Matemáticas 2º Bachillerato.
Exámenes

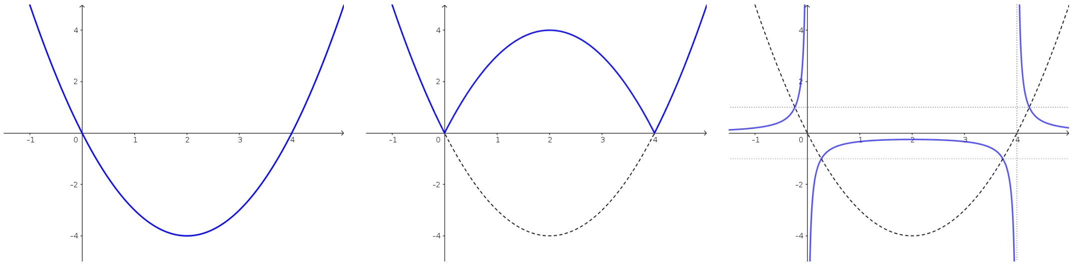
Curso 2020-2021

1. Límites. Derivadas

1. Representar la curva $y = x^2 - 4x$. A partir de esta curva representar:

   (a) $y = |x^2 - 4x|$ $\qquad\qquad$ (b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

   Solución:

   ♠♠♠♠

2. Calcular la función inversa de:

   $$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

   Solución:

   Intercambiamos las variables y despejamos:

   $$x = \ln(y^2 + 1)\ ; \qquad y^2 + 1 = e^x\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

   ♠♠♠♠

3. Calcular los siguientes límites:

   $a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{2 - x}}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad\qquad$ $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x + 5}{x - 1}\right)^{2x+1}$

   Solución:

   (a)
   $$\begin{aligned}
   \lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{2 - x}}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1 - \sqrt{2 - x})(1 + \sqrt{2 - x})}{(x^2 - 3x + 2)(1 + \sqrt{2 - x})} \\
   &= \lim_{x\to 1} \frac{1 - 2 + x}{(x^2 - 3x + 2)(1 + \sqrt{2 - x})} \\
   &= \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 2)(1 + \sqrt{2 - x})} \\
   &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x - 2)(1 + \sqrt{2 - x})} \\
   &= \frac{1}{(1 - 2)(1 + \sqrt{1})} \\
   &= -\frac{1}{2}
   \end{aligned}$$

   (b) Es una indeterminación del tipo 1^∞:

   $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x + 5}{x - 1}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+5}{x-1} - 1\right)\cdot 2x} \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(x+5-x+1)(2x)}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{12x}{x}} = e^{12}$$

   ♠♠♠♠

4. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -1$ y $x = 2$.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{-6}{0} = \infty$$

Hay una indeterminación de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+1)}{(x+1)} = \frac{5}{3}$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable

♠♠♠♠

5. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = \cos x - 1$ se cortan en un punto c.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = g(x) - f(x) = \cos x - 1 - 1 + x^2 = \cos x + x^2 - 2$$

se hace cero en algún punto.

- F es continua en $[0, \pi]$
- $F(0) = \cos 0 + 0 - 2 = 1 - 2 < 0$
- $F(\pi) = \cos \pi + 4 - 2 = -1 + 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $F(c) = 0$. Las dos curvas se cortan en $x = c$.

♠♠♠♠

6. Derivar las siguientes funciones

(a) $y = 3e^{\cos^2 x}$

(b) $y = \operatorname{sen}^3 x$

(c) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

(d) $y = x^2 \operatorname{artg} 3x$

Solución:

(a) $y' = 3e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)$

(b) $y' = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x$

(c) $y' = \dfrac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

(d) $y' = 2x \operatorname{artg} 3x + \dfrac{3}{1 + 9x^2}\, x^2$

♠♠♠♠

7. La curva C está definida por la ecuación $xy - \ln y = 1$, $y > 0$.

(a) Calcular $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x e y.

(b) Determinar la ecuación de la tangente a C en el punto de ordenada e.

Solución:

(a) Derivamos la función:

$$
\begin{aligned}
&y + xy' - \frac{1}{y}y' = 0\\
&y^2 + xyy' - y' = 0\\
&y^2 = y' - xyy'\\
&y^2 = (1 - xy)y'\\
&y' = \frac{y^2}{1 - xy}
\end{aligned}
$$

(b) Si $y = e$ la abscisa es:

$$x \cdot e - \ln e = 1 \qquad x = \frac{2}{e}$$

La pendiente de la tangente es:

$$m = \frac{e^2}{1 - e \cdot \frac{2}{e}} = -e^2$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - e = -e^2 \left(x - \frac{2}{e}\right)$$

♠♠♠♠

8. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ dibujar su gráfica indicando, sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

Solución:

(a) El dominio de la función son todos los números reales.
No hay asíntotas verticales. Veamos las horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{2x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} xe^2x = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota en $-\infty$.

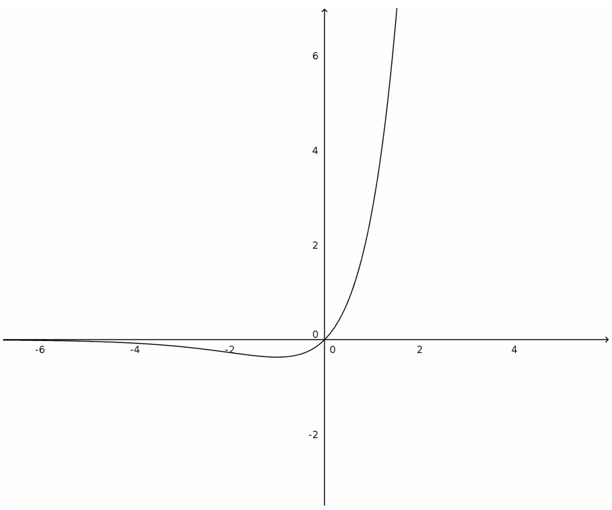
(b) Calculemos la derivada:

$$f'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}x = e^{2x}(1 + 2x)$$

La derivada se anula en $x = -\frac{1}{2}$. El signo de la derivada está dado por:

y'	$-$	0	$+$
x		$-\frac{1}{2}$	

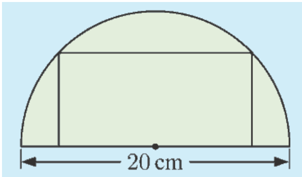
La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Hay un mínimo en $x = -\frac{1}{2}$. La gráfica de la función es como sigue:



♠♠♠♠

2. Derivadas e integrales

Ejercicio 1. De los infinitos rectángulos que pueden inscribirse en una semicircunferencia de 20 cm de diámetro calcular las dimensiones del de mayor área.



Solución:

Si x e y son la base y la altura del rectángulo, el área es:

$$S = xy$$

y teniendo en cuenta que

$$y = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2}$$

tenemos que:

$$S = \frac{1}{2}\, x\sqrt{400 - x^2}$$

Derivando (también podríamos hacer máximo S^2 y no derivar la raíz):

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{400 - x^2} + \frac{-2x \cdot x}{2\sqrt{400 - x^2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right)$$

Calculamos los ceros de la derivada:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right) = 0 \;; \qquad 400 - x^2 - x^2 = 0 \;; \qquad x = \pm 10\sqrt{2}$$

La variable x no tiene sentido para valores negativos. El signo de la derivada es:

$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$	$\nexists$		$+$	0	$-$
x		0		$10\sqrt{2}$	

Las dimensiones del rectángulo de mayor área son $10\sqrt{2}$ y $\frac{10\sqrt{2}}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. El triángulo ABC es rectángulo en A y $AB = 20$ cm. El ángulo B crece con una velocidad constante de un grado por minuto. ¿A qué velocidad cambia BC cuando el ángulo B mide 30º?

Solución:

Puesto que:

$$BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{20}{\cos B}$$

Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}BC}{\mathrm{d}t} = \frac{20 \operatorname{sen} B}{\cos^2 B} \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 1^{\mathrm{o}}\ \mathrm{min}^{-1} = \frac{\pi}{180}\ \mathrm{min}^{-1}$$

cuando $B = 30^{\mathrm{o}}$:

$$\frac{\mathrm{d}BC}{\mathrm{d}t} = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{27}\ \mathrm{cm\ min}^{-1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular:

$(a)\ \displaystyle\int \left(-3x^4+6x^2\right)\,\mathrm{d}x$ $\quad(b)\ \displaystyle\int \left(2x-\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$ $\quad(c)\ \displaystyle\int \operatorname{sen}(4x-5)\,\mathrm{d}x$

$(d)\ \displaystyle\int e^{2-x}\,\mathrm{d}x$ $\quad(e)\ \displaystyle\int \operatorname{cosec}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\int \left(-3x^4+6x^2\right)\,\mathrm{d}x=-\frac{3x^5}{5}+\frac{6x^3}{3}+C$$

$$\int \left(2x-\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\int(4x^2-4x\sqrt{x}+x)\,\mathrm{d}x=\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+C$$

$$\int \operatorname{sen}(4x-5)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\cos(4x-5)+C$$

$$\int e^{2-x}\,\mathrm{d}x=-e^{2-x}+C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x=-\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

$(a)\ \displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x$ $\quad(b)\ \displaystyle\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$ $\quad(c)\ \displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) La primera integral es de tipo arcotangente:

$$\int \frac{1}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3^2+(2x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{2x}{3}+C$$

(b) Por partes:

$$\begin{array}{ll} u=x & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=e^{-3x}\,\mathrm{d}x & v=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}$$

Entonces:

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}+C=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C$$

(c) Se puede hacer por partes. También por cambio de variable:

$$t=\sqrt{x+1}\ ;\qquad t^2=x+1\ ;\qquad 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$$

La integral queda:

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\int(t^2-1)t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int\left(2t^4-2t^2\right)\,\mathrm{d}t=\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+C$$

y deshaciendo el cambio:

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}+C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el área de las regiones encerradas entre el eje x y la curva $y = x^3 + 2x^2 - 3x$.

Solución:

Los puntos de corte de la función con el eje x son

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x^2 - 3x \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \qquad x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \; ; \qquad x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

Los puntos de corte son $x = -3$, $x = 0$ y $x = 1$.

Calculemos las integrales:

$$\int_{-3}^{0} (x^3 + 2x^2 - 3x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = \frac{45}{4}$$
$$\int_{0}^{1} (x^3 + 2x^2 - 3x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{7}{12}$$

El área es:

$$S = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. La curva $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$ gira alrededor del eje y. Calcular el volumen de la figura de revolución.

Solución:

Para $x = 1$, $y = 0$ y para $x = e$, $y = 1$. El volumen es:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 e^{2y} \, \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - e^0) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

♠♠♠♠