Matemáticas Aplicadas II. Curso 2010-2011. Problemas

1. Matrices y determinantes

1. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   a) Indica su dimensión
   b) Indica los elementos que forman su cuarta columna.
   c) Indica los elementos que forman su tercera fila.
   d) Indica el valor de los elementos a_{22}, a_{32}, a_{23} y a_{45}.
   e) ¿Cómo designarías la ubicación de los elementos cuyo valor es -5 y 0?

2. Escribe una matriz cuadrada de orden 3 tal que todos sus elementos verifiquen que $b_{ij} = 2i - 3j + 1$.

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   calcula:

   a) $A + B$, $A - B$ y $2A - 3B$.
   b) AB y BA.
   c) ABA.

4. Efectúa si es posible, la siguiente operación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcula $(A + B)C^t$.
   b) Comprueba que $(A + B)C^t = AC^t + BC^t$.

6. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   calcula:

   a) ABC
   b) CBA
   c) AB^2C
   d) CB^3A

7. Dadas las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcula $M^2 - N^2$.
   b) Calcula $(M + N)(M - N)$.
   c) Explica la razón de que $M^2 - N^2 \neq (M + N)(M - N)$.

8. Dadas las matrices $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, calcula:

   a) A^2, A^3 y A^4.
   b) $A^2 - 3A + 2I$.

9. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2A + 3B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \\ 3A - 4B = \begin{bmatrix} -15 & 14 \\ -4 & -22 \end{bmatrix} \end{cases}$$

10. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcula:

   a) A^2, A^3 y A^4.
   b) A^{23}.

11. Halla la inversa de las siguientes matrices aplicando la definición:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$:

   a) Halla todas las matrices que conmutan con A.
   b) Da un ejemplo de matriz de la forma $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ que conmute con A.

13. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

   ¿Qué condiciones deben verificar los números a y b para que $AB = BA$?

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Calcula el rango de las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

16. Calcula el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

17. Halla la matriz X sabiendo que $3X + BA = AB$ y que:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

18. Halla la matriz X tal que $A^2X + BX = C$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

19. Halla la matriz X tal que $AXB = I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix}$ *e*) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ *g*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ *f*) $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ *h*) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

21. Calcular los siguientes determinantes de orden 3:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$ *e*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ *f*) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & -8x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 11+x \end{vmatrix} = 0$$

23. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ -2 & x & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

24. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

25. Calcula el rango de la matriz según los valores de a:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

26. Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro b:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & b \\ 4 & b & 1 \\ -6 & 3 & -b \end{bmatrix}$$

27. Calcula las matrices inversas de:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

28. Calcular las matrices inversas de:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

29. Calcular las inversas de:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

30. Estudia según los valores del parámetro a el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

31. Estudia el rango según los valores del parámetro:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{bmatrix}$$

32. Suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden e invertibles, despeja X en:

    a) $AX + BX = A + B$
    b) $AXB + C = D$
    c) $XA^2 = BA$
    d) $A(X + B) = CX$

33. Resuelve la ecuación matricial:

$$X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

34. Resuelve la ecuación matricial $AX - B = C$ siendo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

35. Estudia según los valores de a el rango de la matriz:

$$\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ -3 & a+2 & 2 \\ -5 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

2. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Escribir en forma matricial y resolver matricialmente los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 4 \\ 3x+4y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ 2x-3y+2z & = & 2 \\ x+y+z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-2y-3z & = & 1 \\ x-y+2z & = & 0 \\ 2x+y+z & = & 3 \end{array}\right.$$

2. Aplicar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 3 \\ 2y+3z & = & 15 \\ 3x+y & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 15 \\ 5x-y+5z & = & 16 \\ x+4y+z & = & 20 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z & = & 9 \\ 2x-y+4z & = & 4 \\ 2x-y+6z & = & -1 \end{array}\right.$$

3. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+2z & = & 2 \\ 3x+3y+3z & = & 3 \end{array}\right.$$

4. Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+2z & = & 2 \\ 3x+3y+3z & = & 4 \end{array}\right.$$

5. De los siguientes sistemas, analiza la compatibilidad y resuelve los que sean determinados:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8x+y+4z & = & 9 \\ 5x-2y+4z & = & 6 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 6x-y+3z & = & 6 \\ -6x+8y & = & -10 \\ 2x-5y-5z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 3x-4y & = & 5 \\ 7x-y-3z & = & 8 \end{array}\right.$$

6. Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes:
   - *a*) Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y el otro incompatible.
   - *b*) Si ambos sistemas son compatibles, ¿puede uno ser determinado y otro indeterminado?. Razona tu respuesta.

7. Discute y resuelve según los valores del parámetro los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & a \\ ax+3y & = & 4 \\ 3x-y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 5 \\ 3x-ay & = & a \\ 5x+ay & = & 7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+ay-z & = & 1 \\ 2x+y-az & = & 2 \\ x-y-z & = & a-1 \end{array}\right.$$

8. Discute y resuelve según los valores del parámetro los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (m+1)x+y+z & = & 3 \\ x+2y+mz & = & 4 \\ x+my+2z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (a+1)x+y+2z & = & -2 \\ 2x+y+(a+1)z & = & 3 \\ x+(a+1)y+2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda x+2y+z & = & 1 \\ (1-\lambda^2)x-(1+\lambda)z & = & -1-\lambda \\ (2+\lambda)y & = & -1 \end{array}\right.$$

9. Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & -2 \\ -\lambda x+3y+z & = & -7 \\ x+2y+(\lambda+2)z & = & -5 \end{array}\right.$$

   - *a*) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
   - *b*) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

10. Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx+2y & = & m \\ 3x-y & = & m \\ x+y+z & = & 4 \end{array}\right.$$

   a) Estudia su compatibilidad según los valores de m.
   b) Resolverlo para $m=0$.
   c) Sustituir la tercera ecuación por otra de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminao para cualquier valor de m.

11. Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & a \\ x+y-az & = & a \\ 2x+3y+z & = & a \end{array}\right.$$

   a) Discutirlo en función del parámetro a.
   b) Resolverlo en el caso $a \neq 0$.

12. Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay-z & = & 2 \\ 2x+y+az & = & 0 \\ 3x+(a+1)y-z & = & a-1 \end{array}\right.$$

   a) Discutirlo en función del parámetro a.
   b) Resolverlo para $a=1$.

13. Dados tres números x, y, z, sabemos lo siguiente; el primero y el segundo suman 0; el primero y el tercero suman 1; la suma de los tres es cero y, para terminar, el primero multiplicado por un número k mas el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.

   a) ¿Qué se puede decir del valor de k?
   b) ¿Cuánto valen los tres números?

14. Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+my+m^2z & = & 1 \\ x+my+mz & = & m \\ x+m^2y+m^2z & = & m^2 \end{array}\right.$$

   a) Discutirlo según los valores del parámetro m.
   b) Resolverlo en los casos en los que sea compatible.

15. Determinar el valor del parámetro a para que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ x-y+z & = & 1 \\ x-3y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

   sea compatible indeterminado.

16. Discutir, según los distintos valores del parámetro m, y resolverlos en los casos en que sean compatibles, los sistemas:

   a) $$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y-z & = & -1 \\ 4x-2y+2z & = & 2m \\ -3x-2y+mz & = & -4 \end{array}\right.$$

   b) $$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 2x+3y+z & = & 3 \\ mx+10y+4z & = & 11 \end{array}\right.$$

c) $\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ x+my+3z &= 2 \\ 2x+(2+m)y+6z &= 3 \end{cases}$ *e*) $\begin{cases} x+2y+z &= m \\ x+y-mz &= m \\ 2x+3y+z &= m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z &= m \\ x+(1+m)y+z &= 2m \\ x+y+(1+m)z &= 0 \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} x+my-z &= 2 \\ 2x+y+mz &= 0 \\ 3x+(m+1)y-z &= m-1 \end{cases}$

17. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x+2y+z &= 0 \\ \lambda x-y+2z &= 0 \\ x-\lambda y+2z &= 0 \end{cases}$$

a) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$.

b) Resolver el sistema para $\lambda=5$.

18. Estudia los siguientes sistemas homogéneos según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible:

$$\begin{cases} x+y+3z &= 0 \\ 2x+ay+3z &= 0 \\ 3x+2y+6az &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+ay-3z &= 0 \\ 3x+5y-2z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y+z &= 0 \\ x-ay-3z &= 0 \\ 5x+2y-z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-ay+3z &= 0 \\ x+ay-2z &= 0 \\ 2x+z &= 0 \end{cases}$$

19. Discute y resuelve según los valores del parámetro k el sistema:

$$\begin{cases} kx+3y &= 4 \\ 3x-y &= 2 \\ 2x-y &= k \end{cases}$$

20. Dado el sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+ky+z &= 3 \\ kx-3z &= 6 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los distintos valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k=3$.

d) Sustituir la primera ecuación por otra, de manera que el sistema sea compatible indeterminado para cualquier valor de k.

e) Añadir una ecuación al sistema de manera que resulte incompatible para todo valor de k.

21. En un cajero automático se introducen billete de 10, 20 y 50 euros. El número total de billetes es 130 y el total del dinero 3 000 euros. Se sabe que el número de billetes de 10 euros es α veces los billetes de 50 euros.

a) Calcula el número de billetes de cada tipo suponiendo que $\alpha=2$.

b) Para $\alpha=3$, ¿qué ocurre con la situación del cajero planteada?

c) Si $\alpha=3$ y se tuvieran 100 billetes en el cajero ¿cuánto dinero debería haber para que sea posible una composición del cajero?

22. Una familia dispone de 80 euros mensuales para realizar la compra en una carnicería. El primer mes compra 10 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 3 kg de carne de ternera y le sobran 5,1 euros. El mes siguiente adquieren 10 kg de carne de pollo, 7 kg de carne de cerdo y 2 kg de carne de ternera, y le sobran 5,1 euros. El tercer mes compran 11 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 2 kg de carne de ternera, abonando un total de 72 euros y 30 céntimos. Suponiendo que no ha variado precio de la carne en estos meses ¿cuánto cuesta el kilo de cada uno de estos tipos de carne?

23. En una clase de segundo de bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la Información, diez estudian Comunicación Audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian Tecnologías de la Información, tres estudian Francés. Calcular el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas, sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

24. En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:

    - Sin defecto, todos al precio de 20 euros.
    - Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20 % sobre el precio de los anteriores.
    - Con defecto apreciable, con una rebaja del 60 % sobre el precio de los que no tienen defecto.

    Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros y los que tienen defecto suponen el 40 % de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

25. En una papelería entran tres clientes: el primero compra cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y paga 1,60 euros; el segundo compra cinco lapiceros y tres bolígrafos y paga 2,45 euros y el terdero paga 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

    a) Averigua el precio de cada uno de los productos.
    b) ¿Cuánto deberá pagar otro cliente por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

26. Una fábrica de perfumes dispone de 600 litros de un producto A y 400 litros de otro producto B. Mezclando los productos A y B se obtienen diferentes perfumes. Este año se quieren preparar dos clases de perfumes: el de la primera clase llevará tres partes de A y una de B, y será vendido a 50 euros el litro, y el de la segunda clase llevará los productos A y B al 50 % y será vendido a 60 euros el litro.

    a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?
    b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

27. En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 euros, pero el dependiente informa al cliente que los libros están rebajados el 6 %, y las pulseras el 12 % por lo que, en realidad debe pagar 31,40 euros.

    a) ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera?
    b) ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de esos dos productos?

28. Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañiñería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañiñería, 4 de fontanería y 5 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañiñería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañiñería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

3. Programación lineal

1. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales, representa el recinto correspondiente a la solución y calcula las coordenadas de sus vértices. Indica también si es acotado o no:

   a) $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 7 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} 3x + 2y \leq 0 \\ y \geq x \\ 5x + 6y \leq 0 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} 3x - 4y \leq -12 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ y \geq -3 \end{cases}$

   f) $\begin{cases} y \leq 4 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   g) $\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   h) $\begin{cases} y \leq x + 3 \\ y \leq -x + 9 \\ x + y \leq 3 \\ y \geq x - 3 \\ x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}$

2. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones, representa la solución e indica si alguna de las ecuaciones que lo forman es redundante:

   a) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq 6 \\ y \leq 4 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 2y \leq x + 6 \\ 4x + y \leq 12 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y \leq x + 2 \\ x + y \leq 6 \\ x \leq 4 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} y \geq -2x + 4 \\ x + y \geq 3 \\ 2y + x \geq 4 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3. Dibuja en cada caso la región determinada por las siguientes condiciones. Señala también si existe alguna condición redundante:

   a) $\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 4 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 4 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \geq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y \leq 5 \\ x \geq 4 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} y \geq 5 \\ x \geq 4 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

4. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

   a) Mínimo de $z = 9x + y$ con las restricciones:

   $$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 2 \\ 3x - 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

   b) Mínimo de $z = 4x + 5y$ con las restricciones:

   $$\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} \leq 1 \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{8} \geq 1 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{4} \geq 1 \end{cases}$$

5. Una empresa cuenta con 3 empleados que trabajan durante 40 horas semanales para elaborar dos tipos de guitarras eléctricas, G_1 y G_2. Cada unidad de G_1 requiere tres horas de trabajo y cada unidad de G_2, cuatro. Independientemente del tipo que sea, cada guitarra proporciona un beneficio de 75 euros.

   Un estudio de mercado señala que no se deben producir en total más de 32 guitarras semanales. Determina la producción para que los beneficios sean máximos.

6. Se desea fabricar comida para gatos de dos clases diferentes: gama alta y gama media. La comida está formada por una mezcla de carne, cereales y grasa animal en diferentes proporciones según la gama. La mezcla de gama alta incluye 3 Kg de carne, 2 Kg de cereales y 1 Kg de grasa animal por paquete, y produce un beneficio de 20 euros, mientras que la mezcla de gama media incluye 1 Kg de carne, 2 Kg de cereales y 2 Kg de grasa animal por paquete y produce un beneficio de 30 euros.

   Se cuenta con un total de 105 Kg de carne, 110 de cereales y 85 de grasa animal para elaborar las mezclas.

   ¿Cuántos paquetes de cada gama se deberán fabricar para que el beneficio producido sea máximo?

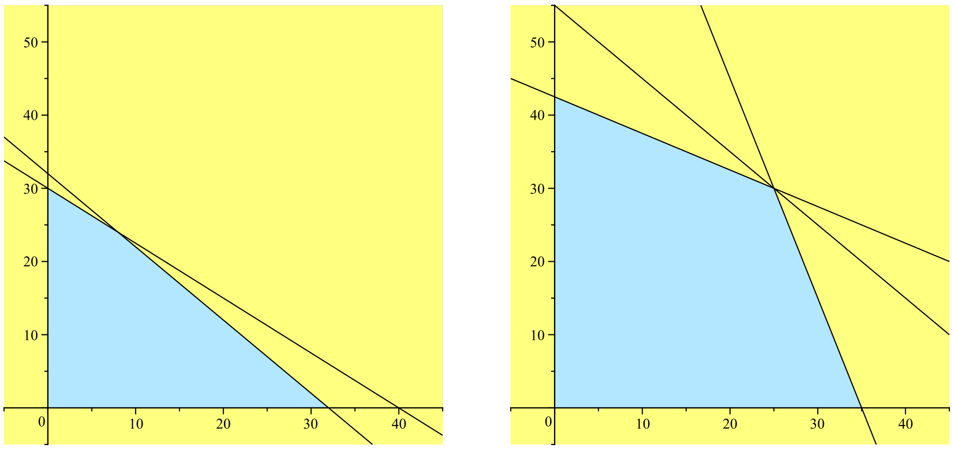


Figura 1: Problemas 5 y 6

7. En una empresa se editan revistas de dos tipos: de información deportiva y de cultura. Cada revista de información deportiva, precisa dos cartuchos de tinta negra y uno de color y se vende a 3 euros. Cada revista de cultura precisa dos cartuchos de tinta negra y dos de color y se vende a 5 euros. se dispone de 500 cartuchos de cada clase.

   ¿Cuántas revistas de cada tipo de deben editar para ingresar el máximo posible?

8. Para iluminar una sala de pintura es preciso colocar suficientes bombillas que sumen un total de 1440 vatios como mínimo. En el mercado se pueden adquirir bombillas incandescentes tradicionales de 90 vatios al precio de un euro y bombillas de bajo consumo de 9 vatios (equivalentes a 60 vatios) al precio de 5 euros la unidad.

   Debido a la estructura del espacio, el número total de bombillas no puede ser mayor de 20. Por otra parte, las normas del Ayuntamiento imponen que, para este tipo de salas, el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior a la mitad del de bombillas tradicionales.

   Calcula el número de bombillas de cada clase que se deben colocar para que el coste sea mínimo.

9. Dos jóvenes empresarios se disponen a abrir un negocio de informática. Montarán y comercializarán dos tipos de ordenador: el tipo A llevará una unidad de memoria de pequeña capacidad y un disco duro; el tipo B llevará una unidad de memoria de alta capacidad y dos discos duros.

   En total se cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros.

   Por cada ordenador de tipo A esperan obtener 150 euros de benficios, y por cada ordenador de tipo B, 250 euros.

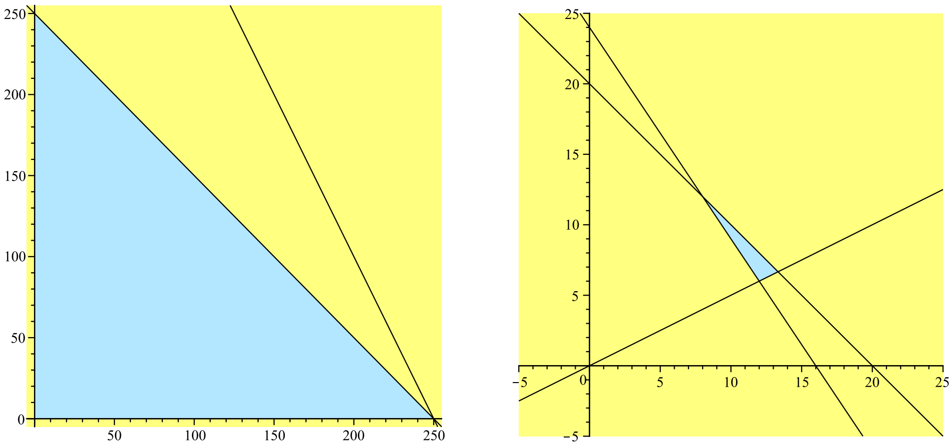


Figura 2: Problemas 7 y 8

a) Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores de cada tipo?

b) Cuáles serían los beneficios en ese caso?

c) Con esa producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

10. En un taller de confección se van a elaborar trajes de cocinero y de camarero. Se dispone para ello de 30 m^2 de algodón, 10 m^2 de fibra sintética y 20 m^2 de lana.

    Para hacer cada traje de cocinero se precisan 1 m^2 de algodón, 2 m^2 de fibra sintética y 2 m^2 de lana. Cada unidad de este tipo deja 20 euros de beneficios.

    Para hacer cada traje de camarero se precisan 2 m^2 de algodón. 1 m^2 de fibra sintética y 1 m^2 de lana. Cada unidad de este tipo deja 30 euros de beneficios.

    Se deben confeccionar mayor o igual número de trajes de camarero que de cocinero y, como mínimo, se deben hacer un traje de cocinero y dos de camarero. El total no puede ser superior a 20.

    a) ¿Cuántos trajes de cada tipo se deberán confeccionar de forma que el beneficio sea máximo?

    b) ¿Sobrará algún tipo de material?

    c) ¿Hay alguna condición redundante?

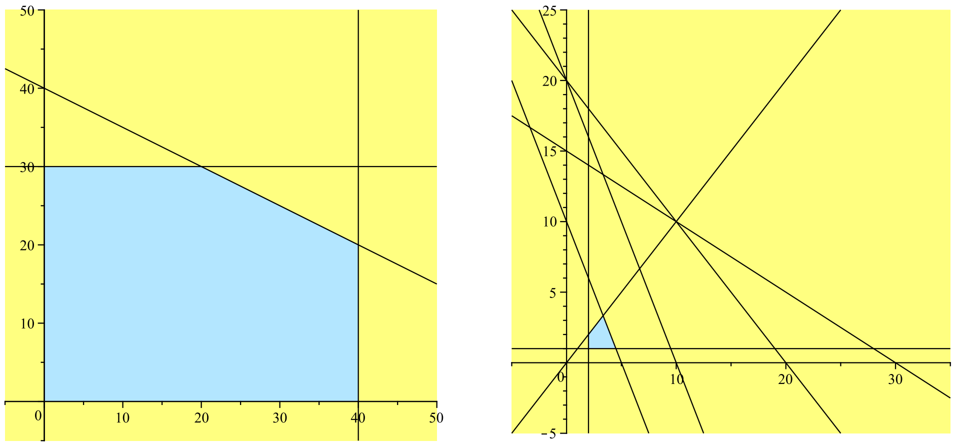


Figura 3: Problemas 9 y 10

11. Una empresaria desea invertir los beneficios de 7500 euros obtenidos en su negocio en dos tipos de acciones A y B.

El tipo A produce un tipo de interés esperado del 6 % y el tipo B del 4 %. Como máximo desea invertir 5000 euros en A y, como mínimo, 1500 en B. Además, desea que la inversión en A sea superior a dos veces y media la inversión en B.

¿Cómo deberá realizar la inversión para que las ganancias sen máximas?

12. Una empresa de siderurgia cuenta con tres tipos de recursos productivos para producir dos tipos de aleaciones de hierro, A_1 y A_2: 1000 horas de trabajo de personal y 880 y 1161 toneladas, respectivamente, de dos materias primas M_1 y M_2, que se deben mezclar.

    Para fabricar una unidad de la aleación A_1 se precisan 10 horas de trabajo de personal, 20 toneladas de M_1 y 50 toneladas de M_2.

    Para fabricar una unidad de la aleación A_2 se precisan 40 horas de trabajo de personal, 50 toneladas de M_1 y 60 toneladas de M_2.

    Gracias a un estudio de mercado, se supone que, por cada unidad de A_1 se obtendrán unos beneficios de 125 unidades monetarias, y por cada unidad de A_2 se obtendrán 250 unidades monetarias.

    a) Halla la producción que maximiza los beneficios.

    b) Indica si se genera algún tipo de excedente en los recursos productivos.

    c) Si se produce una rebaja del 40 % en los beneficios obtenidos por cada unidad de A_2 y se mantienen los obtenidos por cada unidad de A_1, ¿cómo variará la producción óptima?

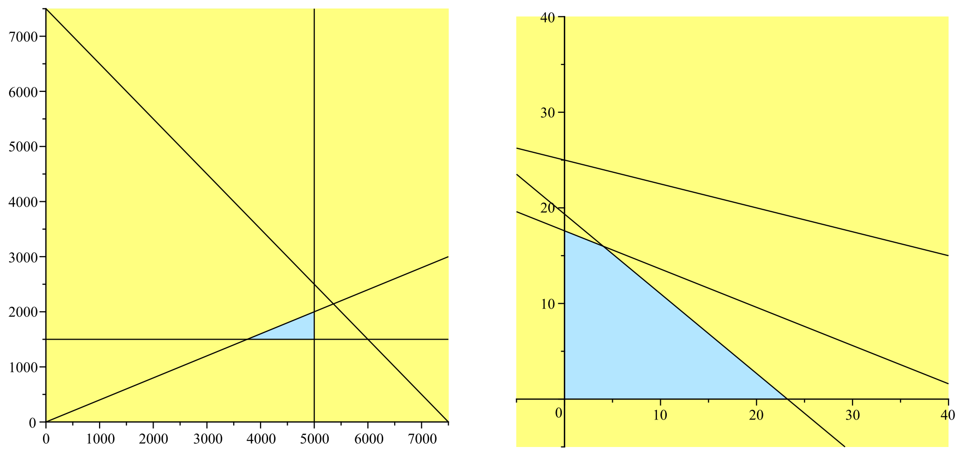


Figura 4: Problemas 11 y 12

13. En la región determinada por:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

halla las coordenadas de los puntos en que la función $F(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su máximo y su mínimo.

(*Solución: no existe máximo, hay un mínimo en* $(1, 1)$)

14. Con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio se quieren fabricar bicicletas de montaña y de paseo que se venderán a 200 y 150 euros respectivamente. Para las de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 de aluminio y para las de paseo 2 kg de cada uno de los dos metales.

    ¿Cuántas bicicletas de paseo y cuántas de montaña se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?

    (*Solución: 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo*)

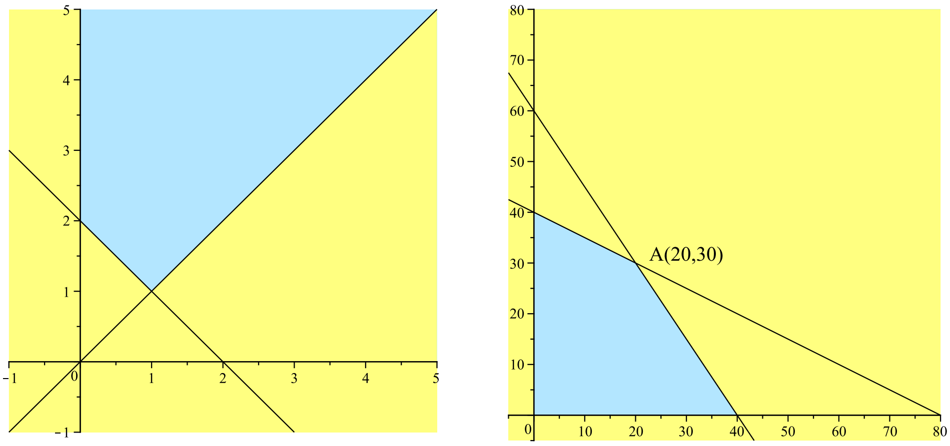


Figura 5: Problemas 13 y 14

15. Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de crudo: ligero y pesado.

    Cada barril de crudo ligero cuesta 70 dólares y con él la refinería produce 0,3 barriles de gasolina (G), 0,2 barriles de combustible de calefacción (C) y 0,3 barriles de combustible para turbinas (T). Cada barril de crudo pesado cuesta 60 dólares y produce 0,3 barriles de G, 0,4 barriles de C y 0,2 barriles de T.

    La refinería ha contratado el suministro de 900000 barriles de G, 800000 barriles de C y 500000 barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades con un coste mínimo.

    (*Solución:* 3 *millones de barriles de crudo pesado y ninguno de ligero*)

16. Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos F_1 y F_2. Los del tipo F_1 cuestan 300 euros y los del tipo F_2 500 euros. Solo dispone de sitio para 20 frigoríficos y de 7000 euros para hacer las compras.

    ¿Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada frigorífico gana el 30 % del precio de compra?

    (*Solución: puntos de coordenadas enteras del segmento de extremos* $(0, 14)$, $(15, 5)$.)

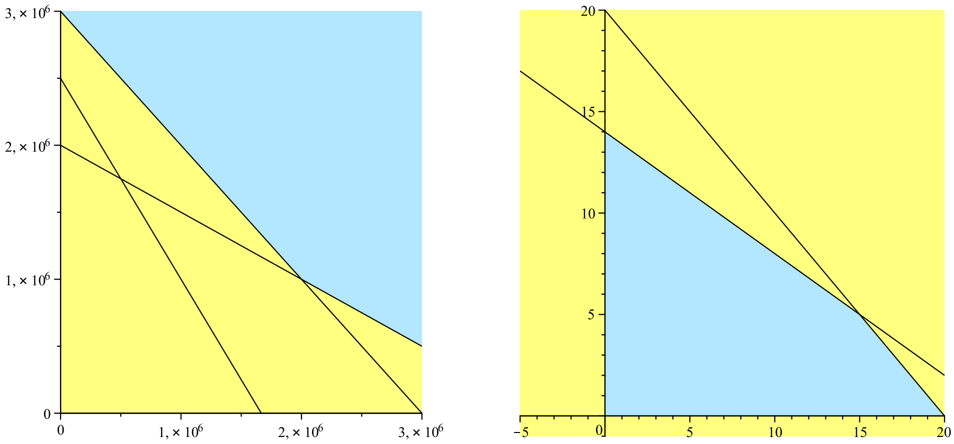


Figura 6: Problemas 15 y 16

17. En la fabricación de piensos se utilizan tres ingredientes, P, Q y R. Se dispone de 90 toneladas de P, 90 de Q y 70 de R. Se desea fabricar dos tipos de pienso M_1 y M_2.

Una vagoneta de pienso M_1 requiere 2 toneladas de P, 1 tonelada de Q y 1 tonelada de R y se vende a 1200 euros. Una vagoneta de M_2 requiere 1 tonelada de P, 2 de Q y 1 de R y se vende a 1000 euros.

¿Cuántas toneladas de cada pienso deben facturarse para obtener el máximo beneficio?

(*Solución:* 30 *vagonetas de cada clase.*)

18. Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fueloil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fueloil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fueloil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

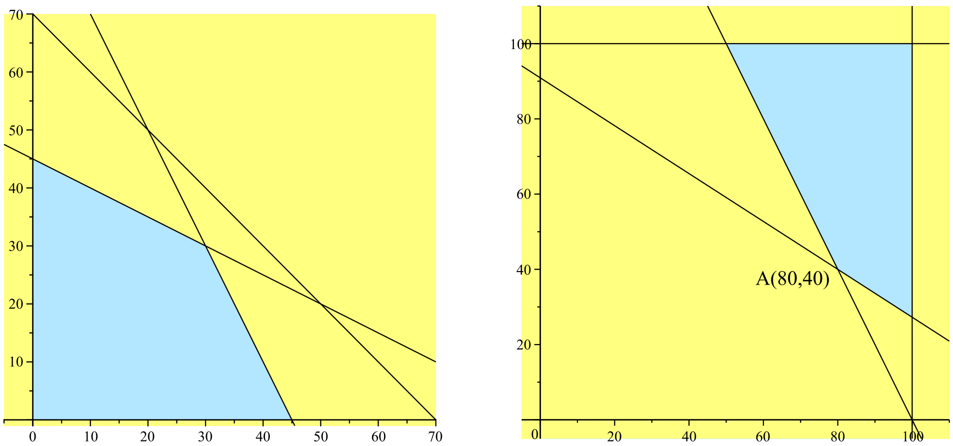
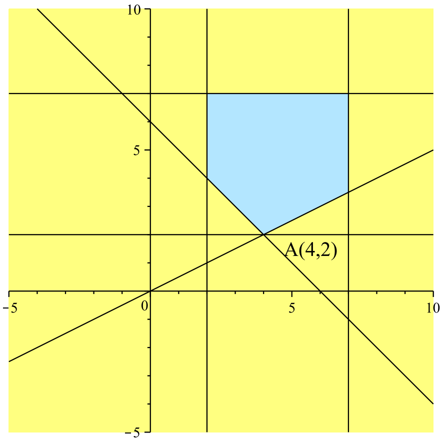


Figura 7: Problemas 17 y 18

19. Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste?. Determínese dicho coste mínimo.

20. Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.



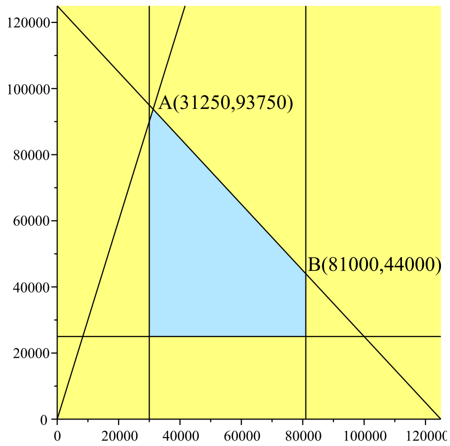


Figura 8: Problemas 19 y 20

4. Probabilidad

1. Se elige al azar una ficha de dominó.
   a) Calcula la probabilidad de haber elegido blanca doble. ($\frac{1}{28}$)
   b) Obtén la probabilidad de haber elegido una ficha doble. ($\frac{1}{4}$)
   c) Calcula la probabilidad de que los puntos de la ficha sumen 4. ($\frac{3}{28}$)

2. Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) $A =$ 'obtener tres caras' ($\frac{1}{8}$)
   b) $B =$ 'obtener dos caras y una cruz' ($\frac{3}{8}$)
   c) $C =$ 'obtener una cara y dos cruces' ($\frac{3}{8}$)

3. Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) Obtener suma igual a 3. ($\frac{1}{18}$)
   b) Obtener suma mayor que 9. ($\frac{1}{6}$)
   c) Obtener suma menor o igual que 5. ($\frac{5}{18}$)

4. Dos personas escriben al azar una vocal, cada una en un papel:
   a) Obtén la probabilidad de que ambas escriban la misma vocal. ($\frac{1}{5}$)
   b) ¿Cuál sería la probabilidad de que tres personas escribiesen, al azar, cada una la misma vocal en un papel? ($\frac{1}{25}$)

5. Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6. Calcular:
   a) La probabilidad de obtener algún 6. ($\frac{11}{36}$)
   b) La probabilidad de no obtener algún 6. ($\frac{25}{36}$)

6. Sean A, B y C tres sucesos que forman un sistema completo de sucesos y donde $p(A) = 0{,}1$, $p(\overline{B}) = 0{,}7$. Calcular $p(C)$. (0,6)

7. Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los siguientes sucesos: $A =$ "*sacar una figura*", $B =$ "*sacar un as*", $C =$ "*sacar una carta de espadas*":
   a) ¿Son A y B incompatibles? Calcula $p(A \cup B)$. (sí $\frac{2}{5}$)
   b) ¿Son A y C compatibles?. Calcula $p(A \cup C)$. (sí $\frac{19}{40}$)

8. Se lanza un dado cúbico, con sus caras numeradas de 1 a 6 y se anota la puntuación obtenida. Se consideran los sucesos $A =$ "*salir un número par*", $B =$ "*salir un número divisor de 12*".
   a) ¿Son A y B sucesos compatibles? (sí)
   b) Calcular la probabilidad de $A \cup B$. ($\frac{2}{3}$)

9. En un experimento se sabe que $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}7$ y $p(A \cup B) = 0{,}85$. Calcula:
   a) $p(A \cap B$(0,35)
   b) $p(A/B)$ (0,50)
   c) $p(B/A)$ (0,7)
   d) $p(A/(A \cap B))$ (1)

10. El 60 % de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía y el 70 % aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80 %. Si un alumno sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas? ($\frac{14}{15}$)

11. Se sabe que dado el suceso A, la probabilidad de que suceda B es de 0,3. ¿Cuánto vale la probabilidad de que dado A, no ocurra B?. (0,7)

12. Calcula la probabilidad $p(A\cup B)$ y $p(A\cap B)$, sabiendo que $p(A\cup B)-p(A\cap B)=0{,}4$, que $p(A)=0{,}6$ y que $p(B)=0{,}8$. (0,9 y 0,5)

13. Sean A y B dos sucesos con $p(A)=0{,}5$, $p(B)=0{,}3$ y $p(A\cap B)=0{,}1$. Calcular las siguientes probabilidades:

    a) $p(A\cup B)$ (0,7) *b*) $p(A/B)$ (1/3) *c*) $p(A/A\cap B)$ (1) *d*) $p(A/A\cup B)$ (5/7)

14. De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halla la probabilidad de que:

    a) Ambos acierten. ($\frac{1}{2}$)
    b) Uno acierte y el otro no. ($\frac{5}{12}$)
    c) Ninguno de los dos acierte. ($\frac{1}{12}$)
    d) Alguno acierte, ($\frac{11}{12}$)

15. Una clase tiene 24 alumnos y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas y 4 suspenden inglés y matemáticas.

    a) Realiza una tabla de contingencia con los resultados de esta clase.
    b) Calcula la probabilidad de que, al elegir un alumno de esta clase al azar, resulte que aprueba matemáticas y suspende inglés. ($\frac{1}{3}$)
    c) En esta clase, ¿son independientes los sucesos *"aprobar inglés"* y *"aprobar matemáticas"*? (SÍ)

16. Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:

    a) Los cuatro huevos en buen estado. ($\frac{14}{33}$)
    b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto. ($\frac{16}{33}$)

17. En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados se pide calcular la probabilidad de obtener:

    a) Tres unos. ($\frac{1}{216}$)
    b) Al menos un dos. ($\frac{91}{216}$)
    c) Tres números distintos. ($\frac{5}{9}$)
    d) Una suma de cuatro. ($\frac{3}{216}$)

18. Sea A un suceso con $0<p(A)<1$.

    a) ¿Puede A ser independiente de su contrario $\overline{A}$? (NO)
    b) Sea B otro suceso tal que $B\supset A$. ¿Serán A y B independientes? (NO)
    c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y $\overline{C}$ independientes? (SÍ)

19. Una fábrica dispone de tres máquinas A B y C que fabrican arandelas. Se sabe que la máquina A produce un 1 % de arandelas defectuosas; la B, un 3 %, y la C, un 2 %. La máquina A produce el 25 % del total de las arandelas; la máquina B, el 40 % y la máquina C el 35 % restante. Al cabo de un día se toma una arandela al azar de la producción total. Si la arandela elegida es defectuosa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A. ($\frac{5}{43}$)

20. En una caja hay 10 bombillas, 2 de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas, vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento? ($\frac{2}{45}$)

21. Un médico ha observado que el 40 % de sus pacientes fuma, y de estos, el 75 % son hombres. Entre los que no fuman, el 60 % son mujeres. Calcula la probabilidad de que:

    a) Un paciente no fumador sea hombre. (0,40)

    b) Un paciente sea hombre fumador. (0,30)

    c) Un paciente sea mujer. (0,46)

22. En una empresa de auditorías se ha contratado a tres personas para inspeccionar a las empresas bancarias realizando las correspondientes auditorías. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30 %; la segunda, el 45 %, y la tercera, el 25 % restante. Se ha comprobado que el 1 % de las inspecciones que realiza la primera persona son erróneas, la segunda peersona comete un 3 % de errores, y la tercera un 2 %.

    a) Halla la probabilidad de realizar una auditoría correctamente. (1957/2000)

    b) Al elegir una inspección correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona? (873/1957)

23. La plantilla de empleados de unos grandes almacenes está formada por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de la mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o solo trabaje en el turno de mañana?

    b) Sabiendo que el empleado elegido no solo trabaja en el turno de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

24. En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y las de que lo sea una de bajo consumo es de 0,09. Se escoge una bombilla al azar:

    a) Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa. (658/700)

    b) Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena? (294/658)

25. El 25 % de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20 % ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5 % de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.

    a) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio técnico ya fueron reparados en otra ocasión? (20 %)

    b) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía? (60 %)

    c) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía? (1/4)

26. Juan es el responsable del aula de informática de una empresa y no se puede confiar en él, pues la probabilidad de que se olvide de hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia de su jefe es de 2/3. Si Juan le hace el mantenimiento a un ordenador, éste tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento, solo hay una probabilidad de 0,25 de que funcione correctamente.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe? (1/3)

    b) A su vuelta, el jefe se encuentra un ordenador averiado. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento? (3/4)

27. En una biblioteca hay dos estanterías con 100 libros en cada una. En la primera hay 25 libros en mal estado y en la segunda 20. Un estudiante coge al azar un libro de la primera estantería y lo deja en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que otro estudiante coja al azar un libro en buen estado de la segunda estantería? (323/404)

28. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = 0{,}6$, $p(B) = 0{,}2$ y $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$.

a) Calcula $p(A \cap B)$ y razona si A y B son independientes. (0, 3 NO)

b) Calcula $p(A \cup B)$. (0,5)

29. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}6$ y $p(A \cup B) = 0{,}9$.

    a) Justifica si A y B son independientes. (NO)

    b) Calcula $p(A/\overline{B})$ y $p(B/\overline{A})$. (3/4 2/3)

30. En un experimento aleatorio, la probabilidad del suceso A es el doble que la del suceso B, y la suma de la probabilidad del suceso A y la del suceso contrario a B es 1,3. Se sabe además que la probabilidad del suceso intersección de A y B es de 0,18. Calcula la probabilidad de que:

    a) Se verifique el suceso A o el B. (0,72)

    b) Se verifique el suceso contrario de A o el contrario de B. (0,82)

    c) ¿Son independientes los sucesos A y B? sí

31. Un dominó consta de 28 fichas, se las cuales 7 son dobles. Escogidas tres fichas al azar, calcula la probabilidad de que alguna sea doble si:

    a) Se extraen las tres simultáneamente. (139/234)

    b) Se extraen una a una con reemplazamiento. (37/64)

32. Se hacen dos lanzamientos de un dado. Si en el primer lanzamiento sale un 2, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar? igual

33. Se lanza un dado dos veces consecutivas. Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1 sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 4. (1/3)

34. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar. ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía? (2/3)

35. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reeemplazamiento, dos bolas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas? (2/5)

    b) Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea? (1/5)

36. El 45 % del censo de una cierta ciudad vota al candidato A; el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se eligen al azar tres personas del censo. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

    a) Las tres personas votan al candidato A. (729/4000)

    b) Dos personas votan al candidato A y otra al B. (1701/8000)

    c) Al menos una de las tres personas se abstienen. (61/125)

37. De una baraja española se extraen sucesivamente tres cartas al azar sin reemplazamiento. Determina la probabilidad de obtener:

    a) Tres reyes.(1/2470)

    b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera. (12/3705)

    c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden. (24/3705)

38. Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene tres bolas blancas y cuatro negras; la segunda, cinco negras, y la tercera, cuatro blancas y tres negras.

    a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra? (2/3)

    b) Si se extrae una bola negra, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja? (1/2)

39. En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una prporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y las de que lo sea una de bajo consumo es de 0,09. Se escoge una bombilla al azar:

    a) Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa. (658/700)

    b) Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena? (294/658)

40. En una competición de tiro con arco, cada tirador dispone como máximo de tres intentos para hacer diana. En el momento en que lo consigue deja de tirar y supera la prueba, y si no lo consigue en ninguno de los tres intentos, queda eliminado. Si la probabilidad de hacer blanco con cada flecha es de 0,8:

    a) Calcula la probabilidad de que no quede eliminado.

    b) Si sabemos que superó la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya conseguido en el segundo intento;

41. En un juego consistente en lanzar dos monedas y un dado de seis caras, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

    a) Calcula la probabilidad de que un jugador gane.

    b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

5. Estadística

1. Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos:

   88 90 90 86 87 88 91 92 89

   Halla un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

2. En los paquetes de arroz de cierta marca pone que el peso que contienen es de 500 gramos. Una asociación de consumidores toma una muestra de 100 paquetes para los que obtiene una media de 485 gramos y una desviación típica de 10 gramos. ¿Se puede aceptar con un nivel de confianza del 95 % que el fabricante está empaquetando realmente una media de 500 gramos?

3. El peso de los alumnos de bachillerato de cierta ciudad tiene una media desconocida y una desviación tíica de 5,4 kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 alumnos de bachillerato de esa ciudad.Si la media de la muestra es de 60 kg, calcula con un nivel de confianza del 99 % el intervalo de confianza para el peso medio de todos los alumnos de bachillerato de esa ciudad.

4. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en hors, de las pilas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 3600.

   Con una muestra de su producción elegida al azar y un nivel de confianza del 95 % ha obtenido para la media el intervalo de confianza $(372{,}6; 392{,}2)$.

   a) Calcula el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.

   b) ¿Cuál sería el error de su estimación si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86,9 %?

5. El 60 % de los empleados de una fábrica están a favor de trabajar los sábados. se toma una muestra aleatoria. ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra para que con un nivel de confianza del 95 % el error máximo admisible en la estimación sea del 7,84 %?

6. En una comunidd autónoma se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Indica el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo. con un nivel de confianza del 95 %, que da la duración media de un contrato de ese tipo tenga una amplitud no mayor de 5 días.

7. Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

   a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95 %?. Razónese la respuesta.

   b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

8. Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

   9,1; 4,9; 7,3; 2,5; 5,5; 6,0; 3,7 5,6; 4,5; 7,6

   a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95 %.

   b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 95 %.

9. El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

   91; 68; 39; 82; 55; 70; 72; 62; 54; 67

   a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

   b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

10. El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

    a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98 %? Razónese.

    b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95 %?

11. La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

    a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

    b) ¿Cuál es la probabilida de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

12. La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

    57; 49; 70; 40; 45; 44; 49; 32; 55; 45

    Hallar un intervalo de confianza del 95 % para la duración media de las rosas.

13. Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15200 km con una desviación típica de 2250 km.

    a) Determina un intervalo de confianza al 99 %, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.

    b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 km, con igual confianza?

14. En una encuesta se pregunta a 10000 personas cuántos libros leen al año y se obtiene una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con una desviación típica de 2.

    a) Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.

    b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

15. Se desea obtener la media de una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una desviación típica de 3,2. Para ello se toma una muestra de 64 individuos obteniéndose una media de 32,5. ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la media de la población esta entre 31,5 y 33,5?

    Si la desviación típica de la población fuera 3, ¿qué tamaño mínimo debería tener la muestra con la cual estimamos la media poblacional si queremos que el nivel de confianza sea del 99 % y el error admisible no supere el valor de 0,75?

16. Un fabricante de lámparas de bajo consumo sabe que el tiempo de duración, en horas, de las lámparas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 180 horas. Con una muestra de dichas lámparas elegida a azar y con un nivel de confianza del 97 %, obtuvo para la media el intervalo de confianza $(10072, 1; 10127, 9)$.

    a) Calcular el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de muestra utilizado.

    b) Si se quiere que el error de su estimación sea como máximo de 24 horas y se utiliza una muestra de tamaño 225, ¿cuál será entonces el nivel de confianza?

17. Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es de (6,66; 8,34). Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo, sabiendo que la desviación típica es igual a 3.

18. El 5 % de los pasteles que hace un pastelero tienen un exceso de peso. Se toma una muestra de 45 pasteles:

    a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de pasteles con exceso de peso de la muestra?

    b) Halla la probabilidad de que en la muestra existan al menos cuatro pasteles con exceso de peso.

19. Un lanzador de tiro con arco da en el blanco el 85 % de sus lanzamientos. Determina las distribuciones en el muestreo de la proporción de veces que da en el blanco para muestras de tamaño 50, 100 y 500 lanzamientos.

20. En las elecciones para formar parte del consejo escolar, un alumno ha recibido un 50 % de votos favorables. Si se elige una muestra de 40 alumnos que han votado:

    a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de votantes que le han votado?

    b) Halla la probabilidad de que más del 40 % de los votantes de la muestra le votasen.

21. En unas elecciones generales, el presidente del gobierno elegido por los ciudadanos ha recibido el 45 % de los votos. Se escoge una muestra al azar de 50 votantes.

    a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de votantes que han votado al presidente del gobierno?

    b) Halla la probabilidad de que más de la mitad de los votantes de la muestra votasen al presidente.

22. De 1500 personas encuestadas en un sondeo preelectoral, 700 manifiestan su intención de no votar. ¿Entre qué valores puede estimarse , con un 95 % de probabilidad , que se encontrará el nivel de abstención en el conjunto del censo?

23. En una ciudad se seleccionó al azar una muestra de 225 familias. A cada familia seleccionada se le preguntó si tenía contratado un seguro de incendios. Se obtuvo como resultado que 75 familias tenían contratado dicho seguro. A partir de esa información, determina:

    a) El intervalo de confianza al 95 % para la proporción de familias de esa ciudad que tienen contratado un seguro de incendios.

    b) El error máximo que cometeríamos con una confianza del 95 %, si diéramos como estimación de dicha proporción el cociente $\frac{75}{225}$.

24. Tomada al azar una muestra de 300 personas mayores de 15 años en una gran ciudad, se encontró que 104 de ellas leían el periódico regularmente.

    a) Hallar con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de lectores de periódicos entre los habitantes de esa ciudad mayores de 15 años. (Sol: (0,302; 0,392))

    b) A la vista del resultado del apartado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,01 con el mismo nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos debe tener la muestra? (Sol: 6132)

25. Para estimar el número de peces que hay en un pantano se procede del siguiente modo: se pescan con red una cierta cantidad de ellos, 349, se marcan y se devuelven al pantano. Al cabo de varios días, se vuelve a pescar otra cantidad y se averigua qué proporción están marcados. En esta segunda pesca se han obtenido 514 peces, de los cuales hay 37 marcados.

    a) Halla un intervalo de confianza, al 90 %, para la proporción de peces marcados en el pantano. (Sol: $(0{,}053; 0{,}091)$)

    b) Halla un intervalo de confianza, al 90 % para el total de peces en el pantano. (Sol: $(3835, 6585)$)

26. Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Estimar la probabilidad de obtener cara mediante un intervalo de confianza del 95 %. (Sol: $(0{,}525; 0{,}715)$)

27. Se cree que el cociente intelectual de los estudiantes de una universidad es 113, con una desviación típica de 7. Para contrastar la hipótesis, se extrae una muestra de 180 estudiantes y se obtiene en ellos un coeficiente intelectual mesio de 115. ¿Podemos aceptar la hipótesis con un nivel de significación del 5 %? El peso de los pollos de una granja sigue una distribución normal con media 2,6 kg y desviación típica ;0.5º; kg. Se experimenta un nuevo tipo de alimentación con 50 crías. Cuando se hacen adultos, se les pesa y se obtiene una media de 2,78 kg. Contrastar la hipótesis de que el peso de la población no aumenta con un nivel de significación del 1 %.

28. A unas elecciones se presentan tres partidos A, B y C. Un comentarista político afirma que los electores se reparten del siguiente modo: un 40 % para A, un 40 % o más a favor de B y el 40 % o menos a favor de C. se pretende contrastar estas hipótesis con una muestra de 250 electores.

    a) Hallar la zona de aceptación de cada una de ellas con un nivel de significación del 5 %.

    b) Una vez extraída la muestra, se obtienen 132 a favor de A, 88 a favor de B y 30 a favor de C. Tomar decisiones respecto a las tres hipótesis.

6. Cálculo

1. Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 3x^2 - 2x + 3$ y la recta $y = 2x + 2$. Representar gráficamente la parábola y la recta.

2. Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola y la recta.

3. Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ y la recta $y = x - 2$. Representar gráficamente la parábola y la recta.

4. Hallar los puntos de tangente horizontal de las siguientes curvas:

   a) $y = 3x^2 - 2x + 1$
   b) $y = x^3 - 3x$

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$

6. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $-x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$

7. Calcula la ecuación de la recta tangente a $y = 3x^2 - 4x + 2$ que tenga pendiente igual a 2.

8. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x + 4}$ en el punto de abscisa 0.

9. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $y = 6x + 10$.

10. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

11. Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

12. ¿En qué puntos de $y = 1/x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?.¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

13. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$?

14. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?

15. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x - 1}$ que son paralelas a $2x + y - 1 = 0$.

16. En cada una de las siguientes funciones, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de tangente horizontal. A partir del dicho estudio decidir si se trata de máximos o mínimos y representar gráficamente la curva:

   a) $y = x^3 - 3x^2$
   b) $y = x^3 - 3x + 2$
   c) $y = x^4 + 4x^3$
   d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
   e) $y = 12x - x^3$
   f) $y = -x^4 + x^2$
   g) $y = x^5 - 6x^3 + 8x - 1$
   h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

17. Representa las siguientes funciones hallando los puntos de tangente horizontal y estudiando sus asíntotas y ramas infinitas:

   a) $y = x^3 - 2x^2 + x$
   b) $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x}{(x + 5)^3}$

f) $y = \dfrac{2x^2}{x + 2}$

18. Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y sus puntos de corte con los ejes:

    a) $y = \dfrac{x - 3}{x + 2}$

    b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

    c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$

    d) $y = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

19. Estudia y representa las siguientes funciones:

    a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$

    b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

    c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

    d) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$

    e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

    f) $y = \dfrac{x`2}{1 - x^2}$

    g) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

    h) $y = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2}$

    i) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

    j) $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$