Álgebra (3). Sistemas de ecuaciones lineales.

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

Un **sistema de m ecuaciones lineales** con n incógnitas es un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

que puede escribirse en **forma matricial** como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

y en forma abreviada como:

$$AX = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \qquad AX = C$$

$a_{11}\ ,\ a_{12}\ ,\ \dots\ ,\ a_{mn}:$	**coeficientes**	A:	**matriz de coeficientes**
$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n:$	**incógnitas**	X:	**matriz de incógnitas**
$c_1\ ,\ c_2\ ,\ \dots\ ,\ c_m:$	**términos independientes**	C:	**matriz de términos independientes**

Si a la matriz de coeficientes se le añade una columna con los términos independientes, se obtiene la **matriz ampliada** del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

El sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & -3 \\ 2x & + & 7y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & 5 \end{array}$$

se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluciones del sistema

Soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Una **solución** está formada por n números que sustituidos en lugar de las incógnitas hacen que se cumplan las igualdades.

Cuando un sistema admite alguna solución se llama **compatible**; en caso contrario, se llama **incompatible**.

Si la solución es única el sistema es **compatible determinado**; si admite infinitas soluciones es **compatible indeterminado**.

Si dos sistemas tienen las mismas soluciones se llaman **equivalentes**.

Las siguientes transformaciones no cambian las soluciones de un sistema:

- Suprimir cualquier ecuación que sea combinación lineal de las restantes (suprimir las filas de la matriz ampliada que sean combinación lineal de las restantes)
- Cambiar el orden de las ecuaciones (intercambiar filas en la matriz ampliada)
- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por el mismo número distinto de cero (multiplicar por un número distinto de cero una fila de la matriz ampliada)
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número o, en general, sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes (sumar a una fila de la matriz ampliada otra fila multiplicada por un número)

La aplicación sistemática de estas transformaciones para resolver el sistema, transformando la matriz de coeficientes en una de tipo escalonado, se llama **método de Gauss**.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \; ; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 14 \\ 0 & 6 & -3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} 1z &= 10 \; ; & z &= 10 \\ 3y - 20 &= 7 \; ; & y &= 9 \\ x + 18 + 20 &= -3 \; ; & x &= -41 \end{aligned}$$

La solución es $x = -41$, $y = 9$, $z = 10$

Se llaman **sistemas de Cramer** aquellos que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Estos sistemas son siempre compatibles y tienen una sola solución (son determinados).

Si la matriz de coeficientes A tiene un determinante distinto de cero, existe la matriz inversa A^{-1}:

$$AX = C$$

multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz A:

$$AA^{-1}X = A^{-1}C \; ; \qquad X = A^{-1}C$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la incógnita x_1 sería:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \dots + c_n A_{n1}) = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y las demás incógnitas se calculan de forma similar:

Teorema (Regla de Cramer)

En un sistema de Cramer, una incógnita se puede calcular como el cociente de dos determinantes.
El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes.
El numerador es ese mismo determinante sustituyendo los coeficientes de la incógnita por los términos independientes.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = -3 \\ -4y + 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = -11 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 24 - 30 + 24 + 8 = 26$$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ -11 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-36 + 110 - 88 - 12}{26} = -1$$

$$y = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -11 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-18 + 44}{26} = 1$$

$$z = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & -11 \end{vmatrix} = \frac{88 - 36}{26} = 2$$

Teorema (Rouché)

La condición necesaria y suficiente para que un sistema tenga solución es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \quad \ldots \quad + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Si el sistema es compatible, existe una solución $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \quad \ldots \quad + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix} \iff \text{rango } A = \text{rango } A^*$$

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

$$
\text{Sistema} \quad \begin{cases} \begin{array}{l} \text{Compatible} \\ \quad \text{rango } A = r \\ \quad \text{rango } A^* = r \end{array} & \begin{cases} \begin{array}{l} \text{Determinado} \\ \quad r = n \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} \text{Indeterminado} \\ \quad r < n \end{array} \end{cases} \\ \\ \begin{array}{l} \text{Incompatible} \\ \quad \text{rango } A = r \\ \quad \text{rango } A^* = r + 1 \end{array} & \end{cases}
$$

Sistemas homogéneos

Los **sistemas homogéneos** son aquéllos en que los términos independientes de todas las ecuaciones son iguales a cero:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad AX = 0$$

Propiedades de los sistemas homogéneos:

- Los sistemas homogeneos son siempre compatibles. Siempre tienen la **solución trivial** $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
- Si X_1 y X_2 son soluciones, $X_1 + X_2$ también es solución.
- Si X es solución, también lo es λX.

Para que existan soluciones distintas de la trivial el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que el número de incógnitas.

Resolución del sistema

- Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada para ver si el sistema es compatible.
- Se busca un determinante en la matriz de coeficientes de orden igual al rango y distinto de cero.
- Se suprimen las ecuaciones que queden fuera del determinante puesto que son dependientes de las otras.
- Las incógnitas que queden fuera del determinante se pasan al segundo miembro y se las considera como parámetros. El número de parámetros es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz.
- Se resuelve el sistema resultante (por ejemplo mediante la regla de Cramer).

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 7 \\ -3x + 4y + z = -4 \\ -7x + 8y - 15z = 8 \end{cases}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -7 & 8 & -15 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -13 & 17 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -52 & 68 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 & -4 \\ -7 & 8 & -15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & -4 \\ 8 & -15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 17 & 0 & -13 \\ 4 & 1 & -4 \\ 68 & 0 & -52 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene 2 ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 7 \\ -3x + 4y + z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \lambda \\ 2x - 3y = 7 + 5\lambda \\ -3x + 4y = -4 - \lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 7 + 5\lambda & -3 \\ -4 - \lambda & 4 \end{vmatrix} = -16 - 17\lambda$$

$$y = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2 & 7 + 5\lambda \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = -13 - 13\lambda$$

$$z = \lambda$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención