Álgebra (1). Matrices.

Jesús García de Jalón de la Fuente

2022

Una **matriz** de orden $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ números ordenados en m **filas** y n **columnas**. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Una matriz cualquiera de orden $m \times n$ se escribirá de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La **traspuesta** de una matriz A es una matriz A^t que se obtiene cambiando filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \iff A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La traspuesta de una matriz de orden $m \times n$ es una matriz de orden $n \times m$.

- **Matriz o vector fila y matriz o vector columna.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz cuadrada.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular. Matriz diagonal.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica. Matriz antisimétrica.**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices del mismo orden se efectúa sumando sus elementos término a término:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dos matrices que no sean del mismo orden no pueden sumarse.

La suma de matrices tiene las mismas propiedades que la suma de números:

- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento neutro: $A + 0 = A$ (0 es la matriz cero)
- Matriz opuesta: $A + (-A) = 0$
- Conmutativa: $A + B = B + A$

El conjunto de matrices $m \times n$ con la operación suma forman un **grupo conmutativo o abeliano**.

Producto de un número por una matriz

El producto de una matriz por un número se obtiene multiplicando por ese número todos los elementos de la matriz.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Con respecto a la suma y la multiplicación por números, las matrices tienen las mismas propiedades que los vectores. Forman un **espacio vectorial**.

Producto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ \color{blue}{-1} & \color{blue}{3} & \color{blue}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & \color{blue}{5} \\ 3 & -4 & \color{blue}{2} \\ -1 & 5 & \color{blue}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & \color{blue}{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{-1} & \color{red}{2} \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{-7} & \color{red}{15} & \color{red}{-1} \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -2 \\ -2 & 10 & -4 \\ \hline -7 & 15 & -1 \end{array}$$

Producto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \color{red}{-2} & \color{red}{1} & \color{red}{3} \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ \color{red}{4} & \color{red}{9} & \color{red}{-14} \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} 4 & -2 & -10 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 15 & -6 \\ \hline 4 & 9 & -14 \end{array}$$

Producto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -5 \\ 9 & -12 & 6 \\ -1 & 5 & -2 \\ \hline 10 & -8 & -1 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ \color{red}{-1} & \color{red}{3} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ \color{red}{10} & \color{red}{-8} & \color{red}{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -5 \\ 9 & -12 & 6 \\ -1 & 5 & -2 \\ \hline 10 & -8 & -1 \end{array}$$

El producto de matrices no es conmutativo:

Producto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ \color{red}{-1} & \color{red}{3} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ \color{red}{10} & \color{red}{-8} & \color{red}{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -5 \\ 9 & -12 & 6 \\ -1 & 5 & -2 \\ \hline 10 & -8 & -1 \end{array}$$

El producto de matrices no es conmutativo:

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 18 & 4 \\ 9 & -1 & -4 \\ -9 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

El producto se puede efectuar cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -7 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La **matriz unidad** de orden n es una matriz I tal que para cualquier matriz cuadrada A del mismo orden cumple que:

$$AI = IA = A$$

Esta matriz es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

La **inversa de una matriz cuadrada** A es otra matriz A^{-1} de la misma dimensión que cumple:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La matriz inversa puede servir para despejar la matriz incógnita en una ecuación matricial. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} AX &= B && \text{Multiplicando por la matriz inversa} \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B && \text{Teniendo en cuenta que } A^{-1}A = I \\ IX &= A^{-1}B && \text{Y puesto que } IX = X \\ X &= A^{-1}B && \end{aligned}$$

Las expresiones A/B o $A \div B$ no tienen sentido con matrices.

El producto de metrices cuadradas de orden n cumple la propiedad asociativa y tiene elemento neutro. Sin embargo, no todas las matrices tienen inversa y, como consecuencia, no forman un grupo multiplicativo.

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A^2 + AB = A(A+B)$$

$$A^2 + BA = (A+B)A$$

$$AB + BA$$

$$A^2 + A = A(A+I)$$

$$A^2 + 2A = A(A+2I)$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Una fila de una matriz F_1 es **combinación lineal** de otra fila F_2 si es igual a ésta multiplicada por un número:

$$F_1 \text{ combinación lineal de } F_2 \Longleftrightarrow F_1 = \alpha F_2$$

Por ejemplo en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_2 = 2F_1 \; ; \qquad F_3 = 0F_1$$

Una fila de ceros es combinación lineal de cualquier otra fila.

La fila F_1 es combinación lineal de las filas F_2 y F_3 si se pueden encontrar dos números α y β de tal forma que se cumpla que $F_1 = \alpha F_2 + \beta F_3$.

Por ejemplo en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad F_3 = 2F_2 - F_1.$$

La fila F es **combinación lineal** de las filas $F_1, F_2, \cdots, F_n$ si pueden encontrarse números $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, de tal forma que se cumpla:

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n$$

Las filas (o columnas) de una matriz son **linealmente independientes** si ninguna de ellas es combinación lineal de las restantes. En caso contrario, se dice que son **dependientes**. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

En la primera matriz las filas son independientes, En la segunda y la tercera son dependientes.

El número de filas independientes en una matriz es el mismo que el de columnas independientes. Este número se llama **rango de la matriz**.

Las siguientes transformaciones no cambian el rango de una matriz:

- Suprimir las filas o columnas combinación lineal de las restantes.
- Cambiar de orden filas o columnas.
- Multiplicar filas o columnas por números distintos de cero.
- Sumar a una fila o columna otra fila o columna.

Las dos últimas transformaciones se suelen aplicar conjuntamente. Así, podemos decir que el rango de una matriz no cambia si:

- Se suma a una fila o columna otra multiplicada por un número.
- Se multiplica una fila o columna por un número distinto de cero y se le suma otra multiplicada por otro número.

Sea la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada fila tiene ceros en las mismas columnas que las anteriores y un cero más.

Las matrices de esta forma se llaman **escalonadas**.

Las filas de una matriz escalonada son linealmente independientes salvo si tienen todos sus elementos iguales a cero.

El **método de Gauss** consiste en aplicar las transformaciones que no cambian el rango y que se han visto anteriormente para convertir la matriz a la forma escalonada y poder contar el número de filas independientes.

Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad F_3 \longrightarrow F_3 + F_1$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad F_2 \longleftrightarrow F_3$$

Ejemplo: continuación

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad F_3 \longrightarrow F_3 - 2F_2$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad F_4 \to F_4 - 8F_2$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -33 & -15 & 12 \end{pmatrix} \qquad F_4 = 3F_3$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

♠♠♠♠

Agradecimiento

Gracias por vuestra atención