Matemáticas. Bachillerato Internacional.

Segundo curso.

Curso 2014-2015. Exámenes

1. Límites. Continuidad. Reglas de derivación

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

1. $y = \cos x \ln x$
2. $y = \cos x \ \operatorname{artg} x$
3. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
4. $y = \dfrac{x^2-3x+1}{(2x-3)^3}$
5. $y = \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^2}$
6. $y = \dfrac{e^x}{x \operatorname{sen} x}$
7. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$
8. $y = 5x^3 \operatorname{tg}^2 x$
9. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$
10. $y = (\ \arccos x)^2$

Solución:

1. $y' = -\operatorname{sen} x \ln x + \dfrac{1}{x} \cos x$
2. $y' = -\operatorname{sen} x \ \operatorname{artg} x + \dfrac{1}{1+x^2} \cos x$
3. $y' = \dfrac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
4. $y' = \dfrac{(2x-3))(2x-3)^3 - 2(2x-3)^2 \cdot 2 \cdot (x^2-3x+1)}{(2x-3)^6}$
5. $y' = \dfrac{e^{3x} \cdot 3(\ln x)^2 - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{3x}}{(\ln x)^4}$
6. $y' = \dfrac{e^x \cdot x \operatorname{sen} x - (1 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot x)e^x}{(x \operatorname{sen} x)^2}$
7. $y' = e^{\frac{1}{x^2}} \left(\dfrac{-2}{x^3}\right)$
8. $y' = 15x^2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot 5x^3$
9. $y' = \cos \dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{-2}{x^3}\right)$
10. $y' = 2 \arccos x \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-8x+15}$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x^2}}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+4}{2x^2-5}\right)^{-x}$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+3} - x\right)$

Solución:

(a) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificando:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-3)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x-3}=\frac{10}{2}=5$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\operatorname{sen} x\,\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{x\,\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$$

Hay que distinguir el límite por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=e^{\infty}=\infty$$

(c) Este límite no es indeterminado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{2x^2-5}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}=2^\infty=\infty$$

(d) Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x+3}-x)(\sqrt{x^2-2x+3}+x)}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{2x}\\&=-1\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

(1) Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+4}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$

(2) Calcular las asíntotas de la función:

$$y=\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$$

Solución:

(1) (a) Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2+\sqrt{4-x})}{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2+\sqrt{4-x})}{4-4+x}=4$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+4}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}} &= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{x+4}{3x+2}-1\right)\frac{2}{x-1}}\\
&= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{x+4-3x-2}{3x+2}\right)\frac{2}{x-1}}\\
&= \lim_{x\to 1} e^{\frac{-4x+4}{(3x+2)(x-1)}}\\
&= \lim_{x\to 1} e^{\frac{-4(x-1)}{(3x+2)(x-1)}}\\
&= \lim_{x\to 1} e^{\frac{-4}{3x+2}}\\
&= e^{-\frac{4}{5}}
\end{aligned}$$

(2) Las posibles asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\infty\\
&\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, solamente $x=-1$ es asíntota vertical. En $x=1$ hay una discontinuidad evitable.

No hay asíntota horizontal porque el numerador es de grado superior al denominador. Calculemos la asíntota oblicua:

$$\begin{aligned}
m&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2+x}=1\\
b&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x+1}=0
\end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y=x$.

Ejercicio 4. *Dadas las funciones* $f(x)=x^3+x^2$ *y* $g(x)=\cos\pi x-2$ *demostrar que se cortan en algún punto del intervalo* $(-2,-1)$.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x)=x^3+x^2-\cos\pi x+2$$

toma el valor cero en algún punto del intervalo $(-2,-1)$.

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua en } [-2,-1]\\ F(-2)<0\\ F(-1)>0\end{cases}$$

De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un punto $\xi\in(-2,-1)$ tal que $F(\xi)=0$. En $x=\xi$ se cortan las dos curvas.

Ejercicio 5. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(b+x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{x} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

calcular a y b de modo que sea continua en todos sus puntos.

Solución:

Para que la función sea continua, los límites laterales en $x = 0$ y $x = \pi$ deben ser iguales:

$$\lim_{x \to 0^-} = \lim_{x \to 0} a(x-1)^2 = a$$

$$\lim_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(b+x) = \operatorname{sen} b$$

Para que la función sea continua debe ser $a = \operatorname{sen} b$. Además:

$$\lim_{x \to \pi^-} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(b+x) = \operatorname{sen}(\pi + b) = -\operatorname{sen} b$$

$$\lim_{x \to \pi^+} = \lim_{x \to \pi} \frac{\pi}{x} = 1$$

Entonces se debe cumplir que:

$$-\operatorname{sen} b = 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} b = -1 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{\pi}{2}$$

Por consiguiente debe cumplirse que $a = -1$ y $b = -\frac{\pi}{2}$.

2. Nuevo examen de derivadas

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right)$

Solución:

(a) Se trata de una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital y la aproximación $\operatorname{sen} x \sim x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen} x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(b) Se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Hacemos la resta, cambiamos $x - 1 = t$ y resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{x\operatorname{sen}(x-1) - \ln x}{\operatorname{sen}(x-1)\ln x} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)\operatorname{sen} t - \ln(1+t)}{\operatorname{sen} t \ln(1+t)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)\operatorname{sen} t - \ln(1+t)}{t^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1\operatorname{sen} t + (t+1)\cos t - \frac{1}{1+t}}{2t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t + 1\cos t - (t+1)\operatorname{sen} t + \frac{1}{(1+t)^2}}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Dada la función $y = xe^{-x}$ calcular sus asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y representarla gráficamente.*

Solución:

No tiene asíntotas verticales. Para obtener las asíntotas horizontales calculamos los límites:

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to -\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. No hay asíntota en $-\infty$.

Calculamos la derivada:

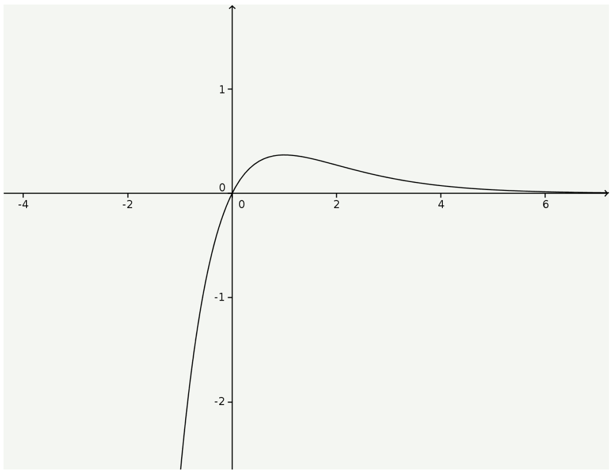
$$y' = 1e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

El signo de la derivada es:

$$\begin{array}{ccccc} & + & 0 & - & \\ \hline & & 1 & & \end{array}$$

La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$. Hay un máximo en el punto $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

Con estos datos, la gráfica de la función es:



Ejercicio 3. *Calcular los intervalos de concavidad y convexidad de la función:*

$$y = \frac{x}{\ln x}$$

Solución:

Hay que analizar el signo de la segunda derivada:

$$y' = \frac{1 \ln x - \frac{1}{x}x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - 2\ln x \frac{1}{x}(\ln x - 1)}{(\ln x)^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1)}{(\ln x)^3} \\ &= \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \end{aligned}$$

El numerador se anula para $x = e^2$ y el denominador para $x = 0$ y $x = 1$. Teniendo en cuenta que la función solo existe para valores positivos de x, el signo de la segunda derivada está dada por el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} & \nexists & - & \nexists & + & 0 & - \\ \hline & 0 & & 1 & & e^2 & \end{array}$$

La función es convexa en $(0,1)\cup(e^2,\infty)$, es cóncava en $(1,e^2)$ y tiene un punto de inflexión en $x=e^2$.

Ejercicio 4. *Calcular las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:*

$$y=\frac{x}{x^2-x+4}$$

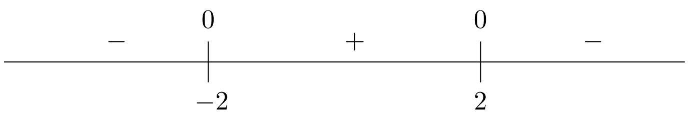
Solución:

La curva no tiene asíntotas verticales puesto que el denominador no tiene raíces. Hay uan asíntota horizontal $y=0$.

Calculamos la derivada:

$$y'=\frac{x^2-x+4-(2x-1)x}{(x^2-x+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2-x+4)^2}$$

Los ceros de la derivada son -2 y 2. El signo de la derivada es:



La función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ y creciente en $(-2,2)$. Hay un mínimo en $x=-2$ y un máximo en $x=2$.

Ejercicio 5. *Obtener los valores de a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un mínimo relativo en el punto* $(2,3)$.

Solución:

De acuerdo con las condiciones dadas debe ocurrir que $f(2)=3$ y $f'(2)=0$. La derivada es:

$$f'(x)=3x^2+2ax$$

Por consiguiente:

$$\begin{cases}3=8+4a+b\\0=12+4a\end{cases}$$

este sistema tiene como solución $a=-3,\ b=7$.

Ejercicio 6. *Hallar el punto de la parábola $y=x^2+x$ que se encuentra más próximo de* $A(1,0)$.

Solución:

Se trata de encontrar un punto $X(x,x^2+x)$ cuya distancia a $A(1,0)$ sea mínima. El cuadrado de la distancia entre los dos puntos es:

$$d^2=(x-1)^2+(x^2+x)^2=x^4+2x^3+2x^2-2x+1$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$(d^2)'=4x^3+6x^2+4x-2=0$$

esta ecuación no tiene soluciones enteras. Puesto que en $x = 0$ toma un valor negativo y en $x = 1$ toma un valor positivo, podemos decir que el mínimo se encuentra en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 7. *Demostrar que la función* $y = e^x - x - 3$ *tiene un único cero en el intervalo* $(0, \infty)$.

Solución:

La función $F(x) = e^x - x - 3$ es continua para todo x. Además:

$$F(0) < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

y por consiguiente $F(x)$ toma valores positivos entre 0 e ∞. Por el teorema de Bolzano debe existir un punto en que la función se haga cero.

Veamos que este punto es único. La función es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = e^x - 1$$

que solo se anula en $x = 0$. De acuerdo con el teorema de Rolle si hubiese dos ceros de la función, entre ellos debería haber al menos un cero de la derivada. Como la derivada no se anula en $(0, \infty)$ no puede haber dos ceros de la función.

Ejercicio 8. Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a y b es continua la función? ¿Para cuáles es derivable?

Solución:

Para $x \neq 1$ la función es continua y derivable.

Para que la función sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^2 + b(x-1) = a$$

Por tanto, la función será continua si $a = 3$ sea cual sea el valor de b.

Para que la función sea derivable debe ser continua. Por consiguiente debe ser $a = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La derivada de esta función para $x \neq 1$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 6x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable, habrán de coincidir las derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$f'(1^-) = 3, \qquad f'(1^+) = 6 + b$$

Para que sea derivable debe ser $b = -3$.

Ejercicio 9. *Hallar el punto de la curva $y = \ln(1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa* 1.

Solución:

Para que las tangentes sean perpendiculares, el producto de sus pendientes debe ser igual a -1. Por tanto, el producto de las derivadas en $x = 1$ y en el punto que buscamos a debe ser igual a -1.

La derivada de la función es:

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Entonces:

$$y'(1)y'(a) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2} \cdot \frac{2a}{1 + a^2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad -1 = \frac{2a}{1 + a^2} \quad \Longrightarrow \quad a = -1$$

Ejercicio 10. *Calcular las asíntotas de la curva $y = xe^{\frac{1}{x}}$.*

Solución:

La posible asíntota vertical es $x = 0$. Estudiemos los límites en ese punto:

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

Hay una asíntota vertical $x = 0$ por la derecha. En ese punto por la izquierda hay una discontinuidad evitable.

No hay asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Veamos si hay asíntota oblicua:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to \infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \\
b &= \lim_{x \to \infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1
\end{aligned}$$

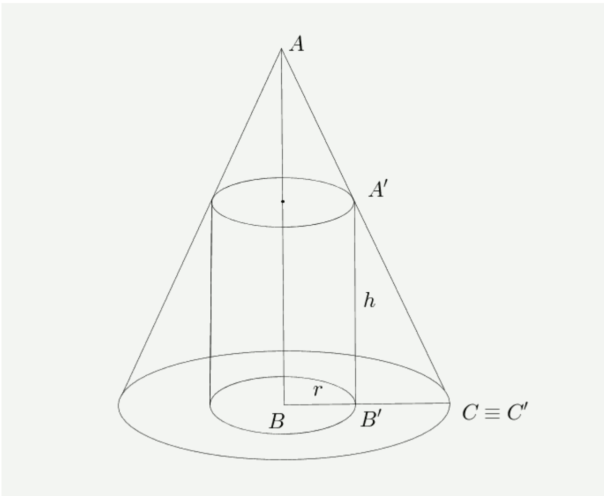
Los límites cuando x tiende a $-\infty$ son los mismos. Por consiguiente hay una asíntota oblicua $y = x + 1$ tanto en $-\infty$ como en $+\infty$.

---

3. Otro examen de derivadas

Ejercicio 1. *Hallar el cilindro de máximo volumen inscriptible en un cono recto circular de radio* 10 cm. *y altura* 20 cm.

Solución:



El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

De la semejanza de los triángulo ABC y $A'B'C'$ se deduce que:

$$\frac{10}{10-r} = \frac{20}{h} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{20(10-r)}{10} = 2(10-r)$$

Entonces:

$$V = 2\pi r^2(10-r) = 2\pi(10r^2 - r^3)$$

Derivando e igualando a cero:

$$V' = 2\pi(20r - 3r^2) = 2\pi r(20 - 3r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{20}{3}$$

y la altura:

$$h = 2\left(10 - \frac{20}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

Ejercicio 2. *Se considera la función:*

$$y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

Hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Representar gráficamente la función.

Solución:

Calculamos la derivada:

$$y' = 2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(1-x^2)$$

Los ceros de la derivada son $x=-1$ y $x=1$. El signo está dado por:

$-$	0	$+$	0	$-$
	-1		1	

Así pues hay un mínimo en $(-1,0)$ y un máximo en $\left(1,\frac{4}{e}\right)$.

Calculamos ahora la derivada segunda:

$$y'' = e^{-x}\,(-2x) - e^{-x}(1-x^2) = e^{-x}\left(x^2-2x-1\right)$$

Los ceros de la derivada segunda son $x = 1 \pm \sqrt{2}$. El signo está dado en el siguiente esquema:

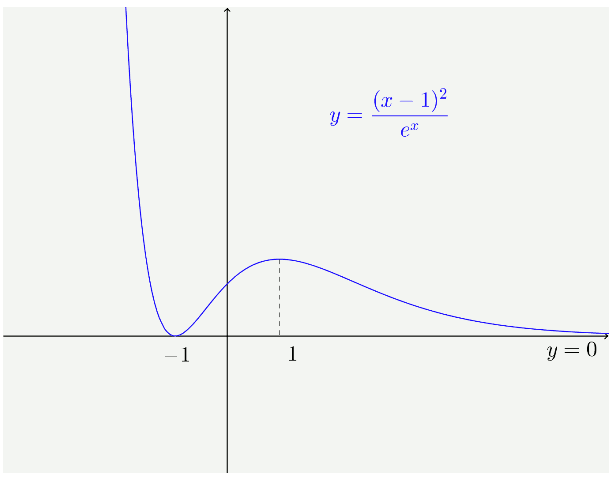
$+$	0	$-$	0	$+$
	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	

Los puntos de inflexión están en $x = 1-\sqrt{2}$ y $x = 1+\sqrt{2}$.

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \infty$$

deducimos que $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. La gráfica de la función es:



Ejercicio 3. *Estudiar (dominio, crecimiento, máximos, mínimos y asíntotas) y representar gráficamente la función:*

$$y = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

Solución:

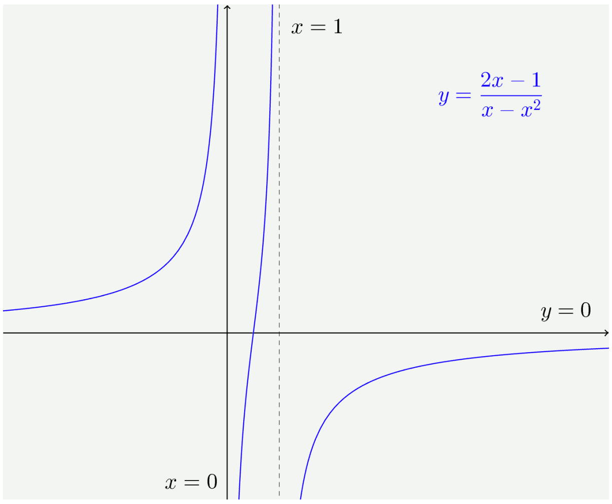
El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

Las asíntotas verticales son las rectas $x=0$ y $x=1$. Hay una asíntota horizontal $y=0$.

Estudiemos el signo de la derivada:

$$y' = \frac{2(x-x^2)-(1-2x)(2x-1)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2}$$

El numerador no tiene raíces. Las raíces del denominador son $x=0$ y $x=1$ (dobles). Por consiguiente la derivada no cambia de signo. La función es siempre creciente. La representación gráfica es:



Ejercicio 4. *Calcular:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{e^{-x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)^x$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{e^{-x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{e^{-x}\ln\ln x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\ln x}{e^x}}\\ &= e^0 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{x\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}}{1}}\\ &= e^1 = e\end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Demostrar que la ecuación* $x^2 = x\cos x - \operatorname{sen} x$ *se verifica para un solo valor de* x.

Solución:

Sea la función $F(x) = x^2 - x\cos x + \operatorname{sen} x$. El problema es equivalente a demostrar que la función $F(x)$ tiene un único cero.

La función se anula para $x = 0$. Hay que demostrar que no se anula en ningún otro punto.

La función $F(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$F'(x) = 2x - \cos x + x\operatorname{sen} x - \cos x = x(2 + \operatorname{sen} x)$$

Vemos que la derivada solamente se anula en $x = 0$. Recordando que la función toma el valor cero en $x = 0$:

- ◇ La función no puede anularse en ningún a positivo pues, por el teorema de Rolle, en ese caso debería haber un cero de la derivada en $(0, a)$.
- ◇ Igualmente, la función no puede anularse en ningún a negativo pues, también por el teorema de Rolle, debería haber un cero de la derivada en el intervalo $(a, 0)$.

Ejercicio 6. *Un depósito tiene la forma de un cono invertido con una altura de* 2 m *y un radio de* 50 cm. *Se llena de agua con un caudal de* 50 *litros por minuto. Calcular la velocidad con que está subiendo el nivel cuando la altura de agua es de* 1 m.

Solución:

En la figura se han puesto las unidades en decímetros. El volumen de agua en el depósito en un instante dado es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Y puesto que:

$$\frac{r}{5} = \frac{h}{20} \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{h}{4}$$

tenemos que:

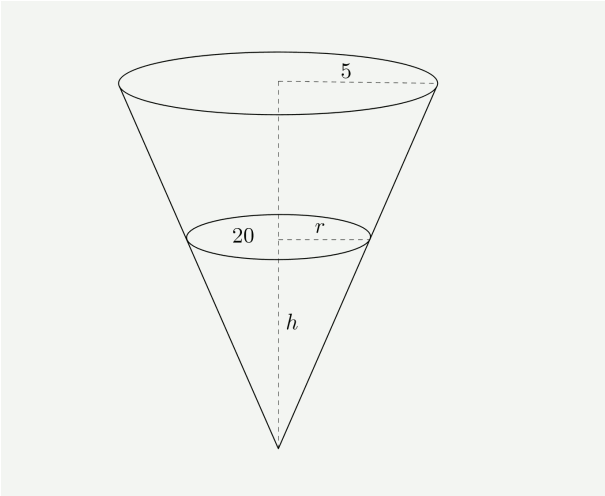
$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{16}\,h = \frac{1}{48}\pi\,h^3$$

Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{48}\pi\, 3h^2\, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{16}\pi\, h^2\, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

De aquí:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{\pi h^2}\, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{100\pi} \cdot 50 = \frac{8}{\pi}\, \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{mín}}$$



4. Integrales

Ejercicio 1. *Calcular:*

$(a)\ \displaystyle\int (3x+1)^5\ \mathrm{d}x \qquad (b)\ \displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x}\ \mathrm{d}x$

Solución:

- ◇ $\displaystyle\int (3x+1)^5\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^6)}{6} + C$
- ◇ $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(-\operatorname{cotg} 3x\right) + C$

Ejercicio 2. *Calcular:*

$(a)\ \displaystyle\int \operatorname{artg} x\ \mathrm{d}x \qquad (b)\ \displaystyle\int x\cos 3x\ \mathrm{d}x$

Solución:

- ◇ Por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{artg} x & \mathrm{d}u &= \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{artg} x\ \mathrm{d}x = x \operatorname{artg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

- ◇ Por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos 3x\ \mathrm{d}x & v &= \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

$$\int x\cos 3x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

Ejercicio 3. *Calcular:*

$(a)\ \displaystyle\int \frac{x+1}{x-3}\ \mathrm{d}x \qquad (b)\ \displaystyle\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x$

Solución:

- ◇ Haciendo la división se obtiene cociente 1 y resto 4. Así:

$$\int \frac{x+1}{x-3}\ \mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{4}{x-3}\right)\ \mathrm{d}x = x + 4\ln(x-3) + C$$

- ◇ Puesto que $\cos^2 x = (1+\cos 2x)$:

$$\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Ejercicio 4. *Calcular:*

(a) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

◇ Se trata de una integral de tipo logaritmo:

$$\int \frac{3x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,\ln(x^2-5)\,\mathrm{d}x + C$$

◇ Con el cambio de variable:

$$t = 1-x^2 \qquad \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{t}+C = -\sqrt{1-x^2}+C$$

Ejercicio 5. *Calcular:*

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

◇ Es casi inmediata:

$$\sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\,\mathrm{d}(x^2-2x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

◇ Igual que la anterior:

$$\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (1+\ln x)^2\,\mathrm{d}(1+\ln x) = \frac{(1+\ln x)^3}{3}+C$$

Ejercicio 6. *Calcular:*

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

◇ El numerador es la derivada del denominador, así que:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-x)+C$$

◇ Escribimos el polinomio del denominador como diferencia de cuadrados:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsen}\frac{x-2}{3}+C$$

Ejercicio 7. *Calcular:*

$(a)\ \displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ $(b)\ \displaystyle\int x\sqrt[3]{2x^2+3}\, \mathrm{d}x$

Solución:

- $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\int \cos^4 x \, \mathrm{d}(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$
- Mediante el cambio de variable:

$$t = 2x^2+3 \qquad \mathrm{d}t = 4x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$$

$$\int x\sqrt[3]{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

Ejercicio 8. *Calcular:*

$(a)\ \displaystyle\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $(b)\ \displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- Mediante el cambio de variable:

$$t^2 = x+3 \quad \Longrightarrow \quad x = t^2-3 \qquad 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x = 2\int (t^2-3)\,t\,t\,\mathrm{d}t = 2\int (t^4-3t^2)\,\mathrm{d}t = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{3t^3}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(x+3)^5}}{5} - \sqrt{(x+3)^3}\right) + C$$

- Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad A = 1, \quad B = 4$$

Entonces:

$$\int \frac{x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C$$

Ejercicio 9. *Dadas la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = 2x$, determina el área limitada por ambas.*

Solución:

- Puntos de intersección. Los puntos de intersección de la recta y la parábola son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

Por igualación se obtiene $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (los valores de y no hace falta calcularlos). Estos son los límites de la integral-

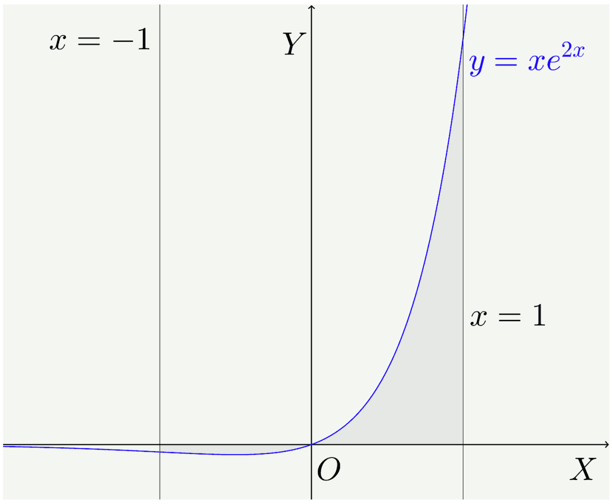
◇ Integral. Calculamos ahora la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_0^4 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

◇ Superficie. La superficie mide $\frac{32}{3}$.

Ejercicio 10. *Calcular el área comprendida por la curva $y = xe^{2x}$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$* y $x = 1$.

Solución:



Una primitiva de $y = xe^{2x}$ se puede calcular por partes y es igual a $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

La función es negativa en $[-1, 0)$ y positiva en $(0, 1]$. Calculamos la integral en cada uno de estos intervalos:

$$\int_{-1}^0 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2}$$

$$\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

El área es la suma de las integrales tomadas en valor absoluto:

$$S = \frac{e^2 - 1}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 2}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

---

5. Selectividad. Cálculo.

Ejercicio 1. *Dadas las funciones:*

$$y = 9 - x^2 \ ; \qquad y = 2x + 1$$

se pide:

(a) *Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.*

(b) *Calcular el área de dicho recinto acotado.*

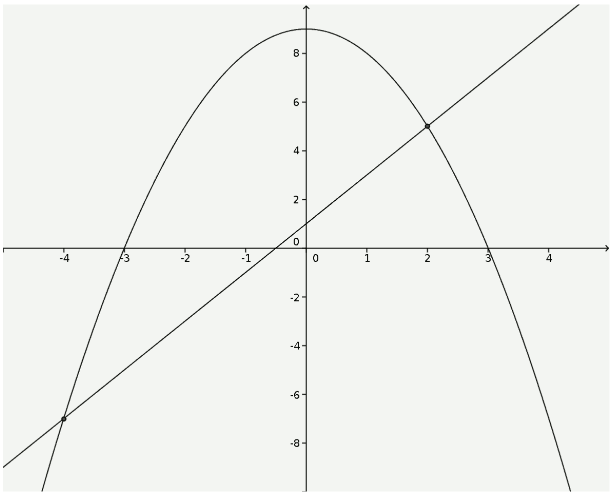
(c) *Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.*

Solución:

(a) Los puntos de intersección de la recta y la parábola son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

que son los puntos $A(-4, -7)$ y $B(2, 5)$ La representación gráfica es:



(b) El área es la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$S = \int_{-4}^{2} \left(9 - x^2 - 2x - 1\right) \, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{2} \left(8 - 2x - x^2\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[8x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{2} = \left(16 - 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(-32 - 16 + \frac{64}{3}\right) = 36$$

(c) El volumen es:

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1296\pi}{5}$$

Ejercicio 2. *Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:*

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^{2x} & \mathrm{d}u &= 2e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos x\,\mathrm{d}x & v &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[e^{2x}\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

La parte integrada es igual a cero. Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^{2x} & \mathrm{d}u &= 2e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = -2\left(\Big[-e^{2x}\cos x\Big]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x\right)$$

Despejando la integral:

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\Big[-e^{2x}\cos x\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{5}\left(-e^{2\pi}(-1)+1\right) = -\frac{2}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)$$

(b) Con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} &t = \cos 2x; \quad \mathrm{d}t = -2\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x \\ &x = 0 \implies t = 1 \\ &x = \frac{\pi}{2} \implies t = -1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\operatorname{artg} t\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

(a) *Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*

(b) *Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.*

(c) *Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.*

(d) *Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.*

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$. Hay un máximo relativo en $(0, 2)$.

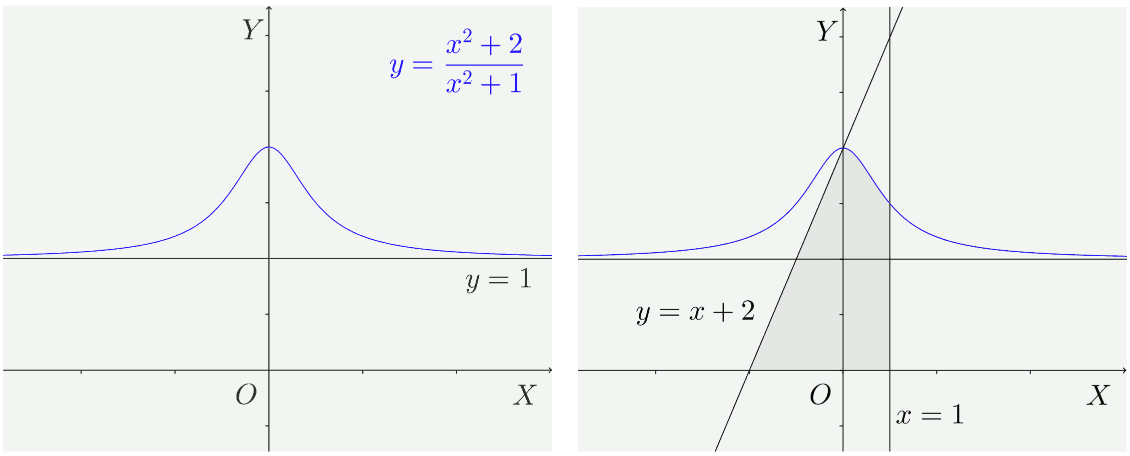
(b) Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) - 2\cdot 2x\cdot(-2x)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Hay puntos de inflexión en los puntos de abscisa $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) Hay una asíntota horizontal $y = 1$. No hay asíntotas verticales.

La gráfica de la función es:



(d) La región esta formada por un triángulo de área 2 y de la región comprendida bajo la curva entre 0 y 1. El área es:

$$S = 2 + \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2 + \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x 2 + \Big[x + \operatorname{artg} x\Big]_0^1 = 3 + \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 4.

(a) *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(*b*) *Demostrar que la ecuación* $4x^5 + 3x + m = 0$ *solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número* m*. Justifica la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

(*a*) El límite es igual a 1. Basta comparar los términos de mayor grado en el numerador y en el denominador.

(*b*) El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = 4x^5 + 3x + m$$

tiene un único cero.

Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$. Además:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$$

por lo que la función toma valores positivos y negativos. Entonces, por el teorema de Bolzano debe anularse en algún punto.

Además no puede haber más de un cero pues la función es derivable y según el teorema de Rolle, entre dos ceros de la función debería haber al menos un cero de la derivada y ésta

$$F'(x) = 20x^4 + 3 > 0$$

no se anula nunca.

6. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

1. *Si se intercambian dos filas de un determinante, el valor del determinante no cambia.*
2. *El determinante de la matriz unidad es igual al orden del determinante.*
3. *Si A es una matriz 4×2 y B es 3×4 podemos hacer el producto BA.*
4. *Si una matriz 3×3 tiene rango 2, su determinante es cero.*
5. *Si en una matriz 3×4 la segunda fila es combinación lineal de la primera y la tercera, las tres primeras columnas son linealmente dependientes.*
6. *Si multiplicamos una matriz por su inversa, el resultado es la matriz cero.*
7. *Si se multiplica una fila de un determinante por 3, el determinante queda multiplicado por 3.*
8. *En algunas matrices 4×3, las cuatro filas son independientes.*

Solución:

Son verdaderas las afirmaciones 3, 4, 5 y 7.

Ejercicio 2. *Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. *En un sistema compatible indeterminado el rango de la matriz ampliada es mayor que el rango de la matriz de coeficientes.*
2. *Los sistemas de Cramer son siempre compatibles.*
3. *Si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas el sistema es indeterminado.*
4. *Si el rango de la matriz ampliada es menor que el de la matriz de coeficientes, el sistema es incompatible.*
5. *Los sistemas de Cramer tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.*
6. *Para que un sistema sea compatible las matrices de coeficientes y ampliada deben tener el mismo rango.*
7. *En un sistema incompatible el rango de la matriz ampliada es mayor que el número de incógnitas.*
8. *Si se intenta resolver por la regla de Cramer un sistema indeterminado con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, todos los determinantes resultan ser cero.*

Solución:

Son verdaderas las afirmaciones 2, 4, 5, 6 y 8.

Ejercicio 3. *Calcular el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} \underset{=}{F_1 \to F_1 + 3F_2} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 24 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} \underset{=}{F_4 \to F_4 + 8F_2} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 24 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ -23 & 0 & 88 & -5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna, el determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} -10 & 24 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -23 & 88 & -5 \end{vmatrix} = 400$$

Ejercicio 4. *Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Teniendo en cuenta que $B = 2A$ la ecuación se puede escribir:

$$XA^2 + BA = A^2$$
$$XA^2 + 2A^2 = A^2$$
$$XA^2 = -A^2$$

Puesto que el determinante de A es distinto de cero, podemos multiplicar por la derecha por la inversa de A y obtenemos:

$$X = -I = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Calcula los valores de a para los que la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ a & -1 & -2 \\ a & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula la inversa de esta matriz para $a = 0$.

Solución:

- ⋄ La matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, es decir cuando se cumple que:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ a & -1 & -2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Calculando el determinante, esta ecuación se reduce a:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ a & -1 & -2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4a^2 - 9a + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

  Por consiguiente, la matriz inversa no existe para $a = 1$ y $a = \frac{5}{4}$

- Para $a = 0$ la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos la inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad \text{adj}A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. *Se considera el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - \quad y + z &= 2 \\ x + \quad my - z &= 1 \end{aligned}$$

(*a*) *Discutirlo para los distintos valores de m.*

(*b*) *Resolverlo para $m = 1$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = m(-m-1)$$

El determinante se hace cero para $m = 0$ y $m = -1$. Pueden distinguirse los siguientes casos:

- $m \neq 0$ y $m \neq -1$. En este caso el rango de las dos matrices, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, es igual a 3. El sistema es compatible determinado.

- Si $m = 0$ el rango de las matrices es:

$$\text{rango } A = \text{rango } \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ha suprimido la tercera columna puesto que sabemos que entre las tres primeras sólo hay dos independientes y las dos primeras lo son. Calculamos el determinante de esta matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por consiguiente, el rango de la matriz ampliada A^* es 3, distinto del rango de la matriz A. El sistema es incompatible.

- Hacemos lo mismo para $m = -1$:

$$\text{rango } A = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde hemos suprimido la tercera columna por la misma razón que en el caso anterior. Calculamos este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 mayor que el rango de la matriz de coeficientes. El sistema es incompatible.

Vamos a resolver ahora el sistema para $m = 1$. El sistema es compatible determinado y podemos aplicar la regla de Cramer. Para $m = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es -2 así que:

$$x = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

---

7. Geometría

Ejercicio 1. *Dados los planos*

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1\ , \qquad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

(a) *Estudiar su posición relativa.*

(b) *En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.*

Solución:

(a) Los vectores normales a los dos planos no son dependientes. Por consiguiente, los planos se cortan.

(b) La recta determinada por los dos planos es

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Dando a z el valor cero se obtiene $x = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{1}{3}$. Tenemos entonces el punto $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$.

Un vector director de esta recta es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & -1 \\ \vec{k} & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 3 \\ \vec{\jmath} & 1 & 0 \\ \vec{k} & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. *Dado el plano $\pi: \; x+3y+z=4$, se pide:*

(a) *Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.*

(b) *Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x=0$.*

(c) *Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$.*

Solución:

(a) La perpendicular al plano por O es:

$$\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$$

La intersección de esta recta con el plano es:

$$\begin{cases} x+3y+z=4 \\ x=t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$$

Que da el punto $Q\left(\frac{4}{11}\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right)$. Este es el punto medio entre O y su simétrico O':

$$\frac{4}{11}=\frac{0+x'}{2} \quad\Longrightarrow\quad x'=\frac{8}{11}$$
$$\frac{12}{11}=\frac{0+y'}{2} \quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{24}{11}$$
$$\frac{4}{11}=\frac{0+z'}{2} \quad\Longrightarrow\quad z'=\frac{8}{11}$$

(b) Los planos tienen vectores normales:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

y el ángulo que forman es:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

(c) Las intersecciones del plano con los ejes de coordenadas son $A(4,0,0)$, $B\left(0,\frac{4}{3},0\right)$ y $C(0,0,4)$.
El volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}4&0&0\\0&\frac{4}{3}&0\\0&0&4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot\frac{3}{4}\cdot 4=\frac{32}{9}$$

Ejercicio 3. *Dados el plano:*

$$\pi\equiv x+3y-z=1$$

y la recta

$$r\equiv\frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$$

se pide:

(a) *Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.*

(b) *Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.*

Solución:

(a) La ecuación del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 6 \\ y-1 & 3 & 2 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y en forma general $5x - 7y - 16z + 17 = 0$.

(b) Sea la recta:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{cases}$$

Calculemos un punto de esta recta. Tomando por ejemplo, $y = 0$ resulta $x = 3$ y $z = 2$. Un punto de la recta es $P(3, 0, 2)$.

Un vector director es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 5 \\ \vec{\jmath} & 3 & -7 \\ \vec{k} & -1 & -16 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = 11 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

(a) *Calcular el punto Q en que se cortan el plano π y la recta r.*

(b) *Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.*

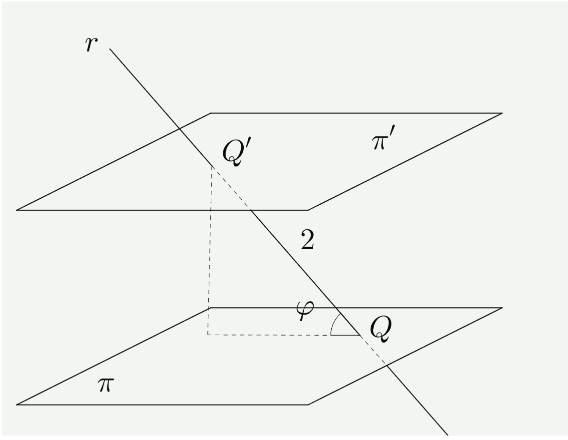
Solución:

(a) El punto Q es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

que da $Q(1, 0, -1)$.

(b)



El ángulo φ que forman la recta y el plano vale:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{5}{\sqrt{9}\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

y la distancia entre los planos:

$$d = 2\operatorname{sen}\varphi = \frac{10}{3\sqrt{3}}$$

El plano que buscamos es $x + y + z + D = 0$. Cumple que:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D|}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad D = \pm\frac{10}{3}$$

Las ecuaciones de los planos solución son:

$$x + y + z + \frac{10}{3} = 0\ ; \qquad x + y + z - \frac{10}{3} = 0$$

o bien:

$$3x + 3y + 3z + 10 = 0\ ; \qquad 3x + 3y + 3z - 10 = 0$$

Ejercicio 5. *Determinar la posición relativa de las rectas:*

$$r:\ \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s:\ \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Un punto de la recta r es $P(-4, 7, 0)$ y un vector director:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular un punto de la recta s damos por ejemplo a z el valor cero y tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $Q(2,1,0)$.

Un vector director de s es:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 2 & 1 \\ \vec{k} & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las dos rectas tienen la misma dirección. El punto Q no pertenece a la recta r, las rectas son paralelas y no coincidentes.

---

8. Conjuntos, aplicaciones y grupos

Ejercicio 1. *Se define la operación binaria $*$ como la multiplicación módulo* 14 *en el conjunto* $S = \{2,4,6,8,10,12\}$.

(a) *Copiar y completar la siguiente tabla:*

$*$	2	4	6	8	10	12
2						
4	8	2	10	4	12	6
6						
8						
10	6	12	4	10	2	8
12						

(b) (I) *Demostrar que $\{S,*\}$ es un grupo.*

(II) *Calcular el orden de cada elemento de $\{S,*\}$.*

(III) *A partir del resultado anterior, demostrar que $\{S,*\}$ es cíclico y encontrar todos sus generadores.*

(c) El conjunto T se define por $\{x * x \mid x \in S\}$. Demostrar que $\{T,*\}$ es un subgrupo de $\{S,*\}$.

Solución:

(a)

$*$	2	4	6	8	10	12
2	4	8	12	2	6	10
4	8	2	10	4	12	6
6	12	10	8	6	4	2
8	2	4	6	8	10	12
10	6	12	4	10	2	8
12	10	6	2	12	8	4

(b) (I) De la tabla se deduce que la operación es cerrada. La propiedad asociativa porque el producto de clases de restos en cualquier módulo tiene esa propiedad. El elemento neutro es 8 y de la tabla resulta también que todos los elementos tienen su simétrico. Además tiene la propiedad conmutativa, es un grupo abeliano.

(II)

$*$	2	4	6	8	10	12	orden
2	4	8	12	2	6	10	3
4	8	2	10	4	12	6	3
6	12	10	8	6	4	2	2
8	2	4	6	8	10	12	1
10	6	12	4	10	2	8	6
12	10	6	2	12	8	4	6

(III) Hay dos elementos de orden 6 que son 10 y 12. Son generadores del grupo y, por consiguiente, éste es cíclico.

(c) El conjunto es:

$$\{x * x \mid x \in S\} = \{2, 4, 8\}$$

Es el subgrupo generado por el elemento 2.

Ejercicio 2. *El conjunto universal contiene todos los enteros positivos menores que* 30. *El conjunto* A *contiene los números primos menores que* 30 *y el conjunto* B *contiene los enteros positivos de la forma* $3 + 5n$ $(n \in \mathbb{N})$ *que son menores que* 30. *Determinar los elementos de:*

(a) $A \setminus B$

(b) $A \triangle B$

Solución:

Los conjuntos A y B son:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \; ; \qquad B = \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{2, 5, 7, 11, 17, 19, 29\} \\ A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= \{2, 5, 7, 11, 17, 19, 29\} \cup \{8, 18, 28\} \\ &= \{2, 5, 7, 8, 11, 17, 18, 19, 28, 29\} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *La relación* R *está definida para* $a, b \in \mathbb{Z}^+$ *de tal manera que* aRb *si y solo si* $a^2 - b^2$ *es divisible por* 5.

(a) *Demostrar que* R *es una relación de equivalencia.*

(b) *Identificar las tres clases de equivalencia.*

Solución:

(a) Veamos que se cumplen las tres propiedades:

– Reflexiva. aRa puesto que $a^2 - a^2 = 0 = \dot{5}$.

– Simétrica:

$$\begin{aligned} aRb &\implies a^2 - b^2 = \dot{5} \\ &\implies b^2 - a^2 = \dot{5} \\ &\implies bRa \end{aligned}$$

– Transitiva:

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 - b^2 = \dot{5} \\ b^2 - c^2 = \dot{5} \end{cases} \qquad \text{sumando miembro a miembro}$$

$$\begin{aligned} &\implies a^2 - b^2 + b^2 - c^2 = \dot{5} \\ &\implies a^2 - c^2 = \dot{5} \\ &\implies aRc \end{aligned}$$

(*b*) Para que dos elementos estén relacionados, debe cumplirse que:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \dot{5}$$

Es decir, o su diferencia es múltiplo de 5 (son congruentes módulo 5) o su suma es múltiplo de 5 (su suma es cero módulo 5). Teniendo esto es cuenta, las clases de equivalencia son las siguientes:

$$[5] = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \equiv 0 \pmod 5\}$$
$$[1] = \{1, 4, 6, 9, 11, 16, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \equiv \pm 1 \pmod 5\}$$
$$[2] = \{2, 3, 7, 8, 12, 13, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \equiv \pm 2 \pmod 5\}$$

Ejercicio 4. *La función $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se define mediante:*

$$f(x,y) = \left(xy^2, \frac{x}{y}\right)$$

Demostrar que f es una biyección.

Solución:

La aplicación está bien definida puesto que todo elemento del conjunto inicial tiene una imagen en el conjunto final. Debemos ver que la aplicación es inyectiva y suprayectiva.

– La aplicación es inyectiva:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x',y') \quad &\Longrightarrow \quad \left(xy^2, \frac{x}{y}\right) = \left(x'y'^2, \frac{x'}{y'}\right) \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} xy^2 = x'y'^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad xy^2 = x'\left(\frac{x'y}{x}\right)^2 = \frac{x'^3y^2}{x^2} \\
&\Longrightarrow \quad x^3y^2 = x'^3y^2 \\
&\Longrightarrow \quad x^3 = x'^3 \\
&\Longrightarrow \quad x = x'
\end{aligned}$$

y si $x = x'$:

$$x = x',\ \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \quad \Longrightarrow \quad y = y'$$

y la función es inyectiva.

– La aplicación es suprayectiva. Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Debemos demostrar que:

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid f(x,y) = (a,b)$$

Para ello debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} xy^2 = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases} \quad &\Longrightarrow \quad \begin{cases} xy^2 = a \\ x = by \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad by^3 = a \\
&\Longrightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}
\end{aligned}$$

y de aquí:

$$x = by = b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{ab^2}$$

Entonces todo elemento del conjunto final es imagen de un elemento del conjunto inicial y la aplicación es suprayectiva.

Ejercicio 5.

(a) *Suponiendo que p, q y r son elementos de un grupo, demostrar la propiedad de simplificación*

$$pq = pr \quad \Longrightarrow \quad q = r$$

La solución debe indicar qué propiedades del grupo se aplican en cada paso de la demostración.

(b) *Considere el grupo de orden 4 formado por el elemento neutro e y los elementos a, b y c:*

(I) *Dar una razón en cada caso por la que ab no puede ser igual a a ni a b.*

(II) *Suponiendo que c es autoinverso determinar las dos posibles tablas de Cayley para G.*

(III) *Determinar cuál de los dos grupos definidos por las dos tablas de Cayley es isomorfo al grupo definido por el conjunto $\{1, -1, i, -i\}$ bajo la multiplicación de números complejos. Su solución debe incluir una correspondencia entre $\{a, b, c, e\}$ y $\{1, -1, i, -i\}$.*

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
pq = pr \quad &\Longrightarrow \quad p^{-1}(pq) = p^{-1}(pr) && \text{multiplicando por la izquierda por el inverso de } p\\
&\Longrightarrow \quad (pp^{-1})q = (pp^{-1})r && \text{por la propiedad asociativa}\\
&\Longrightarrow \quad eq = er && \text{por la definición del elemento simétrico}\\
&\Longrightarrow \quad q = r && \text{por la definición del elemento neutro}
\end{aligned}$$

(b) (I) Supongamos $ab = a$ entonces:

$$\begin{aligned}
ab = a \quad &\Longrightarrow \quad a^{-1}(ab) = a^{-1}a && \text{multiplicando por la izquierda por } a^{-1}\\
&\Longrightarrow \quad (a^{-1}a)b = a^{-1}a && \text{por la propiedad asociativa}\\
&\Longrightarrow \quad eb = e && \text{por la definición de elemento simétrico}\\
&\Longrightarrow \quad b = e && \text{por la definición de elemento neutro}
\end{aligned}$$

Por consiguiente $b = e$ y el grupo no sería de orden 4. La demostración de que $ab = b$ es imposible se hace de forma similar.

(II)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

(III) El segundo es isomorfo al de las raíces cuartas de 1 porque ambos grupos son cíclicos. Un isomorfismo es el definido por:

$$f(e) = 1\ ; \quad f(a) = i\ ; \quad f(b) = -i\ ; \quad f(c) = -1$$

Hemos tenido en cuenta que a y b son los elementos de orden cuatro (generadores del grupo cíclico) que deben hacerse corresponder con los generadores del grupo de las raíces. También se hacen corresponder los elementos de orden 2 que son c y -1.

---

9. Examen 2012

Ejercicio 1.

(a) *Dos de las cinco condiciones que tiene que cumplir un conjunto S con respecto a la operación binaria $*$ para ser un grupo abeliano son la asociatividad y la conmutatividad. Indique las otras tres condiciones.*

(b) *A continuación se muestra la tabla de Cayley para la operación binaria $\odot$ definida en el conjunto $T = \{p, q, r, s, t\}$.*

$\odot$	p	q	r	s	t
p	s	r	t	p	q
q	t	s	p	q	r
r	q	t	s	r	p
s	p	q	r	s	t
t	r	p	q	t	s

(I) *Compruebe que se cumplen exactamente tres de las condiciones necesarias par que $\{T, \odot\}$ sea un grupo abeliano, pero que ni la asociatividad ni la conmutatividad se cumplen.*

(II) *Halle los subgrupos propios de T que son grupos de orden 2, y comente el resultado en el contexto del teorema de Lagrange.*

(III) *Halle las soluciones de la ecuación $(p \odot x) \odot x = x \odot p$.*

Solución:

(a) La operación debe ser cerrada, debe haber elemento neutro y cada elemento debe tener su simétrico.

(b) (I) De la tabla se deduce que la operación es cerrada, existe elemento neutro (s) y todo elemento tiene su simétrico Todos son simétricos de sí mismos). Veamos que en algún caso no se cumple la propiedad asociativa:

$$p \odot (q \odot t) = p \odot r = t$$
$$(p \odot q) \odot t = r \odot t = p$$

ni la conmutativa:

$$p \odot q = r$$
$$q \odot p = t$$

(II) En realidad no se les puede llamar subgrupos puesto que $(T, \odot)$ no es un grupo. Todos los elementos salvo el elemento neutro son de orden 2. Las potencias de estos elementos forman grupos:

$$\{p, s\} \ ; \qquad \{q, s\} \ ; \qquad \{r, s\} \ ; \qquad \{t, s\}$$

El orden de estos grupos 2 no es divisor del orden de T pero esto no quiere decir que no se cumpla el teorema de Lagrange puesto que T no es un grupo.

(III) Desde luego $x = s$ (el elemento neutro) es solución. Probemos con los otros elementos:

– Para $x = p$:

$$(p \odot p) \odot p = s \odot p = p \ ; \qquad p \odot p = s$$

luego p no es solución.

– Para $x = q$:

$$(p \odot q) \odot q = r \odot q = t \ ; \qquad q \odot p = t$$

Por tanto, $x = q$ es solución.

– Probemos con $x = r$:

$$(p \odot r) \odot r = t \odot r = q \; ; \qquad r \odot p = q$$

y $x = r$ es solución.

– Probemos finalmente $x = t$:

$$(p \odot t) \odot t = q \odot t = r \; ; \qquad t \odot p = r$$

y, por consiguiente, $x = t$ también es solución.

Ejercicio 2. *Los elementos de los conjuntos P y Q se toman del conjunto universal $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $P = \{1, 2, 3\}$ y $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.*

(*a*) *Sabiendo que $R = (P \cap Q')'$, enumere los elementos de R.*

(*b*) *Para un conjunto S, sea S^* el conjunto de todos los subconjuntos de S,* (I) *Halle P^** (II) *Halle $n(R^*)$*

Solución:

(*a*) Teniendo en cuenta que por las leyes de Morgan:

$$R = (P \cap Q')' = P' \cup Q = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

(*b*) (I) $P^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

(II) Puesto que R tiene 8 elementos, el número de subconjuntos de R es $2^8 = 256$.

Ejercicio 3. *La relación R se define sobre el conjunto $\mathbb{N}$ de manera tal que, para $a, b \in \mathbb{N}$, aRb si y solo si $a^3 \equiv b^3 \pmod{7}$.*

(*a*) *Comprueba que R es una relación de equivalencia.*

(*b*) *Halle la clase de equivalencia a la que pertenece el 0.*

(*c*) *Denote como C_n la clase de equivalencia a la que pertenece el número n. Enumere los seis primeros elementos de C_1.*

(*d*) *Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad C_n = C_{n+7}$.*

Solución:

(*a*) Comprobemos que se cumplen las tres propiedades:

– Reflexiva: aRa puesto que $a^3 \equiv a^3 \pmod{7}$.

– Simétrica:

$$aRb \quad \Longrightarrow \quad a^3 \equiv b^3 \pmod{7} \quad \Longrightarrow \quad b^3 \equiv a^3 \pmod{7} \quad \Longrightarrow \quad bRa$$

– Transitiva.

$$\begin{cases} aRb \quad \Longrightarrow \quad a^3 \equiv b^3 \pmod{7} \quad \Longrightarrow \quad a^3 - b^3 = \dot{7} \\ bRc \quad \Longrightarrow \quad b^3 \equiv c^3 \pmod{7} \quad \Longrightarrow \quad b^3 - c^3 = \dot{7} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad a^3 - b^3 + b^3 - c^3 = \dot{7} \\ &\Longrightarrow \quad a^3 - c^3 = \dot{7} \\ &\Longrightarrow \quad a^3 \equiv c^3 \pmod{7} \\ &\Longrightarrow \quad aRc \end{aligned}$$

(b) Los números relacionados con cero cumplen que

$$aR0 \implies a^3 \equiv 0 \pmod{7} \implies a^3 = \dot{7} \implies a = \dot{7}$$

Es decir, son equivalentes a cero, los múltiplos de 7. La clase de equivalencia es:

$$[0] = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, \ldots\}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \equiv 1 \pmod{7} \\ 3^3 &= 27 \equiv 6 \pmod{7} \\ 4^3 &= 64 \equiv 1 \pmod{7} \\ 5^3 &= 125 \equiv 6 \pmod{7} \\ 6^3 &= 216 \equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}$$

la clase de equivalencia C_1 es:

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 9, 11, \ldots\}$$

(c) Basta ver que $(n+7)Rn$. En efecto

$$(n+7)^3 - n^3 = n^3 + 21n^2 + 63n + 343 - n^3 = 21n^2 + 63n + 343 = \dot{7} \implies (n+7)Rn$$

Ejercicio 4.

(a) *La función $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ viene dada por $g(n) = |n| - 1$ para $n \in \mathbb{Z}$. Compruebe que g no es ni sobreyectiva ni inyectiva.*

(b) *El conjunto S es finito. Si la función $f : S \longrightarrow S$ es inyectiva, compruebe que f es sobreyectiva.*

(c) *Utilizando el conjunto $\mathbb{Z}^+$ como dominio y como conjunto final, dé un ejemplo de función inyectiva que no sea sobreyectiva.*

Solución:

(a) La función no es inyectiva puesto que, por ejemplo, $g(-1) = g(1)$. Tampoco es sobreyectiva puesto que -2 está en el conjunto final de la aplicación y no hay ningún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g(n) = -2$.

(b) Sea N el número de elementos del conjunto S. El conjunto

$$B = \{f(x) \mid x \in S\}$$

está formado por elementos de S. Además como la función es inyectiva, todos los valores de la función son diferentes. El conjunto B está contenido en S y tiene el mismo número de elementos que S. Entonces $B = S$.

(c) En este caso es posible porque el conjunto no es finito. Un ejemplo de función inyectiva y no sobreyectiva sería:

$$f(n) = n + 3$$

Es inyectiva y no sobreyectiva puesto que no existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f(n) = 1$.

Ejercicio 5. *El grupo G tiene un único elemento h de orden 2.*

(a) (I) *Compruebe que para todo $g \in G$, ghg^{-1} tiene orden 2.*

(II) *Deduzca que para todo $g \in G$, $gh = hg$.*

(b) *Considere el grupo G para la multiplicación de matrices, que consta de cuatro matrices 2×2 y contiene un único elemento de orden 2, siendo*

$$h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) *Compruebe que G es cíclico.*

(II) *Dado el elemento neutro $e = I_2$, halle un par de matrices que representen a los dos elementos restantes de G, donde cada elemento es de la forma*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Solución:

(a) (I) En efecto, sea $h^2 = e$:

$$\begin{aligned} (ghg^{-1})(ghg^{-1}) &= (gh)(g^{-1}g)(hg^{-1}) && \text{por la propiedad asociativa} \\ &= (gh)e(hg^{-1}) \\ &= gh^2g^{-1} \\ &= gg^{-1} && \text{como } h \text{ es de orden 2, } h^2 = e \\ &= e \end{aligned}$$

y, por consiguiente, ghg^{-1} es de orden 2.

(II) Puesto que h es el único elemento de orden 2 y ghg^{-1} es de orden 2, se verifica que:

$$ghg^{-1} = h \quad \Longrightarrow \quad ghg^{-1}g = hg \quad \Longrightarrow \quad gh = hg$$

(b) (I) Salvo isomorfismo, solamente hay dos grupos de orden 4, el grupo cíclico y el grupo de Klein. En el grupo de Klein todos los elementos salvo el neutro tienen orden 2. En el grupo de las matrices solamente hay un elemento de orden 2. Entonces debe ser cíclico.

(II) Sea:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un generador del grupo:

$$g^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad g = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el elemento que falta es:

$$g^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

10. Examen 2013

Ejercicio 1. *La operación binaria $*$ se define sobre $\mathbb{N}$ del siguiente modo:*

$$a * b = 1 + ab$$

Determine si $*$: (a) Es cerrada. (b) Es conmutativa. (c) Es asociativa. (d) Tiene elemento neutro.

Solución:

(a) La operación es cerrada puesto que:

$$a, b \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad a * b = 1 + ab \in \mathbb{N}$$

(b) Es conmutativa ya que:

$$a * b = 1 + ab = 1 + ba = b * a$$

(c) Veamos si es asociativa:

$$(a * b) * c = (1 + ab) * c = 1 + (1 + ab)c = 1 + c + abc$$
$$a * (b * c) = a * (1 + bc) = 1 + a(1 + bc) = 1 + a + abc$$

La operación no es asociativa.

(d) El elemento neutro, si existe, debe cumplir:

$$ae = a \quad \Longrightarrow \quad 1 + ae = a \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{a-1}{a}$$

no existe elemento neutro pues, debería ser el mismo para cualquier elemento y, además, $\frac{a-1}{a}$ no es un número natural.

Ejercicio 2. *Considere el conjunto*

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

con la operación binaria de multiplicación módulo 14 denotada por $\times_{14}$.

(a) *Copie y complete la siguiente tabla de Cayley para esta operación binaria:*

$\times_{14}$	1	3	5	7	9	11	13
1	1	3	5	7	9	11	13
3	3				13	5	11
5	5				3	13	9
7	7						
9	9	13	3				
11	11	5	13				
13	13	11	9				

(b) *Dé una razón que explique por qué $\{S, \times_{14}\}$ no es un grupo.*

(c) *Compruebe que se puede formar un nuevo conjunto G eliminando uno de los elementos de S de modo que $\{G, \times_{14}\}$ sea un grupo.*

(d) *Determinar el orden de cada uno de los elementos de $\{G, \times_{14}\}$.*

(e) *Halle los subgrupos propios de $\{G, \times_{14}\}$.*

Solución:

(a)

$\times_{14}$	1	3	5	7	9	11	13
1	1	3	5	7	9	11	13
3	3	9	1	7	13	5	11
5	5	1	11	7	3	13	9
7	7	7	7	7	7	7	7
9	9	13	3	7	11	1	5
11	11	5	13	7	1	9	3
13	13	11	9	7	5	3	1

(b) El elemento 7 no tiene inverso.

(c) Eliminando el elemento 7 el conjunto que queda es un grupo:

$\times_{14}$	1	3	5	9	11	13
1	1	3	5	9	11	13
3	3	9	1	13	5	11
5	5	1	11	3	13	9
9	9	13	3	11	1	5
11	11	5	13	1	9	3
13	13	11	9	5	3	1

Hay elemento neutro, todos tienen inverso y se cumple la propiedad asociativa pues es una propiedad que se cumple siempre para el producto de clases de restos. Además es un grupo conmutativo.

(d) El orden de los elementos es el siguiente:

$\times_{14}$	1	3	5	9	11	13	orden
1	1	3	5	9	11	13	1
3	3	9	1	13	5	11	6
5	5	1	11	3	13	9	6
9	9	13	3	11	1	5	3
11	11	5	13	1	9	3	3
13	13	11	9	5	3	1	2

(e) Puesto que el grupo tiene orden 6 los subgrupos propios deben de tener orden 2 o 3, de acuerdo con el teorema de Lagrange. Por otra parte, los grupos de orden 2 o 3 son cíclicos. Teniendo esto en cuenta, tenemos un subgrupo de orden 2 generado por 13:

$$G_1 = \{1, 13\}$$

y un subgrupo de orden 3 generado por el número 9 (o el 11 que también es generador):

$$G_2 = \{1, 9, 11\}$$

Ejercicio 3. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define del siguiente modo:*

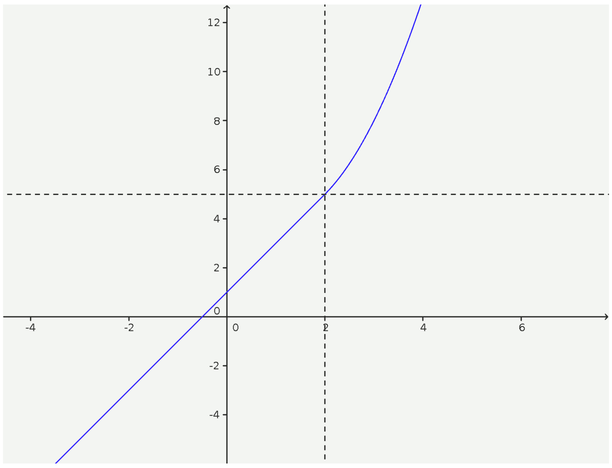
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) (I) *Dibuje aproximadamente la gráfica de f* (II) *Haciendo referencia a la gráfica que ha dibujado, compruebe que f es una aplicación biyectiva.*

(b) *Halle $f^{-1}(x)$.*

Solución:

(*a*) (I)



(II) Podemos ver que la función es siempre creciente, por consiguiente, es inyectiva. Por otra parte, es una función continua que tiende a $-\infty$ a la izquierda y a $+\infty$ por la derecha. Su recorrido son todos los números reales y es, por tanto, suprayectiva.

(*b*) Calculamos la función inversa de $u = 2x + 1$:

$$x = 2u + 1 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{x-1}{2} \quad \Longrightarrow \quad u^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

y la inversa de $v = x^2 - 2x + 5$:

$$x = v^2 - 2v + 5 \quad \Longrightarrow \quad v^2 - 2v + 5 - x = 0$$

$$v = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(x-5)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + (x-5)} = 1 \pm \sqrt{x-4}$$

Debemos tomar el signo positivo para que cuando $x = 5$, $y = 2$. así la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \leq 5 \\ 1 + \sqrt{x-4} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Ejercicio 4. *La relación R se define sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ de la siguiente manera:*

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod{5}$$

(*a*) *Compruebe que R es una relación de equivalencia.*

(*b*) *Compruebe que la equivalencia que define R se puede escribir de la forma:*

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)(a+b+1) \equiv 0 \pmod{5}$$

(*c*) *A partir de lo anterior o de cualquier otro modo determine las clases de equivalencia.*

Solución:

(*a*) Veamos que se cumplen las tres propiedades:

– Reflexiva: aRa puesto que $a(a+1) \equiv a(a+1) \pmod{5}$.

– Simétrica:

$$\begin{aligned} aRb &\Longrightarrow a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod{5} \\ &\Longrightarrow b(b+1) \equiv a(a+1) \pmod{5} \\ &\Longrightarrow bRa \end{aligned}$$

– Transitiva:

$$\begin{cases} aRb & \Longrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5 \\ bRc & \Longrightarrow \quad b(b+1) \equiv c(c+1) \pmod 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$a(a+1) \equiv c(c+1) \pmod 5 \quad \Longrightarrow \quad aRc$$

(b) En efecto:

$$\begin{aligned} aRb \quad & \Longrightarrow \quad a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod 5 \\ & \Longrightarrow \quad a^2 - b^2 + a - b \equiv 0 \pmod 5 \\ & \Longrightarrow \quad (a-b)(a+b) + (a-b) \equiv 0 \pmod 5 \\ & \Longrightarrow \quad (a-b)(a+b+1) \equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

(c) A partir de lo anterior vemos que dos números son equivalentes si su diferencia es múltiplo de 5 o lo es la suma de los números más 1. Así, 0 es equivalente a los múltiplos de 5 y también a 4 o los números congruentes con 4. Las clases de equivalencia son las siguientes:

$$[0] = \{0, 4, 5, 9, 10\}$$
$$[1] = \{1, 3, 6, 8, 11\}$$
$$[2] = \{2, 7, 12\}$$

Ejercicio 5. *H y K son subgrupos de un grupo G. Considerando los cuatro axiomas de grupo, demuestre que $H \cap K$ también es un subgrupo de G.*

Solución:

Veamos que se cumplen en $H \cap K$ las propiedades de grupo:

– La operación es cerrada en $H \cap K$:

$$\begin{aligned} a, b \in H \cap K \quad & \Longrightarrow \quad a, b \in H, \ a, b \in K && \text{por ser } H \text{ y } K \text{ subgrupos} \\ & \Longrightarrow \quad ab \in H, \ ab \in K \\ & \Longrightarrow \quad ab \in H \cap K \end{aligned}$$

– La propiedad asociativa se cumple en $H \cap K$ puesto que se cumple en H y en K.

– El elemento neutro está en $H \cap K$:

$$\begin{cases} e \in H \\ e \in K \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad e \in H \cap K$$

– Demostremos que si $a \in H \cap K$ entonces $a^{-1} \in H \cap K$. En efecto:

$$\begin{aligned} a \in H \cap K \quad & \Longrightarrow \quad a \in H, \ a \in K && \text{por ser } H \text{ y } K \text{ grupos:} \\ & \Longrightarrow \quad a^{-1} \in H, \ a^{-1} \in K \\ & \Longrightarrow \quad a^{-1} \in H \cap K \end{aligned}$$

---

11. Examen 2014

Ejercicio 1. *La operación binaria Δ se define sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mediante la siguiente tabla de Cayley*

Δ	1	2	3	4	5
1	1	1	2	3	4
2	1	2	1	2	3
3	2	1	3	1	2
4	3	2	1	4	1
5	4	3	2	1	5

(a) *Indique si S es cerrado respecto a la operación Δ y justifique su respuesta.*

(b) *Indique si Δ es conmutativa y justifique su respuesta.*

(c) *Indique si existe un elemento neutro y justifique su respuesta.*

(d) *Determine si Δ es asociativa y justifique su respuesta.*

(e) *Halle las soluciones de la ecuación $a\Delta b = 4\Delta b$, para $a \neq 4$.*

Solución:

(a) Es cerrado prque todos los resultados de operar dos elementos de S están en S.

(b) Es conmutativa porque la tabla es simétrica.

(c) No hay elemento neutro. Esto se desprende de la tabla, ningún elemento al operarlo con los demás los deja invariantes.

(d) No es asociativa puesto que, por ejemplo,

$$2\Delta(3\Delta 4) = 2\Delta 1 = 1$$
$$(2\Delta 3)\Delta 4 = 1\Delta 4 = 3$$

(e) De la tabla se desprenden las soluciones $a = 2, b = 2$ y $a = 2, b = 3$.

Ejercicio 2. *Considere el conjunto S, definido mediante $S = \{s \in \mathbb{Q} \mid 2s \in \mathbb{Z}\}$. Puede suponer que $+$ y $\times$ son operaciones binarias asociativas sobre $\mathbb{Q}$.*

(a) (I) *Escriba los seis elementos más pequeños de S que no son negativos.*

(II) *Muestre que $\{S, +\}$ es un grupo.*

(III) *Dé una razón que explique por qué $\{S, \times\}$ no es un grupo. Justifique su respuesta.*

(b) *La relación R se define sobre S mediante $s_1 R s_2$ si $3s_1 + 5s_2 \in \mathbb{Z}$.*

(I) *Muestre que R es una relación de equivalencia.*

(II) *Determine las clases de equivalencia.*

Solución:

(a) (I) $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. El conjunto S está formado por los números enteros y las fracciones irreducibles de denominador igual a 2.

(II) La operación es interna y asociativa. El elemento neutro, cero, está en S y también el opuesto de cada elemento.

(III) La operación no es interna. Por ejemplo

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \notin S$$

(b) (I) Veamos que se cumplen las tres propiedades

- Reflexiva. aRa puesto que $3a + 5a \in \mathbb{Z}$ tanto si a es entero como si es una fracción de denominador dos.
- Simétrica. Hay que tener en cuenta que si $a \in S$ entonces $2a \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\begin{aligned} aRb &\implies 3a + 5b \in \mathbb{Z} \\ &\implies 3a + 2a + 5b - 2b \in \mathbb{Z} \qquad \text{puesto que } 2a, 2b \in \mathbb{Z} \\ &\implies 3b + 5a \in \mathbb{Z} \\ &\implies bRa \end{aligned}$$

- Transitiva:

$$\begin{aligned} \begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} &\implies \begin{cases} 3a + 5b \in \mathbb{Z} \\ 3b + 5c \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \text{sumando} \\ &\implies 3a + 8b + 5c \in \mathbb{Z} \qquad \text{y puesto que } 8b \in \mathbb{Z} \\ &\implies 3a + 5c \in \mathbb{Z} \\ &\implies aRc \end{aligned}$$

(II) Una clase de equivalencia está formada por los números enteros y otra por las fracciones irreducibles de denominador igual a 2.

Ejercicio 3. *Los conjuntos X e Y se definen mediante $X =]0, 1[$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.*

(a) (I) *Dibuje aproximadamente en el plano cartesiano el conjunto $X \times Y$.*

(II) *Dibuje aproximadamente en el plano cartesiano el conjunto $Y \times X$.*

(III) *Indique $(X \times Y) \cap (Y \times X)$.*

(b) *Considere la función $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = x + y$ y la función $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $g(x, y) = xy$.*

(I) *Halle el recorrido de la función f.*

(II) *Halle el recorrido de la función g.*

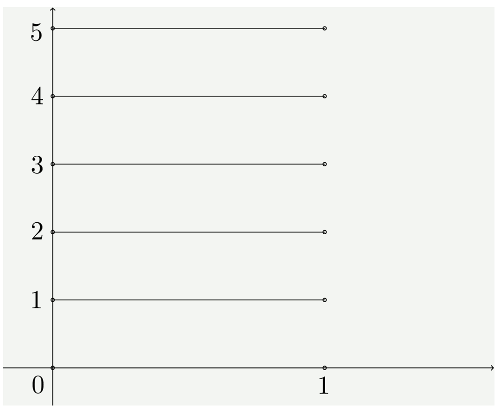
(III) *Muestre que f es inyectiva.*

(IV) *Halle $f^{-1}(\pi)$ como valor exacto.*

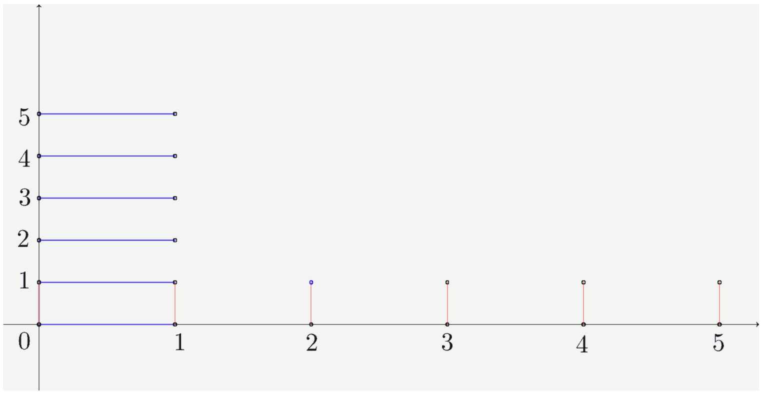
(V) *Halle todas las soluciones de $g(x, y) = \frac{1}{2}$.*

Solución:

(a) (I)



(II)



(III) La intersección es vacía.

(b) (I) El recorrido de la función f es $(0,6) \setminus \{1,2,3,4,5\}$.

(II) El recorrido de la función g es $[0,5)$.

(III) Por una parte se verifica que:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, y) > f(x_2, y)$$

Es decir, para puntos del mismo segmento, los valores de la función son todos diferentes. Por otra parte

$$y_1 > y_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$$

O sea que el valor de la función en un segmento correspondiente a un valor mayor de y siempre es mayor que el del valor menor valga lo que valga x. Los valores de la función se ordenan según los valores de la ordenada y si las ordenadas son iguales, según los valores de la abscisa. En consecuencia la función no toma valores iguales en puntos diferentes y es, en consecuencia, inyectiva.

(IV) $f^{-1}(\pi) = (\pi - 3, 3)$.

(V) Las soluciones son $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$, $\left(\frac{1}{6}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{8}, 4\right)$ y $\left(\frac{1}{10}, 5\right)$.

Ejercicio 4. *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos finitos.*

(a) *Demuestre que $f(e_G) = e_H$, donde e_G es el elemento neutro de G y e_H es el elemento neutro de H.*

(b) (I) *Demuestre que el núcleo de f, $K = \operatorname{Ker}(f)$, es cerrado respecto a la operación del grupo.*

(II) *Deduzca que K es un subgrupo de G.*

(c) (I) *Demuestre que $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G$, $k \in K$.*

(II) *Deduzca que toda clase lateral por la izquierda de K en G es también una clase lateral por la derecha.*

Solución:

(a) Sea x un elemento cualquiera de G:

$$f(x) = f(e_G x) = f(e_G) f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(e_G) = e_H$$

Al operar $f(x)$ con $f(e_G)$ queda invariante. Por eso $f(e_G)$ debe ser el elemento neutro de H.

(b) (I) En efecto

$$\begin{aligned} a, b \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Longrightarrow \quad f(a) = e_H,\ f(b) = e_H \\ &\Longrightarrow \quad f(ab) = f(a)f(b) = e_H e_H = e_H \\ &\Longrightarrow \quad ab \in \operatorname{Ker}(f) \end{aligned}$$

y la operación es cerrada.

(ii) Ya se ha demostrado que la operación es cerrada en el núcleo del homomorfismo y que el elemento neutro pertenece al núcleo. Queda por demostrar que si $a \in \operatorname{Ker}(f)$ entonces también $a^{-1} \in \operatorname{Ker}(f)$:

$$a \in K \quad \Longrightarrow \quad e_H = f(e_G) = f(a^{-1}a) = f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1})e_H = f(a^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} \in K$$

(c) (i) En efecto:

$$\begin{aligned} g \in G,\ k \in K \quad \Longrightarrow \quad f(gkg^{-1}) &= f(g)f(k)f(g^{-1}) \\ &= f(g)e_H f(g^{-1}) \\ &= f(g)f(g^{-1}) \\ &= f(gg^{-1}) \\ &= f\left(e_G\right) \\ &= e_H \end{aligned}$$

y por tanto, $gkg^{-1} \in K$.

(ii) Sea

$$\begin{aligned} x \in gK \quad &\Longrightarrow \quad \exists k \in K \mid x = gk \\ &\Longrightarrow \quad gkg^{-1} = xg^{-1} \in K \\ &\Longrightarrow \quad xg^{-1} = k',\ k' \in K \\ &\Longrightarrow \quad x = k'g \\ &\Longrightarrow \quad x \in Kg \end{aligned}$$

12. Prueba 1. Mayo 2015

Ejercicio 1. *A y B son dos sucesos tales que* $\mathrm{p}(A) = 0{,}25$, $\mathrm{p}(B) = 0{,}6$ *y* $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}7$.

(a) *Halle* $\mathrm{p}(A \cap B)$.

(b) *Determine si los sucesos A y B son independientes.*

Solución:

(a) $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}15$.

(b) Puesto que $\mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15 = \mathrm{p}(A \cap B)$, los sucesos son independientes.

Ejercicio 2. *Desarrolle* $(3 - x)^4$ *en potencias ascendentes de x y simplifique la respuesta.*

Solución:

$$\begin{aligned}(3-x)^4 &= 3^4 - 4 \cdot 3^3 x + 6 \cdot 3^2 x^2 - 4 \cdot 3x^3 + x^4 \\ &= 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Halle todas las soluciones de la ecuación* $\tan x + \tan 2x = 0$ *donde* $0^o \leq x < 360^o$.

Solución:

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 0$$

$$\tan x \left(1 - \tan^2 x\right) + 2\tan x = 0$$

$$\tan x \left(3 - \tan^2 x\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\tan x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = 0^{\mathrm{o}}, \quad x = 180^{\mathrm{o}} \\ \tan x = \sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad x = 60^{\mathrm{o}}, \quad x = 240^{\mathrm{o}} \\ \tan x = -\sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad x = 120^{\mathrm{o}}, \quad x = 300^{\mathrm{o}}\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Considere la función definida mediante* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

(a) *Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ es una función decreciente.*

(b) *En la curva $y = f(x)$ hay un punto de inflexión P. Halle las coordenadas de P.*

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

El signo de la derivada está dado por el siguiente esquema:

	0		0	
$+$		$-$		$+$
	0		2	

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.

(b) La segunda derivada es:

$$f''(x) = 6x - 6$$

El signo de la segunda derivada es:

$-$	0	$+$
	1	

Hay un punto de inflexión en $P(1, 2)$.

Ejercicio 5. *Muestre que*

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

Solución:

Integramos por partes:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x &= \int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \left[\frac{x^4 \ln x}{4}\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4 \, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{16\ln 2}{4}\right) - \left[\frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ &= 4\ln 2 - \frac{15}{16}\end{aligned}$$

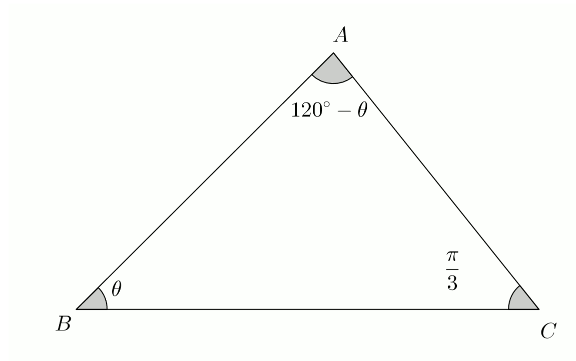
Ejercicio 6. *En el triángulo ABC, $BC = \sqrt{3}$ cm, $A\hat{B}C = \theta$ y $B\hat{C}A = \frac{\pi}{3}$.*

(a) *Muestre que la longitud:*

$$AB = \frac{3}{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

(b) *Sabiendo que AB alcanza un valor mínimo, determine el valor de θ para el cual sucede esto.*

Solución:



(*a*) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}60^{\text{o}}}=\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(120^{\text{o}}-\theta)}\qquad\Longrightarrow\qquad AB=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta}=\frac{3}{\sqrt{3}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$$

(*b*) Para que sea máximo, la derivada debe ser cero:

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{-3(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}=0\\
&-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta+\cos\theta=0\\
&-\sqrt{3}\tan\theta+1=0\\
&\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad\Longrightarrow\qquad\theta=30^{\text{o}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que AB alcanza un valor mínimo, determine el valor de θ para el cual sucede esto.

Ejercicio 7.

(*a*) *Halle tres raíces distintas de la ecuación* $8z^3+27=0$*,* $z\in\mathbb{C}$*, en forma módulo-argumental.*

(*b*) *Las raíces se representan mediante los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand. Muestre que el área del triángulo es igual a* $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

Solución: Sabiendo que AB alcanza un valor mínimo, determine el valor de θ para el cual sucede esto.

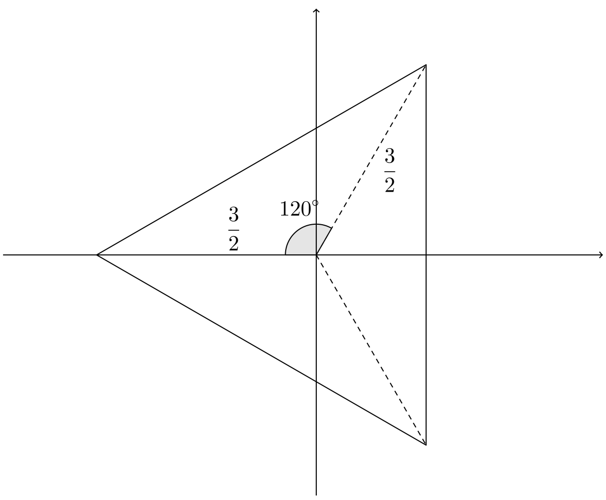
(*a*) Puesto que:

$$z=\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)_{180^{\text{o}}}}=\left(\frac{3}{2}\right)_{60^{\text{o}}+120^{\text{o}}K}\qquad K=0,1,2$$

de modo que las tres raíces son:

$$\left(\frac{3}{2}\right)_{60^{\text{o}}},\qquad\left(\frac{3}{2}\right)_{180^{\text{o}}},\qquad\left(\frac{3}{2}\right)_{300^{\text{o}}}$$

(*b*) Representamos las raíces:



El área del triángulo la podemos calcular como suma de las áreas de tres triángulos isósceles:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 120^{\mathrm{o}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

Ejercicio 8. *Utilizando la sustitución* $t = \tan x$*, halle*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

Exprese la respuesta de la forma $m \arctan(n \tan x) + c$ *donde* m *y* n *son constantes que deberá determinar.*

Solución:

Derivamos la fórmula de sustitución:

$$t = \tan x$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \cos^2 x\,\mathrm{d}t$$

Hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + \tan^2 x + \tan^2 x}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + 2\tan^2 x}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + 2t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c
\end{aligned}$$

de modo que $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $n = \sqrt{2}$.

Ejercicio 9.

(a) *Indique el conjunto de valores de* a *para los cuales la función* $x \longmapsto \log_a x$ *existe para todo* $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) *Sabiendo que* $\log_x y = 4 \log_y x$*, halle todas las posibles expresiones de* y *en función de* x.

Solución:

(a) La función existe para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Podemos pasar ambos logaritmos a la base neperiana:

$$\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}\ ; \qquad \ln_y x = \frac{\ln x}{\ln y} \quad \Longrightarrow \quad \log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \log_x y = \frac{4}{\log_x y} \quad &\Longrightarrow \quad (\log_x y)^2 = 4 \\ &\Longrightarrow \quad \log_x y = \pm 2 \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = x^{-2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 10. *La función f se define mediante $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.*

(a) *Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes x e y.*

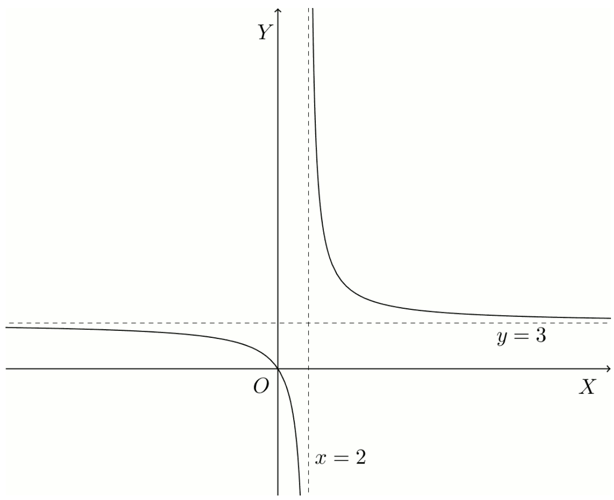
(b) *Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.*

(c) *Halle todos los valores de x para los que $f(x) = f^{-1}(x)$.*

(d) *Resuelva la inecuación $|f(x)| < \frac{3}{2}$.*

(e) *Resuelva la inecuación $f(|x|) < \frac{3}{2}$.*

Solución:



(a) Las asíntotas son las rectas $x = 2$ e $y = 3$. La curva corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

(b) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$\begin{aligned} y = \frac{3x}{x-2} \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{3y}{y-2} \\ &\Longrightarrow \quad x(y-2) = 3y \\ &\Longrightarrow \quad xy - 3y = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y(x-3) = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y = f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3} \end{aligned}$$

(c) Igualando las dos funciones:

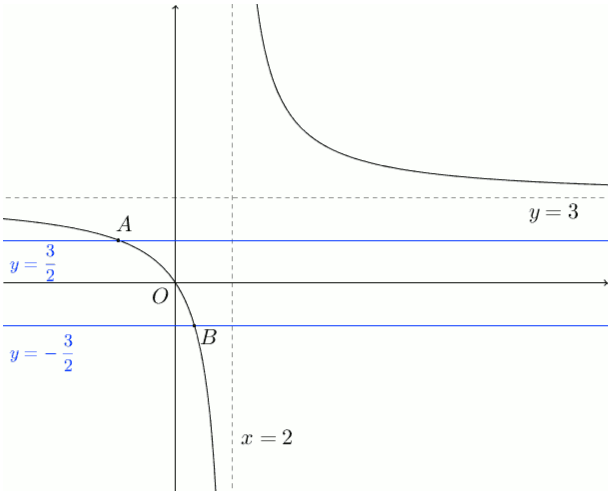
$$\frac{3x}{x-2} = \frac{2x}{x-3} \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 9x = 2x^2 - 4x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x = 0$$

Las dos funciones toman los mismos valores en $x = 0$ y en $x = 5$.

(d) La inecuación equivale a:

$$-\frac{3}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$$

Lo podemos resolver gráficamente



La parte de la curva que cumple la condición es la comprendida entre los puntos A y B es decir para $x \in \left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

(e) Se trata de una función simétrica respecto al eje de ordenadas. Para $x > 0$ la desigualdad se cumple en el intervalo $[0, 2)$. Por la simetría debe cumplirse también en $(-2, 0]$. La solución es entonces el intervalo $(-2, 2)$.

También puede expresarse la función como:

$$f(|x|) = \frac{3|x|}{|x|-2} = \begin{cases} \frac{3x}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-3x}{-x-2} = \frac{3x}{x+2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y obtener la solución por separado para $x < 0$ y para $x \geq 0$.

Ejercicio 11. *Considere las funciones* $f(x) = \tan x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$.

(a) *Halle una expresión para* $g \circ f(x)$*; indique cuál es su dominio.*

(b) *A partir de lo anterior muestre que:*

$$g \circ f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(c) *Sea* $y = g \circ f(x)$*. Halle el valor exacto de* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *en el punto del gráfico de* $y = g \circ f(x)$ *en el que* $x = \frac{\pi}{6}$*; exprese la respuesta de la forma* $a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Z}$.

(d) *Muestre que el área delimitada por el gráfico de* $y = g \circ f(x)$*, el eje* x *y las rectas* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{6}$ es $\ln(1 + \sqrt{3})$.

Solución:

(a)

$$g \circ f(x) = g(\tan x) = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

El dominio de la función es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$

(b) Sustituyendo la tangente en función del seno y el coseno:

$$g \circ f(x) = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(c) Derivamos:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) + (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x + \operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\
&= -\frac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}
\end{aligned}$$

Para $x = \frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(\frac{\pi}{6}) &= \frac{-2}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}} \\
&= \frac{-2}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-4}{2 - \sqrt{3}} \\
&= \frac{-4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = -8 - 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(d) En la integral siguiente, el numerador es la derivada del denominador:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \, \mathrm{d}x &= \Big[\ln |\cos x - \operatorname{sen} x|\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \ln \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right| = \ln \frac{\sqrt{3} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Este logaritmo es menor que cero por lo que el área es igual a:

$$\begin{aligned}
S &= -\ln \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \ln \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\
&= \ln \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \ln \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} \\
&= \ln(\sqrt{3} + 1)
\end{aligned}$$

Ejercicio 12. *La ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + c = 0$, tiene por raíces α, β y γ. Desarrollando $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ muestre que:*

(a) (I) $p = -(\alpha + \beta + \gamma)$.

(II) $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

(III) $c = -\alpha\beta\gamma$.

Ahora se sabe que $p = -6$ y $q = 18$ para los apartados (b) y (c).

(b) (I) *En el caso de que las tres raíces formen una progresión aritmética, muestre que una de las raíces es 2.*

(II) *A partir de lo anterior, determine el valor de c.*

(c) *En otro caso, las tres raíces α, β y γ forman una progresión geométrica. Determine el valor de c.*

Solución:

(a) Desarrollando:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + c &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

e igualando coeficientes resulta:

$$\begin{aligned} p &= -(\alpha+\beta+\gamma) \\ q &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ c &= -\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

(b) (I) Puesto que las raíces están en progresión aritmética, las podemos representar mediante $a-d$, a y $a+d$. Entonces:

$$a - d + a + a + d = 6 \quad\Longrightarrow\quad 3a = 6 \quad\Longrightarrow\quad a = 2$$

El segundo término de la progresión es igual a 2.

(II) Por otra parte puesto que $x = 2$ es una raíz de $x^3 - 6x^2 + 18x + c$:

$$2^3 - 6\cdot 2^2 + 18\cdot 2 + c = 0 \quad\Longrightarrow\quad c = -20$$

(c) Sean las raíces $\frac{a}{r}$, a y ar. Debe cumplirse que:

$$-\left(\frac{a}{r} + a + ar\right) = a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 6$$

$$\frac{a}{r}\cdot a + \frac{a}{r}\cdot ar + a\cdot ar = a^2\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 18$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene $a = 3$. Entonces:

$$c = -\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar = -a^3 = -27$$

Ejercicio 13.

(a) *Muestre que:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

donde $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(*b*) *A partir de lo anterior muestre que* $\sqrt{2}-1<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(*c*) *Demuestre, utilizando la inducción matemática que:*

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{\sqrt{r}}>\sqrt{n}$$

para $n\geq 2$ $n\in\mathbb{Z}$.

Solución:

(*a*) Racionalizando

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

(*b*) Aplicando la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}-1&=\sqrt{2}-\sqrt{1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\\&<\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(*c*)
- Se cumple para $n=2$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{r=2}\frac{1}{\sqrt{r}}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\\&>\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Supongamos que se cumple para $n=h$:

$$\sum_{r=1}^{r=h}\frac{1}{\sqrt{r}}>\sqrt{h}$$

  y veamos que, entonces, se cumple para $r=h+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{r=h+1}\frac{1}{\sqrt{r}}&=\sum_{r=1}^{r=h}\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}>\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}\\&=\frac{\sqrt{h}\sqrt{h+1}+1}{\sqrt{h+1}}>\frac{\sqrt{h}\sqrt{h}+1}{\sqrt{h+1}}\\&=\frac{h+1}{\sqrt{h+1}}=\sqrt{h+1}\end{aligned}$$

- De los dos apartados anteriores se deduce que la fórmula se cumple para $n\geq 2$.

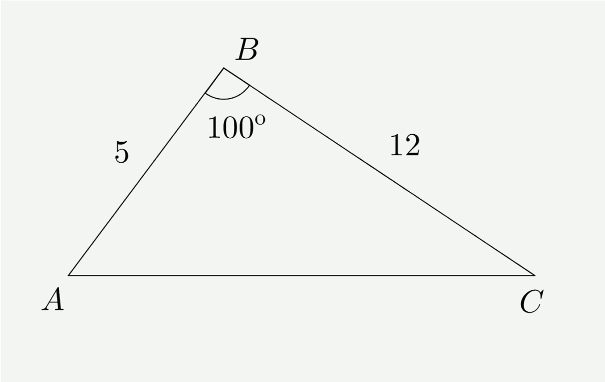
13. Prueba 2. Mayo 2015

Ejercicio 1. *En el triángulo ABC, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm, $A\hat{B}C = 100^{\mathrm{o}}$.*

(a) *Halle el área del triángulo.*

(b) *Halle AC.*

Solución:



(a) El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 100^{\mathrm{o}} \simeq 29{,}5 \text{ cm}^2$$

(b) Por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos 100^{\mathrm{o}} \quad \Longrightarrow \quad AC \simeq 13{,}8 \text{ cm}$$

Ejercicio 2. *De un grupo compuesto por cinco hombres y seis mujeres se eligen cuatro personas.*

(a) *Determine cuantos grupos posibles se pueden elegir.*

(b) *Determine cuántos grupos se pueden formar que estén compuestos por dos hombres y dos mujeres.*

(c) *Determine cuántos grupos se pueden formar en los que haya al menos una mujer.*

Solución:

Se trata de un problema de combinaciones:

(a) Hay 11 personas y hay que escoger 4:

$$C_{11,4} = 330$$

(b) Los dos hombres pueden escogerse de $C_{5,2}$ y las mujeres de $C_{6,2}$ maneras. En total:

$$C_{5,2} \cdot C_{6,2} = 150$$

(c) Son todos menos los grupos formados exclusivamente por hombres. En total

$$C_{11,4} - C_{5,4} = 325$$

Ejercicio 3.

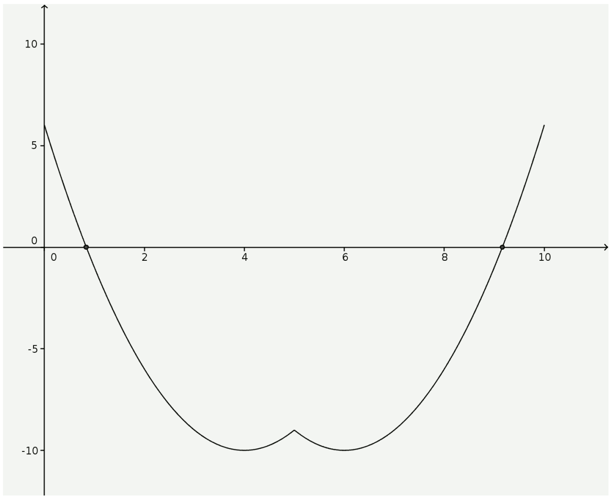
(a) *Dibuje aproximadamente el gráfico de* $y = (x-5)^2 - 2|x-5| - 9$, *para* $0 \leq x \leq 10$.

(b) *A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación:*

$$(x-5)^2 - 2|x-5| - 9 = 0$$

Solución:

(a) Puede dibujarse con la calculadora. El resultado es algo como esto:



(b) Las soluciones de la ecuación pueden obtenerse como las intersecciones de la curva del apartado anterior con el eje OX. De esta manera se obtiene:

$$x_1 = 0{,}84\ ; \qquad x_2 = 9{,}16$$

El valor exacto puede calcularse resolviendo:

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(x-5) - 9 = 0 \\ x > 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 6 + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(5-x) - 9 = 0 \\ x < 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 4 - \sqrt{10}$$

Ejercicio 4. *A Emma le regalan un teléfono movil nuevo para su cumpleaños y en él recibe mensajes de texto de sus amigos. Se supone que el número de mensajes de texto que Emma recibe al día sigue una distribución de Poisson de media* $m = 5$.

(a) (I) *Halle la probabilidad de que en un día dado Emma reciba más de 7 mensajes de texto.*

(II) *Determine el número esperado de días a la semana en los que Emma recibe más de 7 mensajes de texto.*

(b) *Halle la probabilidad de que Emma reciba menos de 30 mensajes de texto a lo largo de una semana dada.*

Solución:

(*a*) (I) Basta aplicar la distribución de Poisson

$$\mathrm{p}\,(X \leq 7) \simeq 0{,}867 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X > 7) \simeq 0{,}133$$

(II) El valor esperado es:

$$\overline{X} = 7 \cdot \mathrm{p}\,(X > 7) \simeq 0{,}934$$

(*b*) En este caso la distribución de Poisson tiene media 35:

$$\mathrm{p}\,(X < 30) \simeq 0{,}177$$

Ejercicio 5. *Considere los vectores dados por* $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ *y* $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ *donde* a *y* b *son constantes. Se sabe que* $\vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ *donde* c *es una constante.*

(*a*) *Halle el valor de cada una de las constantes* a, b *y* c.

(*b*) *A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *y pasa por el punto* $(0, 0, 0)$.

Solución:

(*a*) Calculamos el producto vectorial e igualamos:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & a \\ \vec{\jmath} & 2 & b \\ \vec{k} & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \\ b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad b = 2\,; \quad a = -1\,; \quad c = 4$$

(*b*) El vector normal al plano es $\vec{u} \times \vec{v}$. Por tanto la ecuación es:

$$4x + 2y + 4z = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x + y + 2z = 0$$

Ejercicio 6. *El gráfico de* $y = \ln(5x + 10)$ *se obtiene a partir del gráfico de* $y = \ln x$ *realizando una traslación de* a *unidades en la dirección del eje* x *seguida de una traslación de* b *unidades en la dirección del eje* y.

(*a*) *Halle el valor de* a *y el valor de* b.

(*b*) *La región delimitada por el gráfico de* $y = \ln(5x + 10)$, *el eje* x *y las rectas* $x = e$ *y* $x = 2e$, *se rota alrededor del eje* x. *Hale el volumen así generado.*

Solución:

(*a*) Podemos escribir la función como:

$$Y = \ln(5x + 10) = \ln[5(x + 2)] = \ln 5 + \ln(x + 2)$$

con lo que vemos que la curva $y = \ln x$ se ha trasladado -2 unidades en la dirección del eje x y $\ln 5$ unidades en la dirección del eje y. Es decir, $a = -2$ y $b = \ln 5$.

(*b*) El volumen es igual a la siguiente integral que podemos obtener con la calculadora:

$$V = \pi \int_e^{2e} \left(\ln(5x + 10)\right)^2 \, \mathrm{d}x = 31{,}6\pi$$

También puede obtenerse el valor exacto integrando por partes.

Ejercicio 7. *Considere el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 4x + 3y + 14z = 4 \\ 2x - 2y + (\alpha + 2)z = \beta - 12 \end{cases}$$

(*a*) *Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que:*

(I) *El sistema no tenga solución.*

(II) *El sistema tenga solo una solución.*

(III) *El sistema tenga un número infinito de soluciones.*

(*b*) *Para el caso en el que el número de soluciones es infinito, halle la solución general del sistema de ecuaciones en forma cartesiana.*

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 \\ 2 & 2 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha - 8 \end{vmatrix} = 2(\alpha - 10)$$

y ya podemos decir que:

– Si $\alpha \neq 10$ el sistema es compatible determinado y tiene una sola solución.

– Si $\alpha = 10$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 14 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & \beta - 12 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & \beta - 12 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \beta - 12 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es $2(\beta - 16)$ de forma que, si $\beta \neq 16$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $\beta = 16$ el rango de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(*b*) Para $\alpha = 10,\ \beta = 16$ el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 4x + 3y + 14z = 4 \end{cases}$$

Esta es la ecuación de una recta como intersección de planos. Para pasarla a forma continua buscamos una solución particular, por ejemplo $P(-2, 4, 0)$ y un vector director:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 4 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación queda:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicio 8. *El granjero Bill posee un terreno rectangular de* 10 m *por* 4 m. *Bill ata una cuerda a un poste de madera situado en una esquina de su terreno, y ata el otro extremo de la cuerda a su cabra Gruff.*

(*a*) *Sabiendo que la cuerda tiene una longitud de* 5 m*, calcule el porcentaje del terreno de Bill en el que Gruff puede pastar. Dé la respuesta aproximando al número entero más próximo.*

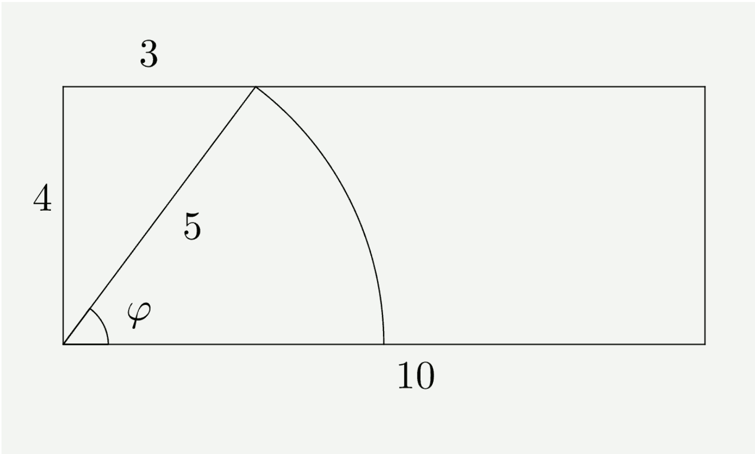
(*b*) *Bill sustituye la cuerda de Gruff por otra que tiene una longitud* a*,* $4 < a < 10$*, de modo que ahora Gruff puede pastar exactamente en la mitad del terreno de Bill.*

Muestre que a *satisface la ecuación:*

$$a^2 \operatorname{arsen}\left(\frac{4}{a}\right) + 4\sqrt{a^2-16} = 40$$

(*c*) *Halle el valor de* a*.*

Solución:



(*a*) El área que alcanza la cabra puede descomponerse en un triángulo y un sector, Además

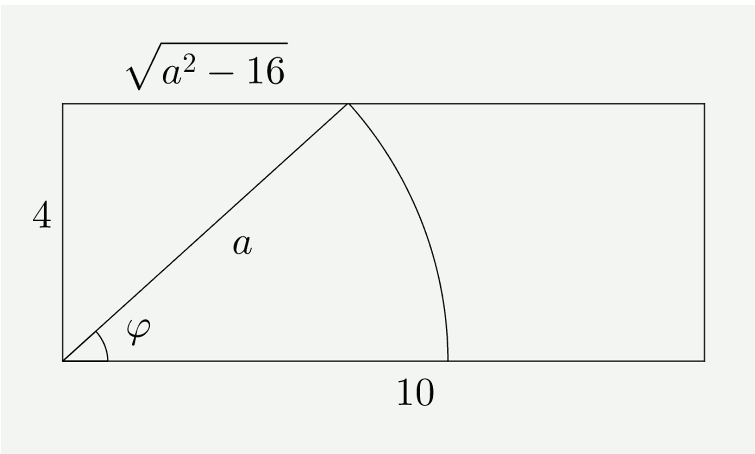
$$\cos(90^{o} - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \operatorname{arsen}\frac{4}{5}$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5^2 \cdot \operatorname{arsen}\frac{4}{5} \simeq 17{,}6$$

lo que supone un 44 % de la superficie total.

(*b*) En este caso, el área debe ser igual a 20:



Como en el caso anterior:

$$\cos(90^{\text{o}} - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \operatorname{arsen}\frac{4}{a}$$

Entonces el área cumple:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{a^2 - 16} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \operatorname{arsen}\frac{4}{a} = 20 \qquad \text{o bien}$$

$$4\sqrt{a^2 - 16} + a^2 \operatorname{arsen}\frac{4}{a} = 40$$

(c) La ecuación se resuelve con la calculadora y resulta $a = 5{,}53$.

Ejercicio 9. *Natasha vive en Chicago y tiene familia en Nashville y St. Louis. Cada vez que quiere visitar a su familia, o bien va en avión o bien va en coche.*

Cuando va a Nashville, la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{4}{5}$, *y cuando va a St. Louis la probabilidad de que vaya en avión es* $\frac{1}{3}$.

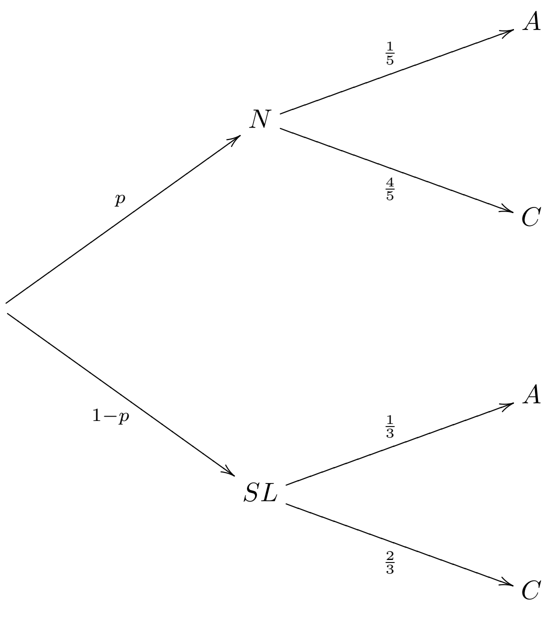
Sabiendo que cuando va a visitar a su familia la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{13}{18}$, *Halle la probabilidad de que para un viaje en particular,*

(a) *Vaya a Nashville.*

(b) *Esté camino de Nashville, sabiendo que está yendo en avión.*

Solución

El problema responde al siguiente esquema:



(a) Puesto que $\text{p}\,(C) = \frac{13}{18}$:

$$\frac{13}{18} = p \cdot \frac{4}{5} + (1 - p) \cdot \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{5}{12}$$

(*b*) Por la fórmula de Bayes:

$$\mathrm{p}\,(N|A) = \frac{\frac{5}{12}\,\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}\,\frac{1}{5}+\frac{7}{12}\,\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{7}{36}} = \frac{3}{10}$$

Ejercicio 10. *La agricultora Suzie cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cosecha siguen una distribución normal de media* 122 g *y desviación típica* 14,7 g.

(*a*) (i) *Calcule el porcentaje de los nabos de Suzie que pesan entre* 110 g *y* 130 g.

(ii) *Suzie tiene listos 100 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de* 130 g.

(iii) *Halle la probabilidad de que al menos 30 de estos 100 nabos pesen más de* 130 g.

(*b*) *El agricultor Ray también cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cultiva siguen una distribución normal de media* 144 g. *Ray solamente lleva al mercado aquellos nabos que pesan más de* 130 g. *Durante un determinado período, Ray observa que tiene que rechazar 1 de cada 15 nabos por pesar menos de lo debido.*

(i) *Halle la desviación típica de los nabos de Ray.*

(ii) *Ray tiene listos 200 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de* 150 g.

Solución:

(*a*) (i) Es una distribución normal $N(122; 14{,}7)$:

$$\mathrm{p}\,(110 < X < 130) = 50{,}0\,\%$$

(ii) Ahora $X' \sim B(100, \mathrm{p}\,(X > 130))$:

$$\mathrm{p}\,(X > 130) = 0{,}293$$

El número esperado será $0{,}293 \times 100 = 29{,}3$.

(iii) Con la distribución binomial del apartado anterior:

$$p(X \geq 30) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 29) = 0{,}478$$

(*b*) (i) Es una distribución $N(144; \sigma)$ de desviación típica desconocida. Pero sabemos que:

$$\mathrm{p}\,(X < 130) = \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{130-144}{\sigma}\right) = \frac{1}{15}$$

Con la función inversa de la normal obtenemos:

$$\frac{-14}{\sigma} = -1{,}50108... \quad \Longrightarrow \quad \sigma \simeq 9{,}33$$

con tres cifras significativas.

(ii) Puesto que los nabos están listos para llevarlos al mercado, pesan más de 130 g. Con el valor obtenido de la desviación, la probabilidad de que un nabo pese más de 150 g es:

$$p(X > 150 \mid X > 130) = \frac{\mathrm{p}\,(X > 150)}{\mathrm{p}\,(X > 130)} = 0{,}278579...$$

y por tanto, el número esperado de nabos que pesan más de 150 g es $200 \times 0{,}278... \simeq 55{,}7$.

Ejercicio 11. *Una curva se define mediante* $x^2 - 5xy + y^2 = 7$.

(a) *Muestre que:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5y - 2x}{2y - 5x}$$

(b) *Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto* $(6, 1)$.

(c) *Halle la distancia que hay entre los dos puntos de la curva en los cuales la tangente correspondiente es paralela a la recta* $y = x$.

Solución:

(a) Por derivación implícita:

$$\begin{aligned} &2x - 5(y + xy') + 2yy' = 0 \\ &2yy' - 5xy' = 5y - 2x \\ &y' = \frac{5y - 2x}{2y - 5x} \end{aligned}$$

(b) La derivada en ese punto es:

$$y'(6, 1) = \frac{5 - 12}{2 - 30} = \frac{1}{4}$$

Entonces, la pendiente de la recta normal es $m = -4$ y su ecuación:

$$y - 1 = -4(x - 6)$$

(c) Los puntos de la curva que tienen tangente de pendiente 1 son la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ \dfrac{5y - 2x}{2y - 5x} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los puntos $P(1, -1)$ y $Q(-1, 1)$. Su distancia es:

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ejercicio 12. *Una partícula se mueve en línea recta. Su velocidad en* $\mathrm{m\,s^{-1}}$ *en el instante* t *segundos viene dada por* $v = 9t - 3t^2,\ 0 \leq t \leq 5$.

En el instante $t = 0$, *el desplazamiento* s *de la partícula desde el origen* O *es de* $3\ \mathrm{m}$.

(a) *Halle el desplazamiento de la partícula cuando* $t = 4$.

(b) *Dibuje aproximadamente el gráfico del desplazamiento/tiempo para esta partícula* $0 \leq t \leq 5$, *mostrando claramente dónde toca la curva a los ejes y las coordenadas de los puntos en los que el desplazamiento alcanza valores máximos y mínimos.*

(c) *Para* $t > 5$ *el desplazamiento de la partícula viene dado por:*

$$s = a + b\cos\frac{2\pi t}{5}$$

de modo tal que s *es continuo para todo* $t \geq 0$.

Sabiendo que $s = 16{,}5$ *para* $t = 7{,}5$, *halle los valores de* a *y* b.

(d) *Halle los valores t_1 y t_2 ($0 < t_1 < t_2 < 8$) en los que la partícula vuelve al punto de partida.*

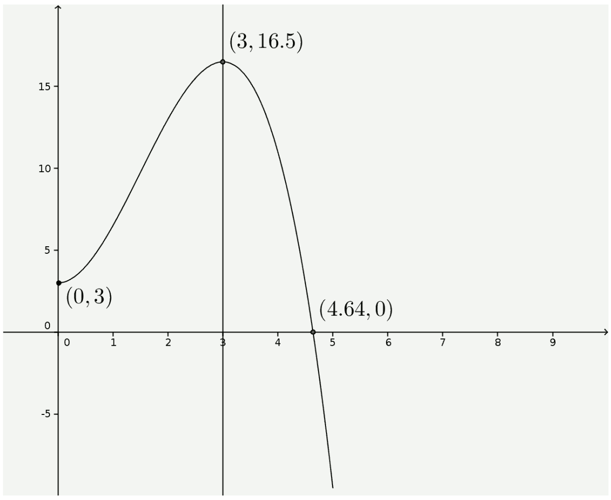
Solución:

(a) Integrando la velocidad y teniendo en cuenta que $s(0) = 3$ se obtiene:

$$s(t) = \frac{9t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} + 3 = \frac{9}{2}\,t^2 - t^3 + 3$$

Sustituyendo $s(4) = 11$.

(b) El gráfico de esta función entre 0 y 5 s es:



(c) Puesto que $s(5) = \frac{9}{2}\,25 - 125 + 3 = -9{,}5$, para que la función sea continua debe ocurrir:

$$a + b\cos\frac{2\pi 5}{5} = a + b\cos 2\pi = -9{,}5$$

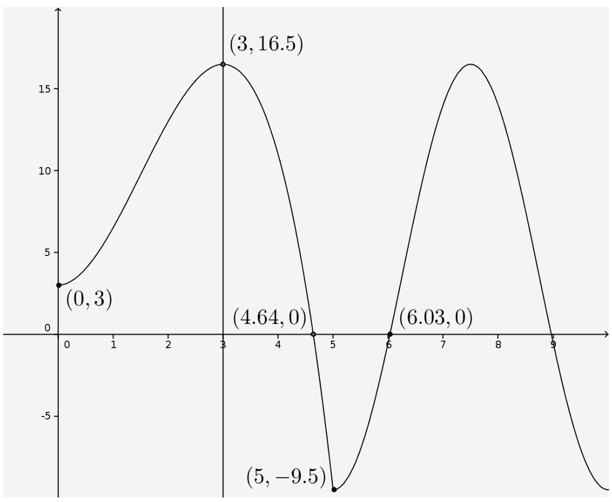
y además:

$$s(7{,}5) = a + b\cos\frac{2\pi 7{,}5}{5} = a + b\cos 3\pi = 16{,}5$$

Entonces a y b son la solución del sistema:

$$\begin{cases} a + b = -9{,}5 \\ a - b = 16{,}5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3{,}5,\ \ b = -13$$

(d) Representamos la función:



y de aquí $x_1 = 4{,}64$ y $x_2 = 6{,}03$.

Ejercicio 13. *Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son:*

$$L_1 : \vec{r_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \quad ; \qquad L_2 : \vec{r_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$$

(a) *Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas.*

(b) *Halle el ángulo agudo que forman las rectas L_1 y L_2.*

(c) (I) *Halle un vector perpendicular a ambas rectas.*

(II) *A partir de lo anterior, determine una ecuación de la recta L_3 que es perpendicular a L_1 y L_2 y que corta a ambas rectas.*

Solución:

(a) La posición relativa de las rectas depende del producto mixto $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$:

$$\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1\\2 & 2 & 6\end{vmatrix} \neq 0$$

y, por consiguiente, se cruzan (son alabeadas).

(b) Calculamos el ángulo:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2+1+12}{\sqrt{6}\sqrt{41}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \simeq 45{,}5^{\text{o}}$$

(c) (I) Un vector perpendicular a ambos es su producto vectorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & -1 & 2\\ \vec{\jmath} & 1 & 1\\ \vec{k} & 2 & 6\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}4\\10\\-3\end{pmatrix}$$

(II) El plano que contiene a L_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 4 & -1\\ y-2 & 10 & 1\\ z-2 & -3 & 2\end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 23x - 5y + 14z - 41 = 0$$

El plano que contiene a L_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 4 & 2\\ y-2 & 10 & 1\\ z-4 & -3 & 6\end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 21x - 10y + 8z - 33 = 0$$

La perpendicular común es la intersección de ambos planos:

$$L_3 : \begin{cases}23x - 5y + 14z - 41 = 0\\ 21x - 10y + 8z - 33 = 0\end{cases}$$

---

14. Prueba 3. Mayo 2015

Ejercicio 1. *Considere el conjunto* $S = \{p, q, r, s, t, u\}$, *compuesto por las permutaciones de los elementos del conjunto* $\{1, 2, 3\}$ *y definido mediante;*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $\circ$ *la composición de permutaciones, de modo tal que* $a \circ b$ *significa* b *seguida de* a. *Puede suponer que* $(S, \circ)$ *forma un grupo.*

(a) *Complete la siguiente tabla de Cayley:*

$\circ$	p	q	r	s	t	u
p						
q			t			s
r		u		t	s	q
s		t	u			r
t		s	q	r		
u		r	s	q		

(b) (I) *Indique el simétrico de cada elemento.*
(II) *Determine el orden de cada elemento.*

(c) *Escriba los subgrupos que contienen a:*
(I) r
(II) u

Solución:

(a)

$\circ$	p	q	r	s	t	u
p	p	q	r	s	t	u
q	q	p	t	u	r	s
r	r	u	p	t	s	q
s	s	t	u	p	q	r
t	t	s	q	r	u	p
u	u	r	s	q	p	t

(b) (I)

Elemento	Simétrico
p	p
q	q
r	r
s	s
t	u
u	t

(II)

Elemento	Orden
p	1
q	2
r	2
s	2
t	3
u	3

(c) (I) $\{p, r\}$

(II) $\{p, t, u\}$

Ejercicio 2. *La operación binaria $*$ se define para $x, y \in S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mediante:*

$$x * y = \left(x^3 y - xy\right) \quad \text{mód } 7$$

(a) *Halle el elemento e tal que $e * y = y$ para todo $y \in S$.*

(b) (I) *Halle la menor solución de $x * x = e$.*

(II) *Deduzca que $\{S, *\}$ no es un grupo.*

(c) *Determine si e es o no un elemento neutro.*

Solución:

(a) $e = 5$ puesto que:

$$5 * y = (125y - 5y) \quad \text{mód } 7 \equiv 120y \quad \text{mód } 7 \equiv y \quad \text{mód } 7$$

ya que $120 \equiv 1 \pmod 7$.

(b) (I) $0 * 0 = 0 \ \text{ mód } 7$; $\quad 1 * 1 = 0 \ \text{ mód } 7$; $\quad 2 * 2 = (16 - 4) \ \text{ mód } 7 = 5 = e$
El número menor que cumple la condición es 2.

(II) Si S fuese un grupo sería un grupo de orden 7. De acuerdo con el apartado anterior, 2 tendría orden 2, lo cual es imposible porque según el teorema de Lagrange el orden de un elemento debe ser un divisor del orden del grupo.

(c) No es un elemento neutro porque no cumple la condición:

$$e * x = x * e = x$$

por ejemplo:

$$3 * 5 = (27 \cdot 5 - 3 \cdot 5) \quad \text{mód } 7 = 120 \quad \text{mód } 7 = 1$$
$$5 * 3 = 3$$

Ejercicio 3. *La relación R se define sobre $\mathbb{Z}$ mediante xRy si y solo si $x^2y \equiv y \mod 6$.*

(a) *Muestre que el producto de tres enteros consecutivos es divisible entre 6.*

(b) *A partir de la anterior, demuestre que R es reflexiva.*

(c) *Halle el conjunto de todos los y para los cuales $5Ry$.*

(d) *Halle el conjunto de todos los y para los cuales $3Ry$.*

(e) *Utilizando las respuestas de los apartados* (c) y (d), *muestre que R no es simétrica.*

Solución:

(a) Para que un número sea múltiplo de 6 debe ser múltiplo de 2 y de 3. Entre tres números consecutivos hay siempre un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2. Por consiguiente, su producto es múltiplo de 6.

(b) Demostremos que la relación es reflexiva. Hay que demostrar que:

$$xRx \iff x^3 \equiv x \mod 6 \iff x^3 - x = \dot{6}$$

En efecto, para cualquier $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1) = \dot{6}$$

puesto que $x-1$, x y $x+1$ son tres enteros consecutivos y, de acuerdo con el apartado anterior, su producto es múltiplo de 6.

(c) Veamos que enteros cumplen $5Ry$:

$$5Ry \iff 5^2y \equiv y \mod 6 \iff 25y - y = 24y = \dot{6}$$

Esta igualdad se cumple siempre ya que 24 es múltiplo de 6. Por tanto $5Ry$ se cumple para todo y.

(d) De la misma forma:

$$3Ry \iff 3^2y \equiv y \mod 6 \iff 9y - y = 8y = \dot{6}$$

El entero $8y$ es múltiplo de 6 si y solo si y es múltiplo de 3. Los números relacionados con 3 son los múltiplos de 3.

(e) Está claro que la relación no es simétrica pues, de acuerdo con lo obtenido en los apartados anteriores, $5R3$ pero no se cumple $3R5$.

Ejercicio 4. *Sean X e Y conjuntos. las funciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ son tales que $g \circ f$ es la función identidad sobre X.*

(a) *Demuestre que:*

(I) *f es una función inyectiva.*

(II) *g es una función sobreyectiva.*

(b) *Sabiendo que $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y que $Y = \mathbb{R}$, elija un par apropiado de funciones f y g para mostrar que g no es necesariamente una función biyectiva.*

Solución:

(a) Que $g \circ f$ es la función identidad significa que $g \circ f(x) = x$.

(I) Hay que demostrar que $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. En efecto:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

(II) Hay que demostrar que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $g(y) = x$. Sea $x \in X$ y llamemos $y = f(x)$:

$$y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = x$$

(b) Hemos demostrado que g es una función sobreyectiva. Vamos a ver que, sin embargo, g no es necesariamente inyectiva y, en consecuencia, no tiene por qué ser biyectiva. Sean las funciones:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto +\sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Se cumple que para $x \in X$, $g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = x$. Sin embargo, g no es inyectiva porque, por ejemplo, $g(-1) = g(1)$.

Ejercicio 5. *Considere los conjuntos:*

$$G = \left\{ \frac{n}{6^i} \mid n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N} \right\}, \qquad H = \left\{ \frac{m}{3^j} \mid m \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N} \right\}$$

(a) *Muestre que* $(G, +)$ *forma un grupo, donde* $+$ *denota la suma sobre* $\mathbb{Q}$. *se puede suponer que se cumple la asociatividad.*

(b) *Suponiendo que* $(H, +)$ *forma un grupo, muestre que es un subgrupo propio de* $(G, +)$.

La aplicación $\phi : G \longrightarrow G$ *viene dada por* $\phi(g) = g + g$, *para* $g \in G$.

(c) *Demuestre que* ϕ *es un isomorfismo.*

Solución:

(a) El conjunto G es cerrado respecto a la suma. Sean

$$a = \frac{n}{6^i} \ ; \quad b = \frac{m}{6^j}$$

dos elementos de G. Entonces:

$$a + b = \frac{n}{6^i} + \frac{m}{6^j} = \frac{6^j n + 6^i m}{6^{i+j}} \in G$$

El elemento neutro es:

$$e = 0 = \frac{0}{6} \in G$$

y, finalmente, el simétrico de $a = \dfrac{n}{6^i}$ es $-a = \dfrac{-n}{6^i}$.

(b) Puesto que suponemos que H es un grupo hay que demostrar que H es un subconjunto de G y que existen elementos de G que no están en H:

Sea $x \in H$:

$$x \in H \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{m}{3^j} = \frac{m \cdot 2^j}{2^j 3^j} = \frac{2^j m}{6^j} \quad \Longrightarrow \quad x \in G$$

Por tanto H es un subconjunto de G. Además $\frac{1}{6} \in G$ pero $\frac{1}{6} \notin H$ por lo que H es distinto de G y es un subgrupo propio.

(c) Veamos en primer lugar que es un homomorfismo es decir $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.

Sean $a = \dfrac{m}{6^i},\ b = \dfrac{n}{6^j}$:

$$\begin{aligned}\phi\,(a+b) &= 2(a+b)\\ &= 2a+2b\\ &= \phi(a)+\phi(b)\end{aligned}$$

Comprobemos ahora que la aplicación es inyectiva:

$$\phi(g_1) = \phi(g_2) \quad\Longrightarrow\quad 2g_1 = 2g_2 \quad\Longrightarrow\quad g_1 = g_2 \quad\Longrightarrow\quad \phi \text{ inyectiva}$$

Para demostrar que es suprayectiva hay que ver que para todo $g \in G$ existe $g' \in G$ tal que $\phi(g') = g$. Sea $g = \dfrac{m}{6^i}$ y $g' = \dfrac{g}{2}$. Entonces

- Comprobemos que $g' \in G$:

$$g' = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{6^i} = \frac{m}{2\cdot 6^i} = \frac{6m}{2\cdot 6^{i+1}} = \frac{3m}{6^{i+1}} \in G$$

- Además:

$$\phi(g') = 2g' = g$$

luego la aplicación es suprayectiva. Como también es inyectiva resulta que es biyectiva.

Puesto que ϕ es un homomorfismo y la aplicación es biyectiva es un isomomorfismo.

15. Selectividad junio 2015

OPCIÓN A

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

(*a*) *Determinar el dominio de f y sus asíntotas.*

(*b*) *Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.*

(*c*) *Calcular $\int f(x)\,\mathrm{d}x$*

Solución:

(*a*) Para que exista el logaritmo debe ser $x > -1$. Además hay que excluir $x = 2$ que anula el denominador de la primera fracción. Por consiguiente, el dominio es:

$$D = (-1, \infty) - \{2\}$$

Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 2$. La asíntota horizontal es y=0.

(*b*) Ya que $f(0) = 0$, el punto de tangencia es $(0, 0)$. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2-4-2x\cdot x}{(x^2-4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(0) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \frac{3}{4}x$.

(*c*) Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x + \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}(\ln(x+1)) \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.

(*a*) *Discutir según los valores de m el sistema:*

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

(*b*) *Resolver el sistema anterior en el caso $m = 1$.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & m-1 \\ 1 & -2 & m \\ 5 & m & 1 \end{vmatrix} = -8 + 15m + m(m-1) + 10(m-1) - 4m^2 - 3 = -3m^2 + 24m - 21$$

El determinante se anula para:

$$-3m^2 + 24m - 21 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m^2 - 8m + 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 1;\ m = 7$$

Entonces:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq 7$, rango A = rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.
- Si $m = 7$, rango $A = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

  El sistema es incompatible.
- Si $m = 1$, rango $A = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

  y el sistema es compatible indeterminado.

(b) El sistema es compatible indeterminado, Solo hay dos ecuaciones independientes. Tomemos las dos primeras:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y = 1 - \lambda \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene la solución $\left(\frac{3-3\lambda}{11}, \frac{-4+4\lambda}{11}, \lambda\right)$.

Ejercicio 3.

(a) *Dados los vectores* $\vec{u} = (2,3,4)$, $\vec{v} = (-1,-1,-1)$ *y* $\vec{w} = (-1,\lambda,-5)$, *encontrar los valores de* λ *que hacen que el paralelepípedo* P *generado por* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *tenga volumen* 6.

(b) *Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano* $z = 0$, *con dirección perpendicular a* $\vec{u} = (2,-1,4)$ *y que pasa por el punto* $(1,1,0)$.

Solución:

(a) El volumen del paralelepípedo está dado por el módulo del producto mixto de los tres vectores. Entonces, si el volumen es 6:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = \pm 6 \quad \Longrightarrow \quad 10 - 4\lambda + 3 - 4 + 2\lambda - 15 = -6 - 2\lambda = \pm 6$$

y de aquí las dos soluciones $\lambda = 0$, $\lambda = -6$.

(b) El vector normal a $z = 0$ es $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es perpendicular a la recta que nos piden. Conocemos por tanto, dos direcciones perpendiculares a la recta. Su vector director es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

así que la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dado el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.*

Solución:

La superficie esférica tiene como centro el punto $C(1, 1, 2)$ y radio $r = 3$. El problema es equivalente a calcular los planos paralelos al plano dado, es decir, planos de la forma $x - 2y + 2z + D = 0$ que se encuentra a distancia 3 del punto $C(1, 1, 2)$. Así que:

$$\left| \frac{1 - 2 + 4 + D}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3 + D}{3} = \pm 3$$

y resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones $D_1 = 6$ y $D_2 = -12$. Los planos que buscamos son:

$$x - 2y + 2z + 6 = 0\ ; \qquad x - 2y + 2z - 12 = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. *Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O, y la recta*

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.*

(b) *Determinar la distancia de P a r.*

(c) *¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados?. En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.*

Solución:

(a) Sea $M(-2, 3, 3)$ el punto medio del segmento OP. Si Q se proyecta perpendicularmente sobre M, los dos vectores $\overrightarrow{MQ}$ y $\overrightarrow{OP}$ son perpendiculares. Sea $Q(-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda)$, entonces:

$$\overrightarrow{MQ} = (-2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda, -3 - 2\lambda)\,, \qquad \overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6)$$

Si son perpendiculares, su producto escalar es cero:

$$8-16\lambda+30+18\lambda-18-12\lambda=0 \implies 20-10\lambda=0 \implies \lambda=2$$

y el punto es $Q(4,14,-4)$.

Otra manera de resolver este problema es calcular el plano perpendicular a OP por el punto M:

$$\begin{aligned}&-4(x+2)+6(y-3)+6(z-3)=0\\&-4x+6y+6z-44=0\\&-2x+3y+3z-22=0\end{aligned}$$

y ahora hallar el punto de intersección de este plano con la recta r:

$$\begin{cases}-2x+3y+3z-22=0\\x=-4+4\lambda\\y=8+3\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}$$

Resolviendo por sustitución:

$$\begin{aligned}&-2(-4+4\lambda)+3(8+3\lambda)+3(-2\lambda)-22=0\\&-5\lambda+10=0\\&\lambda=2\end{aligned}$$

y obtenemos la misma solución que por el primer procedimiento.

(b) Sea $P'(-4,8,0)$ un punto de r y $\vec{u}$ su vector director. La distancia está dada por:

$$d=\frac{|\overrightarrow{PP'}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{PP'}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\0&2&-6\\4&3&-2\end{vmatrix}=(14,-24,-8)=2(7,-12,-4)$$

La distancia es:

$$d=\frac{2\sqrt{49+144+16}}{\sqrt{16+9+4}}=\frac{2\sqrt{209}}{\sqrt{29}}$$

(c) El problema es equivalente a determinar la posición relativa de las rectas OP y r. Para ello calculamos el producto mixto de los vectores directores de las rectas y el vector que une un punto de cada recta:

$$\begin{vmatrix}-4&8&0\\-2&3&3\\4&3&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&0&0\\-2&-1&3\\4&11&-2\end{vmatrix}\neq 0$$

Las rectas se cruzan. No existe el punto R.

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x<0\\ xe^x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

se pide:

(*a*) *Estudiar la continuidad de f.*

(*b*) *Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.*

(*c*) *Calcular* $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución:

(*a*) Para $x \neq 0$ la función es continua porque está definida a trozos mediante funciones continuas. En $x = 0$ los límites laterales valen:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (xe^x + 1) = 1$$

los dos límites laterales son iguales y, además, estos límites coinciden con el valor de la función. Por consiguiente, $f(x)$ también es continua en $x = 0$

(*b*) Para $x \neq 0$ la función es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ las derivadas por la izquierda y por la derecha son:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\operatorname{sen} x}{2x} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} (e^x + xe^x) = 1$$

La función no es derivable en $x = 0$.

(*c*) Calculamos por partes la integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int (xe^x + 1)\ \mathrm{d}x &= \int xe^x\ \mathrm{d}x + \int\ \mathrm{d}x \\ &= \int x\ \mathrm{d}(e^x) + x \\ &= xe^x - \int e^x\ \mathrm{d}x + x \\ &= xe^x - e^x + x + C \end{aligned}$$

Calculamos ahora la integral definida:

$$\int_1^3 (xe^x + 1)\ \mathrm{d}x = \Big[xe^x - e^x + x\Big]_1^3 = \big(3e^3 - e^3 + 3\big) - \big(e^1 - e^1 + 1\big) = 2e^3 + 2$$

Ejercicio 3. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) *Calcular A^{15} y A^{20}.*

(b) *Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrad de orden 3.*

Solución:

(a) Puesto que $A^2 = I$ resulta que $A^{15} = A$ y $A^{20} = I$.

(b) Despejamos X:

$$\begin{aligned}
&6X = B - 3AX\\
&6X + 3AX = B\\
&6IX + 3AX = 3I\\
&2IX + AX = I\\
&(2I + A)X = I\\
&X = (2I + A)^{-1}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad |2I + A| = 9$$

Calculamos la inversa:

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} ; (2I + A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y de aquí, simplificando:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} \quad ; \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) *Hallar el rango de A en función de t.*

(b) *Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 12 - 9t + 2 = t^2 - 9t + 14$$

El determinante se anula para $t = 2$ y $t = 7$. Entonces tenemos que:

– si $t \neq 2$ y $t \neq 7$, rango $A = 3$.

– si $t = 2$ o $t = 7$, rango $A = 2$

(*b*) Calculamos $A - tI$:

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es:

$$|A - tI| = -2 \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2(-1 + t - 6) = -2t + 14$$

El determinante se anula para $t = 7$.

16. Selectividad Junio 2015. Coincidencias

Opción A

Ejercicio 1.

(*a*) *Determinar los valores de a, b y c para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ ax - b & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

sea continua en el intervalo $[0, 2]$ *y derivable en* $(0, 2)$.

(*b*) *Aplicar, si es posible, el teorema del valor medio a la función* $g(x) = x^2 + x$ *en el intervalo* $[1, 2]$ *y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que* $g'(x)$ *tome el valor predicho por el teorema del valor medio.*

Solución:

(*a*) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe ocurrir que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = -1$. Por tanto:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ax - b) = -b$$

Por tanto debe ocurrir que $b = 1$.

Para que sea continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax - b) = \lim_{x \to 1^-} (ax - 1) = a - 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + bx + c) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x + c) = 2 + c$$

Por consiguiente tenemos una primera condición $a - 1 = 2 + c$ o $a - c = 3$.

En el intervalo $(0, 2)$, para $x \neq 1$ la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a & x < 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Si la función es derivable en $x = 1$ se cumple que $f'(1^-) = f'(1^+)$:

$$f'(1^-) = a$$
$$f'(1^+) = 3$$

y entonces debe ser $a = 3$ y $c = 0$.

(*b*) Con los valores calculados en el apartado anterior, sea ahora la función

$$(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 3x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Puesto que la función $g(x)$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$ puede aplicarse el teorema en este intervalo. Además, este teorema nos dice que debe existir un punto $\xi \in (1, 2)$ tal que:

$$g'(\xi) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 2}{1} = 4$$

Así que:

$$g'(\xi) = 2\xi + 1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \xi = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 2. *Dada la recta:*

$$r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

(a) *Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π.*

(b) *Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta r al plano π.*

(c) *Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π.*

Solución:

(a) El vector director de la recta $\vec{u}$ y el vector $\vec{n}$ normal al plano:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 0 \\ \vec{\jmath} & -1 & a \\ \vec{k} & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a^2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

deben ser perpendiculares para que el plano y la recta sean paralelos. En consecuencia, su producto escalar es cero:

$$1 - a^2 + 1 + a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 2,\ a = -1$$

(b) Para $a = 2$, la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$$

Un punto de esta recta es $P(8, 0, -4)$. Su distancia al plano es:

$$d = \frac{8 + 0 - 4 - 2}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(c) Para $a = 1$ los vectores son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El seno del ángulo que forman es:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Ejercicio 3. *Dadas las matrices:*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) *Calcular la matriz inversa de L.*

(b) *Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.*

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

La matriz adjunta y la inversa son:

$$\operatorname{adj} L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(*b*) Despejamos:

$$A = L^{-1}(L^t)^{-1} = L^{-1}(L^{-1})^t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.*

(*b*) *Sin calcular A^{-1}, hallar m para que* $\det(A) = \det(4A^{-1})$

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -2m^2$$

que se anula para $m = 0$. Pueden darse los siguientes casos:

– $m = 0$: rango $A = 1$

– $m \neq 0$: rango $A = 3$

La matriz admite inversa para $m \neq 0$.

(*b*) Tenemos que:

$$|A| = -2m^2 \; ; \qquad |A^{-1}| = \frac{-1}{2m^2} \; ; \qquad |A| = 4^3|a^{-1}|$$

Por tanto:

$$-2m^2 = \frac{-64}{2m^2} \quad \Longrightarrow \quad 4m^4 = 64 \quad \Longrightarrow \quad m^4 = 16$$

Las soluciones son $m = -2$ y $m = 2$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

(a) *Discutir el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + my = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en que ésta sea única.

(b) *Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema:*

$$\begin{cases} x - y + kz = 2 \\ kx - ky + 4z = -4 \end{cases}$$

Solución:

(a) El rango de la matriz de coeficientes es 2. Para que el sistema sea compatible determinado, el rango de la matriz ampliada deber ser también igual a 2 y, por tanto, su determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & m & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8m - 5 + 7 - 5m + 14 - 4 = 3m + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = -4$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:

– $m \neq -4$: rango $A = 2$ y rango $A^* = 3$, sistema incompatible.

– $m \neq -4$: rango $A = 2$ y rango $A^* = 2$, sistema compatible determinado.

Para $m = -4$ se toman dos ecuaciones independientes y se resuelve el sistema. La solución es $x = 3$, $y = -1$.

(b) Para que el sistema sea incompatible, el rango de la matriz debe ser igual a 1:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & -k & 4 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 4 - k^2 \end{pmatrix} = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = -2 \ ; \qquad k = 2$$

Para $k = -2$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 1$$

y el sistema es compatible indeterminado. Para $k = 2$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

y el sistema es incompatible.

El sistema es incompatible para $k = 2$.

Ejercicio 2. *Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:*

(a) *Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.*

(b) *Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.*

(*c*) *Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.*

Solución:

(*a*) El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y el punto de corte con los ejes es $(0,0)$. Puesto que:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

hay una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

(*b*) Derivamos la función:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}x^2 = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2-x)$$

La derivada se anula en $x = 0$ y $x = 2$. Su signo está dado en el siguiente esquema:

	0		0	
-	|	+	|	-
	0		2	

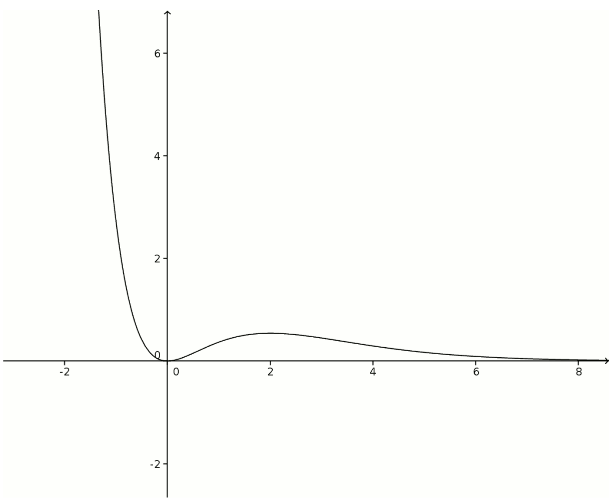
La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en $(0, 2)$. Hay un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 2$.

(*c*) Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

La segunda derivada se anula en $x = 2 - \sqrt{2}$ y en $x = 2 + \sqrt{2}$. En esos puntos la segunda derivada cambia de signo y son, por tanto, puntos de inflexión.

La gráfica de la función tiene la forma:



Ejercicio 3. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \frac{x+1}{2} = y - 5 = -(z+2)$$

se pide:

(a) *Estudiar la posición relativa de r y s.*

(b) *Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,6,-3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.*

Solución:

(a) Un punto y un vector director de cada una de las rectas son:

$$r: \quad P(3,2,3), \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad s: \quad Q(-1,5,-2), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente las dos rectas no son paralelas. Para averiguar si se cortan o se cruzan, calculamos el producto mixto:

$$[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

Las dos rectas se cortan.

(b) El plano determinado por r y s es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 2 \\ y-2 & -2 & 1 \\ z-3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1(x-3) + 7(y-2) + 5(z-3) = 0; \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La recta que buscamos está contenida en este plano y, por consiguiente, su vector director es perpendicular a $\vec{n}$. Por otra parte, también debe ser perpendicular al vector director $\vec{u}$ de r. Su dirección es:

$$\vec{u} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & -1 \\ \vec{\jmath} & -2 & 7 \\ \vec{k} & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta es:

$$\frac{x-1}{-31} = \frac{y-6}{-8} = \frac{z+3}{5}$$

Ejercicio 4. *Dados el plano $\pi \equiv x+y-z+1=0$ y la recta $r \equiv (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(2,1,0)$, se pide:*

(a) *Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ y es paralelo a π.*

(b) *Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r.*

(c) *Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π.*

Solución:

(a) El plano paralelo es

$$1(x-1) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x+y-z-2=0$$

(b) Sea $P(0,0,1)$ un punto de la recta y $\vec{u}$ su vector director. La distancia está dada por:

$$d = \frac{|\overrightarrow{OP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 0 & 2 \\ \vec{\jmath} & 0 & 1 \\ \vec{k} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la distancia es:

$$d = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

(c) La distancia del origen a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es:

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

En este caso:

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}}$$