Matemáticas 2^{o}BI.
Exámenes

2016/2017

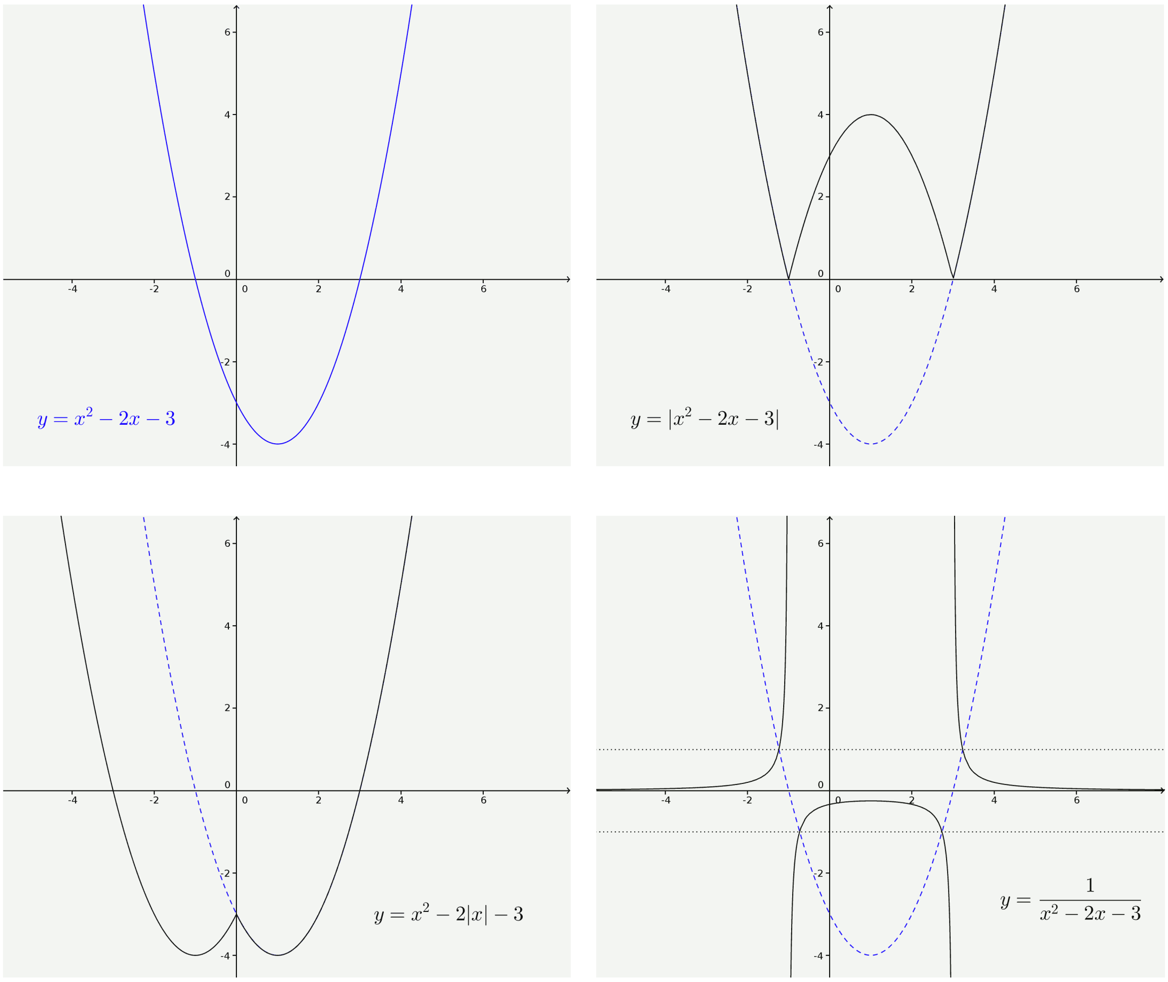
1. Funciones. Límites. Continuidad

1.1. Grupo W

Ejercicio 1. *Dibujar la gráfica de la función* $y = x^2 - 2x - 3$ *y, a partir de ella, dibujar las gráficas de:*

$$y = |x^2 - 2x - 3| \; ; \qquad y = x^2 - 2|x| - 3 \; ; \qquad y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

Solución:



Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{x} \qquad (b)\ \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{2}{x-1}}$

Solución:

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x - 1}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}$$

(b) Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}} &= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)\frac{2}{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)\frac{2}{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} e^{\frac{x-1}{x+2}\frac{2}{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} e^{\frac{2}{x+2}} \\
&= e^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Estudiar la continuidad de la función:*

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$$

Solución:

Los posibles puntos de discontinuidad son los valores que anulan el denominador, es decir, $x=2$ y $x=-1$. Calculemos los límites en estos puntos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = \infty$$

En $x=-1$ hay un infinito de la función.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{2}$$

Puesto que existe el límite, en $x=2$ hay una discontinuidad evitable.

Ejercicio 4. *Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=\cos\pi x-2$ se cortan en un punto x_0. Calcular la parte entera de x_0.*

Solución:

Sea la función:

$$F(x) = x^3+x^2-\cos\pi x+2$$

El problema es equivalente a demostrar que $F(x)$ se anula en algún punto:

- $F(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$
- $F(0)>0$
- $F(-2)<0$

Por el teorema de Bolzano, existe un número $x_0\in(0,2)$ tal que $F(x_0)=0$. En este punto se cortan las dos gráficas.

Por otra parte, como $F(-1)>0$ y $F(-2)<0$, el número x_0 está comprendido entre -2 y -1. Su parte entera es -2.

Ejercicio 5. *Calcular las asíntotas de la función*

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x}$$

Solución:

Las rectas $x = 0$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la función puesto que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty\ ; \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

No hay asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^3 - x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^2 - x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 2 - x^3 + x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$

Ejercicio 6. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}}$ $\qquad$ (b) $f(x) = (3x + 2)e^{x^2 + x}$

Solución:

(a) Escribamos primero la función como

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(\cos x - 1) - \frac{1}{2} \ln \operatorname{sen} x$$

La derivada es:

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x - 1} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

(b) Aplicando la regla de derivación del producto:

$$f'(x) = 3e^{x^2 + x} + (3x + 2)e^{x^2 + x}(2x + 1)$$

Ejercicio 7. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

calcular a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

Solución:

Para que sea continua, los límites laterales deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4a + 1$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = e^0 = 1$$

Por consiguiente debe ser $4a + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$

Sea ahora la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

La derivada para $x \neq 2$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ -e^{2-x} & x > 2 \end{cases}$$

Entonces, $f'(2^-) = 0$ y $f'(2^+) = -1$. La función no es derivable en $x = 2$.

Ejercicio 8. *Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *que son paralelas a* $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente debe valer -2. Entonces:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = -2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2,\ x = 0$$

Los puntos de tangencia son $(0,0)$ y $(2,4)$. Las ecuaciones de las tangentes son:

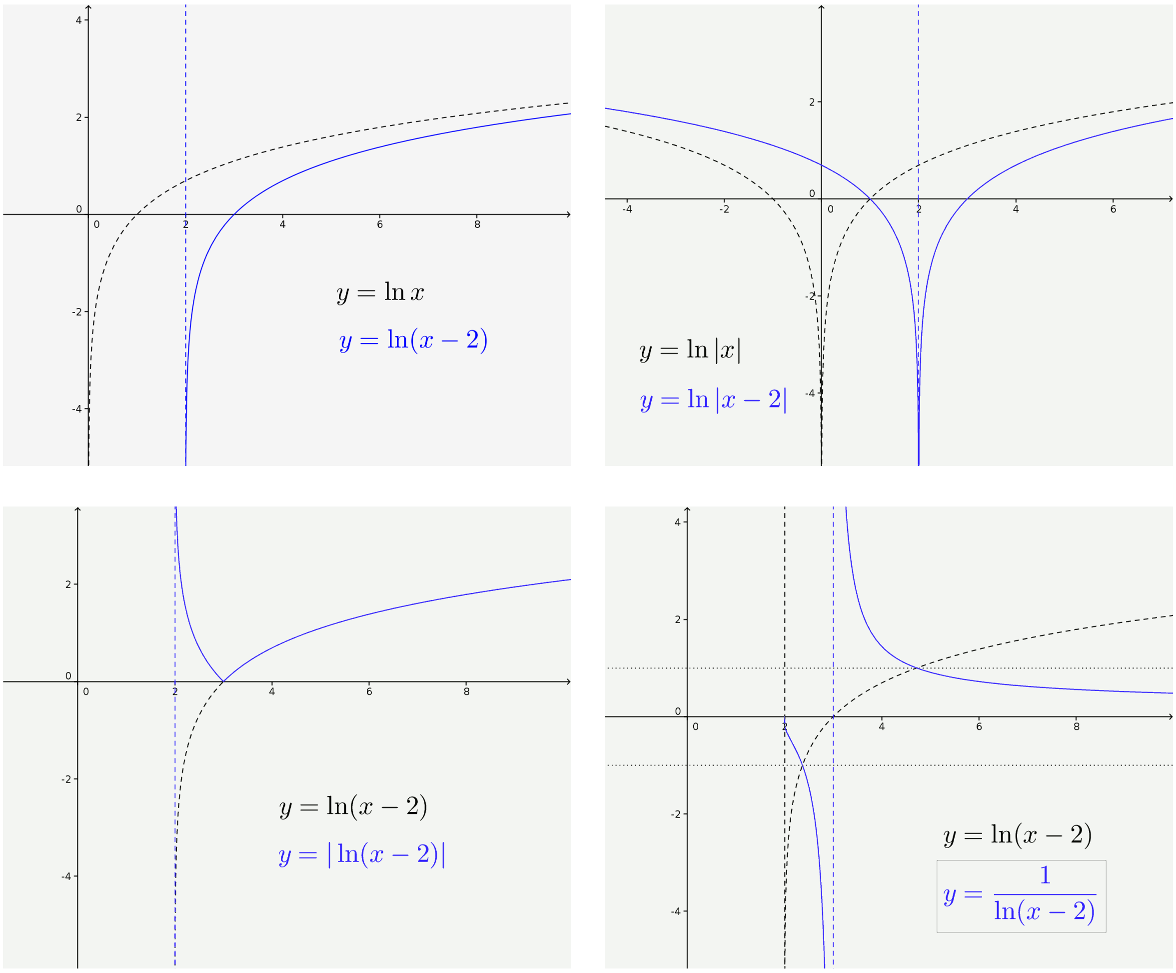
$$y = -2x\ ; \qquad y - 4 = -2(x-2)$$

1.2. Grupo Z

Ejercicio 1. *Representar gráficamente las funciones:*

(a) $y = \ln(x-2)$ $\qquad$ (b) $y = \ln|x-2|$ $\qquad$ (c) $y = |\ln(x-2)|$ $\qquad$ (d) $y = \dfrac{1}{\ln(x-2)}$

Solución:



Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x^2-1}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{1-\cos x}$

Solución:

(a) Es una indeterminación 1^∞. Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x^2-1} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}-1\right)(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2+2x-x^2-1}{x^2+1}\right)(x^2-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)} \\
&= e^\infty = \infty
\end{aligned}$$

(b) Aplicando las aproximaciones $\operatorname{sen} 3x \sim x$ y $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{x} = \infty$$

Ejercicio 3. *Calcular las aíntotas de la función:*

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 3x - 4}$$

Solución:

Las asíntotas verticales son $x = -4$ y $x = 1$ puesto que el límite de la función cuando x tiende a esos valores es infinito.

No hay asíntota horizontal porque el límite de la función cuando x tiende a infinito es infinito.

Calculamos la asíntota oblicua $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4x} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 3x - 4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x + 2 - x^3 - 3x^2 - 4x}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

La asíntota oblicua es $y = x - 3$.

Ejercicio 4. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{e^{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}$ $\qquad$ (b) $y = 3x \operatorname{tg}^2 x$

Solución:

$$(a)\ \ y' = \frac{e^{1-2x}(-2)\sqrt{1-2x} - \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} e^{1-2x}}{1-2x}$$

$$(b)\ \ y' = 3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 3x$$

Ejercicio 5. *Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = \ln x - e^{-x}$$

se anula para algún valor de x.

La función $F(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. Además $F(1) < 0$ y $F(e) > 0$. De acuerdo con el teorema de Bolzano existe $c \in (1, e)$ tal que $F(c) = 0$.

Ejercicio 6. *Hallar el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.*

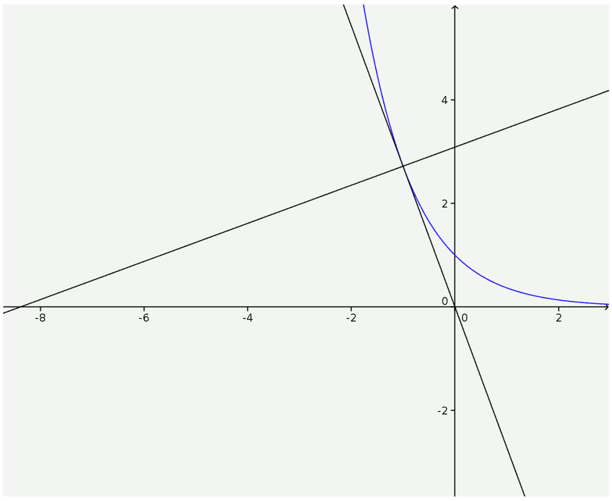
Solución:

La ordenada del punto de tangencia es

$$y_0 = e^1 = e$$

La derivada de la función es $y' = -e^{-x}$. La pendiente de la recta tangente es $m = -e$ y la de la normal es $m' = \frac{1}{e}$. Las ecuaciones de las dos rectas son:

$$y - e = -e(x+1)\ ; \qquad y - e = \frac{1}{e}(x+1)$$



La intersección de la tangente con el eje OX es:

$$\begin{cases} y - e = -e(x+1) \\ y = 0 \end{cases}$$

que es el punto $(0,0)$.

La intersección de la normal con el eje OX es:

$$\begin{cases} y - e = \frac{1}{e}(x+1) \\ y = 0 \end{cases}$$

que da el punto $(-e^2-1, 0)$.

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}(e^2+1)e = \frac{e^3+e}{2}$$

Ejercicio 7. *Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

La función puede escribirse:

$$y = \frac{2(x+3)-12}{x^2-9} = \frac{2x-6}{x^2-9}$$

Los posibles puntos de discontinuidad son $x = -3$ y $x = 3$. Los límites de la función en estos puntos son:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{-12}{0} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

En $x = -3$ hay un infinito de la función y en $x = 3$ hay una discontinuidad evitable.

Ejercicio 8. *Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ trazada desde el origen.*

Solución:

Sea $(a, \ln a)$ el punto de tangencia. La ecuación de la recta tangente será entonces:

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x-a)$$

Si esta recta pasa por $(0,0)$ se cumple que:

$$-\ln a = \frac{1}{a}\,(0-a) \quad\Longrightarrow\quad -\ln a = -1 \quad\Longrightarrow\quad a = e$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x-e)$$

---

2. Derivadas

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

(a) *Hallar las asíntotas de su gráfica.*

(b) *Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.*

Solución:

(a) La curva tiene una asíntota vertical $x = 3$ puesto que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$$

No hay asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-3)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-3)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

Hay una asíntota oblicua $y = x + 6$

(*b*) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x-3)^2 - 2(x-3)x^3}{(x-3)^4} = \frac{3x^2\cdot(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3} = \frac{x^3 - 9x^2}{(x-3)^3}$$

La ordenada del punto de tangencia es $f(2) = 8$

La pendiente de la tangente en el punto de abscisa 2 es:

$$m = \frac{8-36}{-1} = 28$$

La ecuación de la tangente es

$$y - 8 = 28(x-2)$$

Ejercicio 2.

(*a*) *Estudiar el crecimiento de la función* $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

(*b*) *Demostrar que la ecuación* $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ *tiene una única solución real.*

Solución:

(*a*) La derivada es

$$f'(x) = 12x^2 + 6x + 2$$

Este polinomio no tiene raíces y es siempre positivo. La función es creciente para todo x.

(*b*) Un polinomio de tercer grado tiene al menos una raíz. Por otra parte $f(x)$ es una función continua y derivable a la que podemos aplicar el teorema de Rolle. Según este teorema entre dos ceros de la función debería haber al menos un cero de la derivada. Como la derivada no tiene ceros, no puede haber dos ceros de la función.

Ejercicio 3. *Calcular:*

(*a*) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3-1)^{\frac{1}{x}}$ (*b*) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Solución:

(*a*) Es un límite indeterminado del tipo ∞^0

$$\lim_{x\to\infty} (x^3-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x^3-1)}{x}} = e^0 = 1$$

(*b*) Es un límite del tipo $0\cdot\infty$. Lo escribimos en forma de fracción para aplicar la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

Ejercicio 4. *Calcular la ecuación de la tangente a la curva*

$$2x^2y + 3y^2 = 16$$

en el punto $P(2, -4)$.

Solución:

La derivada es:

$$4xy + 2x^2y' + 6yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{-4xy}{2x^2 + 6y}$$

Y la pendiente de la tangente en $(2, -4)$:

$$m = \frac{-4 \cdot 2 \cdot (-4)}{2 \cdot 2^2 + 6 \cdot (-4)} = \frac{32}{-16} = -2$$

La ecuación de la tangente es:

$$y + 4 = -2(x - 2)$$

Ejercicio 5. *Dada la función:*

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

(a) *Obtener los máximos y mínimos relativos*

(b) *Obtener los puntos de inflexión*

Solución:

(a) Derivamos la función:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

La derivada se anula en $x = 1$ y $x = e^{-2}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \nexists & & 0 & & 0 & \\ \nexists & | & + & | & - & | & + \\ & 0 & & e^{-2} & & 1 & \end{array}$$

La función tiene un máximo en $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo en $(1, 0)$)

(b) Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\,\ln x = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

La derivada segunda se anula en $x = e^{-1}$. El signo de la derivada segunda está dado por:

$$\begin{array}{ccccc} & \nexists & & 0 & \\ \nexists & | & - & | & + \\ & 0 & & e^{-1} & \end{array}$$

Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

Ejercicio 6. *Dada la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, se pide:*

(a) *Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.*

(b) *Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa π.*

Solución:

(a) La función es producto de dos números positivos. En consecuencia, no puede ser cero.

(b) La ordenada de la curva en $x_0 = \pi$ es $y_0 = 0$.

La derivada de la función es:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$$

La pendiente de la tangente en π es $-\pi^2$ y la de la normal $\frac{1}{\pi^2}$. La ecuación de la normal es:

$$y - 0 = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)$$

Ejercicio 7. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x-1} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$. Estudiar la derivabilidad para ese valor de a en $x = 0$.*

(b) *Hallar si las tiene las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.*

Solución:

(a) Para que la función sea continua en $x = 0$ los límites laterales deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} (x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

y ser iguales al valor de la función a. Por consiguiente $a = 0$.

Para $x \neq 0$ la derivada de la función es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(4x+3)(x-1)-(2x^2+3x)}{(x-1)^2} & x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ la derivada por la izquierda es $f'(0^-) = 3$. Por la derecha:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}\,\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\,\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$. También pueden calcularse las derivadas laterales a partir de la definición.

(b) No hay asíntotas verticales puesto que la función es continua.

Hay una asíntota horizontal $y=1$ en $+\infty$ puesto que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

En $-\infty$ hay una asíntota oblicua:

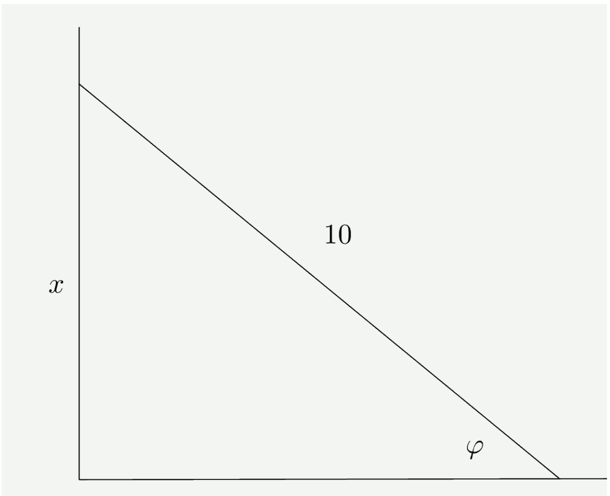
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x}{x(x-1)} = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2+3x}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x-2x(x-1)}{x-1} = 5$$

La asíntota oblicua es $y = 2x+5$.

Ejercicio 8. *Una escalera de* 10 m *de longitud se apoya contra una pared. En determinado momento, el extremo superior empieza a deslizar hacia abajo con una velocidad de* $0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$*. Calcular la velocidad de cambio del ángulo que forma la escalera con el suelo cuando la escalera se apoya a* 5 m *del suelo.*

Solución:



De la figura resulta:

$$x = 10\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 10\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Cuando $x=5$, $\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por consiguiente

$$-0{,}5 = 10\,\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{10\sqrt{3}}$$

---

3. Segundo examen de derivadas

Ejercicio 1. *Considere la curva definida por la ecuación* $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4xy^2$.

(a) (0,5 PUNTOS) *Utilice la derivación implícita para hallar una expresión para* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) (0,5 PUNTOS) *Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto* $(1,1)$.

Solución:

(a) Derivando resulta:

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 4y^2 + 2yy'\cdot 4x$$
$$(x^2+y^2)x + (x^2+y^2)yy' = y^2 + 2xyy'$$
$$(x^2+y^2)yy' - 2xyy' = y^2 - (x^2+y^2)x$$

Despejando

$$y' = \frac{y^2-(x^2+y^2)x}{(x^2+y^2)y - 2xy}$$

(b) Sustituyendo $x=1$, $y=1$ resulta que la derivada es infinita y por consiguiente la tangente es una recta vertical. En consecuencia la normal debe ser horizontal. Puesto que pasa por $(1,1)$ es la recta $y=1$.

Ejercicio 2. *Calcular*:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Solución:

(a) Es un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2-e^x+3\cos 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x-9\operatorname{sen}3x}{2} = -\frac{1}{2}$$

(b) Es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Buscamos los términos de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} a-\ln(1-x) & \text{si } x<0\\ x^2e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

se pide:

(a) *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(b) *Calcular el valor de a para que* $f(x)$ *sea continua en todo* $\mathbb{R}$.

(c) *Estudiar la derivabilidad de* f *y calcular* f' *donde sea posible.*

Solución:

(a) Los límites pedidos son:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (a - \ln(1-x)) = a - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

(b) Para $x \neq 0$ la función es continua por estar definida mediante funciones continuas. Calculamos los límites laterales en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a - \ln(1-x) = a$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 e^{-x} = 0$$

Para que la función sea continua debe ser $a = 0$.

(c) Para $x \neq 0$ la función es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < 0 \\ 2xe^{-x} - e^{-x}x^2 & x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$:

$$f'(0^-) = 1$$
$$f'(0^+) = 0$$

Por consiguiente, la función no es derivable en $x = 0$.

Ejercicio 4. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

(a) *Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de* $f(x)$.

(b) *Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de* $f(x)$.

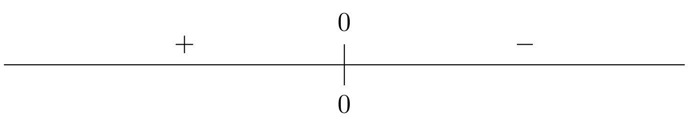
(c) *Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de* $f(x)$.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:



La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$. Hay un máximo en $x = 0$.

(b) La derivada segunda es:

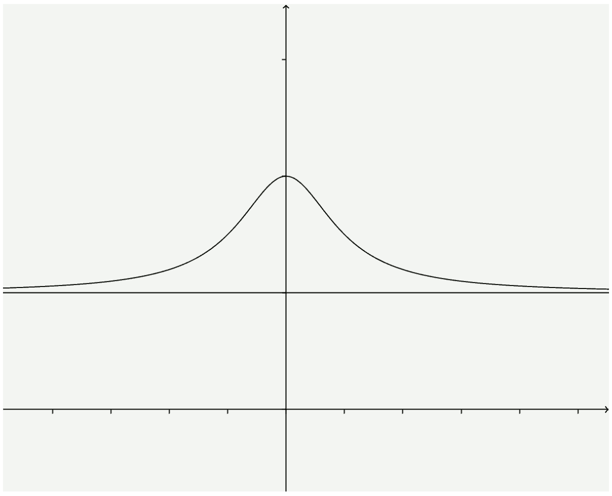
$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

La derivada segunda se anula en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. El signo de la derivada segunda está dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ + & \big| & - & \big| & + \\ & -\frac{1}{\sqrt{3}} & & \frac{1}{\sqrt{3}} & \end{array}$$

Hay puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) Hay una asíntota horizontal $y = 1$. La gráfica de la función es:



Ejercicio 5. *Dada la función polinómica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las dos condiciones siguientes:*

- *El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -\frac{1}{3}$, $x = -1$.*
- *La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.*

Solución:

Las condiciones que nos dan son

$$\begin{aligned} P'\left(-\frac{1}{3}\right) &= 0 \\ P'(-1) &= 0 \\ P'(0) &= 1 \\ P(0) &= 3 \end{aligned}$$

La derivada es:

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Con estas condiciones resulta $c = 3$, $b = 1$ y $a = 2$.

Ejercicio 6. *Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

Sea la función $F(x) = 4x^5 + 3x + m$. Puesto que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = -\infty$$

La función toma valores positivos y negativos. Por el teorema de Bolzano debe existir al menos un punto en el que la función toma el valor 0.

La derivada de esta función es:

$$F'(x) = 20x^4 + 3$$

La derivada nunca se anula. Según el teorema de Rolle entre dos ceros de la función debe haber al menos un cero de la derivada. Puesto que la derivada es siempre positiva, no puede haber dos ceros de la función.

En consecuencia, la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ tiene una única solución.

Ejercicio 7. *Dada la función*

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 1) + 2x \cdot e^{-x} = -e^{-x}(x^2 - 2x + 1) = -e^{-x}(x - 1)^2$$

La derivada se anula en $x = 1$. El signo está dado por

	1	
$-$	0	$-$

La función es siempre decreciente. Hay un punto de tangente horizontal en $x = 1$.

La segunda derivada es:

$$f''(x) = e^{-x}(x - 1)^2 - 2(x - 1)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 3)$$

La derivada segunda se anula en $x = 1$ y $x = 3$. Su signo está dado por:

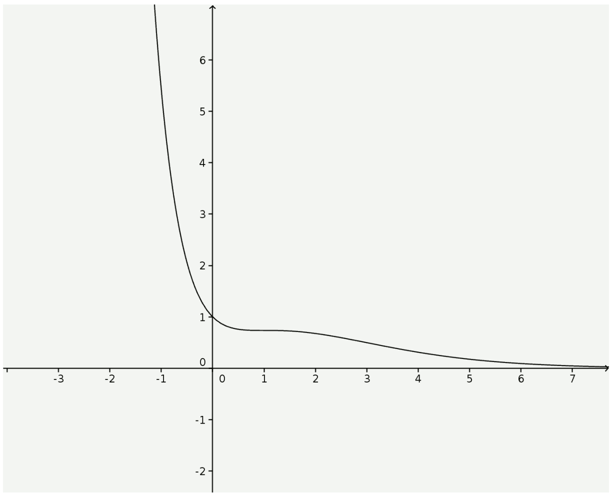
	1		3	
$+$	0	$-$	0	$+$

Hay dos puntos de inflexión $x = 1$ (de tangente horizontal) y $x = 3$.

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$ puesto que

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$$

la gráfica de la función es la siguiente:



Ejercicio 8. *Se vierte arena para formar un cono de* h cm *de altura y* r cm *de radio de la base. En todo momento, la altura es igual al radio de la base. La altura del cono va aumentando a razón de* 0,5 cm min^{-1}. *Halle la razón a la que se vierte la arena, en* $\text{cm}^3\ \text{min}^{-1}$, *cuando la altura es igual a* 4 cm.

Solución:

El volumen del cono es, puesto que el radio es igual a la altura:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h = \frac{1}{3}\,\pi h^3$$

derivando respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 3h^2\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \pi h^2\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

Sustituyendo los datos

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 16\pi \cdot 0{,}5 = 8\pi\ \text{cm}^3\ \text{min}^{-1}$$

---

4. Integrales

Ejecicio 1. *Calcular las siguientes integrales:*

(*a*) $\displaystyle\int \cos x \,\text{sen}^3 x\ \mathrm{d}x$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x^2+3)^5}$

Solución:

(*a*) $\displaystyle\int \cos x\,\text{sen}^3 x\ \mathrm{d}x = \int \text{sen}^3 x\ \mathrm{d}(\text{sen}\,x) = \frac{\text{sen}^4 x}{4} + C$

(*b*) $\displaystyle\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x^2+3)^5} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+3)^5}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+3)^5}\ \mathrm{d}(x^2+3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-3)^{-4}}{-4} + C$

Ejecicio 2. *Calcular las siguientes integrales:*

(*a*) $\int (x - \operatorname{sen} x)\, \mathrm{d}x$ (*b*) $\int (x-1)^3\, \mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) $\int (x - \operatorname{sen} x)\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \cos x + C$

(*b*) $\int (x-1)^3\, \mathrm{d}x = \frac{(x-1)^4}{4} + C$

Ejecicio 3. Calcular:

(*a*) $\int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x$ integrando por partes dos veces.

(*b*) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) Integrando por partes:

$$u = \cos \ln x \quad \mathrm{d}u = -\frac{1}{x} \operatorname{sen} \ln x\, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

Resulta

$$\int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x = x \cos \ln x + \int \operatorname{sen} \ln x\, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = \operatorname{sen} \ln x \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \cos \ln x\, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

obtenemos

$$\int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x = x \cos \ln x + \int \operatorname{sen} \ln x\, \mathrm{d}x = x \cos \ln x + x \operatorname{sen} \ln x - \int \cos \ln x\, \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando se obtiene finalmente:

$$\int \cos \ln x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} (x \operatorname{sen} \ln x + x \cos \ln x) + C$$

(*b*) Es una función racional en la que el denominador de segundo grado no tiene raíces. Podemos descomponerla en suma:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x = c_1 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x + c_2 \int \frac{1}{x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x$$

Identificando coeficientes en los polinomios se obtiene $c_1 = \frac{3}{2}$ y $c_2 = -2$. Descomponemos el denominador como suma de cuadrados en la segunda integral y resulta:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) - 2 \operatorname{artg}(x+1) + C$$

Ejecicio 4. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Es una función racional en la que el denominador tiene dos raíces. Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Identificando coeficientes (o dando valores) se obtiene $A=-2$ y $B=2$. Por tanto:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{x+3}{x+1} + C$$

(b) Es una función racional con raíz doble en el denominador:

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

y, de aquí, $A=2$ y $B=-1$. Entonces

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

Ejecicio 5. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$

se obtiene:

$$\int x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \mathrm{sen}\,x + C$$

(b) Efectuando la división:

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = x - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = x + \frac{1}{x+1} + C$$

Ejecicio 6. *Calcular las siguientes integrales:*

$$(a)\ \int \sqrt[3]{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad (b)\ \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

$$(a)\ \int \sqrt[3]{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int (x-2)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$(b)\ \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}} = \operatorname{arsen}\frac{x}{2} + C$$

Ejecicio 7. *Dadas las funciones $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$, encontrar el valor del área comprendida entre ellas.*

Solución:

Los límites de la integral son los puntos de intersección de las curvas. Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = .\frac{1}{2}, \qquad x = 2$$

Para calcular el área, integramos la diferencia de las dos funciones entre estos valores:

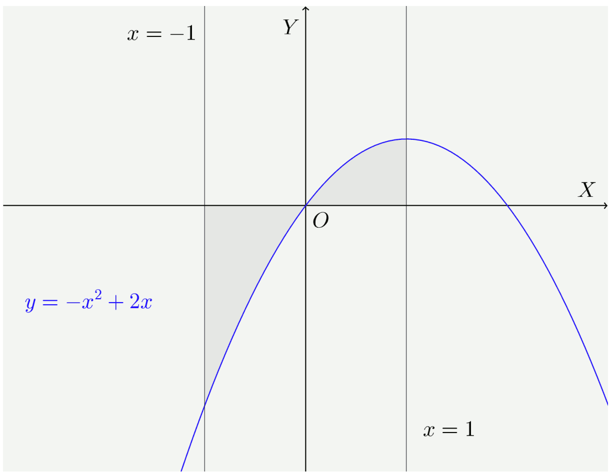
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2x^2 - 3x - 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{125}{24}$$

El área es $\frac{125}{24}$.

Ejecicio 8. *Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Representar gráficamente el recinto.*

Solución:

La representación gráfica del recinto es la siguiente:



Puesto que la curva corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $[-1, 1]$, será preciso calcular por separado las dos áreas:

$$\int_{-1}^{0} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

Entonces, la superficie total es:

$$S = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

5. Examen global de cálculo

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

se pide:

(*a*) *Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en* $x = 0$.

(*b*) *Calcular* $\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución:

(*a*) La ordenada del punto de abscisa $x_0 = 0$ es $y_0 = 0$.

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{x^2+1}$$

La pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = 0$ es $m = 1$. En consecuencia, la ecuación de la recta tangente en es punto es $y = x$.

(*b*) Efectuamos la división e integramos:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \Big[x - \operatorname{artg} x\Big]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

(*a*) *Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto* $(a, f(a))$ *para* $a > 0$.

(*b*) *Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.*

(*c*) *Hallar el valor de* $a > 0$ *que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.*

Solución:

(*a*) La ordenada del punto de abscisa $x_0 = 0$ es $y_0 = \frac{1}{a}$

La derivad de la función es

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

de modo que la pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = a$ es

$$m = -\frac{1}{a^2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)\ ; \qquad x + a^2y - 2a = 0$$

(*b*) El punto de intersección de la tangente con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} x + a^2 y - 2a = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad ; \qquad A\,(2a, 0)$$

y con el eje de ordenadas:

$$\begin{cases} x + a^2 y - 2a = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad ; \qquad A\left(0, \frac{2}{a}\right)$$

(*c*) La distancia entre los dos puntos cumple que:

$$d^2 = 4a^2 + \frac{4}{a^2} = 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$$

Igualando a cero la derivada respecto de a y no teniendo en cuenta la solución negativa:

$$2a - \frac{2}{a^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$$

Ejercicio 3. *Dada la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, se pide:*

(*a*) *Determinar justificando la respuesta si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.*

(*b*) *Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.*

(*c*) *Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$.*

Solución:

(*a*) No tiene ninguna solución puesto que en ese intervalo (segundo cuadrante) ambos factores son distintos de cero.

(*b*) Integramos por partes dos veces:

$$\begin{array}{llcll} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x & \qquad & u = x & \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x & v = -\cos x & & \mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x & v = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x &= \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x\ \mathrm{d}x \\ &= \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^\pi + 2\left(\Big[x \operatorname{sen} x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \Big[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x\Big]_0^\pi \\ &= \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

(*c*) La ordenada del punto de tangencia es $f(\pi) = 0$. Para calcular la pendiente de la tangente derivamos la función:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$$

La pendiente de la tangente es:

$$m = f'(\pi) = -\pi^2$$

y la pendiente de la normal:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{1}{\pi^2}$$

La ecuación de la normal es:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)$$

Ejercicio 4. *Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:*

(*a*) *Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.*

(*b*) *Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$.*

(*c*) *Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.*

Solución:

(*a*) Calculamos los ceros de la derivada:

$$f'(x) = 2\cos x \operatorname{sen} x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2},\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$$

El signo de la derivada esta dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + & | & - \\ & -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

Hay un mínimo relativo en $x = 0$ y máximos relativos es $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

(*b*) Calculamos los ceros de la derivada segunda:

$$f''(x) = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2(2\cos^2 x - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4},\ x = \pm\frac{3\pi}{4}$$

Calculamos el signo de la derivada segunda:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + & | & - & | & + \\ & -\frac{3\pi}{4} & & -\frac{\pi}{4} & & \frac{\pi}{4} & & \frac{3\pi}{4} & \end{array}$$

Hay puntos de inflexión en $x = \pm\frac{\pi}{4}$ y en $x = \pm\frac{3\pi}{4}$.

(*c*) Calculamos la integral:

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

Esta función se debe anular en $x = \frac{\pi}{4}$ de modo que

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

La función es:

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5. *La aceleración de un automóvil en* $\mathrm{m\,s^{-2}}$ *está dada por*

$$a = \frac{1}{40}\,(60 - v)$$

donde v *es la velocidad en* $\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Si el coche parte del reposo:*

(a) *Calcular la velocidad en función del tiempo*

(b) *Calcular el valor de la velocidad al cabo de* $30\,\mathrm{s}$

Solución:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{40}(60 - v) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{60 - v} = \frac{1}{40}\,\mathrm{d}t$$

Integrando

$$-\ln(60 - v) = \frac{1}{40}\,t + C \quad \Longrightarrow \quad 60 - v = e^{-\frac{t}{40} - C} = Ke^{-\frac{t}{40}} \quad \Longrightarrow \quad v = 60 - Ke^{-\frac{t}{40}}$$

donde hemos llamado $K = e^{-C}$. Cuando $t = 0$ la velocidad es 0. Entonces, debe ser $K = 60$ y tenemos

$$v = 60\left(1 - e^{-\frac{t}{40}}\right)$$

Cuando $t = 30$ la velocidad es aproximadamente igual a $31{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Ejercicio 6. *La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua* X *viene dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1 - x) & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ \quad 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que X *se encuentre entre la media y la moda.*

Solución:

Calculamos en primer lugar la media de la distribución:

$$\overline{x} = \int_0^1 12x^3(1 - x)\,\mathrm{d}x = 0{,}6$$

La moda es el máximo de la función de distribución:

$$f'(x) = 24x - 36x^2 = 12x(2 - 3x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

La probabilidad que nos piden es igual a

$$\mathrm{p}\left(0{,}6 < X < \frac{2}{3}\right) = 0{,}117$$

---

6. Matrices y determinantes (grupo W)

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

Poniendo ceros en la cuarta fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 13 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 2. *Calcular el rango de la siguiente matriz:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

indicando las transformaciones que se hacen.

Solución:

Intercambiamos las dos primeras columnas:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ponemos ceros en la primera columna:

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 4$$

Puesto que el determinante formado por las cuatro primeras columnas es claramente distinto de cero.

Ejercicio 3. *Dada la matriz:*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

(b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a(1-a^2)$$

El determinante se anula para $a = 0$ y $a = \pm 1$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. La matriz 3.

(II) $a = 0$. En este caso:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

(III) Puede verse que para $a = \pm 1$ el rango también es 2.

(b) La matriz tiene inversa para todos los valores de a excepto para $a = 0$ y $a = \pm 1$.

Para $a = 2$ el determinante de la matriz es -12. Además:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \text{adj}\, A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Se considera el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

(a) *Discutirlo para los distintos valores de m.*

(b) *Resolverlo para $m = 1$.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & m & -2 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = -m(m+1)$$

El determinante se anula para $m = 0$ y $m = -1$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) $m \neq 0$ y $m \neq -1$. El rango de las matrices es 3. El sistema es compatible determinado.

(II) $m = 0$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

La matriz de coeficientes tiene rango 2. El sistema es incompatible.

(III) $m = -1$. Como en el caso anterior:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}3 & 0 & -1 & 3\\1 & -1 & 1 & 2\\1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\1 & -1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & -3 & 5\\0 & 1 & -2\end{pmatrix} = 3$$

Como en el caso anterior, la matriz de coeficientes tiene rango 2 y el sistema es incompatible.

(b) El sistema es compatible determinado. Resolviendo se obtiene $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{2}$.

Ejercicio 5.

(a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que $\det M^2 = (\det M)^2$?. Justifica la respuesta.

(b) Encontrar todas las matrices cuadradas M de orden 2 que verifican $\det(M+I) = \det M + \det I$.

Solución:

(a) Sí, porque el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes:

$$|M^2| = |MM| = |M||M| = |M|^2$$

(b) Debe cumplirse que:

$$\begin{vmatrix}x+1 & y\\z & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & y\\z & t\end{vmatrix} + 1$$

Desarrollando:

$$(x+1)(t+1) - yz = xt - yz + 1$$
$$xt + x + t + 1 = xt + 1$$
$$x + t = 0$$

Deben ser matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix}x & y\\z & -x\end{pmatrix}$$

---

7. Matrices y determinantes (grupo Z)

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\3 & 0 & -1 & 1\\1 & -1 & -1 & 2\\2 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la tercera columna:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\3 & 0 & -1 & 1\\1 & -1 & -1 & 2\\2 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\5 & 3 & 0 & 2\\3 & 2 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\5 & 3 & 0\\3 & 2 & 0\end{vmatrix} = 1$$

Ejercicio 2. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) *Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.*

(b) *Para $a = b = c = 1$ calcular B^{10}.*

Solución:

(a) Puesto que $AB = BA$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando los productos resulta:

$$\begin{aligned} 5a + 2c &= 5a + 2b \\ 5b + 2c &= 2a + 5b \\ 2a + 5c &= 5c + 2c \\ 2b + 5c &= 2c + 5c \end{aligned}$$

De aquí se obtiene $a = b = c$. Las matrices que buscamos son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculamos las potencias:

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^2B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^8 = B^4B^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 & 128 & 0 \\ 128 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{10} = B^8B^2 \begin{pmatrix} 128 & 128 & 0 \\ 128 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 01 & \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dado el sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mx + 2y & = & m \\ 3x - y & = & m \\ x + y + z & = & 4 \end{array} \right.$$

(a) *Estudiar su compatibilidad según los valores de m.*

(b) *Resolverlo para $m = 0$.*

(c) *Sustituir la tercera ecuación por otra de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado para cualquier valor de m.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -m - 6$$

El determinante se anula para $m = -6$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) $m \neq -6$: el rango de las matrices es 3 y el sistema es compatible determinado.

(II) $m = -6$: calculamos los rangos:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2. El sistema es incompatible.

(III) La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Fácilmente se obtiene $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$.

(IV) No es posible ya que para $m = -6$ el sistema es incompatible independientemente de la tercera ecuación, ya que las dos primeras ecuaciones son contradictorias.

Ejercicio 4. *Estudiar el siguiente sistema homogéneo según los valores del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea posible:*

$$\begin{cases} x + y + 3z &= 0 \\ 2x + ay + 3z &= 0 \\ 3x + 2y + 6az &= 0 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 3 & 6a \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 3 & 2a \end{vmatrix} = 3\left(2a^2 + 7 - 3a - 2 - 4a\right) = 3\left(2a^2 - 7a + 5\right)$$

El determinante se anula para $a = 1$ y $a = \frac{5}{2}$:

(I) $a \neq 1$, $a \neq \frac{5}{2}$. El rango de la matriz es 3. El sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial $x = y = z = 0$.

(II) $a = 1$. El rango de la matriz es 2. Buscamos dos ecuaciones independientes:

$$x + y + 3z = 0$$
$$2x + y + 3z = 0$$

Resolviendo obtenemos $x = 0$, $y = 3t$, $z = -t$.

(III) $a = \frac{5}{2}$. El rango de la matriz también es igual a 2. Procediendo como en el caso anterior:

$$x + y + 3z = 0$$
$$2x + \frac{5}{2}y + 3z = 0$$

Resolviendo se obtiene $x = -9t$, $y = 6t$, $z = t$.

Ejercicio 5.

(a) *Hallar razonadamente los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa:*

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

(b) *Hallar la inversa para $p = 2$.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = p(p+1)(p-1)$$

La matriz tiene inversa para todos los valores de p excepto para $p = 0$, $p = -1$ y $p = 1$ que son los que anulan el determinante.

(b) Para $p = 2$ el determinante es igual a 6. Calculamos la matriz adjunta:

$$\operatorname{adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

La inversa se obtiene trasponiendo esta matriz y dividiendo por el determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

---

8. Geometría. Perpendicularidad y paralelismo.

Ejercicio 1. *Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.*

Solución:

Si los cuatro puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & m-1 & -2 \\ 1 & -1 & 2m-2 \end{vmatrix} = 0$$

Ponemos ceros en la primera columna y resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & m-2 \\ 0 & -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} m & m-2 \\ -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (m-2)\begin{vmatrix} m & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando

$$(m-2)(m+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 2, \quad m = -2$$

Ejercicio 2. *Calcular las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta de ecuaciones implícitas:*

$$r\colon \begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 3 & 1 \\ \vec{\jmath} & -1 & 1 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un punto de la recta dando valores. Para $x = 0$:

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \quad z = -2$$

El punto es $P(0,1,-2)$. La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

Ejercicio 3. *Calcular la ecuación de la recta paralela a:*

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

por el punto $P(0,1,2)$.

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dados el plano $\pi \equiv x + 3y - z = 1$ y la recta*

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

El vector director de la recta y el vector normal al plano que nos dan son vectores directores del plano que buscamos. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 6 & 1 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -5(x+2) + 7(y-1) - 16z = 0$$

Haciendo operaciones la ecuación resulta $-5x + 7y - 16z - 17 = 0$.

Ejercicio 5. *Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:*

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P(1, 3, -1)$.

Solución:

El haz de planos que contiene a la recta dada es:

$$\alpha(2x - y + z - 1) + \beta(x + y - z - 3) = 0$$

Si debe contener el punto $P(1, 3, -1)$:

$$\alpha(2 - 3 - 1 - 1) + \beta(1 + 3 + 1 - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3\alpha + 2\beta = 0$$

Para $\alpha = 2$ y $\beta = 3$:

$$2(2x - y + z - 1) + 3(x + y - z - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 7x + y - z - 11 = 0$$

Ejercicio 6. *Calcular la ecuación de la recta paralela a los planos:*

$$\pi :\ 2x + y - z - 3 = 0\ ; \qquad \pi' :\ x + y + 2z - 1 = 0$$

que pasa por el punto $P(-1,2,0)$.

Solución:

Los vectores normales a los dos planos son perpendiculares a la recta. El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio 7. *Calcular la ecuación general del plano que contiene al punto $P(1,-2,1)$ y al eje OY.*

Solución:

Podemos tomar como vectores directores del plano el vector director del eje OY y el vector OP y como punto del plano el origen de coordenadas. Así:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - z = 0$$

Ejercicio 8. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

se pide hallar la ecuación del plano π que contiene a r y s.

Solución:

Tomando y como parámetro la ecuación de la recta s puede escribirse como:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

Comprobemos que las dos rectas se cortan. Un punto de la primera recta es $P(0,1,-1)$ y un punto de la segunda recta es $Q(1,0,3)$. Comprobemos que las rectas se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Las rectas se cruzan y el problema no tiene solución.

---

9. Geometría

Ejercicio 1. *Sean las rectas:*

$$r:\ \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s:\ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

1. *Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.*
2. *Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.*

Solución:

(a) Plano que pasa por el origen y contiene a la recta r:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad 4x + 2y - z = 0$$

Plano que pasa por el origen y contiene a la recta s:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad -x + 8y - 5z = 0$$

La solución, si existe, es la recta intersección de los dos planos anteriores:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ -x + 8y - 5z = 0 \end{cases}$$

(b) Calculamos el vector director de la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 3 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene a la recta r y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ y-2 & 1 & -5 \\ z & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad -7x - 5y + z + 3 = 0$$

El plano que contiene a la recta s y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y+1 & 1 & -5 \\ z+2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad x + 5y - 18z - 23 = 0$$

La perpendicular común es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} -7x - 5y + z + 3 = 0 \\ x + 5y - 18z - 23 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Dados los puntos $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,-4)$, $D(2,-6,2)$, se pide:*

(a) *Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.*

(b) *Hallar el área del triángulo ABC.*

Solución:

(a) Calculamos los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\ ;; \qquad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y vemos que son paralelos y de distinto módulo. Por consiguiente, el cuadrilátero es un trapecio. La distancia entre estos lados puede calcularse como distancia de un punto a una recta

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$$

Calculamos es producto vectorial:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -2 & -4 \\ \vec{\jmath} & 3 & 2 \\ \vec{k} & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La distancia es:

$$d = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{22}}$$

(b) El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{149}}{2}$$

Ejercicio 3. *Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:*

(a) *Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.*

(b) *Hallar el valor de a para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7.*

(c) *Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.*

Solución:

(a) El producto mixto de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$ debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 21a - 28 = 0\ ; \qquad a = \frac{4}{3}$$

(b) Un seto del módulo del producto mixto que acabamos de calcular debe ser igual a 7:

$$\frac{1}{6}(21a-28) = \pm 7\ ; \qquad 21a - 28 = \pm 42$$

y, entonces, $a = \frac{10}{3}$ o $a = -\frac{2}{3}$

(c) Es el plano mediador de los dos puntos:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2$$
$$4y + 10z - 31 = 0$$

Ejercicio 4. *Dado el plano $\pi \equiv x+y+z=0$, y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:*

(*a*) *Calcular el punto Q en que se cortan el plano π y la recta r.*

(*b*) *Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.*

Solución:

(*a*) El punto de corte es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

que da el punto $(1,0,-1)$.

(*b*) El ángulo de la recta y el plano es:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

La distancia entre el plano que nos dan y el que buscamos $x+y+z+D=0$ es:

$$d = 2\operatorname{sen}\varphi = \frac{10}{3\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$\frac{10}{3\sqrt{3}} = \frac{|D|}{\sqrt{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \pm\frac{10}{3}$$

Los planos son

$$x+y+z+\frac{10}{3}=0 \qquad \text{y} \qquad x+y+z-\frac{10}{3}=0$$

Ejercicio 5. *Dado el punto $P(2,1,-1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0,2,-1)$, $B(1,-3,0)$ y $C(2,1,1)$.*

Solución:

Calculamos la ecuación del plano ABC:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-2 & -5 & -1 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad -x+z+1=0$$

La recta perpendicular a este plano por el puno que nos dan es:

$$\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1 \\ z=-1+\lambda \end{cases}$$

Y la intersección de esta recta con el plano es la solución del sistema

$$\begin{cases} -x+z+1=0 \\ x=2-\lambda \\ y=1 \\ z=-1+\lambda \end{cases}$$

que da el punto $Q(1,1,0)$.

Este punto es punto medio entre P y su simétrico. Por tanto:

$$1 = \frac{2+x'}{2} \;; \qquad 1 = \frac{1+y'}{2} \;; \qquad 0 = \frac{-1+z'}{2}$$

Y así obtenemos que el simétrico es $(0,1,1)$.

10. Geometría

Ejercicio 1. *Hallar los puntos de la recta*

$$r: \ \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

cuya distancia al plano $\pi: \ 2x - y + 2z + 1 = 0$ *es igual a* 1.

Solución:

Calculamos los planos paralelos a π a distancia 1. Estos planos tienen por ecuación $2x-y+2z+D=0$ y

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{4+1+4}} = 1 \ ; \qquad D-1 = \pm 3$$

Los planos son $2x-y+2z+4=0$ y $2x-y+2z-2=0$. La intersección de la recta con estos planos nos da los puntos que nos piden:

$$\begin{cases} 2x-y+2z+4=0 \\ x = 3+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases} ; \qquad 6+2\lambda-5-\lambda-2-2\lambda+4=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3$$

y tenemos el punto $A(6,8,-4)$.

El otro punto es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y+2z-2=0 \\ x = 3+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases} ; \qquad 6+2\lambda-5-\lambda-2-2\lambda-2=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -3$$

El punto es $B(0,2,2)$.

Ejercicio 2. *Un plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos* $A(1,0,0)$*,* $B(0,\lambda,0)$*,* $C(0,0,4)$*, se pide:*

(a) *Hallar el valor de* $\lambda > 0$ *de manera que el volumen del tetraedro* $OABC$ *(donde* O *es el origen) sea* 2.

(b) *Para el valor de* λ *obtenido en el apartado anterior, calcular la longitud de la altura del tetraedro* $OABC$ *correspondiente al vértice* O.

Solución:

(a) Puesto que el volumen es 2:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\right| = 2$$

Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda = \pm 12$$

Como $\lambda > 0$ la única solución válida es $\lambda = 3$.

(*b*) La ecuación del plano ABC es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 3 & 0 \\ z & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad 12x+4y+3z-12=0$$

La distancia al origen que es la altura del tetraedro es:

$$h = \frac{12}{\sqrt{144+14+9}} = \frac{12}{13}$$

Ejercicio 3. *Dados el plano:*

$$\pi_1 \equiv x+y+z=1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

(*a*) *Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.*

(*b*) *Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planosπ_1 y π_2 tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.*

Solución:

(*a*) El punto de corte es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=1+2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=-4\lambda \end{cases} ; \qquad 1+2\lambda-1+3\lambda-4\lambda=1$$

que da el punto $(3,2,-4)$.

(*b*) El ángulo de la recta y el plano es:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot(-4)}{\sqrt{3}\,\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{29}}$$

La distancia entre los planos debe ser:

$$d = \sqrt{29}\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los planos paralelos que buscamos tienen por ecuación $c+y+z+D=0$. Para que su distancia sea $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{|D+1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,; \qquad D+1=\pm 1$$

con lo que obtenemos $D=0$ y $D=-2$.

Los planos que nos piden son $x+y+z=0$ y $x+y+z-2=0$.

Ejercicio 4. *Dada la recta:*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi: x+y-2z+1=0$*, hallar la ecuación de la recta* s *simétrica de la recta* r *respecto del plano* π*.*

Solución:

El punto de intersección de la recta y el plano, si existe, pertenece a la recta simétrica. Calculamos este punto como la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad ; \qquad 1+\lambda-\lambda-2\lambda+1=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=1$$

El punto de intersección es $A(2,-1,1)$.

El punto $P(1,0,0)$ pertenece a la recta. Vamos a calcular su simétrico respecto al plano. Calculamos la intersección del plano con la recta perpendicular por P:

$$\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \quad ; \qquad 1+\lambda+\lambda+4\lambda+1=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{3}$$

El punto de intersección es $Q\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Este punto es punto medio entre P y su simétrico P':

$$\frac{2}{3}=\frac{1+x'}{2} \qquad -\frac{1}{3}=\frac{0+y'}{2} \; ; \qquad \frac{2}{3}=\frac{0+z'}{2}$$

El simétrico es $P'\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Calculamos ahora la recta AP':

$$\vec{AP'} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \qquad 3\vec{AP'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta simétrica es:

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{1} = \frac{x-1}{1}$$

Ejercicio 5. *Determinar la posición relativa de las rectas:*

$$r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s: \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

Solución:

El vector director de la primera recta es:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector director de la segunda recta es:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 2 & 1 \\ \vec{k} & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Puesto que $\vec{v} = -3\vec{u}$, las dos rectas tienen la misma dirección. El punto $P(-4, 7, 0)$ pertenece a la primera recta pero no a la segunda. Las rectas son paralelas no coincidentes.