$bbccb$	$bbccc$
$bcaaa$	$bcaab$	$bcaac$	$bcaba$	$bcabb$	$bcabc$	$bcaca$	$bcacb$	$bcacc$	$bcbaa$	$bcbab$	$bcbac$	$bcbba$	$bcbbb$	$bcbbc$
$bcbca$	$bcbcb$	$bcbcc$	$bccaa$	$bccab$	$bccac$	$bccba$	$bccbb$	$bccbc$	$bccca$	$bcccb$	$bcccc$	$caaaa$	$caaab$	$caaac$
$caaba$	$caabb$	$caabc$	$caaca$	$caacb$	$caacc$	$cabaa$	$cabab$	$cabac$	$cabba$	$cabbb$	$cabbc$	$cabca$	$cabcb$	$cabcc$
$cacaa$	$cacab$	$cacac$	$cacba$	$cacbb$	$cacbc$	$cacca$	$caccb$	$caccc$	$cbaaa$	$cbaab$	$cbaac$	$cbaba$	$cbabb$	$cbabc$
$cbaca$	$cbacb$	$cbacc$	$cbbaa$	$cbbab$	$cbbac$	$cbbba$	$cbbbb$	$cbbbc$	$cbbca$	$cbbcb$	$cbbcc$	$cbcaa$	$cbcab$	$cbcac$
$cbcba$	$cbcbb$	$cbcbc$	$cbcca$	$cbccb$	$cbccc$	$ccaaa$	$ccaab$	$ccaac$	$ccaba$	$ccabb$	$ccabc$	$ccaca$	$ccacb$	$ccacc$
$ccbaa$	$ccbab$	$ccbac$	$ccbba$	$ccbbb$	$ccbbc$	$ccbca$	$ccbcb$	$ccbcc$	$cccaa$	$cccab$	$cccac$	$cccba$	$cccbb$	$cccbc$
$cccca$	$ccccb$	$ccccc$												

El número de listas puede obtenerse por la regla del producto:

$$VR_{3,5} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

Variaciones con repetición

Definición

Dado un conjunto con m elementos, se llaman **variaciones con repetición** de estos m elementos tomados de n en n a las listas ordenadas de n elementos que pueden formarse con ellos en las que los elementos del conjunto pueden aparecer repetidos.

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Permutaciones con repetición

Definición

Dada una lista de n elementos en la que estos pueden aparecer repetidos, se llaman **permutaciones con repetición** a las distintas maneras de ordenar los elementos de la lista.
El número de permutaciones con repetición se representa por:

$$PR_{n,r_1,r_2,\dots} = \binom{n}{r_1, r_2, \dots}$$

donde n es el número de elementos de la lista y r_1, r_2, ... el número de veces que aparecen repetidos los distintos elementos.

Por ejemplo, los elementos de la lista $[a, a, b, b, c]$ se pueden ordenar de 30 maneras:

$$\begin{array}{cccccc}
aabbc & aabcb & aacbb & ababc & abacb & abbac \\
abbca & abcab & abcba & acabb & acbab & acbba \\
baabc & baacb & babac & babca & bacab & bacba \\
bbaac & bbaca & bbcaa & bcaab & bcaba & bcbaa \\
caabb & cabab & cabba & cbaab & cbaba & cbbaa
\end{array}$$

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*, \ *, \ *, \ *, \ *]$$

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ a,\ *]$$

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[a,\ a,\ *,\ *,\ *]$$

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

El número de permutaciones es:

$$PR_{5,2,2,1} = \binom{5}{2,2,1} =$$

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

El número de permutaciones es:

$$PR_{5,2,2,1} = \binom{5}{2,2,1} = \binom{5}{2}$$

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

El número de permutaciones es:

$$PR_{5,2,2,1} = \binom{5}{2,2,1} = \binom{5}{2}\binom{3}{2}$$

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

El número de permutaciones es:

$$PR_{5,2,2,1} = \binom{5}{2,2,1} = \binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$$

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

El número de permutaciones es:

$$PR_{5,2,2,1} = \binom{5}{2, 2, 1} = \binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 10 \cdot 3 \cdot 1$$

Permutaciones con repetición

Vamos a calcular las permutaciones con repetición en el ejemplo anterior:

$$[*,\ a,\ *,\ *,\ a]$$

Las a se pueden situar de $\binom{5}{2}$ maneras.

Una vez situadas las a hay tres posiciones para las b. Las b se pueden colocar de $\binom{3}{2}$ maneras.

Por ejemplo:

$$[b,\ a,\ *,\ b,\ a]$$

Y queda una sola posición para colocar c.

El número de permutaciones es:

$$PR_{5,2,2,1} = \binom{5}{2,2,1} = \binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$$

Permutaciones con repetición

Razonando como en el ejemplo anterior, el número de permutaciones con repetición es:

$$
\begin{aligned}
PR_{n,r_1,r_2,\ldots} = \binom{n}{r_1, r_2, \ldots} &= \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots \\
&= \frac{V_{n,r_1}}{r_1!}\cdot\frac{V_{n-r_1,r_2}}{r_2!}\cdot\frac{V_{n-r_1-r_2,r_3}}{r_3!}\cdot\ldots \\
&= \frac{n!}{r_1!\; r_2!\; r_3!\; \ldots}
\end{aligned}
$$

Generalización de la fórmula de Newton

La fórmula de Newton se puede escribir como:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{p+q=n} \binom{n}{p,q} a^p b^q \qquad p,q \geq 0$$

Para tres sumandos, la fórmula de Newton se escribe:

$$(a+b+c)^n = \sum_{p+q+r=n} \binom{n}{p,q,r} a^p b^q c^r \qquad p,q,r \geq 0$$

y de forma similar la fórmula se generaliza para más de tres sumandos.

Por ejemplo, el coeficiente de $a^2b^4c^3$ en el desarrollo de $(a+b+c)^9$ es:

$$\binom{9}{2,4,3} = \frac{9!}{2!\,4!\,3!} = 1260$$

Combinaciones con repetición

En este caso se trata de formar agrupaciones de elementos en los que estos pueden aparecer repetidos pero en las que no importa el orden.

Veamos un ejemplo:

Supongamos que tenemos bolas de 3 colores, rojas, verdes y azules. Queremos llenar bolsas con 10 bolas. Las bolsas las consideramos diferentes cuando tengan bolas diferentes. El orden no importa.

Estas agrupaciones las llamaremos **combinaciones con repetición** de 3 elementos tomados de 10 en 10.

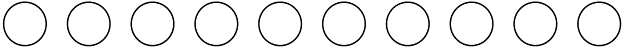
Las soluciones del problema de las bolas, las podemos expresar en la forma (r, v, a), donde r representa el número de bolas rojas, v el número de bolas verdes y a el número de bolas azules. La suma $r + v + a$ debe ser igual a 10.

Por ejemplo, posibles soluciones serían $(3, 5, 2)$, $(4, 0, 6)$ o $(10, 0, 0)$.

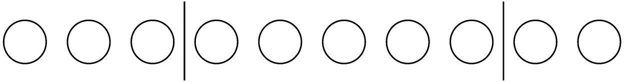
A continuación veremos cómo podemos calcular el número de combinaciones con repetición.

Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:

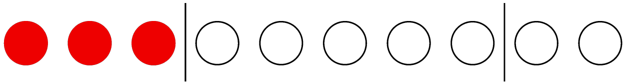


Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



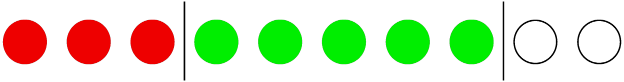
Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



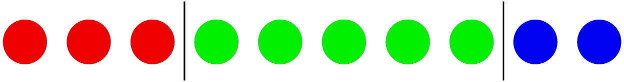
Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



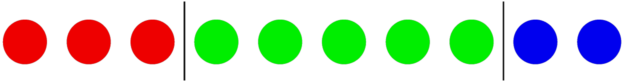
Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:

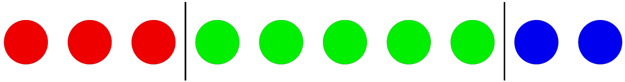


Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:

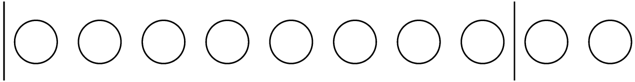
Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:

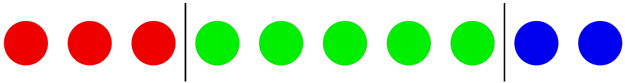


Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:

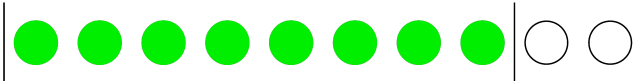


Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



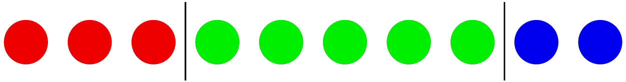
Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:



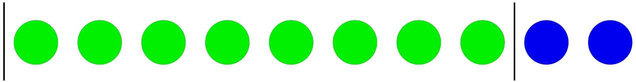
Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



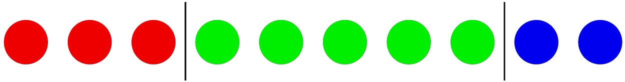
Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:



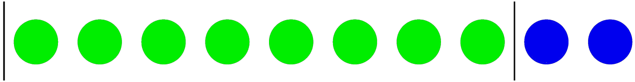
Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:



Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

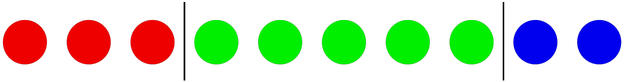
La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:



La solución $(6, 0, 4)$ la representamos como:

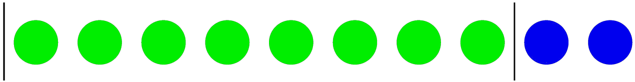
Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:

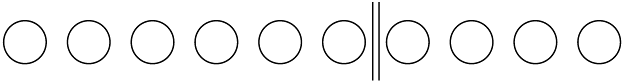


Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:

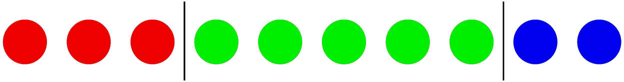


La solución $(6, 0, 4)$ la representamos como:



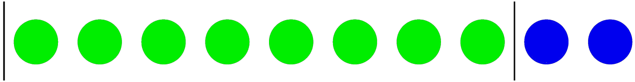
Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:

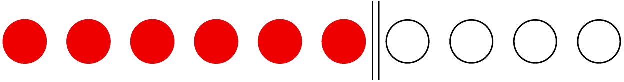


Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:

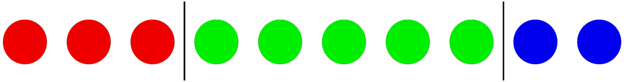


La solución $(6, 0, 4)$ la representamos como:



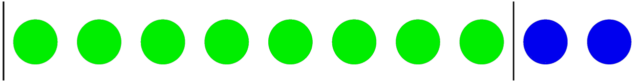
Combinaciones con repetición

Representemos mediante círculos las bolas de la combinación:

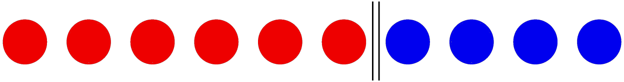


Una solución, por ejemplo $(3, 5, 2)$, la podemos representar en la figura mediante dos separadores.

La solución $(0, 8, 2)$ se representaría así:

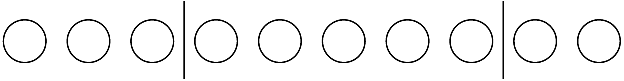


La solución $(6, 0, 4)$ la representamos como:



Combinaciones con repetición

El número de combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 10 en 10 es igual al número de maneras de poner 2 separadores en la siguiente figura:



Este número es igual a:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

En general, el número de combinaciones con repetición de m elementos distintos, agrupados de n en n es:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{m-1}$$

Definición

Sea un conjunto de m elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, se llaman **combinaciones con repetición** de estos m elementos tomadas de n en n a las distintas agrupaciones de n elementos que pueden formarse con los m elementos del conjuntos de tal forma que las agrupaciones puedan contener elementos repetidos y no importe el orden en que aparecen.

El número de combinaciones con repetición es:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{m-1}$$

Disponemos de bolas de 3 colores diferentes.

(*a*) ¿De cuántas maneras se puede llenar una bolsa con 13 bolas?
(*b*) ¿De cuántas si debe haber al menos una bola de cada color?
(*c*) ¿De cuántas si debe haber al menos 2 bolas de cada color?

Solución:

(*a*) Este problema ya lo hemos resuelto. Es el número de maneras de colocar dos separadores entre 13 objetos:

$$CR_{3,13} = \binom{15}{2} = 105$$

(*b*) Vamos a resolver el problema de 2 formas diferentes:
Primero con los separadores:

$$\begin{array}{l} * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \\ * \ * \ * \,|\, * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \,|\, * \ * \ * \\ * \,|\, * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \,|\, * \ * \ * \ * \end{array}$$

El número es:

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

(*b*) Primero introducimos una bola de cada color en la bolsa y luego rellenamos las 10 restantes de todas las formas posibles:

$$CR_{3,10} = \binom{12}{2} = 66$$

(*c*) Ahora reservaríamos 2 bolas de cada color y repartiríamos las siete restantes:

$$CR_{3,7} = \binom{9}{2} = 36$$

♠♠♠♠

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención