Bachillerato Internacional
Matemáticas I
Problemas

Jesús García de Jalón de la Fuente

Curso 2021-2022

Índice

1. Radicales

Simplificar:

1. $\sqrt[3]{128a^3b^7c^2}$
2. $\sqrt[4]{81a^6b^5c^8}$
3. $\sqrt[5]{1024a^{10}b^5c^3}$
4. $\sqrt[6]{729a^7b^{12}c^6}$
5. $\sqrt{a^2+2ax+x^2}$
6. $\sqrt{a^2x+2ax^2+x^3}$
7. $\sqrt{ab^2-6ab+9a}$
8. $\sqrt{16x^2+24x+9}$
9. $\sqrt{4+\sqrt{16x^2+8x^3+x^4}}$
10. $\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}$
11. $\sqrt{\dfrac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2-2ax+x^2}}$

Calcular:

12. $4\sqrt{4}-2\sqrt{9}+3\sqrt{25}-5\sqrt{49}$
13. $3\sqrt{8}+5\sqrt{72}+8\sqrt{50}-4\sqrt{18}+4\sqrt{2}$
14. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$
15. $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$
16. $\dfrac{\sqrt{20}}{3}+\dfrac{\sqrt{45}}{2}-\dfrac{5\sqrt{80}}{6}+\dfrac{\sqrt{125}}{3}$
17. $3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}$
18. $2\sqrt{8a^3}-\sqrt{288a^3}+3\sqrt{128a^3}-\sqrt{72a^3}-2\sqrt{32a^3}+4\sqrt{128a^3}$
19. $\sqrt{\dfrac{2}{15}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{14}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\dfrac{192}{9}}$
20. $3\sqrt[3]{12}\cdot 5\sqrt[3]{4}$
21. $\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$
22. $\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}}$
23. $\left(3\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{192}\right)\sqrt[3]{2}$
24. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{1/2}\cdot\sqrt[3]{1/5}$
25. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$
26. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[9]{a^5}\cdot\sqrt[9]{a^7}$
27. $2\sqrt{a^3}\cdot 3\sqrt[4]{a^5}\cdot 5\sqrt[8]{a^3}$
28. $\sqrt[6]{2a^3b}\cdot\sqrt[9]{2^5a^7b^4}\cdot\sqrt[3]{2^2a^2b}\cdot\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[9]{2a^5b^5}$
29. $2\sqrt{ab}\cdot\dfrac{3\sqrt[3]{2^2a^2b}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{2^5ab^3}}{5}\cdot\dfrac{5\sqrt[5]{a^2b^2}}{3}\cdot\sqrt[30]{2^{15}a^8b^8}$
30. $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$
31. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)+\left(5-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$

32. $\left(1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$

33. $\left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{8}-7\sqrt{2}\right)$

34. $\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{20}-\sqrt{72}\right)$

35. $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)$

36. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

37. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

38. $\dfrac{3\sqrt{36}}{\sqrt{4}}+\dfrac{2\sqrt{54}}{\sqrt{6}}-\dfrac{3\sqrt{98}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

39. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

40. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

41. $\dfrac{3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

42. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

43. $\dfrac{30\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{12}}$

44. $\dfrac{6\sqrt{63}}{2\sqrt{7}}$

45. $\dfrac{3\sqrt[3]{500ab^3}}{\sqrt[3]{4a}}$

46. $\dfrac{\sqrt[6]{a^{25}}}{\sqrt[3]{a^5}}$

47. $\dfrac{\sqrt[6]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b^3}}$

48. $\dfrac{6\sqrt[6]{5^7a^7}}{3\sqrt[3]{5^2a^2}}$

49. $\dfrac{8\sqrt[3]{2^2a^2b^3}}{2\sqrt[4]{2^2a^2b^4}}$

50. $\dfrac{\sqrt[4]{a^7}\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a^3}}$

51. $\dfrac{12\sqrt{8}+3\sqrt{32}-5\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$

52. $\left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(3-\sqrt{3}\right)^2$

53. $\sqrt{6-\sqrt{11}}\sqrt{6+\sqrt{11}}$

54. $\sqrt{9+\sqrt{17}}\sqrt{9-\sqrt{17}}$

55. $\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$

56. $\sqrt{ab\sqrt{a^2b^3\sqrt{a^8b^6}}}$

57. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{16x^3}}\right)^4$

58. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{16x^2}}}\right)^8$

59. $3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^6}}}}$

60. $2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}$

61. $3\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}}}}$

62. $\sqrt{ab\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^6b^9\sqrt[5]{a^{10}b^{10}}}}}$

63. $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}\,\sqrt{a\sqrt{a}}\,\sqrt[6]{a^5\sqrt{a^3}}$

64. $\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}\,\sqrt[3]{\sqrt{a}}\,\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^7}}\,\sqrt[6]{\sqrt{a^{11}}}$

65. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}\,\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}\,\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}\,\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\sqrt{a}}}$

Racionalizar

66. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

67. $\dfrac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-2}$

68. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

69. $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$

70. $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

71. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

72. $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$

73. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

74. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}}$

75. $\dfrac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$

76. $\dfrac{\sqrt{5\sqrt[3]{5^2}}}{\sqrt[3]{5^2\sqrt{5}}}$

77. $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}+3\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{6}-\sqrt{150}$

78. $7\sqrt{\dfrac{3}{5}}+2\sqrt{\dfrac{5}{3}}-3\sqrt{15}+2\sqrt{60}$

79. $\dfrac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

Soluciones: (1) $4ab^2\sqrt[3]{2bc^2}$ (2) $3abc^2\sqrt[4]{a^2b}$ (3) $4a^2b\sqrt[5]{c^3}$ (4) $3ab^2c\sqrt{a}$ (5) $a+x$ (6) $(a+x)\sqrt{x}$ (7) $(b+3)\sqrt{a}$ (8) $4x+3$ (9) $x+2$ (10) $3a+1$ (11) $\sqrt{x}$ (12) -18 (13) $68\sqrt{2}$ (14) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (15) $-5\sqrt{3}$ (16) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (17) $13\sqrt[3]{2}$ (18) $34a\sqrt{2a}$ (19) 2 (20) $30\sqrt[3]{6}$ (21) 5 (22) 2 (23) $\sqrt[3]{6}$ (24) $\sqrt[4]{4}$ (25) $a^2\sqrt[4]{a^3}$ (26) a^3 (27) $30a^3\sqrt[8]{a}$ (28) $4a^3b^2$ (29) $4ab\sqrt[5]{a^3b^3}$ (30) $\sqrt{6}-4$ (31) $9+5\sqrt{2}$ (32) $2\sqrt{2}-9$ (33) $11\sqrt{10}-40$ (34) $46+25\sqrt{10}$ (35) 14 (36) -2 (37) 2 (38) -11 (39) -4 (40) $4\sqrt{2}$ (41) $2\sqrt{3}+1$ (42) $\frac{5\sqrt{3}-1}{2}$ (43) $5\sqrt[3]{4}$ (44) 9 (45) $15b$ (46) $a^2\sqrt{a}$ (47) $\sqrt[6]{ab}$ (48) $2\sqrt{5a}$ (49) $4\sqrt[6]{2a}$ (50) a^2 (51) -4 (52) $156-90\sqrt{3}$ (53) 5 (54) 8 (55) 3 (56) a^2b^2 (57) $2x\sqrt[3]{2}$ (58) $16x^2$ (59) $3\sqrt[9]{3^5}$ (60) $\sqrt[16]{2}$ (61) $\sqrt[16]{3}$ (62) $a\sqrt[24]{a^{23}}$ (63) $a^2\sqrt[3]{a^2}$ (64) $a^2\sqrt{a}$ (65) $a^3\sqrt[6]{a}$ (66) $3+\sqrt{2}$ (67) $3-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (68) $5+2\sqrt{6}$ (69) $\sqrt{a}$ (70) $\sqrt{ab}$ (71) $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$ (72) 1 (73) $\sqrt[3]{18}$ (74) 5 (75) 2 (76) 1 (77) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (78) $\frac{46\sqrt{15}}{15}$ (79) $1-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}$

2. Logaritmos

80. Calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$ *b*) $\log_5 125$ *c*) $\log_7 49$ *d*) $\log_2 16$ *e*) $\log_2 64$

81. Calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 81$ *b*) $\log_3 729$ *c*) $\log_5 1$ *d*) $\log_3 \dfrac{1}{3}$ *e*) $\log_3 \dfrac{1}{9}$

82. Calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 \dfrac{1}{32}$ *b*) $\log_5 \dfrac{1}{25}$ *c*) $\log_5(-5)$ *d*) $\log_3 \sqrt{3}$ *e*) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

83. Calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_8 2$ *b*) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *c*) $\log_7 \dfrac{1}{\sqrt[3]{49}}$ *d*) $\log_6 \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$ *e*) $\log_{49} 7$

84. Despejar x en las siguientes igualdades:

a) $2^x = 10$ *c*) $3^{2x} = 6$ *e*) $3^{x^2} = 6$

b) $5^x = 100$ *d*) $7^{-3x} = 15$ *f*) $3^{-5x^2} = 1$

85. Despejar x en las siguientes igualdades:

a) $\log_2 x = 3$
b) $\log_5 x = 2$
c) $\log_3 x = 6$
d) $\log_7 x = \frac{1}{2}$
e) $\log_4 x^2 = 6$
f) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

86. Hallar el valor de y cuando en la función $y = x \ln x$ hacemos $x = 1$.
87. Siendo $\log 2 = 0{,}3010$, calcular $\log 4$.
88. Siendo $\log 2 = 0{,}3010$, calcular $\log 0{,}8$ y $\log \sqrt{781{,}25}$.
89. Calcular el valor de $\log \sqrt[4]{781{,}25}$ conocido $\log 2 = 0{,}3010$.
90. Calcular los logaritmos decimales de los números 8; 1,25; $(0{,}64)^3$. Dato $\log 2 = 0{,}3010$.
91. Conocido $\log 5 = 0{,}6990$, hallar $\log 2$; $\log 2{,}5$; $\log 625$; $\log 12{,}5$; $\log 0{,}032$.
92. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 3 = 0{,}4771$, calcular $\log 10{,}8$; $\log 56{,}25$.
93. Siendo $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log e = 0{,}4343$, calcular el logaritmo neperiano de 648.
94. Hallar el logaritmo en base 5 de 125; 1/25; 0,008.
95. Hallar el logaritmo de 256 en el sistema de base 4.
96. Averiguar la base de los logaritmos para que suceda $\log 2 = 2$.
97. Hallar la parte entera del logaritmo de 725 en el sistema de base 6.
98. Hallar la parte entera del logaritmo de 714 en el sistema de base 5.
99. Expresar la superficie S de una esfera en función de su volumen. Aplicar logaritmos a la fórmula obtenida.
100. Calcular los siguientes logaritmos:
a) $\log_8 \sqrt{2}$ b) $\log_{81} \sqrt[3]{9}$ c) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$ e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

101. $3^{2x+5} = 3^7$
102. $5^{x+3} = 25$
103. $2^{1+x} = 4^{2-x}$
104. $2^{x^2-1} = 8$
105. $5^{x^2-5x+6} = 1$
106. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$
107. $2 \cdot 2^x + 2^{2x} = 80$
108. $3^{x^2-1} \cdot 3^{2x-4} \cdot 3^5 = 6561$
109. $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$
110. $2^{2x+4} - 5 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$
111. $2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-3}} = 5$
112. $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$

Resolver:

113. $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 2^{3x-5y} = 16 \end{cases}$

114. $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x 4^y = 256 \end{cases}$

115. $\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$

116. $\begin{cases} 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$

117. $\begin{cases} 2^{x+y} = 4^{x-y} \\ 3^{xy} = 531441 \end{cases}$

Resolver:

118. $\log x + \log 2 = 1$

119. $\log(2x-3) + \log(5-x) = \log 5$

120. $\log(x^2+3x+2) - \log(x^2-1) = \log 2$

121. $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

122. $2\log x - \log 4 = \log 9$

123. $2\log x + \log(x^2+15) = \log 16$

124. $2\log x = \log 192 + \log 3 - \log 4$

125. $5\log x = 3\log x + 2\log 6$

126. $2\log x - \log 5x = \log 2$

127. $5\log x - \log 288 = 3\log\frac{3}{2}$

128. $\log(65-x^3) = 3\log(5-x)$

129. $\log x = 2 + (\log 18 + \log 8 - 2\log 25) : 2$

130. $\log\sqrt[3]{x} - \log\sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$

131. $\log 3x = \log b + 2\log x$

132. $\dfrac{100^{\log x} + 1}{10^{\log x}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

133. $\log 8^{\log x} - \log 2^{\log x} = \log x^x$

134. Calcular x sabiendo que el doble de su logaritmo decimal excede en una unidad al logaritmo de $x + \frac{11}{10}$.

135. Calcular el valor de a sabiendo que la ecuación:

$$\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} - 2\log 5 = \log 40$$

tiene dos raíces, cuyo producto es -15.

Resolver:

136. $\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

137. $\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

138. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 626 \\ \log x + \log y + \log 2 = 1 \end{cases}$

139. $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases}$

140. $\begin{cases} a^{xy} = a^4 \\ \log(x + y) + \log(x - y) = \log 15 \end{cases}$

141. Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \log_x 25 = \log_y 4 \\ xy = 10000 \end{cases}$$

Soluciones: (80) (a) 2 (b) 3 (c) 2 (d) 4 (e) 6 (81) (a) 4 (b) 6 (c) 0 (d) -1 (e) -2 (82) (a) -5 (b) -2 (c) no existe (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$ (83) (a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) no existe (e) $\frac{1}{2}$ (84) (a) $x = \log_2 10$ (b) $x = \log_5 100$ (c) $x = \frac{1}{2} \log_3 6$ (d) $x = -\frac{1}{3} \log 715$ (e) $x = \pm\sqrt{\log_3 6}$ (f) $x = 0$ (85) (a) $x = 9$ (b) $x = 25$ (c) $x = 216$ (d) $x = \sqrt{7}$ (e) $x = \pm 64$ (f) $x = 2$ (86) $y = 0$ (87) 0,6020 (88) $-0{,}0970$, 1,4465 (89) 0,72325 (90) 0,9030, 0,0970, $-0{,}5820$ (91) 0,3010, 0,3980, 2,7960, 1,0970, $-1{,}4950$ (92) 1,0333, 1,7502 (93) 6,4774 (94) 3, -2, -3 (95) 4 (96) $\sqrt{2}$ (97) 3 (98) 4 (99) $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$, $\ln S = \frac{1}{3} (\ln 36 + \ln \pi + 2 \ln V)$ (100) (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) -2 (e) $-\frac{3}{2}$ (101) $x = 1$ (102) $x = -1$ (103) $x = 1$ (104) $x = \pm 2$ (105) $x = 2$, $x = 3$ (106) $x = 2$ (107) $x = 3$ (108) $x = -4$, $x = 2$ (109) $x = -1$, $x = -2$ (110) $x = -1$, $x = -3$ (111) $x = 1$, $x = 3$ (112) $x = 0$, $x = 1$ (113) $(3, 1)$ (114) $(2, 2)$ (115) $(6, 2)$ (116) $(3, 2)$ (117) $(6, 2)$, $(-6, -2)$ (118) $x = 5$ (119) $x = 4$, $x = \frac{5}{2}$ (120) $x = 4$ (121) $x = 2$, $x = \frac{13}{21}$ (122) $x = 6$ (123) $x = 1$ (124) $x = 12$ (125) $x = 6$ (126) $x = 10$ (127) $x = 3\sqrt[5]{4}$ (128) $x = 2$ (129) $x = 48$ (130) $x = 40$ (131) $x = \frac{3}{b}$ (132) $x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (133) $x = 1$, $x = 2 \log 2$ (134) $x = 11$ (135) $a = 98$ (136) $(5, 2)$ (137) $(1000, 100)$ (138) $(1, 5)$, $(5, 1)$ (139) $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ (140) $(4, 1)$ (141) $x^2 - 641x + 10000 = 0$

3. Combinatoria

142. ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los nueve primeros números, sin que se repitan las cifras.

143. Formar las variaciones de los elementos a, b, c, d, e, agrupados de tres en tres.

144. Formar todas las permutaciones posibles con las letras de la palabra *mano*.

145. Formar las combinaciones de los elementos a, b, c, d, e, f, agrupados de cuatro en cuatro.

146. Con los siete primeros números, ¿cuántas sumas diferentes de tres sumandos podremos formar?

147. ¿Cuántas pesadas diferentes podrán hacerse con ocho pesas distintas, tomándolas de tres en tres?

148. Con 1, 2, 3, 4, 6, ¿cuántos números de cinco cifras, no repetidas, pueden formarse que sean múltiplos de 4?

149. Una línea de autobuses consta de 15 puntos de parada, ¿cuántos billetes tendrán que imprimir, si cada uno lleva las estaciones de origen y llegada?

150. Para jugar al dominó siete fichas hacen un juego. Sabiendo que son 28 fichas, hallar cuántos juegos diferentes podrán obtenerse.

151. Si tienen 176 euros, en un billete de cien, otro de cincuenta, otro de veinte, otro de cinco y una moneda de un euro. ¿Cuántos pagos diferentes podrán hacerse con dos billetes o monedas y a cuánto ascenderá cada uno?

152. ¿De cuántas maneras podrán distribuirse ocho premios iguales entre 12 aspirantes? ¿Y si los premios fueran diferentes?

153. ¿Cuántos productos diferentes pueden formarse con los números 3, 5, 7 y 9?

154. ¿Cuántas señales diferentes podemos hacer con doce banderas de diferente color, agrupándolas de cuatro en cuatro? ¿Y agrupándolas de todas las formas posibles, o sea de 1 en 1; de 2 en 2; ... etc?

155. Una persona tiene dos sortijas diferentes. ¿De cuántas maneras puede ponérselas, ya en la mano derecha, ya en la izquierda, colocando una sola sortija en cada dedo y exceptuando el pulgar de cada mano?

156. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 4 personas en un banco? ¿Y alrededor de una mesa circular?

157. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 9 personas en un banco? ¿Y alrededor de una mesa circular?

158. ¿Cuántos números de cinco cifras, sin que se repita ninguna de ellas, se pueden formar con las 0, 1, 2, 3 y 4?

159. ¿En cuántos puntos se cortan cinco rectas de un plano, entre las cuales no existen paralelas entre sí, ni tampoco tres rectas concurrentes ?

160. Dados seis puntos en el espacio, tales que no haya tres alineados ni cuatro en un mismo plano, ¿cuántos planos quedarán determinados por esos seis puntos?

161. ¿Cuántos triángulos se obtienen uniendo cada tres vértices de un pentadecágono regular?

162. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 gramos, ¿cuántas pesadas diferentes se pueden efectuar?

163. Con ocho campanas de tañidos distintos, ¿cuántos sonidos diferentes podremos obtener?

164. Con tres vocales y tres consonantes, ¿cuántas palabras de seis letras pueden formarse con la condición de que no figuren dos consonantes seguidas? ¿y sin tres vocales seguidas?

165. Calcular el número de ordenaciones que pueden hacerse, conteniendo sin repetición, todas las letras de la palabra $NOVELA$, en las que no hay dos vocales ni dos consonantes juntas.

166. ¿Cuántos números de seis cifras sin repetir, pueden formarse con las nueve primeras cifras significativas y que sean menores que 650000?

167. ¿De cuántas maneras pueden repartirse cinco juguetes diferentes entre 4 niños, de modo que toque a cada uno un juguete por lo menos?

168. ¿Cuántas ordenaciones de letras pueden formarse con 20 consonantes y 5 vocales, de manera que cada ordenación contenga tres consonantes y dos vocales y las vocales sólo puedan ocupar el segundo y cuarto puesto y sean sin repetición?

169. ¿Cuántos números de cuatro cifras, no repetidas, pueden formarse con las 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿En cuántos entrará la cifra 5?

170. ¿Cuántos números podríamos formar con las nueve cifras significativas, de manera que en cada número entren todas y no se repita ninguna? ¿Cuántos empiezan por 123?

171. ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra permutación? ¿Cuántas empiezan con m? ¿Cuántas por per?

172. Calcular la suma de los números representados por las permutaciones sin repetición de las cifras 2, 3, 4 y 5.

173. Calcular la suma de los números representados por las permutaciones sin repetición, de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5.

174. Hallar la suma de todos los números de tres cifras sin repetición, tomadas de entre las 1, 2, 3, 7, 8 y 9.

175. Calcular el número y la suma de todos los números de cinco cifras sin repetir, que se pueden formar con los 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

176. Calcular la suma de todos los números de cinco cifras diferentes que se pueden escribir con sólo las cifras impares, sin repetir en cada número ninguna cifra.

177. Hallar cuántos números hay mayores que 1.000 y menores que 4000 que estén formados por cuatro cifras, sin repetir, entre las 8 primeras cifras significativas.

178. ¿Cuántas permutaciones ordinarias pueden formarse con todas las cifras, sin repetir, del número 54281? Calcular la suma de todos estos números.

179. Hallar cuántos números de cifras sin repetir hay en el sistema de base 6, mayores que 1000 y menores que 3000.

180. En cada uno de los vértices de un exágono hay luces de distinto color, ¿cuántas señales distintas se pueden hacer encendiendo menos de cuatro luces, definiendo señales distintas cuando hay cambio de color?

181. Con n rectas en un plano sin que exista ninguna paralela ni tres que concurran en un punto ¿Cuántos puntos de intersección habrá?

182. Un examen consta de 10 preguntas de las que hay que escoger 8.
   (a) ¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas?
   (b) ¿De cuántas si las dos primeras son obligatorias?

183. Con las cifras 3, 4, 5, 8 y 9:
   (a) ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden formarse?
   (b) ¿Cuántos son mayores de 500?

184. En un juego se reparten simultáneamente 5 cartas (de una baraja de 40) a un jugador:
   (a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?
   (b) ¿De cuántas si sabemos que 2 son de oros y 3 de copas?

185. Con las 27 letras del alfabeto:
   (a) Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?
   (b) Cuántas empiezan y terminan con vocal?

186. Tres chicos y tres chicas van al cine.
   (a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar los seis asientos de una fila?
   (b) ¿De cuántas si los chicos y las chicas deben sentarse alternados?

187. Con las letras dela palabra ARBOL:
   (a) ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas pueden formarse?
   (b) ¿En cuántas de ellas las vocales están separadas?

188. Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9,
   (a) ¿Cuántos productos de tres factores distintos se pueden realizar?
   (b) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?

189. Un equipo de balonmano está formado por 6 jugadores de campo y un portero. Si un entrenador dispone de 12 jugadores de campo y 2 porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede formar?

190. (a) Desarrollar $(1-2x)^5$
    (b) Calcular el coeficiente de x^6 en $(x-2)^{10}$

191. En un grupo de teatro hay 4 actores y 7 actrices. El director tiene que elegir a 5 de ellos para la próxima representación.
    (a) ¿De cuántas maneras podrá hacerlo?
    (b) ¿Y si necesita que 2 sean hombres y 3 mujeres?

192. Si se colocan en orden alfabético las palabras de 5 letras formadas con las letras de la palabra NEPAL, ¿cuál es la que ocupa el lugar 86°?

193. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 5 cartas de una baraja española de forma que haya al menos una carta de oros?

194. Con las cifras del 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean múltiplos de 3?

195. Hallar el coeficiente de x^3 en la expresión $(3-2x)^5$.

196. Escribir los tres primeros términos del desarrollo de $(1-2x)^5(1+x)^7$ en potencias crecientes de x.

197. El coeficiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x+\frac{1}{ax^2}\right)^7$$

es $\frac{7}{3}$. Hallar el valor de a.

198. Hallar el término constante en los siguientes desarrollos:

a) $\left(2x^2+\dfrac{3}{4x^6}\right)^{12}$ $\qquad$ b) $\left(3x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$

199. Sabiendo que:

$$(1+x)^5(1+ax)^6 = 1+bx+10x^2+\cdots$$

hallar los valores de $a, b \in \mathbb{Z}$.

200. Hallar el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $\left(2-\dfrac{3x}{6}\right)^6$.

Soluciones: (142) 3024 (143) $*$ (144) $*$ (145) $*$ (146) 35 (147) 56 (148) 36 (149) 210 (150) 1184040 (151) 10 pagos de: 150, 120, 105, 101, 70, 55, 51, 25, 21, 6 (152) 495, 19958400 (153) 6 (154) 11880, 1302061344 (155) 56 (156) 6 (157) 362880, 40320 (158) 96 (159) 10 (160) 20 (161) 455 (162) 63 (163) 255 (164) 144, 576 (165) 72 (166) 36960 (167) 240 (168) 136800 (169) 360, 240 (170) 362880, 720 (171) 39916800, 3628800, 40320 (172) 93324 (173) 3999960 (174) 66600 (175) 111998880 (176) 6666600 (177) 630 (178) 5333280 (179) 196 (180) 41 (181) $\frac{n(n-1)}{2}$ (182) (a) 45 (b) 28 (183) (a) 60 (b) 36 (184) (a) 658008 (b) 5400 (185) (a) 421200 (b) 12000 (186) (a) 720 (b) 72 (187) (a) 120 (b) 72 (188) (a) 10 (b) 60 (189) 1848 (190) (a) $1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$ (b) 3360 (191) (a) 462 (b) 210 (192) NLAPE (193) 515502 (194) 24 (195) -720 (196) $1-3x-9x^2$ (197) $a=\pm 3$ (198) (a) 47520 (b) 2160 (199) $a=0,\ b=5,\ a=-2, b=-7$ (200) -20

4. Inducción matemática

201. Utilizar la inducción para demostrar que $2^{2n}-3n-1$ es divisible por 9 para $n=1,2,\ldots$.

202. Utilizando la inducción matemática demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

203. Supuesto que:

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Hallar en función de n, la suma de:

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}$$

b) Deducir si n es número par:

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1}$$

c) Hallar en términos de n y x la suma:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

204. *a*) Demostrar por inducción matemática que:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

b) A partir de lo anterior comprobar que la suma de los $n+1$ términos de la serie:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots = \frac{n+1}{2n+3}$$

205. *a*) Demostrar por inducción que para $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Hallar el valor de:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \ldots + (3n-2) + (3n-1)$$

206. Demostrar por inducción matemática que para $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

207. *a*) Demostrar por inducción matemática que para $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Hallar el valor de n de modo que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = 3025$$

208. Demostrar por inducción que:

$$\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$$

209. Demostrar por inducción que:

$$1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Hallar el número mínimo de términos de la serie para el cual la suma sobrepasa 10^9.

210. Usar inducción matemática para demostrar que $n^2 > 7n + 1$ para $n \geq 8$.

211. Demostrar por inducción que:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

5. Más problemas de combinatoria

212. Se deben seleccionar 4 estudiantes para formar un equipo para un concurso de matemáticas. Se pueden elegir entre 4 chicos y 8 chicas:
    a) ¿De cuantas maneras puede elegirse el equipo?
    b) ¿De cuántas si el equipo debe incluir al menos un chico y una chica?

213. *a*) Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6?
    b) ¿Cuántos de ellos son pares y múltiplos de 5?
    c) ¿Cuántos de éstos últimos no tienen cifras repetidas?

214. Demostrar que:
$$\frac{(2n+2)!(n!)^2}{[(n+1)!]^2(2n)!}=\frac{2(2n+1)}{n+1}$$

215. Simplificar:
    a) $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n-1)!}$ *b*) $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n-2)!}$ *c*) $\dfrac{(n!)^2-1}{n!+1}$

216. Sabiendo que en el desarrollo de $(1+x)^n$ hay tres coeficientes a_{r-1}, a_r, a_{r+1} en progresión aritmética, demostrar que se cumple que:
$$n^2+4r^2-2-n(4r+1)=0$$
A partir de esto, encontrar tres coeficientes consecutivos del desarrollo de $(1+x)^{14}$ que formen una progresión aritmética.

217. Cuatro parejas deben aparecer en una foto. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse de modo que cada persona aparezca junto a su esposo o esposa?

218. Calcular el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)^8$.

219. Usar la fórmula de Newton para desarrollar
$$\left(2+\frac{x}{5}\right)^5$$
A partir del desarrollo calcular $(2{,}01)^5$ con 4 decimales correctos.

Soluciones: (212) (*a*) 495 (*b*) 424 (213) (*a*) 2058 (*b*) 294 (*c*) 120 (214) $*$ (215) (*a*) n^2+2n (*b*) $(n-1)^2$ (*c*) $n!-1$ (216) 1001, 2002, 3003 (217) 384 (218) 20412 (219) 32,8080

6. Polinomios y ecuaciones

220. Hallar el valor de a para que el trinomio $4x^2-6x+a$ sea divisible por $x-3$.

221. Qué valor habrá que dar a n para que el polinomio $x^3-6x^2+2nx-1$ sea divisible por $x-6$.

222. Determinar m con la condición de que el polinomio $2x^4+5x^3+mx^2+4$, sea divisible por $x+4$.

223. Hallar el valor que ha de tomar m para que el polinomio x^5-4x^2-x+m sea divisible por $x+1$.

224. Determinar el valor de a con la condición de que el polinomio $2x^4+9x^3+2x^2-6x+3a$ de el resto 10 al dividirlo por $x+4$.

225. Determinar n para que en el polinomio $3x^4-4x^2+x-n$ de un resto 25 al dividirlo por $x-3$.

226. En el polinomio $5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 4x + m$ determinar m para que al dividirlo por el binomio $x - 2$ de de resto 130.

227. Determinar n para que en el polinomio $3x^4 - 2x^3 + x - n$, de al dividirlo por $x - 1/2$, un resto igual a 1.

Factorizar:

228. $x^2 - 4x + 3$

229. $2x^2 - 2x - 4$

230. $3x^2 + 9x + 6$

231. $5x^2 + 10x - 15$

232. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

233. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

234. $3x^3 + 5x^2 - 4x - 4$

235. $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

236. $x^4 + x^3 - x^2 - x$

237. $x^4 - 5x^2 + 4$

238. $4x^4 - 17x^2 + 4$

239. $x^3 - 4x^2 + x + 6.$

240. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12.$

Simplificar:

241. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

242. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

243. $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$

244. Dada la ecuación $4x^2 + 3x + c = 0$, hallar c sabiendo que una de sus raíces vale 4.

245. En la ecuación $x^2 - 23x + c = 0$, una de las raíces vale 8, calcular el valor de c y la otra raíz.

246. Calcular el valor que deberá tomar m en la ecuación $9x^2 - 18x + m = 0$ para que una de las raíces sea doble que la otra.

247. En la ecuación $x^2 - 72x + c = 0$, calcular el valor de c para que una raíz sea doble de la otra.

248. En la ecuación $x^2 - bx + 25 = 0$, hallar b con la condición de que las dos raíces sean iguales.

249. En la ecuación $x^2 - 16x + c = 0$, determinar el intervalo en que ha de variar c para que sus raíces sean imaginarias.

250. En la ecuación $x^2 - (m + 2)x + m + 5 = 0$, determinar el intervalo en que ha de variar m para que sus raíces sean imaginarias.

251. En la ecuación $8x^2-(m-1)x+m-7=0$, hallar los valores de m para que sus raíces sean a) iguales b) opuestas

252. En la ecuación $9x^2-18(m-1)x-8m+24=0$, hallar el valor que ha de tener m para que una raíz sea doble que la otra.

253. En la ecuación $mx^2+(m-1)x+m-1=0$, hallar el valor que ha de tener m para que una raíz sea doble que la otra.

254. En la ecuación $9x^2+bx+28=0$, determinar b con la condición de que la diferencia de las raíces de dicha ecuación sea igual a la unidad.

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

255. $\dfrac{13-7x}{20}-\dfrac{26+x}{25}=\dfrac{2x+7}{5}-\dfrac{1-9x}{10}$

256. $\dfrac{3x+17}{8}-\dfrac{1-4x}{13}=\dfrac{1-x}{4}-\dfrac{9-x}{6}$

257. $\dfrac{23-x}{28}-\dfrac{2+6x}{14}=\dfrac{2-x}{7}-\dfrac{2x}{5}$

258. $\dfrac{3x-11}{20}-\dfrac{5x+1}{14}=\dfrac{x-7}{10}-\dfrac{5x-6}{21}$

259. $3(x-1)-\dfrac{2x-3}{4}+1+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4x-1}{3}+x+\dfrac{1}{12}$

260. $\dfrac{44}{9}-\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{5}{6}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

261. $\dfrac{x}{6}-\dfrac{2x-1}{6}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{x}{3}\right)=0$

262. $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{14-2x}{6}\right)+\dfrac{43}{24}$

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

263. $x^2-9=0$

264. $4x^2-9=0$

265. $5x^2-125=0$

266. $5x^2-3x=0$

267. $3x^2=2x$

268. $x^2-3x+2=0$

269. $5x^2+6x-8=0$

270. $3x^2+24x+21=0$

271. $3x^2-5x+2=0$

272. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{32}{x^2-4}$

273. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{8}{x^2-1}$

274. $\dfrac{x+3}{x-5}+\dfrac{x-5}{x-3}=1$

275. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{x+1}$

276. $\dfrac{3-x}{1-x^2}-\dfrac{2+x}{1+x}=\dfrac{1}{1-x}$

277. $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{29}{10}$

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

278. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

279. $x^4 - 8x^2 + 9 = 0$

280. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

281. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

282. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

283. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

284. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

285. $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

286. $144x^4 - 25x^2 + 1 = 0$

287. $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

288. $\sqrt{3 - 2x} = 2$

289. $\sqrt{1 - x} = 1$

290. $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$

291. $\sqrt{x^2 - 7} = x - 5$

292. $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$

293. $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} = 3x - 2$

294. $\sqrt{x - 9} - \sqrt{x - 18} = 1$

295. $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 14} = 1$

296. $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$

297. $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 5} = 1$

298. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = 1$

299. $2\sqrt{x - 3} + \sqrt{4x - 1} = 1$

300. $\sqrt{x} + \sqrt{x + 3} = 3$

301. $\sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = 2$

302. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 6} = 5$

Resolver las siguientes ecuaciones factorizando previamente el polinomio:

303. $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$

304. $x^4 - 3x^3 - 10x^2 = 0$

305. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

306. $6x^3 - 13x^2 + 4 = 0$

307. $5x^3 + 19x^2 + 11x - 3 = 0$

308. $12x^3 + 49x^2 + 3x - 4 = 0$

309. $9x^4 - 31x^2 - 14x + 8 = 0$

310. $20x^4 - 71x^3 - 170x^2 + 119x + 30 = 0$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

311. $\begin{cases} x + y^2 = 59 \\ x^2 + y^2 = 149 \end{cases}$

312. $\begin{cases} x^2 - xy = 21 \\ xy - y^2 = 12 \end{cases}$

313. $\begin{cases} x + y = 5 \\ (6 + x)(7 + y) = 80 \end{cases}$

314. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases}$

315. $\begin{cases} (x - 3)(y - 1) = 6 \\ (x + 1)(y - 2) = 12 \end{cases}$

316. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 + 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 = 169 \end{cases}$

317. $\begin{cases} x + \dfrac{2}{y} = 1 \\ y + \dfrac{1}{x} = 6 \end{cases}$

318. $\begin{cases} y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{2} \\ x - \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

319. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$

320. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$

321. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 180 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$

322. $\begin{cases} y^2 = x^2 - 5 \\ 3y - x = 3 \end{cases}$

Resolver las siguientes inecuaciones de primer grado:

323. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{12} + 3x < \dfrac{1}{4} + x$

324. $\dfrac{27-x}{2} > \dfrac{9}{2} + \dfrac{7x-54}{10}$

325. $\dfrac{3x+7}{4} - \dfrac{1-5x}{12} \leq 9 - x - \dfrac{4x-9}{3}$

326. $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5x}{6} + \dfrac{2x}{5} - \dfrac{x}{3} \geq 11$

Resolver las siguientes inecuaciones:

327. $x^2 - 5x + 4 < 0$

328. $1 - x^2 > 0$

329. $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

330. $12 + x - x^2 \geq 0$

331. $x^2 - x + 5 < 0$

332. $9x^2 - 3x + 1 \geq 0$

333. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$

334. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 > 0$

335. $x^3 - 3x + 2 \geq 0$

336. $3x^3 + 5x^2 - 4x - 4 \leq 0$

337. $\dfrac{x-1}{x+3} < 0$

338. $\dfrac{x^2-x}{x-5} \geq 0$

339. $\dfrac{x+3}{x-4} \leq 1$

340. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} > 0$

Soluciones:

(220) $a = -18$
(221) $n = \frac{1}{12}$
(222) $m = -\frac{49}{4}$
(223) $m = 4$
(224) $a = 6$
(225) $n = 185$
(226) $m = 90$
(227) $n = -\frac{9}{16}$
(228) $(x-1)(x-3)$
(229) $2(x+1)(x-2)$
(230) $3(x+1)(x+2)$
(231) $5(x-1)(x+3)$
(232) $(x-1)(x-2)(x-3)$
(233) $x+1(x-2)(x+3)$
(234) $(x-1)(x+2)(3x+2)$
(235) $2(x-1)(x+1)(x+2)$
(236) $x(x-1)(x+1)^2$
(237) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(238) $(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$

(239) $(x+1)(x-2)(x-3)$

(240) $(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$

(241) $\frac{x-1}{x+3}$

(242) $\frac{x+1}{x+2}$

(243) $\frac{x^2}{x^2+1}$

(244) $c=-76$

(245) $c=120, x=15$

(246) $m=8$

(247) $c=1152$

(248) $b=\pm 10$

(249) $c>64$

(250) $c\in(-4,4)$

(251) $m=25$ y $m=9$, $m=1$

(252) $m=-1$, $m=2$

(253) $m=-\frac{2}{7}$, $m=1$

(254) $b=33$, $b=-33$

(255) $x=-1$

(256) $x=-\frac{1029}{239}$

(257) $x=-5$

(258) $x=-3$

(259) $x=1$

(260) $x=5$

(261) $x=\frac{3}{5}$

(262) $x=9$

(263) $x=-3$, $x=3$

(264) $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

(265) $x=0$, $x=25$

(266) $x=0$, $x=\frac{3}{5}$

(267) $x=0$, $x=\frac{2}{3}$

(268) $x=1$, $x=2$

(269) $x=\frac{4}{5}$, $x=-2$

(270) $x=-1$, $x=-7$

(271) $x=1$, $x=\frac{2}{3}$

(272) $x=6$, $x=-4$

(273) $x=2$, $x=-3$

(274) $x=1$

(275) $x=-3$, $x=2$

(276) $x=0$

(277) $x=-\frac{8}{3}$, $x=-\frac{1}{3}$

(278) $x=-2$, $x=2$, $x=-3$, $x=3$

(279) $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}$, $x=-\sqrt{4+\sqrt{7}}$, $x=\sqrt{4-\sqrt{7}}$, $x=-\sqrt{4-\sqrt{7}}$

(280) $x=-1$, $x=1$, $x=-5$, $x=5$

(281) $x=-3$, $x=3$, $x=-4$, $x=4$

(282) $x=-2$, $x=2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$

(283) $x=-1$, $x=1$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

(284) $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}$

(285) no tiene solución

(286) $x=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3}$, $x=-\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{4}$

(287) $x=-\sqrt{5}$, $x=\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$

(288) $x = -\frac{1}{2}$
(289) $x = 0$
(290) $x = 1$
(291) no tiene solución
(292) $x = 1$
(293) no tiene solución
(294) $x = 34$
(295) $x = \frac{177}{4}$
(296) $x = 64$
(297) $x = 6$
(298) $x = 2$
(299) no tiene solución
(300) $x = 1$
(301) $x = \frac{9}{4}$
(302) $x = 10$
(303) $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$
(304) $x = -2$, $x = 0$, $x = 5$
(305) $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$
(306) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 2$
(307) $x = -3$, $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$
(308) $x = -4$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{4}$
(309) $x = -\frac{4}{3}$, $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 2$
(310) $x = -2$, $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 5$
(311) $(10, 7)$, $(10, -7)$
(312) $(7, 4)$, $(-7, -4)$
(313) $(4, 1)$, $(2, 3)$
(314) $(-7, 5)$, $(7, 5)$, $(-7, -5)$, $(7, -5)$
(315) $(-9, \frac{1}{2})$, $(5, 4)$
(316) $(-9, -4)$, $(4, 9)$, $(-4, -9)$, $(9, 4)$
(317) $(\frac{1}{3}, 3)$, $(\frac{1}{2}, 4)$
(318) $(\frac{27}{2}, \frac{3}{2})$, $(5, 10)$
(319) $(\frac{21}{5}, \frac{16}{5})$, $(3, 4)$
(320) $(7, 1)$, $(1, 7)$, $(-1, -7)$, $(-7, -1)$
(321) $(5, 4)$, $(4, 5)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{161}}{2}, \frac{-9-\sqrt{161}}{2}\right), \left(\frac{-9-\sqrt{161}}{2}, \frac{-9+\sqrt{161}}{2}\right)$
(322) $(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$, $(3, 2)$
(323) $(-\infty, \frac{1}{27})$
(324) $(-\infty, 12)$
(325) $(-\infty, \frac{62}{21}]$
(326) $[15, \infty)$
(327) $(1, 4)$
(328) $(-1, 1)$
(329) $[-1, 5]$
(330) $[-3, 4]$
(331) no hay solución
(332) $(-\infty, \infty)$
(333) $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$
(334) $(-3, -1) \cup (2, \infty)$
(335) $[-2, \infty)$
(336) $[-2, -\frac{2}{3}] \cup [1, \infty)$
(337) $(-3, 1]$
(338) $[0, 1] \cup (5, \infty)$
(339) $(-\infty, 4)$
(340) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

7. Trigonometría

341. Calcular cuánto mide en grados, minutos y segundos un ángulo de un radián.

342. Completar la siguiente tabla:

φ	$\operatorname{sen}\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{cotg}\varphi$	$\sec\varphi$	$\operatorname{cosec}\varphi$
$30°$						
$45°$						
$60°$						

343. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo conocidos dos de sus lados:

   a) $b = 3$, $c = 4$
   b) $b = 5$, $c = 12$
   c) $b = 7$, $a = 25$
   d) $c = 8$, $a = 17$

344. Calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo dados un ángulo y un lado:

   a) $b = 5$, $C = 40°$
   b) $b = 3$, $B = 10°$
   c) $c = 8{,}21$, $B = 26°31'$
   d) $a = 7$, $B = 64°17'$

345. Calcular los elementos de un triángulo isósceles conocido:

   a) La base 5 m y el ángulo opuesto $43°16'$
   b) La base 10,5 m y la altura 9,5 m
   c) El lado 45,6 m y un ángulo en la base $38°42'$

346. Calcular el área de un trapecio isósceles cuya base menor es de 14 m; cuyos lados miden 5,3 m y el ángulo de éstos con la base menor es de $135°28'$

347. Calcular la apotema, el lado y el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 3 m de radio.

348. Calcular el radio, la apotema y el área de un octógono regular de 1 m de lado.

349. Calcular el área del sector y del segmento circular menor correspondientes a una cuerda de un metro en un círculo de radio 0,75 m.

350. Una pirámide regular cuadrada tiene 3 m de arista básica y 6 m de arista lateral. Calcular: (a) la altura (b) la apotema (c) el volumen (d) la superficie total

351. Un cono tiene un ángulo en el vértice de 40° y una altura de 20 cm. Calcular: (a) el radio de la base (b) la generatriz (c) la superficie lateral y total (d) el volumen

352. Demostrar que el área lateral de un cono es igual al área de la base dividida por el coseno del ángulo que la generatriz forma con dicha base.

353. Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

   a) $a = 32{,}45$ m, $A = 64°6'$, $B = 48°58'$
   b) $c = 34{,}69$ m, $A = 19°19'$, $B = 20°20'$
   c) $b = 50{,}01$ cm, $c = 66{,}60$ cm, $C = 57°21'$

d) $a = 963{,}8$ m, $b = 1266$ m, $A = 18°45'$

354. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de $36°30'$ y $23°15'$. Si la distancia entre estos dos puntos es de 35 m hallar la altura de la torre.

355. Desde un aeroplano volando e línea recta entre dos puntos A y B que distan entre sí 3250 m, se ven dichos puntos con ángulos de depresión de $48°20'$ y $37°40'$ respectivamente. Calcular las distancias del aeroplano a cada punto y la altura de vuelo.

356. Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

    a) $b = 60$ cm, $c = 153$ cm, $A = 11°59'$
    b) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $C = 63°20'$

357. Calcular la resultante de dos fuerzas de 120 y 215 kg que forman entre sí un ángulo de $143°30'$.

358. Un aeroplano parte de un lugar a las nueve de la mañana, a una velocidad de 250 km/h y rumbo NE. Otro parte del mismo lugar media hora después con velocidad de 300 km/h y rumbo SSO. ¿A qué distancia se hallan a las diez?.

359. Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

    a) $a = 291$ m, $b = 353$ m, $c = 264$ m
    b) $a = 1235$ m, $b = 307$ m, $c = 1500$ m

360. Dos fuerzas de 14,5 y 23,1 newtons dan una resultante de 10,4 newtons. ¿Qué ángulos forman entre sí las dos fuerzas?

361. A cierta hora, cuando los rayos del sol forman un ángulo de $50°$ con la horizontal, la longitud de la sombra de un árbol es de 25 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

362. Se observa una montaña desde una llanura. Desde un cierto punto se ve la cima con un ángulo de $45°$ con la horizontal y alejándose 750 m, el ángulo es de $30°$. Calcular la altura de la montaña sobre la llanura.

363. Para medir la altura de una nube se han hecho simultáneamente dos observaciones desde los puntos A y B distantes 1 km entre sí. La inclinación de la visual desde A es $47°15'$. Los ángulos que las proyecciones de las visuales desde A y B forman con la recta AB son, respectivamente, $38°14'$ y $53°20'$. Hallar la altura de la nube.

364. Calcular el ángulo que forma la diagonal de un cubo con las aristas contiguas.

365. Calcular el ángulo que forman dos caras de un tetraedro regular

366. Lo mismo, dos caras contiguas de un octaedro regular.

367. Completar el siguiente cuadro:

	$30°$	$45°$	$60°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$
CUADRANTE											
SENO											
COSENO											
TANGENTE											

368. Completar:

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°	−90°
CUADRANTE										
SENO										
COSENO										
TANGENTE										

369. Sin utilizar la calculadora, obtener todos los valores de x que cumplen que:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ *b*) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) $\operatorname{tg} x = 1$ *d*) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

e) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *f*) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *g*) $\cos x = \frac{1}{2}$ *h*) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *j*) $\cos x = -\frac{1}{2}$ *k*) $\operatorname{tg} x = -1$ *l*) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

m) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *n*) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *ñ*) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *o*) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

p) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *q*) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

370. Obtener todos los valores de x que cumplen que:

a) $\operatorname{sen} x = 1$ *b*) $\cos x = 1$ *c*) $\operatorname{sen} x = 0$ *d*) $\cos x = 0$

e) $\operatorname{sen} x = -1$ *f*) $\cos x = -1$ *g*) $\operatorname{tg} x = 0$ *h*) $\operatorname{cotg} x = 0$

371. Con ayuda de la calculadora obtener todos los valores de x que cumplen:

a) $\operatorname{sen} x = 0{,}2326$ *b*) $\cos x = 0{,}5188$ *c*) $\operatorname{tg} x = 2{,}4637$ *d*) $\cos x = -0{,}3078$

e) $\operatorname{tg} x = -1{,}9365$ *f*) $\operatorname{sen} x = -0{,}3227$ *g*) $\sec x = 7{,}4512$ *h*) $\operatorname{cotg} = 2{,}8981$

372. Sabiendo que $\operatorname{sen}\varphi = 0{,}7375$ y que φ es un ángulo del segundo cuadrante, obtener $\cos\varphi$ y $\operatorname{tg}\varphi$:
   a) Calculando previamente el ángulo φ con ayuda de la calculadora.
   b) Sin necesidad de obtener previamente φ.

373. Sabiendo que $\cos x = 3/5$ y x es un ángulo del cuarto cuadrante, obtener $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$:
   a) Calculando previamente el ángulo x con ayuda de la calculadora.
   b) Sin necesidad de obtener previamente x.

374. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = -3$ y x es un ángulo del segundo cuadrante, obtener $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:
   a) Calculando previamente el ángulo x con ayuda de la calculadora.
   b) Sin necesidad de obtener previamente x.

375. Utilizando los teoremas de adición, obtener sin calculadora los valores de seno, coseno y tangente de *a*) 15° *b*) 75° *c*) 105° *d*) 22°30′.

376. Obtener todos los valores del ángulo x que cumplen que:

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{-1}{2}$ *b*) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$ *d*) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

377. Demostrar que la suma $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ puede escribirse en la forma:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = A \operatorname{sen}(x + \varphi)$$

y obtener los valores de A y φ en función de a y b. Aplicar el resultado obtenido para resolver la ecuación $3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = 2$

378. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{5}{4}$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

d) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

379. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = 0$

b) $\cos 2x = 2 \operatorname{sen} x$

c) $3\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x - 2 = 0$

d) $2 + \cos x \operatorname{sen} x = 8 \operatorname{sen}^2 x$

380. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0$

b) $2\operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x$

c) $\operatorname{cosec}^2 x = 3\operatorname{cotg} x - 1$

d) $\operatorname{cotg} x + 3\operatorname{cotg} 2x - 1 = 0$

381. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3\operatorname{tg} x + 4\operatorname{sen} x = 0$

b) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

c) $\sec^2 x = 4\operatorname{tg} x$

d) $3\sec^2 x + 1 = 8\operatorname{tg} x$

382. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{sen} 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = 1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$

d) $\dfrac{1 - \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$

383. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

b) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$

c) $\cos^4\alpha = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$

384. Resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen} x \cos x = 0$

c) $(\operatorname{tg} x - 1)(2\operatorname{sen} x + 1) = 0$

d) $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

385. Resolver las ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

b) $\cos x + \cos 2x = 0$

c) $2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = 0$

d) $2\cos x + \sec x = 3$

386. Resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x = 3$

b) $\operatorname{sen} x + 1 = \cos x$

c) $\sec x - 1 = \operatorname{tg} x$

d) $2\cos x + 3\operatorname{sen} x = 2$

387. Resolver las ecuaciones:

a) $3\operatorname{sen} x + 5\cos x + 5 = 0$

b) $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos x$

c) $3\operatorname{sen} x + 4\cos x = 1$

d) $\operatorname{sen} 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

388. Resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} 3x = 1$

b) $\dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{1}{2}$

389. Resolver las ecuaciones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2} + \cos x = 1$

b) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 0$

c) $\cos 2x + \cos 3x = 0$

d) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 2\operatorname{sen} 3x$

390. Resolver las ecuaciones:

a) $\cos 5x + \cos x = 2\cos 2x$

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \cos 3x$

391. Desde la parte más alta de un edificio de 114 m de altura se ven las orillas de un río bajo ángulos de 75° y 19° respectivamente. Calcular la anchura del río.

392. El desarrollo plano de un cono es un sector circular de 15 cm de radio y ángulo φ. Calcular φ sabiendo que el ángulo que forma la generatriz del cono con la base mide 1,23 radianes.

393. Demostrar la identidad:

$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B$$

394. Demostrar las identidades:

$$\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B\ ; \qquad (\operatorname{sen} A + \cos A)(\operatorname{sen} B + \cos B) = \operatorname{sen}(A+B) + \cos(A-B)$$

395. a) Demostrar que:

$$\operatorname{artg}\left(\frac{1}{4}\right) + \operatorname{artg}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b) De aquí, (o de otra manera) encontrar el valor de $\operatorname{artg}(4) + \operatorname{artg}\left(\frac{5}{3}\right)$.

396. Demostrar que $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$.

397. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\beta = \frac{7}{25}$, calcular los posibles valores de $\cos(\alpha+\beta)$.

398. La duración de los días en Wellington (Nueva Zelanda) varía entre un mínimo de 9,18 horas el 21 de junio y un máximo de 15,13 horas el 21 de diciembre. Suponiendo que la duración de los días sigue una función de la forma $f(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + y_0$ calcular los valores de A, ω, φ e y_0. Mediante la función obtenida, calcular la duración del día 21 de marzo (80º día del año).

399. La tensión V de un generador de corriente alterna está dado por la función:

$$V(t) = 220\operatorname{sen}(100\pi t)$$

a) Calcular los valores máximo y mínimo de la tensión. (Solución: 220 y -220)

b) Calcular la amplitud de la función V. (Solución: 220)

c) Calcular el período de la función V. (Solución: 1/50) *d*) Esbozar el gráfico de la función V sobre dos períodos comenzando en $t = 0$.

400. La altura de las mareas puede ser representada por una función del tipo:

$$h(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + h_0$$

En la localidad de Blue Harbor en Sunny Island el tiempo transcurrido entre dos mareas altas es de 12 horas. La altura del agua durante la marea alta es 14,4 m y durante la marea baja es de 1,2 m.

En un día particular, la primera marea alta ocurre a las 8.15.

a) Con esta información calcular los valores de A, ω, φ y h_0.

b) Dibujar el gráfico de la función y obtener la hora de la primera marea baja.

c) A un barco, solamente se le permite entrar en el puerto cuando cuando la altura del agua es al menos de 5 m. Calcular el intervalo de tiempo en el que un barco puede entrar o salir del puerto.

401. Escribir $\mathrm{sen}(\,\mathrm{arsen}\, a + \,\mathrm{arcos}\, b)$ en términos de a y b.

402. Calcular $\mathrm{sen}\left(\,\mathrm{artg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\,\mathrm{arsen}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

403. Demostrar que:

a) $\mathrm{tg}\,(\,\mathrm{arsen}\, a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

b) $\cos\,(\,\mathrm{arsen}\, a + \,\mathrm{arcos}\, a) = 0$.

c) $\mathrm{tg}\,(\,\mathrm{arcos}\, a) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

404. Resolver la ecuación $e^{\frac{x}{2}}\cos 2x = e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{sen}\, x$ para $0 \le x \le 2\pi$.

405. Suponiendo que $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - \dfrac{14}{\cos\alpha} + 18 = 0$, calcular los posibles valores de $\sec\alpha$.

406. Resolver la ecuación $\mathrm{cosec}\, x + \mathrm{sen}\, x = 2$ para $-\pi \le x \le \pi$.

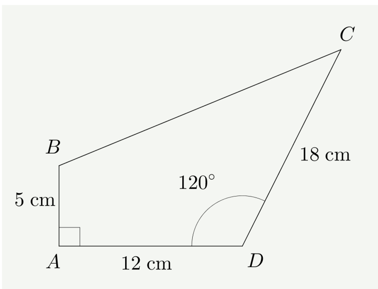
407. Sabiendo que

$$\frac{\mathrm{sen}\, x - 3\cos x}{\mathrm{sen}\, x - \cos x} = 7$$

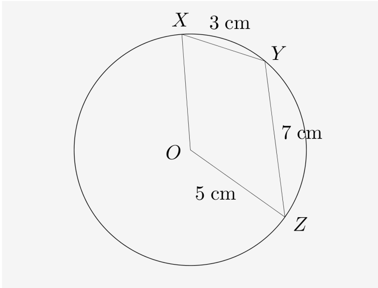
calcular el valor de $\mathrm{tg}\, x$. De aquí, calcular los valores de $\mathrm{tg}\, 2x$ y $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

408. Con ayuda de la calculadora, obtener todas las soluciones de la ecuación $-5x^2\cos 8x = \mathrm{tg}\, x$ en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

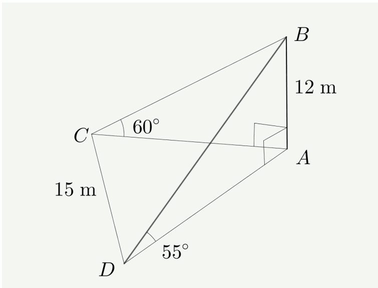
409. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$:



410. La figura muestra dos cuerdas XY e YZ sobre una circunferencia con centro O y radio 5 cm. Dados $XY = 3$ cm $YZ = 7$ cm, calcular el área del cuadrilátero $OXYZ$.

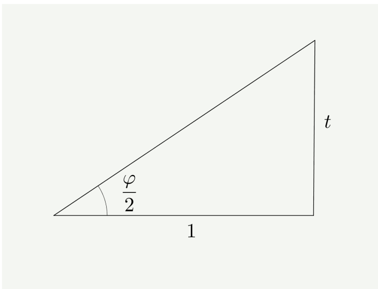


411. La figura muestra un mástil AB de longitud igual a 12 m. Los puntos C y D están sobre el suelo de tal forma que el ángulo de elevación de C a B es de 60° y el ángulo de elevación de D a B es de 55°. Sabiendo que la distancia entre C y D es de 15 m, calcular el ángulo CAD y el área del triángulo CAD.



412. Utilizar el triángulo de la figura para demostrar que si $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$, entonces

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{y} \qquad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$



Con ayuda de este resultado, resolver la ecuación:

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi = 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

413. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

b) $\dfrac{\cos(A-B)}{\cos A \cos B} = 1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$

c) $\cos 3\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(1 - 4 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha)$

d) $2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} 4\alpha$

e) $1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha$

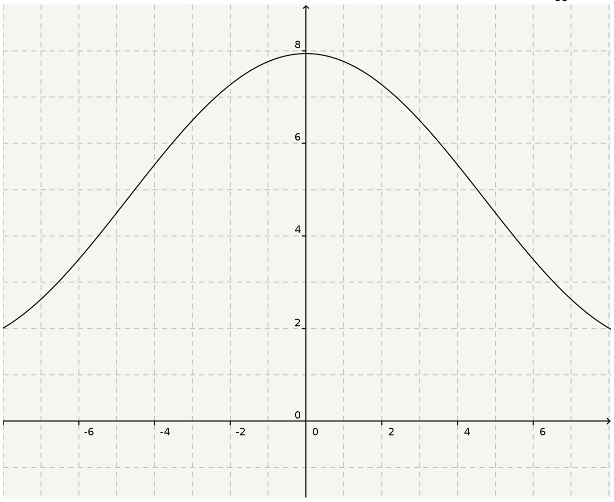
414. Calcular los siguientes números:

a) $\cos\left(\operatorname{arsen}\frac{3}{5} - \operatorname{arcos}\frac{1}{2}\right)$

b) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcos}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

c) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{artg}(-1) + \operatorname{arcos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

415. La figura muestra la gráfica de la función $f(x) = A\cos\omega x + C$ para $-\frac{\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{\pi}{\omega}$.



Sobre los mismos ejes dibujar la gráfica de:

$$g(x) = -\frac{A}{2}\cos(2\omega x) + C$$

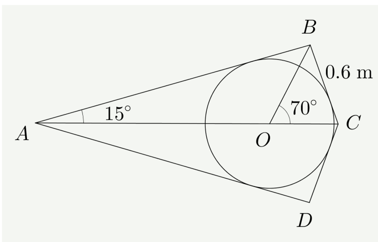
416. Suponiendo que $\operatorname{arsen} x$, $\operatorname{arcos} x$ y $\operatorname{arsen}(1-x)$ son ángulos agudos, demostrar que:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arsen} x - \operatorname{arcos} x) = \operatorname{arsen}(1-x) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$$

417. Usar la identidad $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ para demostrar que

$$2x + y = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} y = \frac{1 - 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 + 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}$$

418. La figura muestra una circunferencia centrada en O inscrita en una cometa:



a) Calcular el ángulo ABC.

b) Calcular la longitud de AB.

c) Calcular el radio de la circunferencia.

419. Demostrar que si l_1 y l_2 son las longitudes de los lados de un paralelogramo y d_1 y d_2 las longitudes de sus diagonales, se cumple que:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(l_1^2 + l_2^2\right)$$

420. A partir del resultado anterior o de cualquier otro modo, demostrar que si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y m_c la longitud de la mediana correspondiente al lado c, se cumple que:

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

Soluciones:

(341) $57^\circ 17' 41''$

(342) $*$

(343) (a) $B = 36^\circ 52' 12''$, $C = 53^\circ 7' 48''$ (b) $B = 22^\circ 37' 12''$, $C = 67^\circ 22' 48''$ (c) $B = 16^\circ 15' 37''$, $C = 73^\circ 44' 23''$ (d) $B = 61^\circ 55' 39''$, $C = 28^\circ 4' 21''$

(344) (a) $a = 6{,}53$ cm, $c = 4{,}20$ cm (b) $a = 17{,}28$ cm, $c = 17{,}02$ cm (c) $a = 9{,}18$ cm, $b = 4{,}10$ cm (d) $b = 6{,}31$ cm, $c = 3{,}04$ cm

(345) (a) $60^\circ 22'$, 6,78 m, 6,30 m (b) $61^\circ 4' 25''$, 10,85 m, $57^\circ 51' 10''$ (c) $102^\circ 36'$, 28,51 m, 71,18 m

(346) 42,04 m^2

(347) $a = 2{,}70$ m, $l = 2{,}60$ m, $S = 24{,}63$ m^2

(348) $r = 1{,}31$ m, $a = 1{,}21$ m, $S = 4{,}83$ m^2

(349) $S = 4104{,}72$ cm^2, $S' = 1309{,}63$ cm^2

(350) (a) $h = 5{,}29$ cm (b) $a = 5{,}66$ cm (c) $V = 28{,}22$ cm^3 (d) $S = 61{,}25$ cm^2

(351) (a) $r = 7{,}28$ cm (b) $g = 21{,}28$ cm (c) $S = 486{,}73$ cm^2 (d) $V = 1109{,}81$ cm^3

(352) $*$

(353) (a) $C = 66^\circ 56'$, $b = 27{,}21$ cm, 33,19 cm (b) $C = 140^\circ 21'$, $b = 18{,}89$ cm, $a = 17{,}98$ cm (c) $B = 39^\circ 12' 57''$, $A = 83^\circ 26' 3''$, $a = 78{,}58$ cm (d) dos soluciones: $B_1 = 24^\circ 58' 31''$, $C_1 = 136^\circ 16' 29''$, $c_1 = 2072{,}48$ cm, $B_2 = 155^\circ 1' 29''$, $C_2 = 6^\circ 13' 31''$, $c_2 = 325{,}14$ cm

(354) 35,86 m

(355) $h = 8015$ m, $l_1 = 10729$ m, $l_2 = 13117$ m

(356) (a) $a = 95{,}13$ cm, $B = 7^\circ 31' 30''$, $C = 63^\circ 20'$ (b) $c = 18{,}86$ cm, $B = 71^\circ 22' 25''$, $A = 45^\circ 17' 35''$

(357) 138,37 newtons

(358) 392,80 km

(359) (a) $A = 53^\circ 58' 24''$, $B = 78^\circ 49' 44''$, $C = 47^\circ 11' 52''$ (b) $A = 27^\circ 13' 3''$, $B = 6^\circ 31' 42''$, $C = 146^\circ 15' 15''$

(360) $161^\circ 36' 47''$

(361) 29,79 m

(362) 1024,52 m

(363) 868,06 m

(364) $70^\circ 31' 44''$

(365) $70^\circ 31' 44''$

(366) $70^\circ 31' 44''$

(367) $*$

(368) $*$

(369) (a) 30°, 150° (b) 45°, 315° (c) 45°, 225° (d) 60°, 240° (e) 30°, 330° (f) 45°, 135° (g) 60°, 300° (h) 60°, 120° (i) 30°, 210° (j) 120°, 240° (k) 135°, 315° (l) 210°, 330° (m) 225°, 315° (n) 135°, 225° $(\tilde{n})$ 150°, 330° (o) 120°, 300° (p) 150°, 210° (q) 30°, 150°

(370) (a) 90° (b) 0° (c) 0°, 180° (d) 90°, 270° (e) 270° (f) 180° (g) 0°, 180° (h) 90°, 270°

(371) (a) $13^\circ 27' 1''$. $166^\circ 32' 59''$ (b) $58^\circ 44' 54''$, $301^\circ 15' 6''$ (c) $67^\circ 54' 29''$, $247^\circ 54' 29''$ (d) $107^\circ 55' 36''$, $252^\circ 4' 24''$ (e) $117^\circ 18' 42''$, $297^\circ 18' 42''$ (f) $198^\circ 49' 35''$, $341^\circ 10' 25''$ (g) $82^\circ 17' 14''$, $277^\circ 42' 46''$ (h) $19^\circ 2' 14''$, $199^\circ 2' 14''$

(372) $x = 132^\circ 28' 52''$, $\cos x = -0{,}6753$, $\operatorname{tg} x = -1{,}0920$

(373) $x = 306^\circ 52' 11''$, $\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$

(374) $x = 108^\circ 26' 6''$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{sen} x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(375) (a) $\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (b) $\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ (c) $\operatorname{sen} 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ (d) $\operatorname{sen} 22°30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$, $\cos 22°30' = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$, $\operatorname{tg} 22°30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

(376) (a) $x = 105° \pm 180°K$, $x = 165° \pm 180°K$ (b) $x = 22°30' \pm 180°K$, $x = 157°30' \pm 180°K$ (c) $x = 60° \pm 180°K$, $x = 150° \pm 180°K$ (d) $x = 50° \pm 120°K$, $x = 70° \pm 120°K$

(377) $x = 330°26'53''$, $x = 103°17'30''$

(378) (a) $x = 30°$, $x = 150°$ (b) $x = 72°53'8''$, $17°6'52''$ (c) $x = 135°$, $x = 315°$ (d) $x = 45°$, $x = 225°$

(379) (a) $x = 0$, $x = 120°$, $x = 240°$ (b) $x = 21°28'15''$, $x = 158°31'45''$, $x = 223°4'46''$, $x = 316°55'14''$ (c) $x = 19°28'16''$, $x = 160°31'44''$, $x = 270°$ (d) $x = 33°41'24''$, $x = 213°41'24''$, $x = 153°26'6''$, $X = 333°26'6''$

(380) (a) $x = 120°$, $x = 240°$ (b) $x = 0°$, $x = 180°$, $x = 45°$. $x = 225°$, $x = 135°$, $x = 225°$ (c) $x = 45°$, $x = 225°$, $x = 26°33'54''$, $x = 206°33'54''$ (d) $x = 45°$, $x = 225°$, $x = 120°57'50''$, $x = 300°57'50''$

(381) (a) $x = 0°$, $x = 180°$, $x = 138°35'25''$, $x = 221°24'35''$ (b) $x = 0°$, $x =° 80°$, $x = 120°$, $x = 240°$ (c) $x = 73°40'30''$, $x = 253°40'30''$, $x = 30°21'40''$, $x = 210°21'40''$ (d) $x = 63°26'6''$, $x = 243°26'6''$, $x = 33°41'24''$, $x = 213°41'24''$

(382) $*$

(383) $*$

(384) (a) $x = 45°$, $x = 315°$, $x = 135°$, $x = 225°$ (b) $x = 0°$, $x = 90°$, $x = 180°$, $x = 270°$ (c) $x = 45°$, $x = 225°$, $x = 210°$, $x = 330°$ (d) $x = 90°$, $x = 210°$, $x = 330°$

(385) (a) $x = 0°$, $x = 180°$, $x = 120°$, $x = 240°$ (b) $x = 60°$, $x = 300°$, $x = 180°$ (c) $x = 0°$, $x = 180°$, $x = 30°$, $x = 150°$ (d) $x = 0°$, $x = 60°$, $x = 300°$

(386) (a) $x = 90°$, $x = 30°$, $x = 150°$ (b) $x = 0°$, $x = 270°$ (c) $x = 0°$ (d) $x = 0°$, $x = 67°22'48''$

(387) (a) $x = 180°$, $x = 241°55'39''$ (b) $x = 270°$, $x = 36°52'12''$ (c) $x = 318°24'24''$, $x = 115°19'59''$ (d) $x = 120°$, $x = 150°$, $x = 300°$, $x = 330°$

(388) (a) $x = 15°$, $x = 75°$, $x = 135°$, $x = 195°$, $x = 255°$, $x = 315°$ (b) no tiene solución (c) $x = 150°$, $x = 330°$ (d) $x = 45°$, $x = 225°$

(389) (a) $x = 0°$, $x = 53°7'48''$ (b) $x = 0°$, $x = 90°$, $x = 180°$, $x = 270°$ (c) $x = 36°$, $x = 108°$, $x = 180°$, $x = 252°$, $x = 324°$ (d) $x = 0°$, $x = 60°$, $x = 120°$, $x = 180°$, $x = 240°$, $x = 300°$

(390) (a) $x = 0°$, $x = 45°$, $x = 120°$, $x = 135°$, $x = 225°$, $x = 240°$, $x = 315°$ (b) $x = 90°$, $x = 270°$, $x = 22°30'$, $x = 112°30'$, $x = 202°30'$, $x = 292°30'$

(391) 368 m

(392) 2,10 radianes

(393) $*$

(394) $*$

(395) $\frac{3\pi}{4}$

(396) $*$

(397) $\frac{4}{5}$, $-\frac{44}{125}$

(398) $A = 2{,}98$, $\omega = 0{,}0172$, $\varphi = -4{,}53$, $y_0 = 12{,}16$, $f(80) = 12{,}2$

(399) (a) 220 y -220 (b) 220 (c) $\frac{1}{50}$

(400) (a) $A = 6{,}6$, $\omega = \pi/6$, $\varphi = -2{,}75$, $h_0 = 7{,}80$ (b) 2h15m (c) (0h00m, 0h05m), (4h25m, 12h05m), (16h25m, 24h00m)

(401) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

(402) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(403) $*$

(404) 0,432, 2,68, 4,45, 5, 12

(405) $\frac{5}{3}$, 3

(406) $\frac{\pi}{2}$

(407) $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

(408) 0, 0,294, 0,536, 1,02, 1, 32

(409) 146 cm^2

(410) 19,7 cm^2

(411) 156°, 11,8 m^2

(412) 0, $\frac{2\pi}{3}$, 2π

(413) $*$

(414) (a) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ (b) $-\frac{24}{25}$ (c) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

(415) $*$

(416) $*$

(417) $*$

(418) (a) 110° (b) 1,90 m (c) 0,428 m

(419) $*$

(420) $*$

8. Geometría

421. Hallar la ecuación en forma explícita de la recta que pasa por los puntos $P(3,2)$ y $Q(-1,0)$.

422. Dadas las rectas: $y = 5 - 2x$; $y = 2x - 3$, determinar las coordenadas de su punto de intersección.

423. La abscisa y ordenada en el origen de una recta son 3 y 4 respectivamente. Hallar su ecuación en forma explícita.

424. Encontrar la ecuación de la recta cuyas abscisa y ordenada en el origen, son respectivamente, 3 y -2.

425. Averiguar si los puntos $A(1,3)$, $B(2,6)$ y $C(3,9)$ forman triángulo.

426. Averiguar si los puntos $A(1,1)$, $B(-1,-5)$ y $C(0,3)$ están alineados.

427. Determinar la posición relativa de las rectas $2x + y - 1 = 0$, $3x - 2y = 0$, $x + y + 3 = 0$.

428. Determinar la posición relativa de las rectas $3x - 2y + 6 = 0$, $2x - y + 4 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$.

429. Dadas las rectas $x - 2y + 5 = 0$; $3x + y - 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y por el punto $P(1,-1)$.

430. Un segmento tiene por extremos $A(-3,-1)$ y $B(4,3)$. Hallar sobre él un punto tal que la razón de sus distancias a los extremos sea 2 a 3.

431. Calcular el menor ángulo que forman las rectas $x + 5y - 2 = 0$; $3x + 2y - 1 = 0$.

432. Hallar el ángulo que forman la recta $x + 3y = 4$, con la $3x - y = 7$.

433. Las rectas $mx + 2y = 3$; $5x + ny = 7$ se cortan en el punto $P(-1,3)$. Hallar la tangente del menor de los ángulos que forman.

434. Calcular la tangente del ángulo que forman las. rectas $x - 3y + 2 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$.

435. Hallar las tangentes de los ángulos del triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(5,3)$, $C(2,15)$.

436. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $P(-8,9)$ forman un ángulo de 45 con la recta $6x - 5y = 17$.

437. Hallar las ecuaciones de las, rectas que pasan por $P(2,3)$ y forman ángulo de 45 con la recta $3x - y + 4 = 0$.

438. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-3,0)$ y forman con la $3x - 5y + 9 = 0$ un ángulo cuya tangente es $1/3$.

439. Determinar los valores de a y b a fin de que las rectas $ax + by - 1 = 0$; $2x - 3y + 4 = 0$ sean paralelas y que la primera pase por el punto $(1,1)$.

440. Calcular los coeficientes m y n de las rectas $3x - my = 2$; $nx + 4y = 5$, sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $P(2,2)$.

441. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(2,3)$ y cumple:
    (a) Ser paralela al eje de abscisas.
    (b) Ser paralela al eje de ordenadas.
    (c) Ser paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
    (d) Pasar por el origen.

442. Hallar la ecuación de la recta paralela a la $2x - y = 0$, tal que su abscisa en el origen vale -1.

443. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,-1)$ y es paralela a la recta $x - 3y = 0$.

444. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M(4,6)$, $N(2,1)$ y $P(5,1)$. Hallar las ecuaciones de los lados.

445. Con el punto $P(2,3)$ y la recta $4x-3y+1=0$ hallar:
   (a) Ecuación de la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de ordenadas.
   (b) Ecuación de la recta que pasa por el punto y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
   (c) Posición de estas dos rectas y la dada.

446. Determinar a y b para que la ecuación $x+ay+1=0$ y la $bx+3y-1=0$, representen una misma recta.

447. Hallar los valores de a y b para los cuales representan la misma recta las ecuaciones $2ax+2y-5=0$; $x-7y+7b=0$.

448. Dadas las rectas $2x+y-1=0$, $x-y-2=0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y es perpendicular a la $3x+6y-1=0$.

449. Dadas las rectas $6x+5y+7=0$; $ax+2y+3=0$; calcular el valor de a
   (a) Para que sean paralelas.
   (b) Para que sean perpendiculares.

450. Determinar a y b sabiendo que las rectas $2x+3y-b=0$; $6x-ay-1=0$, son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $P(1,0)$.

451. Dada la recta $ax+by=1$, determinar a y b, sabiendo que es perpendicular a $2x+4y=11$ y pasa por el punto $P(1,3/2)$.

452. Las rectas $ax-y=4$; $x+b=y$, son perpendiculares y cortan al eje de abscisas en dos puntos distantes 5 unidades. Calcular a y b (dos soluciones).

453. Calcular los coeficientes a y b de las ecuaciones $ax-2y=0$; $bx+6y=5$, sabiendo que las rectas que representan son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $(2,3)$.

454. Calcular b a fin de que las rectas $3x+4y=12$; $2x-by=0$ sean perpendiculares.

455. En las rectas $x+ay+1=0$; $3x+y+b=0$ determinar a y b a fin de que sean
   (a) Paralelas,
   (b) Perpendiculares.

456. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los $A(3,2)$ y $B(-1,4)$.

457. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(-1,3)$ y $B(0,-2)$.

458. Hallar la mediatriz del segmento determinado por los puntos en que la recta $x+2y-4=0$ corta a los ejes de coordenadas.

459. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que al cortar al eje de abscisas y a la bisectriz de los ángulos del 2° y 4° cuadrante determina la recta $3x+2y=6$.

460. Determinar el punto simétrico del $P(2,5)$ respecto a la recta $5x+y=2$.

461. Determinar el punto simétrico del $A(3,2)$ respecto a la recta $2x+y=3$.

462. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3)$ y cumple:
   (a) Ser perpendicular a la recta $3x-y+2=0$.
   (b) Ser paralela a la $x+4y-1=0$.

463. Hallar las ecuaciones de las rectas perpendiculares a las bisectrices de los ejes y que distan del origen de coordenadas 3 unidades.

464. ¿En qué punto de la recta $3x+4y=30$ tendrá qué reflejarse un rayo luminoso que parte del punto $F(5,10)$ para que después de la reflexión pase por el punto $A(13,4)$?

465. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las $5x-2y=8$; $4x+9y=10$ y es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

466. Un triángulo isósceles tiene por base el segmento que une los puntos $A(1,-2)$; $B(6,3)$ y el otro vértice está situado en la recta $3x-y+8=0$. Hallar
   (a) Las coordenadas del tercer vértice.
   (b) La altura del triángulo.

467. Hallar la ecuación de la perpendicular a la $2x-3y+7=0$ y que la corte en el punto medio del segmento que sobre ésta interceptan los ejes de coordenadas.

468. Determinar las coordenadas de los vértices B, D del cuadrado que tiene por diagonal AC siendo $A(1,2)$, $C(9,6)$.

469. Hallar la distancia del punto $P(0,2)$ a la recta $3x-4y-2=0$.

470. Hallar la distancia del punto $P(2,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(-2,-3)$.

471. Hallar la distancia del punto $P(3,5)$ a la recta que corta a las partes negativas de los ejes coordenados a distancias 3 y 5 respectivamente del origen.

472. Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta AB siendo $A(1,3)$, $B(-1,-1)$ en el punto A y la distancia de B a esta perpendicular.

473. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(2,1)$ y distan 3 unidades de $A(2,-4)$.

474. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(1,1)$ y distan 2 unidades del punto $A(2,3)$.

475. Hallar la ecuación de cada una de las paralelas a la $4x-3y+4=0$ y que distan de ella 1 unidad.

476. Calcular la distancia que separa a las paralelas $4x+3y+4=0$, $4x+3y-6=0$.

477. Examinar si las rectas $3x+4y+3=0$; $6x+8y+11=0$, son paralelas y en caso afirmativo calcular la distancia entre ambas.

478. Hallar las coordenadas de los puntos situados, en la recta $x+2y-3-0$ y que disten 2 unidades de la $4x-3y+9=0$.

479. La distancia del punto $A(1,1)$ a una recta es 1 y la tangente del ángulo que forma esa recta con el eje de abscisas $12/5$. Hallar la ecuación de la recta (dos soluciones).

480. Dados los puntos $A(-4,2)$, $B(2,-5)$ se trazan por el punto A dos rectas cuyas distancias al B sean ambas de 5 unidades y se pide calcular el menor ángulo que forman dichas rectas.

481. La razón entre la longitud del segmento que una recta de pendiente negativa determina con el eje de abscisas y el que determina con el eje de ordenadas es $8/15$ y la distancia de la recta al origen es 1. Hallar la ecuación de la recta (dos soluciones).

482. Hallar la mediatriz del segmento que determina la recta $3x+2y=6$ al cortar al eje de ordenadas y a la bisectriz del cuarto cuadrante.

483. Calcular las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-2)$.

484. Calcular las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,2)$ y $C(6,4)$.

485. Determinar las coordenadas del circuncentro del triángulo formado por las rectas $y=4$, $x=0$, $x=y$.

486. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(2,0)$, $B(-2,-2)$ y $C(1,-3)$.

487. Calcular las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(5,1)$ y $C(3,7)$.

488. Siendo $A(-3,3)$, $B(3,6)$, $C(3,-6)$ los vértices de un triángulo, determinar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro.

489. Dado el triángulo $A(3,1)$, $B(-3,3)$, $C(3,5)$, comprobar que la distancia del baricentro al punto medio de cada lado, es la tercera parte de la longitud de la mediana correspondiente.

490. Las coordenadas de dos vértices de un triángulo son $A(4,1)$, $B(0,3)$ y las del baricentro $G(3,4)$. Hallar las coordenadas de tercer vértice.

491. Los vértices de un triángulo son $A(1,5)$, $B(7,3)$ y $C(3,-1)$. Calcular la ecuación y la longitud de la altura relativa al lado AB.

492. Los vértices de un triángulo son $A(2,0)$, $B(3,2)$ y $C(4,-3)$. Hallar las ecuaciones de las alturas.

493. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $y=0$, $3x-4y=0$; $15x+8y=420$. Hallar las coordenadas de los vértices y la ecuación de la altura correspondiente a la base $y=0$.

494. Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,2)$ y $C(5,8)$.

495. Hallar las ecuaciones de las alturas y las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(0,-1)$, $B(-3/2,1)$, $C(-3,2)$.

496. En el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(-1,-2)$ y $C'(5,0)$ hallar las coordenadas del baricentro G, del circuncentro C y del ortocentro H y la posición relativa de estos puntos.

497. En el triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(3,0)$ y $B(0,3)$ hallar las coordenadas del ortocentro, circuncentro y baricentro y comprobar que los tres puntos están en la línea recta.

498. Hallar las ecuaciones de las bisectrices del ángulo formado por las rectas $3x-4y=2$; $8x-6y=7$.

499. Hallar las ecuaciones de las bisectrices del ángulo que forman las rectas $x+2y-5=0$; $2x-y+3=0$.

500. Dadas las rectas $x-2y=4$ e $y-2x=4$ calcular otra recta que pasa por $P(1,1)$ y forma con las anteriores ángulos iguales.

501. Hallar las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son $A(-3,1)$, $B(8,1)$ y $C(-8,-11)$.

502. Dadas las rectas: $4x-3+1=0$; $y-7=0$; $x+4=0$; determinar las ecuaciones de las bisectrices del triángulo que forman y comprobar que concurren en un punto.

503. Hallar el área del triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(6,3)$, $C(-1,4)$.

504. Hallar el área del triángulo de vértices $A(8,0)$, $B(8,3)$ y $C(1,0)$.

505. Hallar a con la condición de que el triángulo de vértices $O(0,0)$, $P(3,2)$, $Q(a,0)$ tenga por área 3.

506. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento determinado por los puntos $A(-1,-1)$ y $B(3,3)$ y su vértice C está sobre la recta $y-3x-4=0$. Determinar su área.

507. Dado el punto $A(1,3)$ se determina su simétrico B respecto de la bisectriz del primer cuadrante, después se halla el punto C simétrico del B respecto al eje de abscisas y por último el punto D simétrico del anterior respecto del eje de ordenadas. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$.

508. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(4,5)$ y forma con los semiejes OX, OY un triángulo de 40 unidades de área.

509. Hallar m sabiendo que vale 20 el área del triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(4,-5)$, $C(4,m)$.

510. De un paralelogramo $ABCD$ se conoce el vértice $A(3,2)$ y el $B(6,3)$, la pendiente del lado AD que vale 1, y la de la diagonal BD, que vale $5/7$; hallar:
    (a) Las ecuaciones de los lados del paralelogramo.
    (b) Las coordenadas de los vértices C y D.
    (c) El punto de intersección de las diagonales.

511. Se dan los puntos $A(-1,12)$ y $B(9,28)$, se determinan las coordenadas del punto A' simétrico del A respecto al eje de las x y las del punto B' simétrico del B respecto al eje de las y. Se pide:

(a) Hallar las ecuaciones de las rectas AB' y $A'B$.

(b) Las coordenadas del punto C en que se cortan las rectas anteriores.

(c) Hallar la distancia del punto C a la recta AB.

512. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(1,1)$, $B(2,2)$ y que se halla situado sobre la recta $x-3y-3=0$.

513. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(-1,2)$, $B(-2,0)$ y que se halla sobre la recta $2x-y-1=0$.

514. Dada la recta $3x-4y-2=0$, y el punto $P(2,1)$ sobre ella, determinar en la recta los puntos que distan 5 unidades del dado.

515. Dada la recta $x+5y+3=0$ y un punto P sobre ella de ordenada -1, determinar los puntos de dicha recta que distan $\sqrt{26}$ del P.

516. Sean las rectas paralelas $ax+by+3=0$; $3x+2y-c=0$. La segunda pasa por el punto $P(1,-1)$. Los puntos en que cortan al eje de abscisas distan 10 unidades. Determinar a, b y c (dos soluciones).

517. Se tiene un punto A de coordenadas $(0,3)$ y otro B de coordenadas $(3,2)$. Situar en el eje X otro C de tal modo que si AC es el rayo incidente en OX, el CB sea el reflejado.

518. Un vértice de un triángulo isósceles está en el origen de coordenadas partiendo de él los lados iguales. Otro vértice es el punto $A(0,5)$. Calcular las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está situado en la recta $y=x$.

519. Hallar los vértices de los triángulos equiláteros que tienen un vértice en el punto $A(3,-3)$ y una altura sobre la recta $x-y=0$.

520. La base de un triángulo isósceles ABC es el segmento que une los puntos $B(3,1)$ y $C(-2,3)$ y el vértice A está sobre el eje de ordenadas. Calcular las ecuaciones de los tres lados del triángulo.

521. Dadas las coordenadas $A(-1,1)$ del vértice del ángulo recto de un triángulo y sabiendo que los catetos del triángulo dado son paralelos a los ejes y miden 6 y 13, se desea hallar la ecuación de la altura correspondiente a la hipotenusa (cuatro soluciones).

522. Sean $A(1,0)$, $B(3,1)$ los vértices de los ángulos agudos de un triángulo isósceles rectángulo. Calcular las coordenadas del tercer vértice (dos soluciones).

523. Un triángulo rectángulo, de vértice el origen de coordenadas, tiene un cateto de longitud $6\sqrt{2}$, en la recta $x-y=0$ y el otro de longitud $8\sqrt{2}$, en la $x+y=0$. Determinar la ecuación de la altura correspondiente a la hipotenusa (dos soluciones).

524. Determinar las coordenadas de los vértices B y D de un cuadrado que tiene por diagonal AC, $A(1,2)$, $C(9,6)$. Hallar la ecuación de esta diagonal y la de BD.

Soluciones:

421. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
422. $(2,1)$
423. $y=-\frac{4}{3}x+4$
424. $y=\frac{2}{3}x-2$
425. no
426. no
427. se cortan dos a dos en puntos distintos
428. se cortan en un punto
429. $23x+10y-13=0$
430. $(-\frac{1}{5},\frac{3}{5})$
431. 45°

432. $90°$
433. $\frac{2}{23}$
434. $\frac{9}{13}$
435. 3, 4 y $\frac{7}{11}$
436. $y - 9 = -11(x - 8)$ e $y - 9 = \frac{1}{11}(x - 8)$
437. $y - 3 = -2(x - 2)$ e $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$
438. $y = \frac{2}{9}(x + 3)$ e $y = \frac{7}{6}(x + 3)$
439. $a = -2$, $b = 3$
440. $m = 1$, $n = -12$
441. (a) $y = 3$ (b) $x = 2$ (c) $y = x + 1$ (d) $y = \frac{3}{2}x$
442. $y = 2x + 2$
443. $y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$
444. $y - 1 = \frac{5}{2}(x - 5)$, $y - 1 = -5(x - 2)$, $y = 6$
445. (a) $x = 2$ (b) $x - y + 1 = 0$ (c) se cortan en $(2, 3)$
446. $a = -3$, $b = -1$
447. $a = -\frac{1}{7}$, $b = \frac{5}{2}$
448. $y = 2x - 3$
449. (a) $a = \frac{12}{5}$ (b) $a = -\frac{5}{3}$
450. $a = 4$, $b = 2$
451. $a = 4$, $b = -2$
452. $a = -1$, $b = -1$ o $a = -1$, $b = 9$
453. $a = 3$, $b = 4$
454. $b = \frac{3}{2}$
455. (a) $a = \frac{1}{3}$ (b) $a = -3$
456. $y = 2x + 1$
457. $x - 5y + 3 = 0$
458. $y = 2x - 3$
459. $2x - 3y - 17 = 0$
460. $P'(-3, 4)$
461. $A'(-1, 0)$
462. (a) $x + 3y = 11$ (b) $x + 4y = 14$
463. $x + y = 3\sqrt{2}$, $x + y = -3\sqrt{2}$, $x - y = 3\sqrt{2}$, $x - y = -3\sqrt{2}$
464. $(6, 3)$
465. $53x - 53y - 74 = 0$
466. (a) $(-1, 5)$ (b) $\frac{9}{\sqrt{2}}$
467. $105x + 70y + 102 = 0$
468. $(3, 8)$, $(7, 0)$
469. 2
470. 2
471. $\frac{45}{\sqrt{34}}$
472. $x + 2y - 7 = 0$, $3\sqrt{5}$
473. $4x - 3y - 5 = 0$, $4x + 3y - 11 = 0$
474. $y = 1$, $4x + 3y - 7 = 0$
475. $4x - 3y + 9 = 0$, $4x - 3y - 1 = 0$
476. 2
477. sí, $\frac{1}{2}$
478. $(1, 1)$, $\left(-\frac{29}{11}, \frac{31}{11}\right)$
479. $12x - 5y + 6 = 0$, $12x - 5y - 20 = 0$
480. $65{,}68°$
481. $15x + 8y + 17 = 0$, $15x + 8y - 17 = 0$

482. $12x - 18y - 63 = 0$
483. $(0,0)$
484. $(-3,11)$
485. $(2,2)$
486. $(0,-1)$
487. $(3,3)$
488. $x + 2y - 3 = 0$, $15x - 6y - 9 = 0$, $21x + 6y - 27 = 0$, $(1,1)$
489.
490. $(5,8)$
491. $y = 3x - 10$, $\frac{8\sqrt{10}}{5}$
492. $x - 5y - 2 = 0$, $2x - 3y = 0$, $x + 2y + 2 = 0$
493. $(0,0)$, $(28,0)$, $(20,15)$, $x = 20$
494. $\left(5, \frac{7}{2}\right)$
495. $6x - 6y + 15 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$, $3x - 2y - 2 = 0$, $\left(7, \frac{19}{2}\right)$
496. $G\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{45}{26}, -\frac{5}{26}\right)$ $H\left(\frac{20}{13}, \frac{18}{13}\right)$, los tres puntos están alineados
497. $G(1,1)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $H(0,0)$
498. $2x + 2y - 3 = 0$, $14x - 14y - 11 = 0$
499. $x - 3y + 8 = 0$, $3x + y - 2 = 0$
500. $y = x$, $y = -x + 2$
501. $(-1,-2)$
502. $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $y = -x + 3$, $y = 3x + 7$
503. 9
504. $\frac{11}{2}$
505. ± 3
506. 6
507. 14
508. $5x + 4y = 40$
509. $m = 15$, $m = -25$
510. (a) $x - 3y + 3 = 0$, $x - 3y - 5 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - y - 3 = 0$ (b) $(-1,-2)$, $(2,-1)$ (c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
511. (a) $2x + y - 10 = 0$, $4x - y - 8 = 0$ (b) $(3,4)$ (c) $\frac{72}{\sqrt{89}}$
512. $(3,0)$
513. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
514. $(6,4)$, $(-2,-2)$
515. $(7,-2)$, $(-3,0)$
516. $a = -\frac{9}{31}$, $b = -\frac{6}{31}$, $c = 1$ ó $a = \frac{9}{29}$, $b = \frac{6}{29}$, $c = 1$
517. $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$
518. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ o $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$
519. $B(-3,3)$, $C\left(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ ó $B(-3,3)$, $C\left(-3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right)$
520. $2x + 5y - 11 = 0$, $9x + 8y - 6 = 0$, $x - 12y + 9 = 0$
521. $6x - 13y + 19 = 0$, $6x + 13y - 7 = 0$ (la misma recta es altura de dos triángulos)
522. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ó $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
523. $7x - y = 0$, $x - 7y = 0$
524. $(3,8)$, $(7,0)$

9. Circunferencia

525. Escribir la ecuación de la circunferencia que satisface las siguientes condiciones:
   (a) $C(0,0)$, $r=5$
   (b) $C(4,-2)$, $r=8$
   (c) $C(4,-2$ y pasa por $P(1,3)$
   (d) $C(-5,6)$ y es tangente al eje OX
   (e) $C(3,4)$ y es tangente a $2x-y+5=0$
   (f) Centro en $y=x$, tangente a ambos ejes y $r=4$.

526. Describir las circunferencias dadas por las siguientes ecuaciones:
   (a) $x^2+y^2-10x+8y+5=0$
   (b) $x^2+y^2-6x-8y+25=0$
   (c) $x^2+y^2+4x-6y+24=0$
   (d) $4x^2+4y^2+80x+12y+265=0$

527. Demostrar que las circunferencias $x^2+y^2-16x-20y+115=0$ y $x^2+y^2+8x-10y+5=0$ son tangentes y encontrar el punto de tangencia.

528. Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5,1)$, $B(4,6)$ y $C(2,-2)$.

529. Escribir las ecuaciones de las circunferencias de radio $\sqrt{13}$ y tangentes a $2x-3y+1=0$ en $(1,1)$.

530. Escribir las ecuaciones de las circunferencias que satisfacen las siguientes condiciones:
   (a) Pasa por $(2,3)$ y $(-1,6)$ y tiene su centro en $2x+5y+1=0$
   (b) Tangente a $5x-y-17=0$ en $(4,3)$ y tangente a $x-5y-5=0$.
   (c) Tangente a $x-2y+2=0$ y a $2x-y-17=0$ y pasa por $(6,-1)$.
   (d) Con centro en el primer cuadrante y tangente a las rectas $y=0$, $5x-12y=0$, $12x+5y-39=0$.

531. Calcular las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-2x+8y-23=0$:
   (a) en el punto $(3,-10)$
   (b) de pendiente igual a 3
   (c) por el punto exterior $(8,-3)$

532. Calcular la longitud de la tangente:
   (a) A la circunferencia $x^2+y^2-2x+8y-23=0$ desde el punto $P(8,-3)$.
   (b) A la circunferencia $4x^2+4y^2-2x+5y-8=0$ desde el punto $P(-4,4)$.

533. Para la circunferencia $x^2+y^2+6x-8y=0$, calcular los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y=mx-\frac{1}{3}$:
   (a) cortan a la circunferencia en dos puntos
   (b) son tangentes a la circunferencia
   (c) no cortan a la circunferencia

534. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias que satisfacen las siguientes condiciones:
   (a) tienen un centro común en $(-2,3)$
   (b) tienen radio 5
   (c) tienen centro en el eje OX

535. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias que son tangentes a las circunferencias tangentes $x^2+y^2-16x-20y+115=0$ y $x^2+y^2+8x-10y+5=0$ en su punto común y determinar la circunferencia de la familia que tiene la siguiente propiedad:
   (a) centro en $x+4y+16=0$
   (b) radio igual a $\frac{1}{2}$

536. Para cada par de circunferencias:

(a) $K_1 : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0,\ K_2 : 4x^2 + 4y^2 - 10x - 10y - 13 = 0$

(b) $K_1 : x^2 + y^2 - 12x - 16y - 125 = 0,\ K_2 : 3x^2 + 3y^2 - 60x - 16y + 113 = 0$

calcular la ecuación del eje radical. Sin calcular las coordenadas de sus puntos de intersección, demostrar que las circunferencias primeras se cortan en dos puntos y las segundas son tangentes internas

Soluciones:

(525) (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 64$ (c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$ (d) $(x+5)^2 + (y-6)^2 = 36$ (e) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{49}{5}$ (f) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16,\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

(526) (a) centro: $(5, -4)$, radio: 6 (b) centro: $(3, 4)$, radio: 0 (c) conjunto vacío (d) centro: $(-10, -\frac{3}{3})$, radio: 6

(527) $\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$

(528) $3x^2 + 3y^2 - 2x - 16y - 52 = 0$

(529)

(530) (a) $*$ (b) $*$ (c) $*$ (d) $*$

(531) (a) $*$ (b) $*$ (c) $*$

(532) (a) $*$ (b) $*$

(533) (a) $*$ (b) $*$ (c) $*$

(534) (a) $*$ (b) $*$ (c) $*$

(535) (a) $*$ (b) $*$

(536) Calcular los radios y la distancia entre los centros

10. Números complejos

537. Calcular:

   a) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i)$
   b) $3+2i(-1+i)-(5-4i)$
   c) $-2i-(4-i)5i$
   d) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2$

538. Calcular en forma binómica:

   a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$
   b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$
   c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$
   d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

539. Calcular:

   a) $(1-i)(4-2i)-2i(1+3i)$
   b) $\dfrac{1+2i}{2-i}(2+i)+\dfrac{1-2i}{2+i}(2-i)$
   c) $\dfrac{2-i}{3-i}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1+8i}{1+3i}\right)$
   d) $\dfrac{(2+i)^2-(1-i)^2}{1-(3/2)i}$
   e) $\dfrac{2-2i}{i}+\dfrac{3-5i}{2-i}$

540. Calcular: a) i^{37} b) i^{126} c) i^{87} d) i^{64} e) i^{-216}

541. Dado el número complejo:

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

   probar que:

   a) $1+z+z^2=0$
   b) $\dfrac{1}{z}=z^2$

542. Calcular $m,n\in\mathbb{R}$ para que se verifique la igualdad:

$$(2+mi)+(n+5i)=7-2i$$

543. Determinar $k\in\mathbb{R}$ para que se verifique:

$$\frac{k+i}{1+i}=2-i$$

544. Calcular $a,b\in\mathbb{R}$ para que se cumpla:

$$(a+bi)^2=3+4i$$

545. Dados los complejos $2-ai$ y $3+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, hallar a y b para que su producto sea igual a $8+4i$.

546. Calcular $a,b\in\mathbb{R}$ para que se cumpla:

$$a-3i=\frac{2+bi}{5-3i}$$

547. Hallar el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que el producto $(3-6i)(4+bi)$ sea: a) Un número imaginario puro b) Un número real

548. Determinar $a\in\mathbb{R}$ para que $(a-2i)^2$ sea un número imaginario puro.

549. Calcular $x\in\mathbb{R}$ para que el producto $(x+2+ix)(x-i)$ sea un número real.

550. Expresar los siguientes números complejos en forma polar:

a) $1-i$ b) $-1+i$ c) $\sqrt{3}+i$ d) $-\sqrt{3}-i$

e) -4 f) $2i$ g) $-\frac{3}{4}i$ h) $2+2\sqrt{3}i$

551. Expresar en forma binómica:

a) 2_{45° b) $3_{\frac{\pi}{6}}$ c) $\sqrt{2}_{180^\circ}$ d) 17_{0°

e) $1_{\frac{\pi}{2}}$ f) 5_{210° g) 1_{150° h) 4_{120°

552. Expresar en forma polar:

a) $(-1-i)^5$ b) $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ e) $(-2\sqrt{3}+2i)^6$ f) $(3-4i)^3$

553. Calcular y representar gráficamente el resultado:

a) $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ b) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

554. Calcular y representar las soluciones:

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) $\sqrt[3]{8i}$

555. Calcular pasando previamente a la forma polar:

a) $(1+i\sqrt{3})^5$ b) $(-1-i\sqrt{3})^6(\sqrt{3}-i)$

c) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ d) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

e) $\sqrt[6]{-64}$ f) $\sqrt{-1-i}$

g) $\sqrt[3]{-i}$ h) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

556. Calcular $m \in \mathbb{R}$ para que el número complejo $3-mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$.

557. Hallar dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\frac{\pi}{3}$ y la suma de sus módulos 8.

558. El producto de dos números complejos es $2i$ y uno de ellos es el doble del cubo del otro. Calcularlos.

559. El producto de dos números complejos es -8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcularlos.

560. Demostrar que el módulo de

$$z = \frac{1+xi}{1-xi}; \qquad x \in \mathbb{R}$$

es igual a 1.

561. La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

562. Calcular el lado del triángulo equilátero que tiene como vértices los afijos de las raíces cúbicas de $-2-2i$.

563. La ecuación $z^3-2z^2+4z-8=0$ se verifica para $z=2$, hallar las otras raíces.

564. Resolver: $(z+i)^4-(z-i)^4=0$.

565. Un triángulo tiene por vértices los afijos de las raíces de la ecuación $z^3-3z^2+4z-12=0$. Hallar las coordenadas de los citados vértices.

566. Calcular el área del triángulo, cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

567. Hallar el área del cuadrilátero, cuyos vértices son los afijos de las raíces de la ecuación $z^4+4=0$.

568. Calcular el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de -64.

569. Calcular $\sqrt[4]{1}$ y $\sqrt[4]{-1}$. Al efectuar la representación gráfica resulta una estrella de ocho puntas. Determinar su área.

570. La suma de dos complejos es $3+2i$ y la parte real del segundo es 2. Hallar dichos números, sabiendo que el cociente del primero por el segundo es imaginario puro.

571. Hallar dos complejos, sabiendo que su suma vale 3 y su cociente es i.

572. Hallar dos números complejos, cuya suma sea $1+4i$ y cuyo cociente sea i.

573. Hallar dos complejos sabiendo que su suma es real y vale 5, su cociente es imaginario puro y el módulo del dividendo es doble del módulo del divisor.

574. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$, y el del segundo 5. Hallar estos complejos y determinar su producto y su cociente.

575. Hallar dos complejos conjugados tales, que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero y su área valga $2\sqrt{3}$.

576. El número $\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})$ es una raíz quinta de un número complejo z. Sin calcular z, obtener las demás raíces quintas.

577. Calcular las cuatro raíces cuartas de -81. Resolver la ecuación $(z-3)^4+81=0$.

578. Calcular la suma de la serie:

$$1+\frac{1}{3}e^{2i\varphi}+\frac{1}{9}e^{4i\varphi}+\frac{1}{27}e^{6i\varphi}+\dots$$

579. Sea $z=e^{i\varphi}$:

   a) Mediante la fórmula de Moivre demostrar que $z^n+\left(\frac{1}{z}\right)^n=2\cos(n\varphi)$

   b) Desarrollar $\left(z+\frac{1}{z}\right)^4$. A partir del desarrollo demostrar que:

$$\cos^4\varphi=\frac{1}{8}\left(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3\right)$$

580. Sea el complejo $z=1_{20^\circ}$ y $x+yi$ su forma binómica.

   a) Desarrollar la potencia $(x+yi)^3$.
   A partir del resultado anterior demostrar que $\dfrac{3x^2y-y^3}{x^3-3xy^2}=\sqrt{3}$.

   b) Demostrar que $\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 20^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 20^\circ}$.

   c) De los apartados anteriores deducir que $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$.

581. Sea $z=e^{i\varphi}$:

   a) Mediante la fórmula de Moivre, demostrar que $z^n-\left(\frac{1}{z}\right)^n=2i\operatorname{sen}(n\varphi)$.

   b) A partir del desarrollo la potencia $\left(z-\frac{1}{z}\right)^5$, demostrar que:

$$16\operatorname{sen}^5\varphi=\operatorname{sen}5\varphi-5\operatorname{sen}3\varphi+10\operatorname{sen}\varphi$$

582. A partir de la fórmula de Moivre:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \varphi + 5 \operatorname{tg}^4 \varphi}$$

Demostrar que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

583. A partir de la fórmula de Moivre demostrar que:

$$\cos 7\alpha = 64 \cos^7 \alpha - 112 \cos^5 \alpha + 56 \cos^3 \alpha - 7 \cos \alpha$$

Con ayuda del resultado anterior resolver la ecuación:

$$64 \cos^7 x - 112 \cos^5 x + 56 \cos^3 x - 7 \cos x = 1; \qquad 0 \leq x < 2\pi$$

584. Sea $z = \cos^2 \varphi + \dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} i$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

   a) Demostrar que $|z| = \cos \varphi$ y $\arg z = \varphi$.
   b) Escribir z^2 en forma polar.
   c) Encontrar los valores exactos de z para los que $|2z^2| = |z|$.

585. Considérese el complejo $w = \dfrac{z + i}{z + 2}$, donde $z = x + yi$:

   a) Probar que $\operatorname{Re} w = \dfrac{x^2 + 2x + y^2 + y}{(x+2)^2 + y^2}$ e $\operatorname{Im} w = \dfrac{x + 2y + 2}{(x+2)^2 + y^2}$.
   b) A partir del resultado anterior demostrar que:
      1) Si $\operatorname{Re} w = 1$ los puntos (x, y) se encuentran en una recta r_1. Calcular la pendiente de r_1.
      2) Si $\operatorname{Im} w = 0$ los puntos (x, y) se encuentran en una recta r_2 perpendicular a r_1.
   c) Si $\arg(z) = \arg(w) = \frac{\pi}{4}$, calcular $|z|$.

586. Considérese el complejo $z = re^{i\varphi}$:

   a) Demostrar por inducción que $(z^n)^* = (z^*)^n; \quad n \in \mathbb{Z}^+$.
   b) Demostrar el mismo resultado a partir de la fórmula de Moivre. ¿Para qué valores de n es válida la demostración?

587. Sean 1, ω y ω^* las raíces cúbicas de la unidad.

   a) Demostrar que $\dfrac{1}{1+\omega} = -\omega$ y $\dfrac{1}{1+\omega^*} = -\omega^*$.
   b) Determinar los valores de los números reales a, b y c tales que 1, $\frac{1}{1+\omega}$ y $\frac{1}{1+\omega^*}$ son ceros del polinomio $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
   c) Calcular $p(\omega)$ y $p(\omega^*)$.

588. Sean ω_1 y ω_2 dos raíces sextas consecutivas de la unidad.

   a) Demostrar que $\frac{1}{\omega_1}$ y $\frac{1}{\omega_2}$ son también raíces sextas consecutivas d e la unidad.
   b) Demostrar que ω_1, ω_2 y sus opuestas definen un rectángulo y calcular su área.

589. Obtener los valores de $n \in \mathbb{Z}$ para los que $(\sqrt{3} - i)^n$ es un número real.

590. Sea $f(z) = \ln |z| + i \arg z, \quad \arg z \in (-\pi, \pi]$:

   a) Calcular $f(i)$, $f(-i)$, $f(1+i)$ y $f(1-i)$.
   b) Demostrar que $f(z^*) = (f(z))^*$ y que si $f(z) = f(z^*)$, z es un número real.
   c) Encontrar los valores de z para los que $f(z)$ es (i) imaginario puro (ii) real negativo (iii) cero.

591. Los números $\dfrac{1-i}{4}$ y $a+ai$ son raíces enésimas consecutivas de un complejo z.

a) Encontrar los valores posibles de a y de n.

b) Calcular las restantes raíces de z.

592. Sea ω una de las raíces cúbicas de la unidad ($\omega \neq 1$). Demostrar que:

$$(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y) = x^3+y^3; \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

593. Sea $z = -\sqrt{3} - i$.

a) Calcular la raíz cúbica de z que se encuentra en el primer cuadrante.

b) Encontrar el menor entero positivo n para el que z^n es un número real positivo.

594. De la fórmula de Moivre y del desarrollo de $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^4$, deducir que:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}$$

595. Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes reales. Demostrar que si z es una raíz del polinomio, z^* también lo es.

596. Sea $z + \dfrac{1}{z} = -1$.

a) Desarrollar $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2$ y calcular el valor de $z^2+\dfrac{1}{z^2}$.

b) Calcular $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ y $z^5+\dfrac{1}{z^5}$.

597. Sean z y z^* dos complejos conjugados.

a) Demostrar que $(x-z)(x-z^*) = x^2 - 2\mathrm{Re}\,(z) + |z|^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

b) Calcular las 8 raíces de la unidad en forma binómica.

c) Escribir x^8-1 como producto de dos factores lineales y dos factores cuadráticos.

598. Sea $\omega = e^{i\alpha}$; $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

a) Demostrar que $|1+\omega| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\arg(1+\omega) = \frac{\alpha}{2}$

b) Utilizar el desarrollo de $(1+\omega)^n$ para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha) = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

c) Sea $p(z) = z^4+az^3+bz^2+cz+d$ un polinomio con coeficientes reales. Si $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = 3-i$ son dos raíces complejas de $p(z)$, calcular a, b, c y d.

599. Los puntos $A(2,1)$ y $B(4,7)$ son vértices opuestos de un hexágono regular. Calcular los otros cuatro vértices.

600. El punto $P(2,6)$ es un vértice de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de centro $C(-1,4)$. Calcular los demás vértices del pentágono.

Soluciones:

537. (a) $9+6i$ (b) $-4+2i$ (c) $-5-22i$ (d) $18+24i$

538. (a) $3+6i$ (b) $-\frac{1}{10}+\frac{4}{5}i$ (c) $-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$ (d) $-\frac{7}{10}+\frac{13}{10}i$

539. (a) $8-8i$ (b) -2 (c) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i$ (d) $-\frac{24}{13}+\frac{42}{13}i$ (e) $\frac{1}{5}-\frac{17}{5}i$

540. (a) i (b) -1 (c) $-i$ (d) 1 (e) 1

541. $*$

542. $m = -7,\, n = 5$

543. $k = 3$

544. $a = 2, b = 1,\, a = -2, b = -1$

545. $a = \frac{2}{3}, b = 3,\, a = -2, b = -1$

546. $a = \frac{11}{5}, b = -\frac{108}{5}$

547. $(a)\ b = -2\ (b)\ b = 8$

548. $a = -2,\, a = 2$

549. $x = -1,\, x = 2$

550. $(a)\ (\sqrt{2})_{315^\circ}\ (b)\ (\sqrt{2})_{135^\circ}\ (c)\ 2_{30^\circ}\ (d)\ 2_{210^\circ}\ (e)\ 4_{180^\circ}\ (f)\ 2_{90^\circ}\ (g)\ \left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}\ (h)\ 4_{60^\circ}$

551. $(a)\ \sqrt{2} + \sqrt{2}i\ (b)\ 3\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\ (c)\ -\sqrt{2}\ (d)\ 17\ (e)\ i\ (f)\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i\ (g)\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\ (h)\ -2 + 2\sqrt{3}i$

552. $(a)\ (4\sqrt{2})_{45^\circ}\ (b)\ (\sqrt[4]{2})_{75^\circ,165^\circ,255^\circ,345^\circ}\ (c)\ 2_{0^\circ,60^\circ,120^\circ,180^\circ,240^\circ,300^\circ}\ (d)\ 2_{30^\circ,150^\circ,270^\circ}\ (e)\ 4096_{180^\circ}\ (f)\ 5_{200^\circ 36' 35''}$

553. $(a)\ -1\ (b)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285^\circ}\ (c)\ \left(\frac{\sqrt[6]{2}}{5}\right)_{23^\circ 51' 18'', 143^\circ 51' 18'', 263^\circ 51' 18''}$

554. $(a)\ 2_{100^\circ,220^\circ,340^\circ}\ (b)\ 2_{45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ}\ (c)\ 2_{30^\circ,150^\circ,270^\circ}$

555. $(a)\ 16(1 + \sqrt{3}i)\ (b)\ 64(\sqrt{3} - i)\ (c)\ (\sqrt{2})_{30^\circ},\ (\sqrt{2})_{120^\circ},\ (\sqrt{2})_{210^\circ},\ (\sqrt{2})_{300^\circ}\ (d)\ -1 - i\ (e)\ 2_{30^\circ},\ 2_{90^\circ},\ 2_{150^\circ},\ 2_{210^\circ},\ 2_{270^\circ},\ 2_{330^\circ}\ (f)\ (\sqrt[4]{2})_{225^\circ/2},\ (\sqrt[4]{2})_{405^\circ/2}\ (g)\ 1_{90^\circ},\ 1_{210^\circ},\ 1_{300^\circ}\ (h)\ \sqrt{\frac{2}{3}}i,\ -\sqrt{\frac{2}{3}}i$

556. $m = \pm 4$

557. $6_{\frac{\pi}{6}},\ 2_{\frac{\pi}{6}}$. También $6_{\frac{7\pi}{6}},\ 2_{\frac{7\pi}{6}}$

558. $z = 2_{\frac{3\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}},\ z' = 1_{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}}$

559. $z = 4_{120^\circ, 0^\circ 240^\circ},\ z' = 2_{60^\circ,180^\circ,300^\circ}$

560. $*$

561. $5_{36^\circ 52' 12''}$ y $5_{-36^\circ 52' 12''}$

562. $l = 2\sqrt{3}$

563. $\pm 2i$

564. 0, 1 y -1

565. $(3, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$

566. $S = 12\sqrt{3}$

567. $S = 4$

568. $S = 6\sqrt{3}$

569. $S = 8 - 4\sqrt{2}$

570. Primera solución: $1 + (1 + \sqrt{3})i,\ 2 + (1 - \sqrt{3})i$; segunda solución: $1 + (1 - \sqrt{3})i,\ 2 + (1 + \sqrt{3})i$

571. $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i,\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

572. $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i,\ \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$

573. Primera solución: $\frac{20}{3} + \frac{10}{3}i,\ -\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i$; segunda solución $\frac{20}{3} - \frac{10}{3}i,\ -\frac{5}{3} - \frac{10}{3}i$

574. Primera solución: $2 + 3i$ y $4 - 3i$; segunda solución: $2 - 3i$ y $4 + 3i$

575. Primera solución: $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ y $\sqrt{6} - \sqrt{2}i$; segunda solución: $-\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ y $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$

576. $\left(\frac{1}{2}\right)_{48^\circ},\ \left(\frac{1}{2}\right)_{192^\circ},\ \left(\frac{1}{2}\right)_{264^\circ},\ \left(\frac{1}{2}\right)_{336^\circ}$

577. raíces: $3_{45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ}$, soluciones: $3 + 3_{45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ}$

11. Sucesiones

601. El fractal *copo de nieve* se construye de la siguiente manera: se parte de un triángulo equilátero de lado l y dividimos cada lado en tres partes iguales. Sobre la parte central de cada lado construimos un nuevo triángulo equilátero de lado $l/3$; reiteramos el proceso volviendo a construir nuevos triángulos equiláteros sobre el tercio central de cada uno de los lados de los triángulos construidos en el paso anterior. Escribir la sucesión de los perímetros de las figuras que van surgiendo al hacer esta construcción.

602. Demostrar que la sucesión

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

tiene límite 2. Averiguar a partir de qué término la distancia a 2 es menor que 0,01.

603. Si tenemos una sucesión convergente y suprimimos en ella un número finito de términos, (a) ¿cómo es la sucesión que resulta? (b) ¿y si la sucesión es divergente? (c) ¿y si es oscilante?

604. Escribir, si es posible, una sucesión (a) acotada y divergente (b) acotada y oscilante (c) no monótona y divergente (d) monótona y oscilante (e) acotada monótona y divergente.

605. Escribir una sucesión cuyo límite sea 0, cuyos términos sean todos negativos y que no sea monótona. ¿Es posible escribir una sucesión con las mismas características de la anterior y cuyo límite sea 1? ¿Por qué?

606. Calcular los límites de las siguientes sucesiones polinómicas:

(a) $\lim(3n^2 - 2n + 5)$

(b) $\lim(4 - 5n + 7n^3)$

(c) $\lim(5n^4 - 2n^3 + 3n^2 + 6n - 2)$

(d) $\lim(10 + 15n^3 - n^5)$

607. Calcula el límite de las siguientes sucesiones racionales:

(a) $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 5n + 6}$

(b) $\lim \dfrac{5n^3 - 7n + 12}{8n^3 + 6n^2 - 3n + 2}$

(c) $\lim \dfrac{4n^3 - 5n^2 + 2n + 3}{7n^2 + 3n - 8}$

(d) $\lim \dfrac{6n^2 - 7n + 10}{5n^3 + 2n^2 - 4n + 5}$

(e) $\lim \dfrac{3n^4 - 5n^2 + 4n - 2}{7n^4 + 6n^3 - 2n + 4}$

(f) $\lim \dfrac{2n^6 - 4n^3 - 8n - 6}{9n^5 + 6n^4 + 7n^3}$

(g) $\lim \dfrac{9n^4 - 6n^2 + 7}{8n^5 + 3n^3 + 8}$

(h) $\lim \dfrac{7n^9 - 4n^5 + 18}{21n^9 + 6n^6 - 5n^3}$

608. Calcula el límite de las siguientes diferencias de sucesiones divergentes:

(a) $\lim \left(\dfrac{3n^2 - 2n + 3}{2n + 1} - \dfrac{6n - 9}{4} \right)$

(b) $\lim \left(\dfrac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 1} - \dfrac{3n^2 - 4n + 1}{n + 1} \right)$

(c) $\lim \left(\dfrac{2n^2 - 4n + 3}{3n - 2} - \dfrac{4n^2 - 5}{6n + 1} \right)$

(d) $\lim \left(\dfrac{2n^3 - 3n}{n^2 + 3} - \dfrac{6n^2 - 2}{3n + 1} \right)$

609. Resolver los siguientes límites:

(a) $\lim \left(\sqrt{n^2 - 4n + 2} - n \right)$

(b) $\lim \left(\sqrt{n^2 - 9} - n \right)$

(c) $\lim \dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{n+1}$ (d) $\lim \dfrac{3n-2}{n-\sqrt{n^2-1}}$

(e) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4}-n}{\sqrt{n^2-9}-n}$ (f) $\lim \dfrac{n-\sqrt{n^2-2n+3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$

610. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$ (b) $\lim (-1)^n (n+1)$ (c) $\lim (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

(d) $\lim \left(\sqrt[3]{n^2}+\dfrac{1}{2n+3}\right)$ (e) $\lim \left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}+1\right)$ (f) $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$

(g) $\lim \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (h) $\lim \left(\dfrac{4n^2-2n}{5n^3-2}\right)^{\frac{2n+1}{n^2}}$ (i) $\lim \left(\dfrac{n-3}{2n^3-1}\right)^{2n}$

611. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim \left(1+\dfrac{8}{n}\right)^n$ (b) $\lim \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ (c) $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{3n}{4}}$

(d) $\lim \left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$ (e) $\lim \left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^n$ (f) $\lim \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n-3}$

(g) $\lim \left(1+\dfrac{5}{3n}\right)^{\frac{2n}{5}}$ (h) $\lim \left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^n$ (i) $\lim \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n$

(j) $\lim \left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)^{2n}$ (k) $\lim \left(\dfrac{n+6}{n+3}\right)^{\frac{2n}{5}}$ (l) $\lim \left(\dfrac{n-1}{n-3}\right)^{n-2}$

(m) $\left(\dfrac{3n-5}{3n+1}\right)^{2n+3}$ (n) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\frac{2n^2-3}{4}}$ $(ñ)$ $\lim \left(\dfrac{n^2-3}{n^2-1}\right)^{3n-3}$

12. Progresiones aritméticas y geométricas

612. Escribir los cinco primeros términos de una progresión aritmética en la que el cuarto término es 5 y la diferencia -3.

613. Calcular el término 30 de una progresión aritmética en que al primer término es 5 y la diferencia $\frac{1}{3}$.

614. Sabiendo que el sexto término de una progresión aritmética es 4 y su diferencia $\frac{1}{2}$, calcular el término 20 y la suma de los 14 primeros términos.

615. Interpola 5 medios aritmáticos entre 3 y 27.

616. En una progresión aritmética $A_{40} = 59$ y $a_{27} = 33$. calcular la suma de los 50 primeros términos.

617. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 3, 1, -1, -3, -5, ... se deben tomar para que la suma sea -374.

618. Demostrar que en toda progresión aritmética cada término es igual a la semisuma del que le precede y el que le sigue.

619. Los ángulos de un hexágono regular forman una progresión aritmética y el menor de ellos mide 80°. Calcular los demás.

620. Calcular cuatro números en progresión aritmética sabiendo que su suma es 22 y la suma de sus cuadrados es 166.

621. En una progresión aritmética limitada de un número impar de términos, la suma de los que ocupan lugar impar es 75 y la suma de los que ocupan lugar par es 60. Calcular el término central y el número de términos.

622. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Si la hipotenusa mide 20 cm, calcular el perímetro y el área de dicho triángulo.

623. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 7744?

624. Escribir el término general de las siguientes sucesiones:

(a) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \ldots$ (b) $7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \frac{7}{81} \ldots$ (c) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16} \ldots$

(d) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{27}{2}, \ldots$ (e) $4, -4, 4, -4, 4, -4 \ldots$ (f) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$

625. Escribir los cinco primeros términos de la progresión geométrica en el que el cuarto término es 27 y la razón 3.

626. sabiendo que el cuarto término de una progresión geométrica es 27 y que l primero vale 1, calcular su razón, el quinto término y el producto de los nueve primeros términos.

627. En una progresión geométrica el primer término vale 7, la razón 2 y un cierto término 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

628. Interpola cuatro medios proporcionales o geométricos entre 3 y 96.

629. Si en una progresión geométrica conocemos que el primer término vale 7 y el término 15 vale 1575, calcula el producto de los 15 primeros términos.

630. Halla el producto de los 11 primeros términos de una progresión geométrica si el término central vale 2.

631. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la sucesión $3, 6, 12, 24, \ldots$. Lo mismo para la sucesión $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$.

632. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 6.

633. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots}{\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \cdots}$$

634. La suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los 4 primeros. Calcula la razón de dicha progresión.

635. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su producto es 328509 y que el mayor de ellos excede en 115 a la suma de los otros dos.

636. Hallar la fracción generatriz de las siguientes expresiones (a) 0,737373... (b) 3,27818181...

637. A geometric sequence $u_1, u_2, u_3, \ldots$ has $u_1 = 27$ and a sum to infinity of $\frac{81}{2}$.
   (a) Find the common ratio of the geometric sequence.
   (b) An arithmetic sequence $v_1, v_2, v_3, \ldots$ is such that $v_2 = u_2$ and $v_4 = u_4$. Find the greatest value of N such that

$$\sum_{n=1}^{N} v_n > 0$$

638. An arithmetic sequence has first term a and common difference $d, d \neq 0$. The 3rd, 4th and 7th terms of the arithmetic sequence are the first three terms of a geometric sequence.

(a) Show that $a = -\frac{3}{2}d$.
(b) Show that the 4th term of the geometric sequence is the 16th term of the arithmetic sequence.

639. In the arithmetic series with n^{th} term u_n, it is given that $u_4 = 7$ and $u_9 = 22$. Find the minimum value of n so that $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n > 10000$.

640. Find the value of k if $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^r = 7$

641. La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.
(a) Halle el primer término y la diferencia común.
(b) Halle el menor valor de n para el cual la suma de los n primeros términos es mayor que 600.

642. Cada vez que una pelota bota, alcanza un 95 % de la altura lograda en el bote anterior. Inicialmente la pelota se deja caer desde una altura de 4 metros.
(a) ¿Qué altura alcanza la pelota después del cuarto bote?
(b) ¿Cuántas veces bota la pelota antes de que ya no alcance una altura de 1 metro?
(c) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?

643. The first terms of an arithmetic sequence are

$$\frac{1}{\log_2 x},\ \frac{1}{\log_8 x},\ \frac{1}{\log_{32} x},\ \frac{1}{\log_{128} x}\ \ldots$$

Find x if the sum of the first 20 terms of the sequence is equal to 100.

644. A geometric sequence has first term a, common ratio r and sum to infinity 76. A second geometric sequence has first term a, common ratio r^3 and sum to infinity 36. Find r.

645. Los tres primeros términos de una progresión geométrica son

$$\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} 2x\ 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(a) Halle la razón común r.
(b) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie geométrica

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + 4 \operatorname{sen} x \cos 2x + \ldots$$

es convergente.
(c) Considere

$$x = \arccos\frac{1}{4}, \quad x > 0$$

Muestre que la suma de los infinitos términos de esta serie es igual a $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

646. (a) (I) Halle la suma de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 200 que son divisibles entre 7.
(II) Exprese la suma anterior utilizando notación de sumatoria.
(b) En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es -6. La suma de los n primeros términos de esta progresión es negativa. Halle el menor valor de n.

647. The arithmetic sequence $\{u_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ has first term $u_1 = 1{,}6$ and common difference $d = 1{,}5$. The geometric sequence $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ has first term $v_1 = 3$ and common ratio $r = 1{,}2$.
(a) Find an expression for $u_n - v_n$ in terms of n.
(b) Determine the set of values of n for which $u_n > v_n$.
(c) Determine the greatest value of $u_n - v_n$. Give your answer correct to four significant figures.

13. Gráficas de funciones

648. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x-3)$ (b) $f(x)-2$ (c) $f(x+1)-1$

649. A partir de la gráfica de la función $y = \ln x$, esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

(d) $\ln(x-3)$ (e) $\ln x - 2$ (f) $\ln(x+1)-1$

650. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones indicando claramente los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de las asíntotas en caso de que tengan:

(a) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ (b) $y = 3 + (x-1)^2$ (c) $y = \sqrt{x-1}$

(d) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2+1}$ (e) $y = -2 + \dfrac{1}{x+1}$ (f) $y = (x+1)^3 - 2$

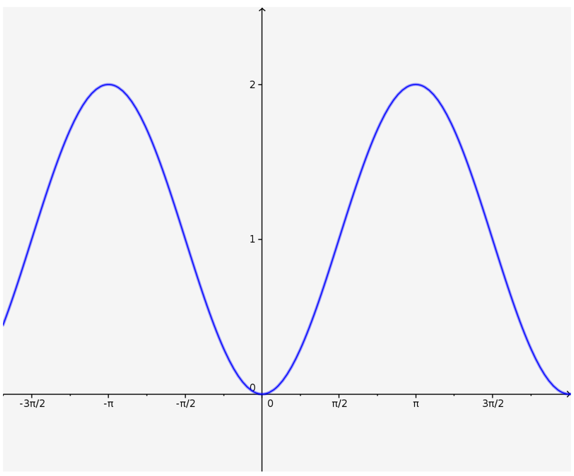
(g) $y = -2 + \sqrt{x-4}$ (h) $y = 1 - \dfrac{1}{2-x}$ (i) $y = \ln(x-3) + 2$

(j) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ (k) $y = e^{x+1} - 1$ (l) $y = -2(2-x)^3$

651. Expresar la funciones $g(x)$ en términos de $f(x)$:

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 6x - 1$
(b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+4} + 1$

652. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = \cos(x-a) + b$. Determinar a y b.



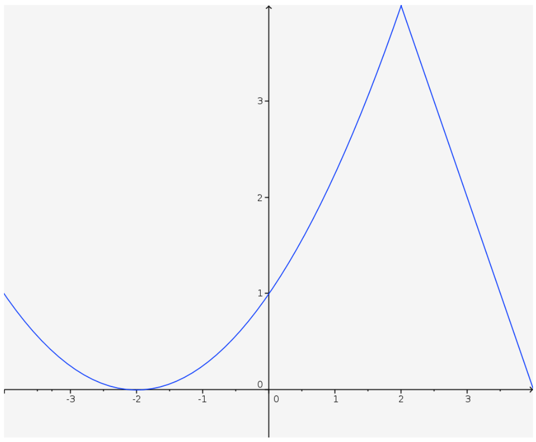
653. Sea

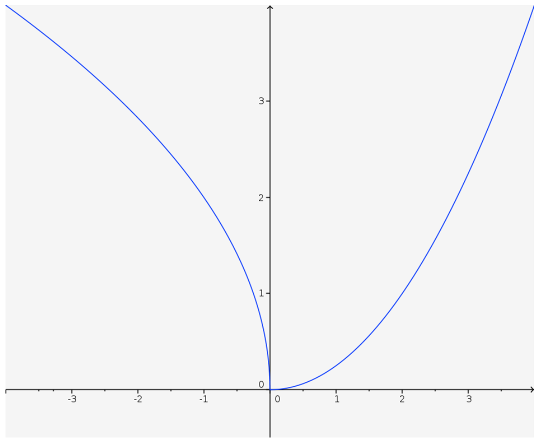
$$f(x) = \frac{k}{x-k} \qquad k > 0.\ x \neq k$$

Dibuje aproximadamente la gráfica de f indicando claramente los puntos de intersección con los ejes y las asíntotas.

654. La gráfica de $y = 2x^2 + 4x + 7$ se traslada usando el vector $\binom{1}{3}$. Halle la ecuación de la gráfica trasladada, dando su respuesta en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

655. Para las siguientes gráficas de $f(x)$:





esbozar la gráfica de:

(a) $2f(x)$ $\qquad$ (b) $\dfrac{f(x)}{3}$ $\qquad$ (c) $f(2x)$

(d) $f\left(\dfrac{x}{3}\right)$ $\qquad$ (e) $2f(x-2)+1$ $\qquad$ (f) $f(2x)-1$

656. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ esboza la gráfica de:

(a) $af(x);\quad a > 1$ $\qquad$ (b) $f(bx) - a;\quad a > 0,\ 0 < b < 1$ $\qquad$ (c) $\frac{1}{4}f(4x)$

657. A partir de las gráficas del problema 655 esbozar las gráficas de:

(a) $y = -f(x)$ $\qquad$ (b) $y = f(-x)$ $\qquad$ (c) $y = |f(x)|$ $\qquad$ (d) $y = f(|x|)$

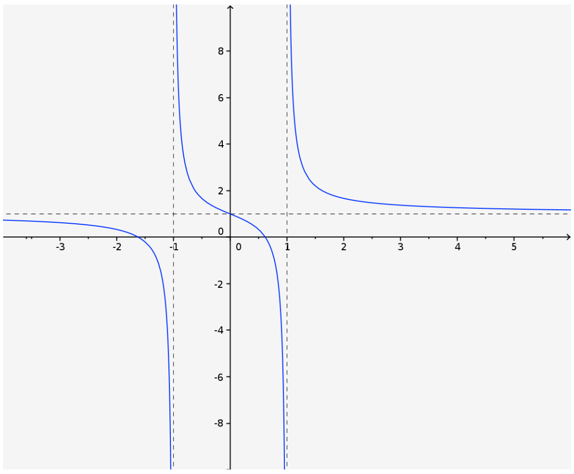
658. La gráfica de $y = \cos x$ es transformada en la gráfica de $y = 8 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$. Halle una secuencia de transformaciones geométricas sencillas que logre hacer esto.

659. Esbozar la gráfica de $y = f(x)$ y a partir de ésta esbozar la de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ en los siguientes casos:

(a) $f(x) = (x+1)(x-2)$ $\qquad$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2$

(c) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ $\qquad$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

660. A partir de la gráfica de la función $f(x)$ que se muestra a continuación:



esbozar la gráfica de $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

14. Funciones. Límites

661. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

(*a*) $y = \dfrac{x+1}{x+3}$

(*b*) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 5x + 2}$

(*c*) $y = \dfrac{2x}{x^2 + x + 1}$

(*d*) $y = \dfrac{x^2+1}{x^5 + x^4 + x^3 - x^2}$

662. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

(*a*) $y = \sqrt{x+3}$

(*b*) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

(*c*) $y = \ln(x^2 + x + 1)$

(*d*) $y = \ln(x^5 - x^4 + x^3 - x^2)$

663. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

(*a*) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$

(*b*) $y = \sqrt{9 - x^2}$

(*c*) $y = \ln\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)$

(*d*) $y = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

664. Calcular las compuestas y las inversas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 2$.

665. Lo mismo para $f(x) = \sqrt{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

666. Lo mismo para $f(x) = e^{3x+2}$ y $g(x) = \ln(x^2 - 1)$

667. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - x + 5)$

(*b*) $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^2 - x + 5)$

(*c*) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} + 3\right)$

(*d*) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} + 3\right)$

668. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4x+4}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-4x+4}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2+x-1}{3x^2+4x+2}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{5x^4+3x^3+2x^2+x+1}$

669. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^3-2x^2+6x+1}$ (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2+2}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+6}{x^4-x^3+x-1}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^3+x^2}$

670. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-5x}$ (b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$ (d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$

671. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

(c) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x-2}\right)$ (d) $\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

672. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-2}-x\right)$ (d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2}\right)$

673. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1}\right)$ (b) $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{2x}\right)^x$

674. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{2x^2}\right)^{x^2}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x$ (d) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

675. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \ln x$ (b) $\lim_{x\to\infty} \log_3 x$

$(c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \log_{1/2} x$ $(d)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$

$(e)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \log_5 x$ $(f)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \log_{1/3} x$

$(g)\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)$ $(h)\ \lim\limits_{x\to 5} \log_5 x$

$(i)\ \lim\limits_{x\to 1} \log_3 x$ $(j)\ \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \log_3 \dfrac{1}{x}$

676. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{x^2+1}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{x^4-1}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-3x^3+2x}{x^3-5x+6}$

677. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+3}{1+e^x}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{3^x}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2^x+x}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x}{3^x}$

678. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{5\ln x}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

679. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ $(b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}$ $(c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x}$

$(d)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{artg} x}$ $(e)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}$ $(f)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\operatorname{tg} x}{3x}$

680. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α.

681. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

$(a)\ y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ $(b)\ y=\dfrac{x-3}{2x+4}$ $(c)\ y=\dfrac{1}{3x-2}$

682. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

$(a)\ y=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $(b)\ y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ $(c)\ y=\dfrac{1}{x^2+1}$

683. Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:

$(a)\ y = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$ $(b)\ y = \dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ $(c)\ y = \dfrac{x^4+1}{x^2-3}$

684. Calcular las asíntotas de:

$(a)\ y = \ln(x^2-1)$ $(b)\ y = \dfrac{\ln x}{x}$ $(c)\ y = x\ln x$

685. Calcular las asíntotas de:

$(a)\ y = e^{-x}$ $(b)\ y = xe^x$ $(c)\ y = \dfrac{e^x}{x}$ $(d)\ y = e^{\frac{1}{x}}$

Soluciones:

(658) $(a)\ \mathbb{R}-\{-3\}\ (b)\ \mathbb{R}-\{\frac{1}{2},2\}\ (c)\ \mathbb{R}\ (d)\ \mathbb{R}-\{0,1\}$

(659) $(a)\ [-3,\infty)\ (b)\ \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup[2,\infty)\ (c)\ \mathbb{R}\ (d)\ (1,\infty)$

(660) $(a)\ (-\infty,-3]\cup(2,\infty)\ (b)\ (-2,-1)\cup(1,\infty)\ (c)\ [-3,3]\ (d)\ (0,\infty)$

(661) $(f\circ g)(x) = x^2-4x+5,\ (g\circ f)(x) = x^2-1,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-1},\ g^{-1}(x) = x+2$

(662) $(f\circ g)(x) = \sqrt{\frac{4x+7}{x+2}},\ (g\circ f)(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2},\ f^{-1}(x) = x^2-3,\ g^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x-1}$

(663) $(f\circ g)(x) = e^2(x^2-1)^3,\ (g\circ f)(x) = \ln\left(e^{2(3x+2)}-1\right),\ f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\ln x,\ g^{-1} = \sqrt{e^x+1}$

(664) $(a)\ 15\ (b)\ \infty\ (c)\ \infty\ (d)\ 3$

(665) $(a)\ \infty\ (b)\ 0\ (c)\ \infty\ (d)\ \frac{1}{5}$

(666) $(a)\ \infty\ (b)\ 0\ (c)\ \infty\ (d)\ 0$

(667) $(a)\ 2\ (b)\ \frac{7}{13}\ (c)\ \frac{9}{17}\ (d)\ \frac{5}{4}$

(668) $(a)\ 2\ (b)\ 2\ (c)\ -\frac{15}{4}\ (d)\ \frac{\sqrt{5}}{10}$

(669) $(a)\ 20\sqrt{5}\ (b)\ -1\ (c)\ 0\ (d)\ \frac{3}{2}$

(670) $(a)\ -\infty\ (b)\ \infty\ (c)\ -\frac{1}{2}\ (d)\ \infty$

(671) $(a)\ 0\ (b)\ e^{-6}\ (c)\ 1\ (d)\ e^{-\frac{1}{4}}$

(672) $(a)\ \infty\ (b)\ \infty\ (c)\ -\infty\ (d)\ -\infty\ (e)\ -\infty\ (f)\ \infty\ (g)\ 0\ (h)\ 1\ (i)\ 0\ (j)\ -\frac{1}{2}$

(673) $(a)\ \infty\ (b)\ 0\ (c)\ 1\ (d)\ 0\ (e)\ \frac{1}{4}\ (f)\ \infty$

(674) $(a)\ \infty\ (b)\ \infty\ (c)\ 0\ (d)\ 0\ (e)\ \infty\ (f)\ \infty$

(675) $(a)\ 0\ (b)\ \infty\ (c)\ 0\ (d)\ 0\ (e)\ 0\ (f)$ no existe

(676) $(a)\ \infty\ (b)\ 0\ (c)\ \infty\ (d)\ 0\ (e)\ -2\ (f)\ \frac{2}{3}$

(677) 1 si $\alpha \neq 0$, $\sqrt[4]{e}$ si $\alpha = 0$

(678) $(a)\ x=3,\ y=2\ (b)\ x=-2,\ y=\frac{1}{2}\ (c)\ x=\frac{2}{3},\ y=0$

(679) $(a)\ x=-2,\ x=2,\ y=0\ (b)\ x=-1,\ x=1,\ y=2\ (c)\ y=0$

(680) $(a)\ x=3,\ y=2x+6\ (b)\ x=1,\ x=2,\ y=x+3\ (c)\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$

(681) $(a)\ x=-1,\ x=1\ (b)\ x=0,\ y=0\ (c)$ no tiene

(682) $(a)\ y=0\ (b)\ x=0,\ y=0\ (c)\ x=0$ (por la derecha), $y=1$

15. Continuidad

686. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-ax+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

según los valores de a.

687. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}$$

688. Calcular a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

689. Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2 - 9}$$

690. Hallar el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua.

691. ¿Cómo hay que definir en $x = 1$ la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

para que sea continua en ese punto?

692. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

según los valores de a.

693. De la función $g(x)$ se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

694. Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo se debería elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

Soluciones:

(683) Continua si $a = \frac{1}{2}$ (684) Discontinuidad evitable en $x = 1$, infinito en $x = -2$ (685) $a = 9$, $b = 10$ (686) Discontinuidad evitable en $x = 3$, infinito en $x = -3$ (687) $k = 4$ (688) $f(1) = \frac{1}{2}$ (689) Continua si $a = \frac{1}{2}$, salto finito en los demás casos (690) $g(0) = 1$ (691) $f(2) = 4$

16. Teorema de Bolzano

695. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-4, -3)$.

696. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.

697. Dada la función $f(x) = x^3 + x - 5$, demostrar que existe un $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 20$.

698. Comprobar que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

699. Comprobar que la función $f(x) = x^5 - x^3 - x + 5$ toma el valor -1 en el intervalo $(-2, -1)$.

700. Demostrar que la función $f(x) = xe^{-x} + 3$ toma el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-1, 0)$.

701. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x + 2 = 3$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

702. Comprobar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.

703. Lo mismo para la función $f(x) = xe^x - x - 16$.

704. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = \cos \pi x - 2$ se cortan en un punto x_0. Calcular la parte entera de x_0.

705. Demostrar que la ecuación $x^3 + 3x^2 + 4x - 7 = 0$ tiene al menos una solución.

706. Comprobar que la ecuación $2x = \cos x$ tiene al menos una solución.

707. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.

708. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Observamos que f está definida en $[0, 1]$ y que toma valores de signos opuestos en los extremos de este intervalo. Sin embargo, no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

17. Reglas de derivación

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

709. $y = 6x^3 + 5x^2 + 4$

710. $y = 3x^{-2} - 5x^{-3} + 2x^{-1}$

711. $y = 5x^4 - 3x^2 + 6x$

712. $y = 2x^{-3} - 4x^{-4} - x^{-2}$

713. $y = 7x^6 + 5x^4 - 3x^2$

714. $y = 4x^{-5} - 3x^{-3} + 4$

715. $y = -5x^8 + 3x^6 - 5x^4$

716. $y = 3x^{-6} - 2x^{-7} - 3$

717. $y = 5x^{\frac{2}{3}} + 3x - x^{\frac{5}{7}}$

718. $y = 3x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{2}{3}} + 7$

719. $y = x^2(x + 6)$

720. $y = x^3(x^2 + 1)(x^3 + 6)$

721. $y = 3(x^{-3} + x^{-5})$

722. $y = x^{-2}(x^{-3} + 5)$

723. $y = \dfrac{5}{x^3}$

724. $y = \dfrac{6}{x^4 + 2}$

725. $y = \dfrac{x^4}{3}$

726. $y = \dfrac{x^3 + 2}{7}$

727. $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

728. $y = \dfrac{3}{5x^2 + 2}$

729. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

730. $y = \dfrac{1}{1 - 2x^2}$

731. $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 3x^2}$

732. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3}$

733. $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$

734. $y = x\sqrt{x^2 + 2}$

735. $y = (2x - 1)\sqrt{1 + x}$

736. $y = (3x^2 - 1)\sqrt{3x^2 + 2}$

737. $y = \sqrt[3]{(1 + x)^2}$

738. $y = \sqrt[4]{x^3 + 2}$

739. $y = \sqrt[5]{x^3 + 6}$

740. $y = \sqrt[6]{1 + x^2}$

741. $y = \sqrt[7]{x^4 + 2}$

742. $y = \sqrt[8]{x^3 + 7x}$

743. $y = 2\operatorname{sen} x$

744. $y = 2\cos x$

745. $y = \operatorname{sen} 2x$

746. $y = \cos 2x$

747. $y = \operatorname{sen} x^2$

748. $y = \cos x^2$

749. $y = \operatorname{sen}^2 x$

750. $y = \cos^2 x$

751. $y = 2\operatorname{tg} x$

752. $y = \operatorname{tg} 2x$

753. $y = \operatorname{tg} x^2$

754. $y = \operatorname{tg}^2 x$

755. $y = 2\operatorname{sen} x^2$

756. $y = 2\cos x^2$

757. $y = 2\operatorname{sen}^2 x$

758. $y = 2\cos^2 x$

759. $y = \operatorname{sen}(2x^2)$

760. $y = \cos(2x^2)$

761. $y = \operatorname{sen}(2x)^2$

762. $y = \cos(2x)^2$

763. $y = \operatorname{sen}^2 2x$

764. $y = \cos^2 2x$

765. $y = \operatorname{sen}^2 x^2$

766. $y = \cos^2 x^2$

767. $y = \operatorname{sen}(x^2 + 3x)$

768. $y = 4\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} x$

769. $y = 5\cos^2 x + 3\cos^3 x$

770. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

771. $y = \operatorname{sen} x^3 + \cos x^2$

772. $y = \operatorname{sen} x^3 \cos x^2$

773. $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$

774. $y = \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x$

775. $y = \operatorname{sen} x^4 + \cos x^4$

776. $y = \operatorname{sen} x^4 \cos x^4$

777. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

778. $y = \dfrac{1 + 2\operatorname{sen}^2 x}{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}$

779. $y = \left(\dfrac{x^3+2}{4x+2}\right)^3$

780. $y = \left(\dfrac{5x^2+3x}{6x+2}\right)^4$

781. $y = \dfrac{x^6}{(3x+2)^4}$

782. $y = \left(\dfrac{2x+1}{3x+2}\right)^5$

783. $y = \ln(1+x^2)$

784. $y = \ln(1+3x)$

785. $y = \ln(1+\sqrt{x})$

786. $y = \ln \operatorname{sen} x^3$

787. $y = x \ln x$

788. $y = \ln \operatorname{cotg} x$

789. $y = \ln \dfrac{3-5x}{2x+7}$

790. $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

791. $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

792. $y = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

793. $y = \ln \cos e^x$

794. $y = \ln \cos e^{x^2}$

795. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

796. $y = e^{\cos x}$

797. $y = e^{\operatorname{tg} x}$

798. $y = e^{-\cos x}$

799. $y = (x^2+1)e^x$

800. $y = (x^3-3)e^x$

801. $y = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) e^x$

802. $y = \left(1+x+x^2\right) e^x$

803. $y = a^{\operatorname{tg} x}$

804. $y = a^{\cos x^2}$

805. $y = a^{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

806. $y = e^{\sqrt{x}}$

807. $y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

808. $y = \dfrac{e^{5x}}{1+e^x}$

809. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

810. $y = a^x$

811. $y = \ln \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

812. $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

813. $y = \log\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)$

814. $y = \log \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

815. $y = \log \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

816. $y = \operatorname{arsen} \sqrt{x}$

817. $y = \operatorname{arcos} \sqrt{x}$

818. $y = \sqrt{a^2-x^2} + \operatorname{arsen} \dfrac{x}{a}$

819. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} + \operatorname{artg} x$

820. $y = x^x$

821. $y = \left(\dfrac{x}{a}\right)^x$

822. $y = (1+x)^x$

823. $y = x^{\operatorname{tg} x}$

824. De la trayectoria $x = \frac{1}{2}gt^2$ obtener la fórmula de la velocidad y la aceleración.

825. La fórmula que da el $\cos 2x$ en función del seno y el coseno de x, se puede obtener derivando $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Comprobarlo.

826. De la fórmula

$$(1-x)^n = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

obtener, derivando y haciendo $x = -1$, que

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Obtener la derivada segunda de:

827. $y = x^3 - 5x^2 + 4$

828. $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6$

829. $y = \ln\sqrt{1-x^2}$

830. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

831. $y = \ln\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$

832. $y = x^2 e^x$

Obtener la derivada tercera de:

833. $y = x^{-5}$

834. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

835. $y = \operatorname{sen}^2 x$

836. $y = \ln\left(1+x^2\right)$

837. $y = e^x \operatorname{sen} x$

838. $y = x \cos x$

Obtener la derivada cuarta de:

839. $y = x^{-2}$

840. $y = \operatorname{sen} x$

Obtener las derivadas sucesivas de:

841. $y = 3x^2 + 5x - 6$

842. $y = 5x^2 - 3x + 1$

843. $y = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$

844. $y = x^4 - 3x^2 + 6x$

845. $y = e^x$

846. $y = \dfrac{1}{x}$

Obtener la diferencial de:

847. $y = 4x^2 - 5x + 2$

848. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

849. $y = \sqrt{2x-3}$

850. $y = x^2 e^{\operatorname{sen} x}$

18. Continuidad y derivabilidad

851. Considérese la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.

a) Calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ y comprobar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función es derivable en $x = 0$?

852. Determinar el valor de a para el cual la siguiente función es derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + a & x > 0 \end{cases}$$

853. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

calcular a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

854. Discutir según los valores de m la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{mx} & x > 1 \end{cases}$$

855. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & x \leq -1 \\ \dfrac{a}{x} & -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & x > 1 \end{cases}$$

856. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 1 \\ cx & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a, b y c para que la función sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0) = f(4)$.

857. Estudia la derivabilidad de las función $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ en $x = 4$.

858. La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$ y la función $g(x) = \operatorname{sen} x$, sí. ¿Es derivable en $x = 0$ la función $p(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$?

859. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \frac{3\pi}{2} < x < 3\pi \\ x - 3\pi & x \geq 3\pi \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en $x = 3\pi$.

Soluciones: (848) $a = 2$ (849) $a = 1$ (850) $a = 0$, no (851) Continua para $m = 1$ y $m = 2$. Derivable para $m = 1$ (852) Es continua para $a = 2$ y $b = 0$. No es derivable (853) $a = -\frac{7}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$ (854) no es derivable (855) sí (856) continua, no derivable

19. Recta tangente

860. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$

861. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $-x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$

862. Calcular la ecuación de la recta tangente a $y = 3x^2 - 4x + 2$ que tenga pendiente igual a 2.

863. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x+4}$ en el punto de abscisa 0.

864. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $y = 6x + 10$.

865. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

866. Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

867. Hallar los puntos de tangente horizontal de las siguientes curvas:

   a) $y = 3x^2 - 2x + 1$
   b) $y = x^3 - 3x$

868. ¿En qué puntos de $y = 1/x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?.¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

869. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$?

870. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?

871. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x+y-1 = 0$.

872. Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ trazada desde el origen.

873. ¿Hay algún punto de la gráfica de $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?

874. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva$f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen.

875. ¿Hay algún punto de la gráfica de $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ en el que la tangente tenga menor pendiente que la bisectriz del primer cuadrante?

876. Encontrar los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ sea horizontal.

877. Obtener la ecuación de la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 13$ en $P(2, 3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita y despejando y.

878. Usar la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2y^3 = 2$ en el punto de abscisa $x = 1$

879. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

   a) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.
   b) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
   c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.

880. Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función

$$f(x) = xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

881. Hallar el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Soluciones:

(857) $y = -x + 2$ (858) $y = 4$ (859) $y = 2x - 1$ (860) $y = \frac{1}{4}x + 2$ (861) $y = 6(x - \sqrt{3})$, $y = 6(x + \sqrt{3})$ (862) $y = -4x + 8$, $y = 4x + 8$ (863) $(-1, 4)$, $(3, -28)$ (864) (*a*) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (*b*) $(-1, 2)$, $(1, -2)$ (865) $(-1, -1)$, $(1, 1)$ (866) $(4, -3)$ (867) $(-2, 0)$, $(2, 0)$ (868) $(0, 0)$, $(2, 4)$ (869) $y = \frac{1}{e}x$ (870) no (871) $y = x$ (872) no (873) $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ (874) $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ (875) $y - \sqrt[3]{2} = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}(x - 1)$ (876) (*a*) 0 (*b*) $(0, 0)$, $(1, 0)$ (*c*) $y = \frac{1}{4}(x - 1)$ (877) $y = x - \frac{1}{2}, y = -x - \frac{1}{2}$ (878) $\frac{e^3+e}{2}$

20. Crecimiento y decrecimiento. Concavidad y convexidad

882. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2(x + 1)$

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

883. Estudiar la monotonía de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

884. Estudiar la monotonía de:

a) $f(x) = 3x^2 e^x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

d) $f(x) = x \ln \sqrt{x}$

885. Determinar los máximos y mínimos de las siguientes funciones utilizando la derivada segunda:

a) $y = x^3 - 24x - 6$

b) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

c) $y = \ln(x^2 + 1)$

d) $y = (x^2 + 4)e^x$

886. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \sqrt{9 + x^2}$

d) $y = \dfrac{\ln x}{2x}$

e) $y = 4\cos x - \cos 2x$

f) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

887. Sea $f(x) = x^2 + mx$ donde m es un parámetro real. Hallar el valor de m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -\frac{3}{4}$.

888. Se considera la función:

$$f(x) = ae^{x^2+bx+c} \; ; \qquad a > 0$$

Calcular los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, a)$ y $f(0) = 1$.

889. Determinar los valores de a, b y c para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

890. Calcula para $f(x) = (x+1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.

891. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

892. Demostrar que la curva de ecuación

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

no tiene ningún punto de inflexión.

893. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determinar a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

894. Calcular los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación

$$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1$$

en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

895. Se considera la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son parámetros reales.

   a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje X.

   b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje X.

896. Demuestra que la curva $f(x) = x - 2\cos x$ tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo $[0, \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto. Haz un dibujo en un entorno del punto hallado.

897. Hallar una función polinómica de tercer grado que tenga un extremo relativo en $(1, 1)$ y un punto de inflexión en $(0, 3)$. ¿Es $(1, 1)$ el único extremo de la función?.

Soluciones:

(879) (a) creciente en $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0\infty)$ (b) creciente en $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

(880) (a) creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (b) creciente en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(881) (a) creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, máximo en $x = -2$ (b) decreciente en $(-\infty, -4)$, mínimo en $x = -4$ (c) creciente en $\left(0, \sqrt{e}\right)$, máximo en $x = \sqrt{e}$ (d) decreciente en $(0, \frac{1}{e})$, mínimo en $x = \frac{1}{e}$

(882) (a) máximo en $x = -2\sqrt{2}$, mínimo en $x = 2\sqrt{2}$ (b) máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$ (c) mínimo en $x = 0$ (d) no hay extremos relativos

(883) (a) cóncava en $(1, \infty)$ (b) cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$ (c) cóncava en $(-\infty, \infty)$ (d) convexa en $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ (e) convexa en $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ (f) cóncava en $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$

(884) $m = \frac{3}{2}$

(885) $a = \frac{1}{e}$,$b = -2$, $c = 1$

(886) $a = 3$, $b = -6$, $c = 0$

(887) creciente en $(-\infty, 0)$, cóncava en $(1, \infty)$

(888) máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$

(889) La derivada segunda no tiene raíces

(890) $a = 26$, $b = -19$

(891) $a = -1$, $a = 1$

(892) $a = -9$, $b = 24$, $c = -18$

(893) $y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(894) $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$, $d = 3$.

21. Teoremas de Rolle y del valor medio

898. Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2\operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y, si es posible, determinar el punto en el que la derivada se anula.

899. Razonar si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en el intervalo $[0, 4]$.

900. Aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[-4, 2]$ e interpretarlo geométricamente.

901. Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[-2, 2]$, pero no hay ningún valor $\xi \in (-2, 2)$ en el que la derivada se anule. Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

   b) $f(x) = 2 - |x|$

902. Probar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1, 1)$ cuya existencia garantiza el teorema.

903. Demostrar que la ecuación $2 - x = e^x$ solamente tiene una solución.

904. Demostrar que la ecuación $x^2 = x\cos x - \operatorname{sen} x$ se verifica para un solo valor de x.

905. Demostrar que la curva $y = x^3 - 3x + 1$ solo corta al eje X en un punto del intervalo $(0, 1)$.

906. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ solo tiene una solución real.

907. Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dadas las funciones $f(x) = x^2 - Ax$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I y aplicar el teorema en ese caso.

908. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto del intervalo $(0, \pi)$.

909. Demostrar que se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en el intervalo $[0, 4]$ y halla el punto que verifica el teorema.

910. Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ en el intervalo $[-3, 3]$ e interpretarlo geométricamente.

911. Razonar si es aplicable el teorema del valor medio a la función

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[0, e]$. En caso afirmativo, hallar el valor al que se refiere el teorema.

912. Dada la función:

$$f(x) = x^x - 2^x + x - 1$$

demostrar que existen $\alpha, \beta \in (1,2)$ tales que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 2$. Decir que teorema se utiliza.

913. Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y sea el intervalo $I = [0,2]$. Aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo I, hallando el punto de dicho intervalo cuya existencia asegura el teorema.

914. Dada la función

$$f(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$$

demostrar que existe $\xi \in (1,2)$ tal que $f'(\xi) = -2$. Citar los teoremas que se utilicen.

Soluciones:

(895) No se puede aplicar. La función no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$

(896) No se puede aplicar. La función no es derivable en $x = 2$

(897) La función es continua y derivable y toma valores iguales en los extremos del intervalo. Existe un punto de derivada cero $\xi = -1$

(898) (*a*) La función no es continua en $x = 0$ (*b*) La función no es derivable en $x = 0$

(899) $\xi = \frac{1}{3}$

(900) $F(x) = e^x + x - 1$ es continua y derivable, toma valores positivos y negativos y su derivada no se anula

(901) La función $F(x) = x^2 - x\cos x + \operatorname{sen} x$ es continua y derivable y se anula en $x = 0$. Para $x \neq 0$ la derivada no se anula

(902) Toma valores de signo contrario en los extremos y la derivada no se anula en el interior del intervalo

(903) La función $F(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ toma valores positvos y negativos y su derivada no se anula en ningún punto

(904) $A = 5$, $\xi = \frac{5}{2}$

(905) La función $F(x) = \cos x - \sqrt{x}$ es continua y derivable en el interior del intervalo (no en $x = 0$), toma valores de signos contrario en los extremos y la derivada no se anula en el intervalo

(906) La función es continua en el intervalo y derivable en su interior, $\xi = \sqrt{3}$

(907) $\xi = 0$, en ese punto la tangente es paralela a la cuerda

(908) Se puede aplicar porque escontinua en el intervalo y derivable en su interior, $\xi = 1$

(909) $f(1) = -1$ y $f(2) = 1$. La función es continua y derivable para $x > 0$. Existe α por el teorema de Bolzano y β por el teorema del valor medio

(910) $\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(911) Basta aplicar el teorema del valor medio teniendo en cuenta que $f(2) = -2$ y $f(1) = 0$

22. Regla de l'Hôpital

915. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\operatorname{sen} x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$

916. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

917. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^3 + x}$

918. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$

919. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5} - 2}{x - 3}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

920. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

921. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} x \left(\operatorname{artg} e^x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

922. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} (\ln x)^{e^{-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}\right)^x$

923. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}$

924. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

925. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{2^n - 8}{2^{n+1}}\right)$

926. Calcular los valores del número real a sabiendo que:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = 8$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen} 2x} = 3$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln(e^{ax}-1)} = 4$

927. Calcular los valores de $\lambda \neq 0$ para los cuales:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos^2 \lambda x - 1} = -1$$

928. Calcular:

a) $\lim_{x\to 2} (x-2)\ln(x-2)$

b) $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to\infty} (x^3-1)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^2+2}$

Soluciones:

(912) (*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) $\frac{1}{3}$ (*d*) $\frac{3}{2}$

(913) (*a*) ∞ (*b*) -2 (*c*) 2

(914) (*a*) 1 (*b*) 2 (*c*) 0 (*d*) 0

(915) (*a*) 1 (*b*) 0 (*c*) 1 (*d*) $-\frac{1}{2}$

(916) (*a*) $\frac{3}{2}$ (*b*) 1

(917) (*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) $\frac{1}{3}$

(918) (*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) 0

(919) (*a*) 1 (*b*) e

(920) (*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) $\frac{1}{2}$

(921) (*a*) 1 (*b*) -1 a la izquierda y 1 a la derecha

(922) (*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) $-\frac{4}{\pi}$ (*c*) $\frac{1}{2}$

(923) (*a*) $a = \pm 4$ (*b*) $a = 6$ (*c*) $a = \frac{1}{2}$

(924) $\lambda = \pm 1$

(925) (*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) e (*d*) 1 (*e*) 1

23. Problemas de optimización

929. De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, hallar la altura y el radio del que tiene mayor volumen.

930. Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

931. ¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?

932. Determinar el punto de la parábola $y = x^2$ que está más próximo al punto $(3, 0)$.

933. Determinar un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

934. Considérense las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$. Para cada recta r perpendicular al eje X, sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g respectivamente. Determínese la recta r para el cual el segmento AB es de longitud mínima.

935. El coste del marco de una ventana rectangular es de 12,50 euros por metro lineal de los lados verticales y 8 euros por metro lineal de los lados horizontales.

   a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.

   b) Calcular, además, el coste de este marco.

936. De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación

$$\frac{x}{2} + y = 1$$

determinar el de área máxima.

937. Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$. De entre los rectángulos que tienen un lado sobre la porción de recta que queda sobre la curva y los otros dos vértices sobre la parábola, determinar el que tiene área máxima.

938. Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de ambos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.

939. Una cartulina tiene forma rectangular con 30 cm de base y 20 cm de altura. Se quiere construir un cajón sin tapa con la forma resultante tras recortar cuatro cuadrados de lado x en cada esquina de la cartulina. Calcular x para que el volumen del cajón resultante sea máximo. Calcular dicho volumen.

940. Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un triángulo isósceles de base 6 cm y altura 10 cm.

941. Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un semicírculo.

942. Demostrar que de todos los rectángulos de igual perímetro, el de área máxima es el cuadrado.

943. Hallar el cilindro de máximo volumen inscriptible en un cono recto circular de radio 10 cm. y altura 20 cm.

944. Demostrar que todos los cilindros de igual superficie, el de volumen máximo es el de altura igual al diámetro.

945. Inscribir en una esfera el cilindro, de volumen máximo.

946. Idem de área máxima.

947. Demostrar que la altura del cono de volumen máximo inscrito en una esfera vale los 4/3 del radio. (Tomar como variable dicha altura.)

948. Calcular las dimensiones de un depósito cónico invertido abierto, de 2000 litros de capacidad, de modo que requiera la mínima cantidad de superficie.

949. Sabido es que el desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular. Dado un círculo, ¿cuál es el sector correspondiente a un cono de máximo volumen?

Soluciones:

(926) $r = 3\sqrt{6}$, $h = 6\sqrt{3}$

(927) 2 y 6

(928) $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(929) $x = 1$

(930) $x = 0$

(931) $x = 0$

(932) 80 cm y 125 cm

(933) El que tiene un vértice en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

(934) El que tiene un vértice en $(1, 1)$

(935) $\frac{180}{17}$ y $\frac{160}{17}$

(936) $\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$

(937) La base es 3 cm y la altura 5 cm.

(938) La base es $R\sqrt{2}$ y la altura $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

(939) La base debe ser la cuarta parte del perímetro.

(940) El radio es $\frac{20}{3}$ cm y la altura $\frac{20}{3}$ cm.

(941) El radio es $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ y la altura el doble. S es el área total.

(942) El radio es $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y la altura $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

(943) El radio es $r = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

(944)

(945) El radio es $r = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{\pi}}$ m.

(946) El ángulo debe ser $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$. Aproximadamente 294°.

24. Representación de funciones

950. Estudiar y representar las siguientes funciones:

    a) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

    b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

951. Representar gráficamente la función $y = x^3 - 3x$.

952. Dada la función

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbócese su gráfica.

953. Se considera la función:

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.

b) Represéntese gráficamente la función.

954. Estudiar (dominio, crecimiento, máximos, mínimos y asíntotas) y representar gráficamente la función:

$$y = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

955. Representar gráficamente la función:

$$y = \frac{x^3}{1-x^2}$$

estudiando las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

956. Calcular las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = e^{\frac{1}{x}}$ y representarla gráficamente.

957. Se considera la función:

$$y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

Hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Representar gráficamente la función.

958. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   a) Comprobar que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
   b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c) Con los datos anteriores, hacer una representación aproximada de la función.

959. Representar gráficamente las funciones:

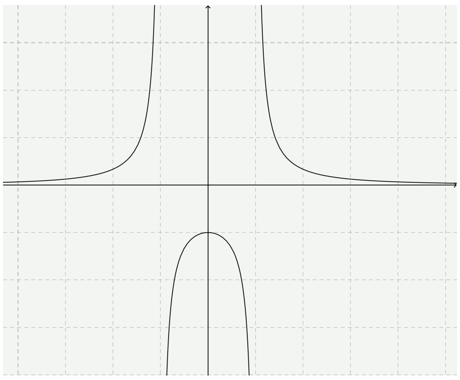
   a) $y = x \ln x$ *b*) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

960. Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, \infty)$. Se pide:

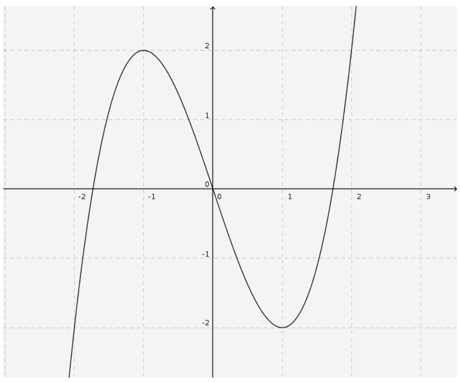
   a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
   b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.
   c) Determinar las asíntotas y esbozar la gráfica.

Soluciones:

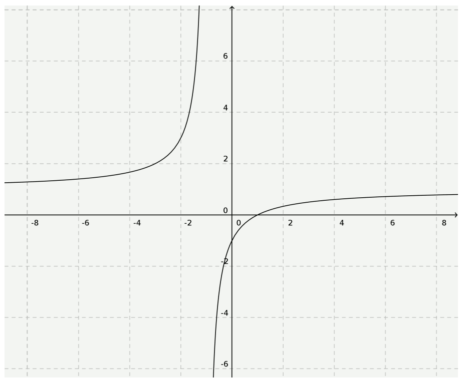
(947)



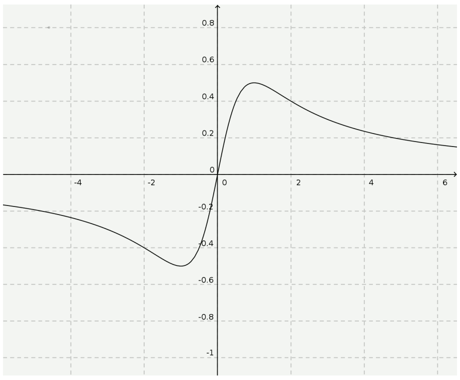
(948)



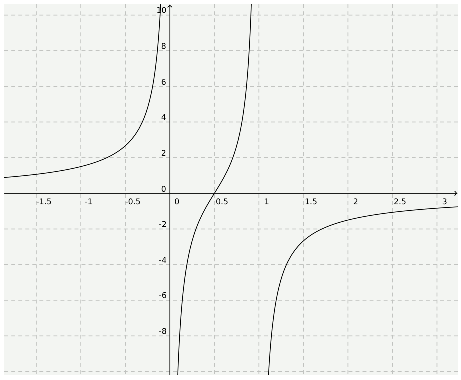
(949)



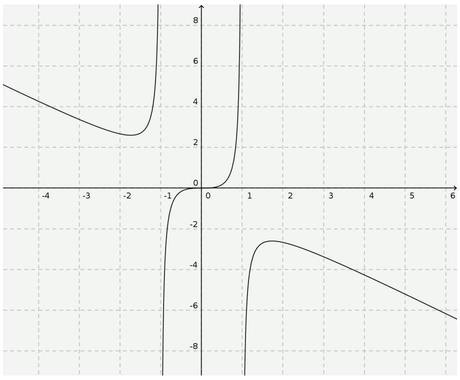
(950)



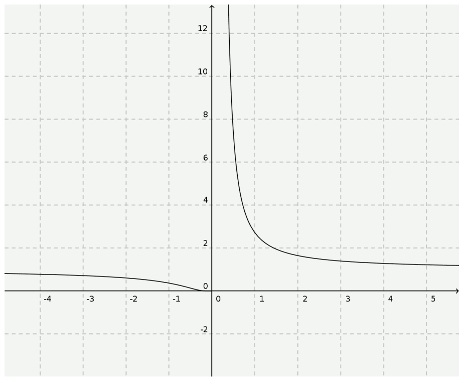
(951)



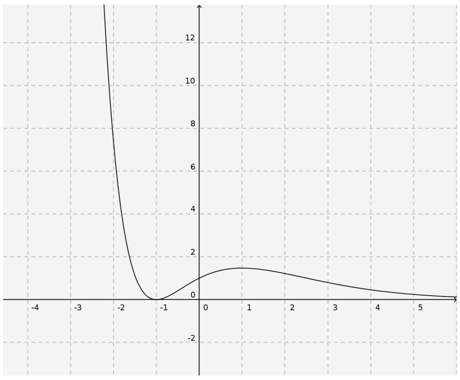
(952)



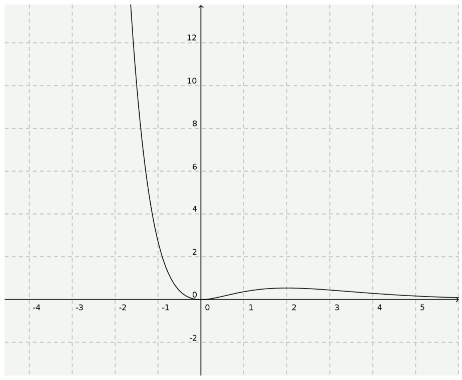
(953)



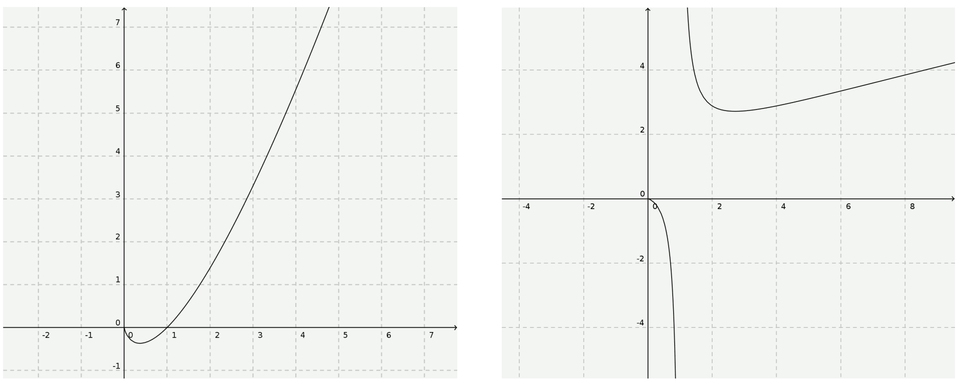
(954)



(955)



(956)



(957)