

Matemáticas 2º Bachillerato. Exámenes

Curso 2018-2019

www.five-fingers.es

1. Funciones. Límites. Continuidad

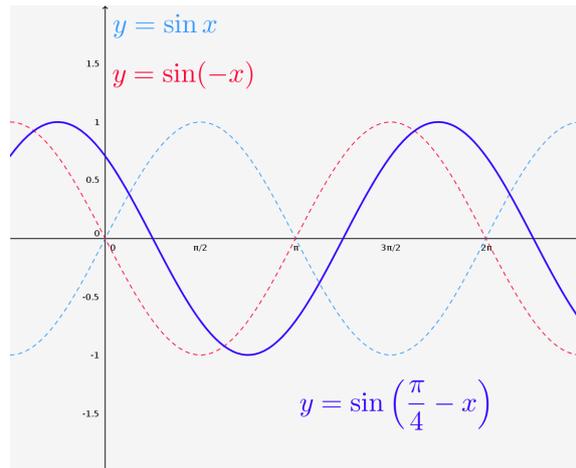
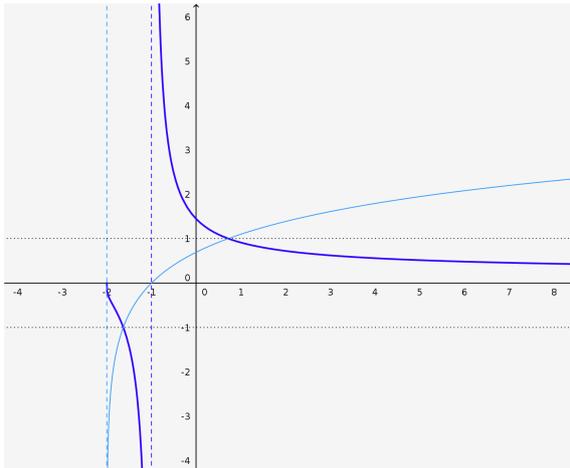
Ejercicio 1. Dibuje la gráfica de las funciones:

$$(a) y = \frac{1}{\ln(x+2)}$$

$$(b) y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \quad (x \in [0, 2\pi])$$

(indicación: dibujar primero la gráfica de $\sin(-x)$)

Solución:



♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcule la función inversa de:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Determine el dominio y recorrido de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \ln(y^2 + 1); \quad y^2 + 1 = e^x; \quad y = f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

El dominio de la función f son los reales positivos y el recorrido, puesto que $x^2 + 1 \geq 1$ son los reales no negativos, es decir, el intervalo $[0, \infty)$.

Pero en este dominio la función no es inyectiva ya que, por ejemplo, $f(-2) = f(2)$. Para que sea inyectiva tenemos que restringir su dominio a $[0, \infty)$, es decir considerar:

$$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

en cuyo caso es inyectiva y sobreyectiva. Por consiguiente, el dominio de f^{-1} es $[0, \infty)$ (el recorrido de f) y su recorrido $[0, \infty)$ (el dominio de f).

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcule los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+4}{3x+2} \right)^{\frac{2}{x-1}} \qquad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{2x+1}$$

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{4 - 4 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + \sqrt{4-x}) = 4 \end{aligned}$$

(b) Aplicando las equivalencias $\operatorname{sen} u \sim u$, $\ln(1+u) \sim u$ y $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

(c) Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞ . Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+4}{3x+2} \right)^{\frac{2}{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\left(\frac{x+4}{3x+2} - 1 \right) \frac{2}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x+4-3x-2}{3x+2} \frac{2}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{-2x+2}{3x+2} \frac{2}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{-2(x-1)}{3x+2} \frac{2}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{-4}{3x+2}} = e^{-\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

(d) También es una indeterminación 1^∞ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{x+5}{x-1} - 1 \right) (2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{(x+5-x+1)(2x+1)}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{12x}{x}} = e^{12} \end{aligned}$$



Ejercicio 4. Calcule las asíntotas de la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

Las posibles asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 2 + 1}{0} = \infty$$

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

La recta $x = 1$ no es asíntota vertical. En el punto $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

La asíntota oblicua es $y = x$ ya que:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = x - \frac{1}{x + 1}$$



Ejercicio 5. Demuestre que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ corta al eje OX en al menos un punto y calcule la parte entera de la abscisa de ese punto.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $f(x) = \cos x - x + 1$ se hace cero para algún valor de x :

$$\begin{cases} f \text{ es continua en } [1, 2] \\ f(1) = \cos 1 - 1 + 1 = \cos 1 > 0 \\ f(2) = \cos 2 - 2 + 1 = \cos 2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$. La curva corta al eje al OX en $(c, 0)$. La parte entera de c es igual a 1.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Estudie los puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -3$ y $x = 3$. Veamos qué tipo de discontinuidad se presenta:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6-12}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x+3} = \infty$$

En $x = -3$ hay un salto infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

En $x = 3$ hay una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. La función g se define mediante:

$$g(x) = \frac{2x-3}{x-2}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$$

(a) (i) Expresé g en la forma

$$g(x) = A + \frac{B}{x-2}$$

donde A y B son constantes.

(ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$. Indique la ecuación de cada una de las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

La función h se define mediante $h(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$.

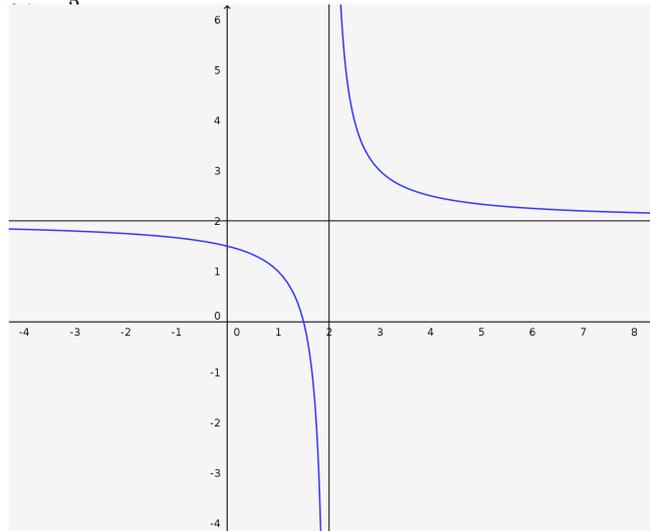
(b) Indique el dominio y recorrido de $h \circ g$

Solución:

(a) (i) Efectuando la división se obtiene

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$$

(ii) Las asíntotas son $x = 2$ y $y = \frac{3}{2}$.



Las intersecciones con los ejes son los puntos $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

(b) La función $h \circ g$ es:

$$h \circ g(x) = h[g(x)] = \sqrt{\frac{2x-3}{x-2}}$$

El dominio de esta función es la solución de la inecuación

$$\frac{2x-3}{x-2} \geq 0$$

Estudiemos el signo de esta función:



El dominio es el conjunto $(-\infty, \frac{3}{2}] \cup (2, \infty)$. Al hacer la raíz la asíntota es $y = \sqrt{2}$. El recorrido de la función es $[0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$



2. Derivadas

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

$$(a) y = \frac{1}{x^2}$$

$$(b) y = e^{2x} + 3e^x - 2$$

$$(c) y = 4 \cos^3 2x$$

$$(d) y = 3e^{2 \cos^2 x}$$

$$(e) y = \cos x \operatorname{artg} x$$

$$(f) y = \frac{\operatorname{artg} x}{x^2}$$

$$(g) y = (3x^2 - 1) \ln(1 - x)$$

$$(h) y = \left(\frac{3 - x^2}{3 + x^2} \right)^3$$

Solución:

$$(a) y' = \frac{-2}{x^3}$$

$$(b) y' = e^{2x} \cdot 2 + 3e^x$$

$$(c) y' = 4 \cdot 3 \cos^2 2x (-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2$$

$$(d) y' = 3e^{2 \cos^2 x} \cdot 2 \cdot 2 \cos x (-\operatorname{sen} x)$$

$$(e) y' = (-\operatorname{sen} x) \operatorname{artg} x + \frac{1}{1+x^2} \cdot \cos x$$

$$(f) y' = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 - 2x \cdot \operatorname{artg} x}{x^4}$$

$$(g) y' = 6x \ln(1-x) + \frac{-1}{1-x} \cdot (3x^2 - 1)$$

$$(h) y' = 3 \left(\frac{3-x^2}{3+x^2} \right)^2 \cdot \frac{-2x(3+x^2) - 2x(3-x^2)}{(3+x^2)^2}$$

◆◆◆◆

Ejercicio 2. La curva C esta dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y \quad \text{para } y > 0$$

(a) Expresa $\frac{dy}{dx}$ en función de x e y .

(b) Calcule el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto de C en que $y = 1$ y $x > 0$.

Solución:

(a) Derivamos en forma implícita

$$\frac{2xy - x^2 y'}{y^2} - 2 = \frac{y'}{y}; \quad 2xy - x^2 y' - 2y^2 = yy'; \quad 2xy - 2y^2 = yy' + x^2 y'$$

y, despejando y' :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 2y^2}{y + x^2}$$

(b) Para $y = 1$, x vale:

$$\frac{x^2}{1} - 2x = \ln 1; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x = 2$$

Entonces:

$$y'(2, 1) = \frac{4 - 2}{1 + 4} = \frac{2}{5}$$



Ejercicio 3. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente es igual a -2 . La derivada en el punto de tangencia debe ser -2 :

$$\frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = -2; \quad \frac{-2}{(x-1)^2} = -2; \quad \frac{1}{(x-1)^2} = 1; \quad (x-1)^2 = 1$$

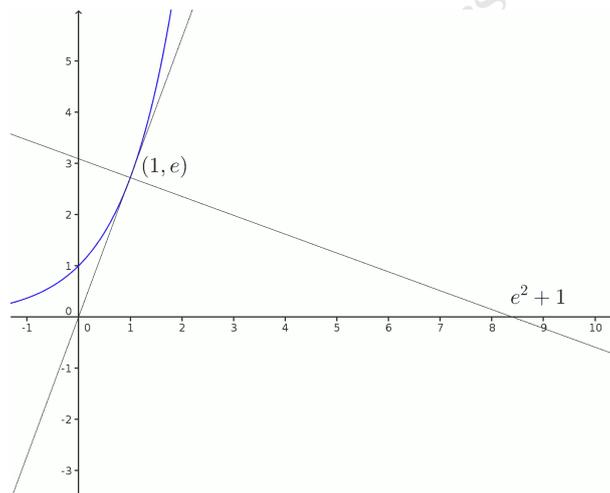
y así obtenemos $x = 2$ y $x = 0$. Los puntos de tangencia son $(0, 0)$ y $(2, 4)$. Las rectas tangentes son:

$$y = -2x; \quad y - 4 = -2(x - 2)$$



Ejercicio 4. Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:



El punto de tangencia es $(1, e)$. La ecuación de la recta tangente en ese punto es:

$$y - e = e(x - 1) \implies y = ex$$

y la normal:

$$y - e = -\frac{1}{e}(x - 1) \implies y = -\frac{1}{e}x + e + \frac{1}{e}$$

La intersección de la tangente con el eje de abscisas es el origen de coordenadas. La intersección de la normal es:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{e}x + e + \frac{1}{e} \\ y = 0 \end{cases}$$

La intersección es el punto $(e^2 + 1, 0)$.

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}(e^2 + 1)e = \frac{e^3 + e}{2}$$



Ejercicio 5. Determinar los valores de a , b y c para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

Solución:

Calculamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

Las condiciones que nos dan las podemos interpretar como:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f''(-1) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$$

de modo que tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = c \\ -6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 3 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = 3$, $b = -6$ y $c = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

Solución:

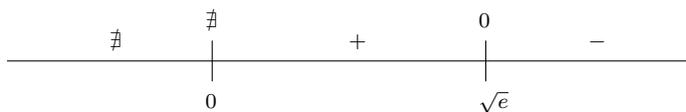
Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

La raíz del numerador es:

$$1 - 2 \ln x = 0 \implies \ln x = \frac{1}{2} \implies x = \sqrt{e}$$

El denominador tiene una raíz triple $x = 0$ pero en ese punto no existe la función. El signo de la derivada se representa en el siguiente esquema:



La función es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en (\sqrt{e}, ∞) . En el punto $x = \sqrt{e}$ hay un máximo local.

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(a) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x .

(b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

(a) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2a \cos x) = 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x^2 + 2a \cos x) = \pi^2 - 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (ax^2 + b) = \pi^2 a + b$$

e igualando los límites por la derecha y por la izquierda resulta $a = 1$ y $b = -2$.

(b) Ahora tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Para $x \neq 0$ y $x \neq \pi$ la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ 2x & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

En $x = 0$:

$$f'(0^-) = 3; \quad f'(0^+) = 0$$

la función no es derivable.

En $x = \pi$:

$$f'(\pi^-) = 2\pi; \quad f'(\pi^+) = 2\pi$$

La función es derivable.

♠♠♠♠

3. Derivadas e integrales

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

$$(a) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(b) y = \operatorname{sen}^3 x$$

$$(c) y = 1 - \ln \operatorname{tg} x$$

$$(d) y = 3e^{\cos^2 x}$$

$$(e) y = \operatorname{arsen} \frac{1}{x}$$

$$(f) y = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$(g) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$$

$$(h) y = x^2 \operatorname{artg} 3x$$

Solución:

$$(a) y' = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$(b) y' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

$$(c) y' = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

(d) $y' = 3e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x (-\sin x)$

(e) $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

(f) $y' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

(g) $y' = \frac{1}{2} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} - \frac{1}{2} \frac{-2 \sin x \cos x}{1 - \sin^2 x}$

(h) $y' = 2x \operatorname{artg} x + \frac{3}{1 + 9x^2 x^2}$



Ejercicio 2. Calcular:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

Solución:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{-(1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi x}{2}) \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$



Ejercicio 3. Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$$

se pide:

- Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

- (a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-e^{-x}(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

La pendiente en el punto $x_0 = 0$ es:

$$m = f'(0) = -1$$

y la ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = f(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 1 = -x$.

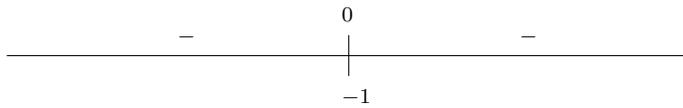
- (b) No hay asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es asíntota cuando $x \rightarrow \infty$ puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x(x^2 + 1)} = 0$$

Sin embargo no es asíntota cuando $x \rightarrow -\infty$.

- (c) La derivada se anula en $x = -1$. Este punto no es un extremo local pues el signo de la derivada responde al siguiente esquema:



La función es siempre decreciente.



Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

- Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
- Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.
- Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

- (a) En el punto $x = a$ la función toma el valor $\frac{1}{a}$. La derivada de la función es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. La pendiente de la tangente en el punto a será

$$m = -\frac{1}{a^2}$$

y la ecuación de la tangente es

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

- (b) Las intersecciones de esta recta con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \\ y = 0 \end{cases} \implies A(2a, 0)$$

y con el eje de ordenadas

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \\ x = 0 \end{cases} \implies B\left(0, \frac{2}{a}\right)$$

- (c) El cuadrado de la distancia entre estos dos puntos es:

$$F(a) = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$$

Si la distancia es mínima, la derivada debe ser cero:

$$\frac{dF}{da} = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \implies a^4 - 1 = 0 \implies a = 1$$



Ejercicio 5. Calcular las integrales:

(a) $\int \frac{4x}{x^2 + 1} dx$

(c) $\int \frac{1}{1 + 9x^2} dx$

(b) $\int x^2 \ln x dx$

(d) $\int \frac{x + 1}{x^2 - 9} dx$

Solución:

$$(a) \int \frac{4x}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{2x}{x^2+1} dx = 2 \ln(x^2+1) + C$$

(b) Por partes

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = x^2 dx \quad v = \frac{x^3}{3}$$

Entonces

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

$$(c) \int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{artg}(3x) + C$$

(d) Descomponemos en fracciones:

$$\frac{x+1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x-3)(x+3)} \implies A = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{2}{3}$$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{1}{3} \ln|x+3| + \frac{2}{3} \ln|x-3| + C$$

◆◆◆◆

4. Examen de Cálculo

1. (8 puntos) Una curva viene dada por $xy = y^2 + 4$.
- (a) Muestre que no hay ningún punto en el que la tangente a la curva sea horizontal.
- (b) Halle las coordenadas de aquellos puntos en los que la tangente a la curva es vertical.

Solución:

- (a) Derivando de forma implícita se obtiene:

$$\begin{aligned}y + xy' &= 2yy' \\2yy' - xy' &= y \\y'(2y - x) &= y \\y' &= \frac{y}{2y - x}\end{aligned}$$

Según esta expresión, la derivada se anula para $y = 0$. Sin embargo no hay ningún punto de la curva con ordenada cero pues al sustituir este valor en la ecuación de la curva se obtiene $0 = 4$. No hay entonces ningún punto de tangente horizontal.

- (b) La tangente es vertical cuando la derivada tiende a infinito, es decir, en este caso, cuando $2y - x = 0$. Sustituyendo $x = 2y$ en la ecuación de la curva:

$$\begin{aligned}2y^2 &= y^2 + 4 \\y^2 &= 4 \\y &= -2; \quad y = 2\end{aligned}$$

Los puntos son $(-4, -2)$ y $(4, 2)$.



2. (6 puntos) La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución de probabilidad

$$f(x) = A \operatorname{sen}(\ln x), \quad 1 \leq x \leq 5$$

- (a) Halle el valor de A con una aproximación de tres cifras decimales.
- (b) Halle la moda de X .
- (c) Halle el valor $p(X \leq 3 \mid x \geq 2)$.

Solución:

- (a) Con la calculadora vemos que

$$I = \int_1^5 \operatorname{sen} \ln x \, dx \simeq 3,09$$

Entonces, A debe valer

$$A = \frac{1}{I} \simeq 0,323$$

- (b) Calculamos el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos que la moda es 4,81.
- (c) La probabilidad es:

$$p(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{p(2 \leq X \leq 3)}{p(X \geq 2)}$$

Las probabilidades las calculamos mediante integrales:

$$\begin{aligned}p(2 \leq X \leq 3) &= \int_2^3 A \operatorname{sen} \ln x \, dx \simeq 0,253 \\p(X \geq 2) &= \int_2^5 A \operatorname{sen} \ln x \, dx \simeq 0,881\end{aligned}$$

Entonces

$$p(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{p(2 \leq X \leq 3)}{p(X \geq 2)} \simeq 0,288$$



3. (12 puntos)

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad v m s⁻¹, en el instante t segundos, viene dada por

$$v(t) = \frac{t}{12 + t^4}, \quad t \geq 0.$$

- (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas.
- (b) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\int \frac{t}{12 + t^4} dt$.
- (c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma $k \operatorname{artg}(b)$, $k, b \in \mathbb{R}$.
- (d) La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad v m s⁻¹ y su desplazamiento s m están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arsen}(\sqrt{s})$. Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0,1$ m.

Solución:

(a) La derivada de la función es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{12 + t^4 - 4t^3 \cdot t}{(12 + t^4)^2} = \frac{12 - 3t^4}{(12 + t^4)^2}$$

La derivada se anula en $t = \sqrt{2}$. La función tiene un máximo en $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{16})$.

(b) Con el cambio $u = t^2$, $du = 2t dt$ tenemos:

$$\int \frac{t}{12 + t^4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{12 + u^2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \operatorname{artg} \frac{u}{\sqrt{12}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{t^2}{2\sqrt{3}} + C$$

(c) Calculamos la integral definida:

$$s = \int_0^6 \frac{t}{12 + t^4} dt = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{x^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^6 = \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{artg} 6\sqrt{3}$$

(d) Teniendo en cuenta que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Derivando y sustituyendo v :

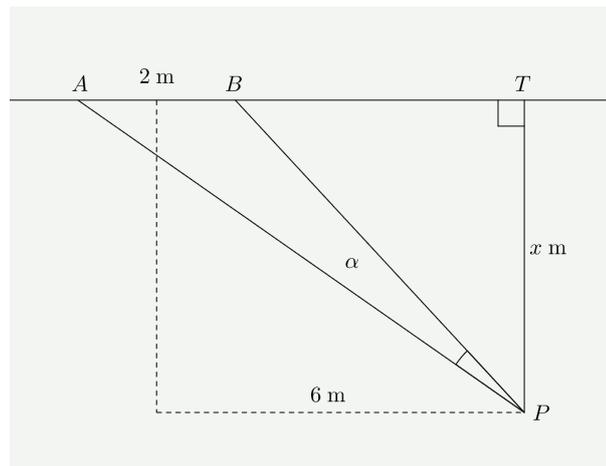
$$a = \frac{1}{\sqrt{1-s}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot \operatorname{arsen} \sqrt{s}$$

Sustituyendo $s = 0,1$ se obtiene $a \simeq 0,536$ m s⁻².



4. (22 puntos)

Los puntos A , B y T se encuentran sobre una línea de una cancha de fútbol sala. La portería AB , tiene 2 m de ancho. Un jugador situado en el punto P patea el balón en dirección a la portería. PT es perpendicular a la recta AB y se encuentra a 6 m de una recta paralela que pasa por el centro de AB . Sea PT igual a x metros y sea $\alpha = \widehat{APB}$, medido en grados. Suponga que el balón se desplaza por el piso.



- (a) Halle el valor de α cuando $x = 10$.
 (b) Muestre que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x^2 + 35}$$

El valor de α es máximo cuando el valor de $\operatorname{tg} \alpha$ es máximo.

- (c) (I) Halle $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \alpha)$.
 (II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de α tal que $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \alpha) = 0$.
 (III) Halle $\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{tg} \alpha)$ y, a partir de lo anterior, muestre que el valor de α nunca supera los 10° .
 (d) Halle el conjunto de valores de x para los cuales $\alpha \geq 7^\circ$

Solución:

- (a) De la figura se deduce:

$$\alpha = \operatorname{artg} \frac{7}{x} - \operatorname{artg} \frac{5}{x}$$

y para $x = 10$ resulta $\alpha \simeq 8,43^\circ$

- (b) Llamemos $\widehat{TPA} = \alpha_1$ y $\widehat{TPB} = \alpha_2$. Entonces $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ y

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{7}{x} - \frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x} \cdot \frac{5}{x}} = \frac{2x}{x^2 + 35}$$

- (c) (I)

$$\frac{d(\operatorname{tg} \alpha)}{dx} = \frac{2(x^2 + 35) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 35)^2} = \frac{70 - 2x^2}{(x^2 + 35)^2}$$

- (II) La derivada se anula para $x = \sqrt{35}$ m.

- (III) La derivada segunda es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\operatorname{tg} \alpha)}{dx^2} &= \frac{-4x(x^2 + 35)^2 - 2(x^2 + 35) \cdot 2x \cdot (70 - 2x^2)}{(x^2 + 35)^4} \\ &= \frac{-4x(x^2 + 35) - 2 \cdot 2x \cdot (70 - 2x^2)}{(x^2 + 35)^3} \\ &= \frac{4x^3 - 420x}{(x^2 + 35)^3} \\ &= \frac{4x(x^2 - 105)}{(x^2 + 35)^3} \end{aligned}$$

La derivada segunda para $x = \sqrt{35}$ es negativa. Por consiguiente α es máximo para este valor de x . El valor máximo de α es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{35}}{35 + 35} = \frac{\sqrt{35}}{35} \implies \alpha \simeq 9,59^\circ$$

Por tanto, α nunca es mayor de 10° .

(d) Representamos con la calculadora las curvas

$$y_1 = \operatorname{artg} \frac{2x}{x^2 + 35}; \quad y_2 = 7$$

y vemos que el ángulo es mayor de 7° entre 2,55 m y 13,7 m.



5. Matrices y determinantes

Ejercicio 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular $(A + B)C^t$.

Solución:

$$\begin{aligned} (A + B)C^t &= \left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Ejercicio 2. Hallar los valores de k para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

no posee inversa. Calcular A^{-1} para $k = 0$.

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot (k-1) \cdot 2 + k(k-2) - 2(k-2) + 2 - k(k-1)(-1) = 2k^2 - 9k + 9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \implies k = 3, k = \frac{3}{2}$$

Para estos valores de k no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k = 0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

poniendo ceros en la 3ª columna

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_2$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

intercambiamos C_1 y C_3

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

Solución:

Poniendo ceros en la primera fila:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 4 \\ 3 & 11 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

desarrollamos por la 1ª

$$= (-1) \begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 11 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 133$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular:

- (a) La matriz inversa de A .
- (b) La matriz X que verifica la ecuación:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

El determinante de A es igual a 1, de modo que la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

6. Matrices. Sistemas

Ejercicio 1. Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en esos casos.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k+1 & k-1 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(k+1-k^2+1) = k^2 - k - 2$$

El determinante se anula para $k = -1$ y $k = 2$. Para estos valores, el rango de la matriz de coeficientes será menor que 3 y el sistema será compatible indeterminado.

Sea $k = -1$. Elegimos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Una solución particular del sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

Por las propiedades de los sistemas homogéneos otra solución es ésta dividida por -2 , o sea $(1, 0, 1)$. La solución general es $(\lambda, 0, \lambda)$

Sea ahora $k = 2$. Elegimos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Calculamos una solución particular del sistema:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad z = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

La solución general es $(\lambda, -3\lambda, -5\lambda)$.



Ejercicio 2. Dada la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

- Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .
- Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a^3 - 1 + a + a - a) = 2a(1 - a^2)$$

El determinante se anula para $a = 0$, $a = -1$ y $a = 1$.

- Si $a \notin \{0, -1, 1\}$ el determinante es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

- Si $a = -1$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

- Si $a = 1$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

- (b) La matriz inversa existe si $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

Para $a = 2$ el determinante de la matriz es -12 . La matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz adjunta:

$$\text{adj } M = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 6 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 3.

- (a) Hallar todas las matrices $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ distintas de $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

- (b) Para una cualquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular:

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$$

Solución:

- (a) Calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Para que $A^2 = A$ debe cumplirse:

$$\begin{cases} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{cases}$$

Las soluciones son $a = 0, b = 1$ o $a = 1, b = 0$, es decir, las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Si $A^2 = A$ también las demás potencias son iguales a A . Entonces:

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10} = 10A$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 4. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

- (a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
- (b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4k + k^2 - 1 - 2(k-1) + 2 + k^2 + k = 2k^2 - 5k + 2$$

El determinante se anula para $k = 2$ y para $k = \frac{1}{2}$. Pueden darse los siguientes casos:

- Si $k \neq 2$ y $k \neq \frac{1}{2}$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado.
- Si $k = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

- Si $k = \frac{1}{2}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

El rango es igual a 3 y el sistema es incompatible. Para calcular este rango primero hemos suprimido la primera columna que es dependiente de la tercera, luego hemos multiplicado la primera y la tercera columna por 2 para operar con enteros y hemos puesto ceros en la segunda columna.

- El sistema tiene infinitas soluciones para $k = 2$. Elegimos dos ecuaciones independientes, por ejemplo, la primera y la segunda:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Tomamos $x = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 3y + 2z = -1 - \lambda \\ y + z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es igual a 1. Entonces:

$$y = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 2 - 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3\lambda; \quad z = \begin{vmatrix} 3 & -1 - \lambda \\ 1 & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = 7 - 5\lambda$$

La solución del sistema es $(\lambda, -5 + 3\lambda, 7 - 5\lambda)$.



7. Geometría

Ejercicio 1. Dado el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar la posición relativa de r y s .
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s .
- Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .

Solución:

- (a) Sea A un punto de la primera recta y \vec{u} su vector director, B un punto de la segunda recta y \vec{v} el vector director:

$$A(1, -1, 0), \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B(1, 0, 3), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las rectas no son paralelas. Para saber si se cortan o se cruzan, calculamos el producto mixto:

$$[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

- (b) Calculamos el plano que contiene a r y P :

$$\begin{cases} x + 1 & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z - 2 & 1 & -2 \end{cases} = 0; \quad x - 4y + 3z - 5 = 0$$

Calculamos el plano que contiene a s y P :

$$\begin{cases} x + 1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z - 2 & 0 & 1 \end{cases} = 0; \quad x - y - 2z + 5 = 0$$

La recta que nos piden, si existe, es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

- (c) El vector director de la perpendicular común es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 1 \\ \vec{j} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene a r y a la perpendicular común es:

$$\begin{cases} x - 1 & 1 & -1 \\ y + 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{cases} = 0; \quad x + y - 2z = 0$$

El plano que contiene a s y a la perpendicular común es:

$$\begin{cases} x - 1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z - 3 & 0 & 0 \end{cases} = 0; \quad z - 3 = 0$$

La perpendicular común es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$



Ejercicio 2. Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4, 2, 8)$, $B(6, 4, 12)$, $C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

- (a) Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H .
 (b) Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

- (a) Calculamos el producto mixto:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 20 \end{vmatrix} = -112$$

El volumen del paralelepípedo es igual a 112.

- (b) El plano ABC tiene como ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 2 & 2 \\ y-2 & 2 & -2 \\ z-8 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 3x + y - 2z + 2 = 0$$

La perpendicular a este plano por el punto E es:

$$\begin{cases} x = 6 + 3\lambda \\ y = 8 + \lambda \\ z = 28 - 2\lambda \end{cases}$$

Y la intersección del plano y la perpendicular:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 6 + 3\lambda \\ y = 8 + \lambda \\ z = 28 - 2\lambda \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $M(12, 10, 24)$. Este punto es punto medio entre $E(6, 8, 28)$ y $E'(x', y', z')$.
 Entonces:

$$12 = \frac{6 + x'}{2}; \quad 10 = \frac{8 + y'}{2}; \quad 24 = \frac{28 + z'}{2}$$

El punto simétrico es $E'(18, 12, 20)$.



Ejercicio 3. Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- (a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
 (b) Hallar el valor de a para que el tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7.
 (c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .

Solución:

- (a) Debe ocurrir que $[P_1\vec{P}_2, P_1\vec{P}_3, P_1\vec{P}_4] = 0$:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 7(3a-4) = 0 \implies a = \frac{4}{3}$$

- (b) En este caso:

$$\frac{1}{6} |7(3a-4)| = 7 \implies a = \frac{10}{3}, a = -\frac{2}{3}$$

- (c) Es el plano mediador de P_1 y P_3 :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ 4y + 10z - 31 = 0$$



Ejercicio 4.

(a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro k :

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + kz = 3$$

$$\pi_2 \equiv x + ky - z = -1$$

$$\pi_3 \equiv 3x + y - 3z = -k$$

(b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

(a) Basta estudiar la compatibilidad del sistema. Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6k + k - 9 - 3k^2 + 2 + 9 = -(3k^2 + 5k - 2)$$

El determinante se hace cero para $k = -2$ y $k = \frac{1}{3}$:

- Para $k \neq -2$ y $k \neq \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.
- Para $k = -2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado y los tres planos se cortan en una recta.

- Si $k = \frac{1}{3}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{3} & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -3 & -3 \\ 9 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

El segundo y el tercer planos son paralelos y el primero los corta. El sistema es incompatible

(b) Para $k = -2$ el vector director de la recta intersección de los planos es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 1 \\ \vec{j} & 3 & -2 \\ \vec{k} & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector director de la recta.

