Álgebra (2). Determinantes.

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

Dada una matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz es un número que se representa por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El determinante es cero si las filas y columnas de la matriz son dependientes y es distinto de cero si las filas y columnas son independientes.

Determinantes de segundo y tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

Determinantes de segundo y tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \color{red}{a_{32}} & \color{red}{a_{33}} \\ a_{11} & a_{12} & \color{red}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} {\color{red}a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ {\color{red}a_{21}} & {\color{red}a_{22}} & a_{23} \\ {\color{red}a_{31}} & {\color{red}a_{32}} & {\color{red}a_{33}} \\ a_{11} & {\color{red}a_{12}} & {\color{red}a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & {\color{red}a_{23}} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} & \color{red}{a_{33}} \\ a_{11} & \color{red}{a_{12}} & \color{red}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{blue}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} & \color{red}{a_{33}} \\ a_{11} & \color{red}{a_{12}} & \color{red}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & \color{blue}{a_{23}} \\ \color{blue}{a_{31}} & \color{blue}{a_{32}} & a_{33} \\ \color{blue}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} & \color{red}{a_{33}} \\ a_{11} & \color{red}{a_{12}} & \color{red}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & \color{blue}{a_{23}} \\ \color{blue}{a_{31}} & \color{blue}{a_{32}} & \color{blue}{a_{33}} \\ \color{blue}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} & a_{13} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Adjunto de un elemento

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}
$$

El **adjunto** de un elemento es el determinante que resulta de suprimir la fila y columna del elemento con signo $+$ o $-$ según que la suma de los subíndices sea par o impar.

Un determinante de cualquier orden es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos.

Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz cuadrada es cero si y solo si las filas y columnas de la matriz son linealmente dependientes.
  En particular el determinante es cero si:
  - Todos los elementos de una fila o columna son ceros.
  - Tiene dos filas o columnas iguales.
  - Tiene dos filas o columnas proporcionales.
  - Una fila o columna es combinación lineal de las restantes.

- El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

- - Si se intercambian dos filas el determinante no cambia en valor absoluto pero sí de signo.
  - Si una fila se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.
  - El determinante no cambia si se le suma a una fila o columna otra multiplicada por un número.

Otras propiedades

- Factor común:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Propiedad distributiva:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- La suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es cero.

- El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes.

$$|AB| = |A||B|$$

Cálculo del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad C_3 \to C_3 - 2C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad C_2 \to C_2 + 5C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -2 \\ 2 & 12 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollando por la primera fila}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 44 + 24 = 68$$

Si con dos filas de una matriz se puede formar un determinante de orden 2 distinto de cero, las filas son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} F_1,\ F_2 \text{ independientes} \\ F_2,\ F_3 \text{ dependientes} \end{array}$$

Si con las filas y columnas de una matriz formamos un determinante distinto de cero, las filas y columnas que forman el determinante son independientes.

El rango de una matriz es el tamaño del determinante distinto de cero más grande que puede formarse con las filas y columnas de la matriz.

Si el rango de una matriz es r, con las filas y columnas de la matriz puede formarse un determinante de orden r distinto de cero. Todos los determinantes de tamaño mayor que r que puedan formarse son cero.

Si existe la inversa, el determinante de la matriz debe ser distinto de cero:

$$\exists A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad AA^{-1} = I \; ; \qquad |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1 \; ; \qquad |A| \neq 0$$

Se llama **matriz adjunta** de una matriz cuadrada la que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \; ; \qquad \text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es igual a la traspuesta de adj A multiplicada por $1/|A|$:

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = I$$

Teorema (de la matriz inversa)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

En ese caso, la inversa es igual a la traspuesta de la adjunta dividida por el determinante.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

El determinante de A es igual a 1.

La adjunta de A es:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_1 \longleftrightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_2 \longleftrightarrow F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3 \longrightarrow F_3 + F_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 \longrightarrow F_2 - 3F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención