Problemas de la Olimpiada Matemática
Madrid

Diciembre 2016

1. El producto de dos números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ es igual a la suma de los restantes. Encuentra dichos números.

   Solución:

   La suma de los números es:
   $$S = \frac{(1+26)\cdot 26}{3} = 351$$
   Si los números son m y n debe cumplirse que:
   $$mn = 351 - m - n\ ; \qquad m + n + mn = 351$$
   Basta probar hasta encontrar los números. Es fácil ver que:

   - No pueden ser los dos pares
   - Uno debe ser menor que 17 y otro mayor que 18

   Los números son 15 y 21.

   ♠♠♠♠

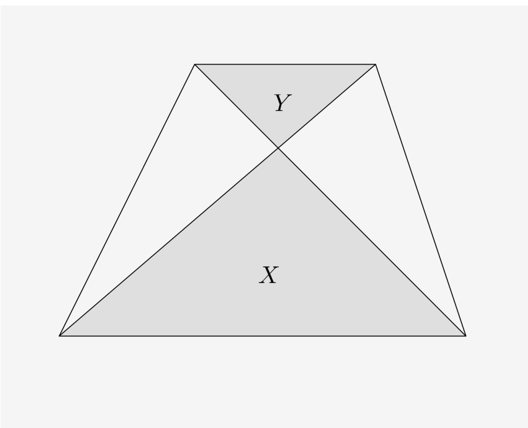
2. Un capicúa es un número que se lee igual de izquierda a derecha a izquierda. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor capicúa si ambos son de 5 cifras y múltiplos de 45:

   Solución:

   Puesto que 5 y 9 son primos entre sí, para que un número sea múltiplo de 45 debe ser múltiplo de 5 y de 9. Los números deben terminar en 5 pues si terminasen en 0 no serían de 5 cifras. El mayor de ellos es 59895 y el menor 50805. Su diferencia es 9090.

   ♠♠♠♠

3. Dividimos el trapecio de la figura en cuatro triángulos trazando las diagonales. Si X e Y son las áreas de los triángulos sombreados, obtén en función de X e Y el área del trapecio.



Solución:

Sean B y b las bases mayor y menor del trapecio y H y h las alturas de los dos triángulos. Puesto que los triángulos son semejantes se cumple que:

$$\frac{B}{b} = \frac{H}{h} \ ; \qquad h = \frac{bH}{B}$$

El área del trapecio es:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\,(B+b)\,(H+h) \\ &= \frac{1}{2}\,BH + \frac{}{2}\,bh + \frac{1}{2}\,Bh + \frac{1}{2}\,bH \\ &= X + Y + \frac{1}{2}\,B\frac{bH}{B} + \frac{1}{2}\,bH \\ &= X + Y + bH \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\,BH \\ Y &= \frac{1}{2}\,bh \end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro:

$$XY = \frac{1}{4}\,BHbh = \frac{1}{4}BHb\,\frac{bH}{B} = \frac{1}{4}\,b^2H^2$$

Entonces:

$$b^2H^2 = 4XY \ ; \qquad bH = 2\sqrt{XY}$$

El área del trapecio es:

$$S = X + Y + 2\sqrt{XY} = \left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right)^2$$

♠♠♠♠

4. Considera las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en las que a, b y c son números primos de una sola cifra. ¿En cuántas de estas ecuaciones hay al menos una solución entera?

Solución:

Consideremos a primo mayor que 1 y sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación. Por las relaciones de Cardano debe cumplirse:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \ ; \qquad ax_1x_2 = c$$

y puesto que c es primo:

$$\begin{cases} ax_1 = 1 \\ x_2 = c \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a} \\ x_2 = c \end{cases}$$

También podría ocurrir que $x_1 = -\frac{1}{a}$ y $x_2 = -c$.

Además:

$$\frac{1}{a} + c = -\frac{b}{a} \ ; \qquad a\left(\frac{1}{a} + c\right) = -b \ ; \qquad 1 + ac = -b$$

o bien:

$$-\frac{1}{a} - c = -\frac{b}{a} \ ; \qquad a\left(-\frac{1}{a} - c\right) = -b \ ; \qquad 1 + ac = b$$

Por consiguiente, $1 + ac = \pm b$. Puesto que b es primo pueden ocurrir dos casos:

- $b = \pm 2$: esto es imposible puesto que entonces $ac = 1$ o $ac = -3$ y, o bien a o c valdrían 1 o -1 y no serían primos.
- b es un primo impar: en este caso ac es par y al menos uno de los dos a o c deben ser ± 2. Observemos además que si a y c son ± 2 y ± 5 o ± 7 dan para b un número de dos cifras o que no es primo. En resumen, tenemos los siguientes casos:

Para $a = 2$, $c = \pm 2$

a	2	2	2	2
c	2	2	-2	-2
b	5	-5	-3	3

Para $a = 2$, $c \neq \pm 2$:

a	2	2	2	2
c	3	3	-3	-3
b	7	-7	-5	5

Para $a \neq 2$, $c = \pm 2$:

a	3	3	3	3
c	2	2	-2	-2
b	7	-7	-5	5

Hemos encontrado 12 ecuaciones para a positivo. Cambiando todos los signos encontramos otras tantas con a negativo. En total, hay 24 ecuaciones que cumplen las condiciones.

♠♠♠♠

5. En una bolsa hay bolas rojas y bolas azules, en total, menos de 206. Sabemos que la probabilidad de que al coger dos bolas (sin reemplazamiento) sean las dos del mismo color es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el máximo número de bolas rojas que puede haber en la bolsa?

Solución:

Sea n el número de bolas de las que r son rojas y $n - r$ azules. La probabilidad de que se extraigan dos bolas del mismo color es:

$$p = \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{n-r-1}{n-1} = \frac{1}{2}$$

Operando:

$$r(r-1) + (n-r)(n-r-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$r^2 - r + n^2 - 2nr + r^2 - n + r = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$4r^2 - 4nr + n^2 - n = 0$$

El discriminante de este ecuación es

$$\Delta = 16n^2 - 16(n^2 - n) = 16n$$

El número de bolas rojas es:

$$r = \frac{4n \pm \sqrt{16n}}{8} = \frac{n + \sqrt{n}}{2}$$

Hemos tomado solamente el signo $+$ puesto que r debe ser máximo. Además $\sqrt{n}$ debe ser entero. El mayor número con raíz entera menor que 2016 es $44^2 = 1936$. Entonces:

$$r = \frac{1936 + 44}{2} = 990$$

♠♠♠♠

6. Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - ax + 2a$ con el eje de abscisas tienen coordenadas enteras. ¿Cuáles son los valores posibles de a?

Solución:

Sean m y n las abscisas de los puntos de corte. Por las relaciones de Cardano:

$$\begin{cases} m + n = a \\ mn = 2a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad mn = 2(m+n)$$

Tenemos que encontrar las soluciones enteras de esta ecuación. Observemos que hay una solución $m = n = 0$ que da $a = 0$.

Puesto que el producto mn es un número par, algumo de los dos números debe ser par. Además no pueden ser los dos negativos.

Pueden darse los siguientes casos:

(a) Supongamos que m y n son positivos. Puede ocurrir:

(I) Que m y n sean pares. Sean $m = 2m'$ y $n = 2n'$:

$$2m'2n' = 2(2m' + 2n')$$

$$m'n' = m' + n'$$

$$m'(n'-1) = n'$$

$$m' = \frac{n'}{n'-1}$$

esto solo es posible para $n' = 2$ con lo que $m' = 2$. Entonces $m = n = 4$ y $a = 8$.

(II) Sea m par y n impar:

$$\begin{aligned}
&2m'n = 2(2m' + n)\\
&m'n = 2m' + n\\
&m'(n-2) = n\\
&m' = \frac{n}{n-2}
\end{aligned}$$

Entonces $n = 3$, $m' = 3$ y $m = 6$. Obtenemos una tercera solución $a = 9$.

(b) Supongamos ahora $m > 0$ y $n < 0$. Hacemos $p = -n$ con lo que $p > 0$ y las ecuaciones quedan:

$$m(-p) = 2(m-p)\ ; \qquad -mp = 2(m-p)\ ; \qquad mp = 2(p-m)$$

Vemos que debe ser $p > m$ y, como en el caso anterior, al menos uno de los dos números debe ser par. Pueden ocurrir los siguientes casos:

(I) Sean m y p pares:

$$\begin{aligned}
&2m'2p' = 2(2p' - 2m')\\
&m'p' = p' - m'\\
&m'(p'+1) = p'\\
&m' = \frac{p'}{p'+1}
\end{aligned}$$

esto es imposible. En este caso no hay solución.

(II) Sea m par y p impar:

$$\begin{aligned}
&2m'p = 2(p - 2m')\\
&m'p = p - 2m'\\
&m'(p+2) = p\\
&m' = \frac{p}{p+2}
\end{aligned}$$

que también es imposible.

(III) Sea m impar y p par:

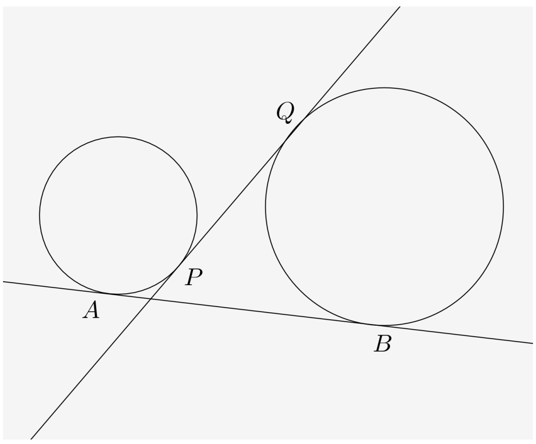
$$\begin{aligned}
&m \cdot 2p' = 2(2p' - m')\\
&mp' = 2p' - m\\
&m(p'+1) = 2p'\\
&m = \frac{2p'}{p'+1}
\end{aligned}$$

Esto solo puede suceder si $p' = 1$ con lo que $m = 1$, $p = 2$, $n = -2$ y $a = -1$.

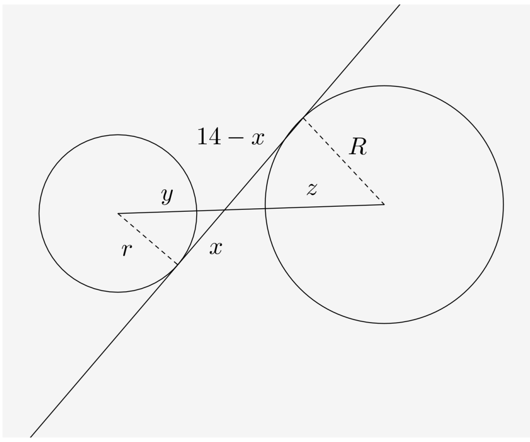
Las soluciones son -1, 0, 8 y 9.

♠♠♠♠

7. El dibujo muestra dos circunferencias y dos rectas tangentes a ambas, siendo A, B, P y Q los puntos de tangencia. Si la longitud del segmento PQ es 14 y la de AB es 16, calcula el producto de los radios de las circunferencias.



Solución:



Por la semejanza de los triángulos, si d es la distancia entre los centros:

$$\frac{R}{r}=\frac{14-x}{x}=\frac{z}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{R+r}{r}=\frac{14}{x}=\frac{d}{y}$$

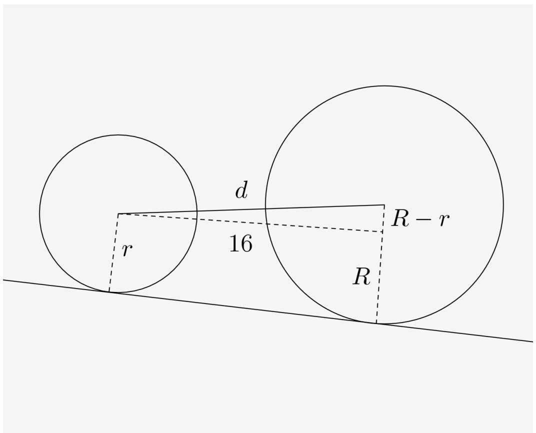
De aquí:

$$x=\frac{4r}{R+r}$$

$$d=\frac{R+r}{r}y=\frac{R+r}{r}\sqrt{r^2+x^2}$$

$$d^2=\frac{(R+r)^2}{r^2}\left(r^2+\frac{14^2r^2}{(R+r)^2}\right)$$

$$=(R+r)^2+14^2$$



Por otra parte:

$$d^2=(R-r)^2+16^2$$

Entonces:

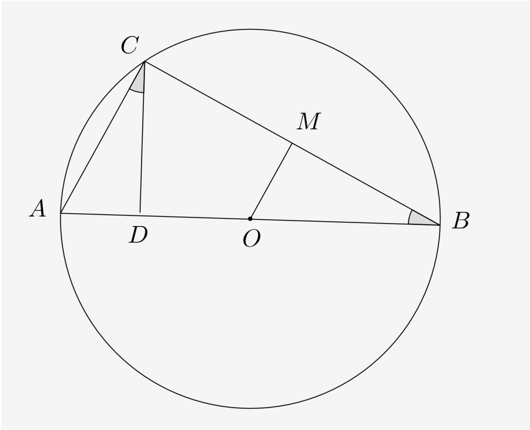
$$(R-r)^2+16^2=(R+r)^2+14^2$$

y haciendo operaciones resulta $Rr=15$.

♠♠♠♠

8. En una circunferencia de centro O y diámetro AB, marcamos un punto C (distinto de A y B) desde el que trazamos la perpendicular al diámetro, al que corta en D. Si M es un punto de la cuerda BC tal que $B\hat{M}O=90^{\circ}$ y $DB=3OM$, calcula el ángulo $A\hat{B}C$.

Solución:



Los triángulos ABC, ACD, CDB y OMB son semejantes. La constante de proporcionalidad entre ABC y OMB es 2. Entonces $AC = 2OM$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} B &= \frac{OM}{r} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{2OM}\\ &= \frac{2r - DB}{2OM} = \frac{2r - 3OM}{2OM}\\ &= \frac{r}{OM} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Así obtenemos la ecuación:

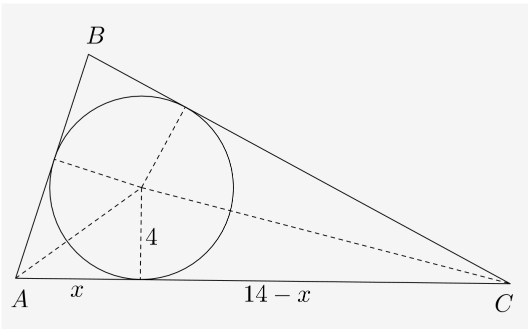
$$\operatorname{sen} B = \frac{1}{\operatorname{sen} B} - \frac{3}{2}\,; \qquad 2\operatorname{sen}^2 B + 3\operatorname{sen} B - 2 = 0$$

que tiene como solución $\operatorname{sen} B = \frac{1}{2}$ y, por tanto, $B = 30^{\circ}$.

♠♠♠♠

9. Hay un único triángulo ABC para el que $AC = 14$, $\cos A = \frac{4}{5}$ y el radio del círculo inscrito es 4. Calcular el área del triángulo.

Solución:



Calculamos $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \frac{1}{3}$$

y entonces:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{3} = \frac{4}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = 12\,; \qquad 14 - x = 2$$

Con este dato podemos calcular el ángulo C:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{4}{2} = 2\,; \qquad \operatorname{tg} C = \frac{2\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} = -\frac{4}{3}$$

Nos queda por calcular el ángulo B. Calculando primero $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}[180^{\text{o}} - (A+B)] = -\operatorname{tg}(A+B) = -\frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{7}{24}$$

Ya tenemos un lado y los tres ángulos. Para calcular el área necesitamos otro lado. Lo calcularemos por el teorema del seno. Primero calculamos el seno de los tres ángulos a partir del coseno y la tangente y resulta:

$$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}\ ; \qquad \operatorname{sen} B = \frac{7}{25}\ ; \qquad \operatorname{sen} C = \frac{4}{5}$$

Calculamos el lado BC:

$$\frac{14}{\frac{7}{25}} = \frac{BC}{\frac{3}{5}}\ ; \qquad \frac{14 \cdot 25}{7} = \frac{5BC}{3}\ ; \qquad BC = 30$$

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 30 \cdot \frac{4}{5} = 168$$

♠♠♠♠

10. Sean x, y, z, números reales tales que

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4} + 3\sqrt{x-9} = \frac{x+y+z}{2}$$

Determinar el valor de $x + 2y + 3z$.

Solución:

Las funciones $y = \sqrt{x-1}$ e $y = \frac{x}{2}$ se cortan en un único punto:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad x - 1 = \frac{x^2}{4}\ ; \qquad x^2 - 4x + 4 = 0\ ; \qquad x = 2$$

Lo mismo ocurre con

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{x-4} \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad 4(x-4) = \frac{x^2}{4}\ ; \qquad x^2 - 16x + 64 = 0\ ; \qquad x = 8$$

Y de nuevo con

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{x-9} \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad 9(x-9) = \frac{x^2}{4}\ ; \qquad x^2 - 36x + 324 = 0\ ; \qquad x = 18$$

Podemos interpretar este resultado geométricamente como que las curvas son tangentes. Entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &\leq \frac{x}{2} && \text{la igualdad se da en } x = 2 \\ 2\sqrt{y-4} &\leq \frac{y}{2} && \text{la igualdad se da en } y = 8 \\ 3\sqrt{z-9} &\leq \frac{z}{2} && \text{la igualdad se da en } z = 18 \end{aligned}$$

La ecuación tiene como solución única $(2, 8, 18)$ y

$$x + 2y + 3z = 2 + 16 + 54 = 72$$

♠♠♠♠