Matemáticas 2ºE.
Exámenes

Curso 2020-2021

1. Límites y derivadas (1)

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

$(a)\ y = \dfrac{1}{x^2}$

$(b)\ y = 6x^5$

$(c)\ y = \sqrt[3]{x^2}$

$(d)\ y = 3e^x$

$(e)\ y = e^{2x} + 3e^x - 2$

$(f)\ y = \operatorname{sen}^2 x$

$(g)\ y = \operatorname{cotg} x$

$(h)\ y = 3e^{2\cos^2 x}$

$(i)\ y = \dfrac{\operatorname{artg} x}{x^2}$

$(j)\ y = (3x^2 - 1)\ln(1 - x)$

Solución:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & y = \dfrac{1}{x^2} & y' = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3} \\
(2) & y = 6x^5 & y' = 30x^4 \\
(3) & y = \sqrt[3]{x^2} & y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \\
(4) & y = 3e^x & y' = 3e^x \\
(5) & y = e^{2x} + 3e^x - 2 & y' = e^{2x} \cdot 2 + 3e^x \\
(6) & y = \operatorname{sen}^2 x & y' = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \\
(7) & y = \operatorname{cotg} x & y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\
(8) & y = 3e^{2\cos^2 x} & y' = 3e^{2\cos^2 x} \cdot 2 \cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x) \\
(9) & y = \dfrac{\operatorname{artg} x}{x^2} & y' = \dfrac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 - 2x\operatorname{artg} x}{x^4} \\
(10) & y = (3x^2 - 1)\ln(1 - x) & y' = 6x\ln(1 - x) - \frac{1}{1-x}(3x^2 - 1)
\end{array}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2 - \sqrt{1+x}}{x - 3}; \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 + x - 6}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{2 - \sqrt{1+x}}{x - 3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(2 - \sqrt{1+x})(2 + \sqrt{1+x})}{(x-3)(2 + \sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{4 - (1+x)}{(x-3)(2 + \sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{3 - x}{(x-3)(2 + \sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{2 + \sqrt{1+x}} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 4$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+2}{x-3}-1\right)2x}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(x+2-x+3)2x}{x-3}}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{10x}{x}}\\
&= e^{10}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La curva $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ tiene en $x=-3$ una tangente cuya ecuación es $5x+by=a$. Calcular a y b.

Solución:

En el punto de tangencia la curva y la tangente tienen la misma ordenada y la misma derivada.

El punto de tangencia es:

$$y_0=\frac{-3}{\sqrt{1+3}}=-\frac{3}{2}$$

El punto de tangencia es $P\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$.

La derivada de la función es:

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{1-x}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\cdot x}{1-x}=\frac{2(1-x)+x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}=\frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

La pendiente de la recta es la derivada en $x=-3$:

$$m=\frac{5}{2\cdot4\cdot2}=\frac{5}{16}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y+\frac{3}{2}=\frac{5}{16}(x+3)\ ;\qquad 16y+24=5x+15\ ;\qquad 5x-16y=9$$

Entonces $b=-16$ y $a=9$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

(a) Calcular la ecuación de la normal a $y=e^{2x}$ en el punto $x=a$.

(b) A partir del resultado anterior calcular la ecuación de la normal a $y=e^{2x}$ que pasa por el origen.

Solución:

(a) La pendiente de la normal es:

$$y'=2e^{2x}$$
$$m=\frac{-1}{2e^{2a}}$$

El punto de tangencia es $\left(a,e^{2a}\right)$. Entonces, la ecuación de la normal es:

$$y-e^{2a}=-\frac{1}{2e^{2a}}(x-a)$$

(b) Si esta recta ha de pasar por el origen de coordenadas:

$$-e^{2a}=-\frac{1}{2e^{2a}}(-a)\quad\Longrightarrow\quad -2e^{4a}=a\ ;\qquad a+2e^{-4a}=0$$

El valor de a hay que calcularlo con ayuda de la calculadora y resulta $a\simeq-0{,}401$. Una vez obtenido, la pendiente de la normal es $m=-\frac{1}{2e^{2a}}$ y la normal que pasa por el origen es $y=mx$. Operando con la calculadora resulta $m\simeq-1{,}12$ y la ecuación de la normal $y=-1{,}12x$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Obtener y clasificar los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -2$ y $x = 3$ que anulan el denominador. Para ver el tipo de discontinuidad hacemos los límites:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6} = \frac{15}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{2x+1}{x+2} = \frac{7}{5}$$

En $x = -2$ hay un salto infinito y en $x = 3$ hay una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Aplicar el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación $x + \ln x = 2$ tiene solución.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = x + \ln x - 2$$

se anula para algún valor de x.

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua en } [1,2] \\ F(1) = 1 + \ln 1 - 2 < 0 \\ F(2) = 2 + \ln 2 - 2 > 0 \end{cases} \qquad \text{Por el teorema de Bolzano } \exists c \in (1,2) \mid F(c) = 0$$

Entonces c es una solución de la ecuación.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x + 2}$.

Solución:

La recta $x = -2$ es asíntota vertical porque:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 3}{x + 2} = \infty$$

No hay asíntota horizontal porque:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 3}{x + 2} = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + 5x + 3}{x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x} = 3$$

La asíntota oblicua es $y = x + 3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$.

Solución:

Calculamos la derivada y dibujamos el diagrama de signos:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$$

El numerador se anula en $x = -6$ y $x = 0$. El denominador se anula en $x = -3$:

$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
x		-6		-3		0	

La función es creciente en $(-\infty, -6) \cup (0, \infty)$.
Es decreciente en $(-6, -3) \cup (-3, 0)$.
Hay un máximo relativo en $x = -6$ y un mínimo en $x = 0$.

♠♠♠♠

2. Límites y derivadas (2)

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones

(a) $y = (3x+1)^2$

(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(c) $y = \cos x \ \operatorname{artg} x$

(d) $y = 3\ln x$

(e) $y = 3e^{2x+1}$

(f) $y = 3^x$

(g) $y = \operatorname{arsen} x + \arccos x$

(h) $y = 4\cos^3 2x$

(i) $y = \left(\dfrac{3-x^2}{3+x^2}\right)^3$

(j) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

Solución:

(a) $y = (3x+1)^2 \qquad y' = 2(3x+1)\cdot 3$

(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad y' = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

(c) $y = \cos x \ \operatorname{artg} x \qquad y' = -\operatorname{sen} x \operatorname{artg} x + \frac{1}{1+x^2}\cos x$

(d) $y = 3\ln x \qquad y' = \frac{3}{x}$

(e) $y = 3e^{2x+1} \qquad y' = 3e^{2x+1}\cdot 2$

(f) $y = 3^x \qquad y' = 3^x \ln 3$

(g) $y = \operatorname{arsen} x + \arccos x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

(h) $y = 4\cos^3 2x \qquad y' = 4\cdot 3\cos^2 2x\cdot(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2$

(i) $y = \left(\dfrac{3-x^2}{3+x^2}\right)^3 \qquad y' = 3\left(\frac{3-x^2}{3+x^2}\right)^2 \cdot \frac{-2x(3+x^2)-2x(3-x^2)}{(3+x^2)^2}$

(j) $y = e^{\frac{1}{x^2}} \qquad y' = e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^3}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x - x^3); \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x^2+1}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} x}{1-e^{2x}}; \qquad \lim_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{x-1}}$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x - x^3) = \infty \qquad \text{porque } e^x \gg x^3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x^2+1} = 0 \qquad \text{porque } x^2 \gg x+\ln x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} x}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{-2x} = -1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{x-1}} &= \lim_{x\to 1} e^{(3-2x-1)\frac{1}{x-1}}\\ &= \lim_{x\to 1} e^{\frac{2-2x}{x-1}}\\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el punto en el que la tangente a $y = 2x^3 + 4x - 1$ en $(1, 5)$ corta de nuevo a la curva.

Solución:

La pendiente de la tangente es:

$$y' = 6x^2 + 4$$
$$m = 6 \cdot 1 + 4 = 10$$

La recta tangente es:

$$y - 5 = 10(x-1)\ ; \qquad y = 10x - 5$$

Las intersecciones de la curva y la tangente son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^3 + 4x - 1 \\ y = 10x - 5 \end{cases} ; \qquad 2x^3 + 4x - 1 = 10x - 5\ ; \qquad 2x^3 - 6x + 4 = 0$$

Sabemos que una solución es $x = 1$ (el punto de tangencia). Factorizamos:

$$(x-1)(2x^2+2x-4) = 0\ ; \qquad 2(x-1)(x^2+x-2) = 0\ ; \qquad 2(x-1)^2(x+2) = 0$$

La tangente corta de nuevo a la curva en $(-2, -25)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los puntos de la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 3$ en los que la pendiente de la recta tangente es igual a 2.

Solución:

Si la pendiente de la tangente es 2, la derivada debe ser igual a 2:

$$6x^2 + 6x - 10 = 2\ ; \qquad 6x^2 + 6x - 12 = 0\ ; \qquad x^2 + x - 2 = 0$$

Así obtenemos $x = -2$ y $x = 1$. Los puntos son $P_1(-2, 27)$ y $P_2(1, -3)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

calcular a para que f sea continua en $x = 2$.

Solución:

Para que sea continua, los límites laterales deben ser iguales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4a + 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = e^0 = 1$$

Por consiguiente debe ser $4a + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Demostrar que la ecuación $2x = \cos x$ tiene al menos una solución.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $F(x) = 2x - \cos x$ se anula para algún valor de x.

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua en } \left[0.\frac{\pi}{2}\right] \\ F(0) = -1 < 0 \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 0 \end{cases}$$

Entonces, por el teorema de Bolzano existe $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $F(c) = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular las asíntotas de la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución

Las posibles asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 2 + 1}{0} = \infty$$

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

La recta $x = 1$ no es asíntota vertical. En el punto $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

La asíntota oblicua es $y = x$ ya que:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = x - \frac{1}{x + 1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales.

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x + 2)(x - 3)$$

El diagrama de signos es:

$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
x		-2		3	

la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ y decreciente en $(-2, 3)$. Tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 3$.

♠♠♠♠

3. Límites. Derivadas (3)

Ejercicio 1. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente y, por consiguiente, la derivada de la función en el punto de tangencia debe ser igual a -2. Entonces:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

Los puntos de tangencia son $(0, 0)$ y $(2, 4)$. Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = -2x; \qquad y - 4 = -2(x - 2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Determinar los valores de a, b y c para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

Solución:

Calculamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

Las condiciones que nos dan las podemos interpretar como:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f''(-1) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$$

de modo que tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = c \\ -6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 3 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = 3$, $b = -6$ y $c = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & x > 3 \end{cases}$$

se pide:

(a) Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua.

(b) Estudiar la derivabilidad para ese valor de A.

Solución:

(a) La función es continua para $x \neq 3$. Para $x = 3$ deben coincidir los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3x + A) = 9 + A$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-4 + 10x - x^2) = 17$$

Para que sea continua debe ser $A = 8$. Para los demás valores de A hay un salto finito.

(b) Sea ahora

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & x > 3 \end{cases}$$

Para $x \neq 3$ la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 3 \\ 10 - 2x & x > 3 \end{cases}$$

Entonces:

$$f'(3^-) = 3$$

$$f'(3^+) = 4$$

La función no es derivable en $x = 3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto del intervalo $(0, \pi)$.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = \cos x - \sqrt{x}$$

se anula una sola vez en el intervalo $(0, \pi)$.

La función $F(x)$ es continua en $[0, \pi]$. Además:

$$F(0) = 1 - 0 > 0\ ; \quad F(\pi) = \cos\pi - \sqrt{\pi} = -1 - \sqrt{\pi} < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $\xi \in (0, \pi)$ tal que $F(\xi) = 0$.

La función $F(x)$ es derivable en $(0, \pi)$ y su derivada vale:

$$F'(x) = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0 \text{ en } (0, \pi)$$

Entonces, no puede haber dos ceros de la función porque, de acuerdo con el teorema de Rolle, entre los dos ceros debería haber un cero de la derivada y ya hemos visto que $F'(x)$ no se anula en $(0, \pi)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ls regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(b) Es una indeterminación 1^∞. Aplicamos la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{(\cos x + x - 1)2}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{(-\operatorname{sen} x + 1)2}{\cos x}} = e^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x\,(\ln x)^2$

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \ln x(\ln x + 2)$$

La derivada se anula en $x = 1$ y $x = e^{-2}$. El signo de la derivada es:

		0		e^{-2}		1	
f'	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

La función es creciente en $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(e^{-2}, 1)$. Hay un máximo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{x^2}{e^x}$.

Solución:

Calculamos la segunda derivada:

$$y' = \frac{2xe^x - e^x x^2}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$y'' = \frac{(2-2x)e^x - e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}$$

La segunda derivada se anula en los puntos $2 - \sqrt{2}$ y $2 + \sqrt{2}$. El signo de la derivada es:

		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$ y convexa en $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. Los puntos $x = 2-\sqrt{2}$ y $x = 2+\sqrt{2}$ son puntos de inflexión de la función.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Estudiar crecimiento y asíntotas para representar gráficamente la función:

$$y = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

Solución:

La curva tiene dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 1$, y una asíntota horizontal $y = 0$.

Calculamos la derivada de la función:

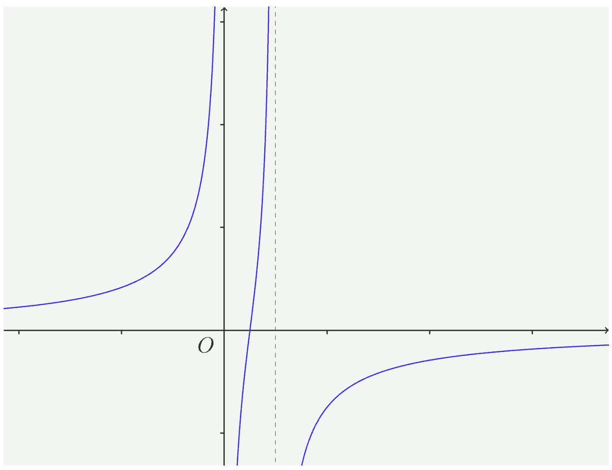
$$y' = \frac{2(x-x^2) - (1-2x)(2x-1)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2}$$

El numerador no se anula nunca, es fácil ver que es siempre positivo. El signo de la derivada es:

$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$
	0		1	

La función es creciente en todo su dominio.

Con estos datos la gráfica es:



♠♠♠♠

4. Límites. Derivadas (4)

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones:

$(a)\ y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ $\qquad (b)\ y = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$ $\qquad (c)\ y = (2x^3 - 3x^2 + 2)^5$

$(d)\ y = (1+3x)^x$

Solución:

(a) Escribimos la función como:

$$y = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\operatorname{sen} x) - \ln(1-\operatorname{sen} x)\right)$$

La derivada es:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$$

(b) $y' = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(c) $y' = 5(2x^3 - 3x^2 + 2)^4(6x^2 - 6x)$

(d) Escribimos la función como

$$y = e^{x\ln(1+3x)}$$

La derivada es:

$$y' = e^{x\ln(1+3x)}\left(\ln(1+3x) + \frac{3}{1+3x}\cdot x\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\cdot x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\ln x = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

La primera derivada se anula en $x = e^{-2}$ y en $x = 1$. Su signo es:

$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
	0		e^{-2}		1	

Hay un máximo relativo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

La segunda derivada se anula en $x = e^{-1}$. Su signo es

$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	0		e^{-1}	

Hay un punto de inflexión en $x = e^{-1}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

obtener:

(a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

Solución:

(a) La derivada tiene dos ceros, $x = 1$ (triple) y $x = 5$. El signo de la derivada es:

$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
x		1		5	

La función es creciente para $x \in (-\infty, 1) \cup (5\infty)$ y es decreciente para $x \in (1, 5)$.

(b) Hay un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 5$.
Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3x - 15 + x - 1) = (x-1)^2(4x-16)$$

La segunda derivada tiene dos ceros $x = 1$ (doble) y $x = 4$. El signo está dado por el siguiente esquema:

$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
x		1		4	

Hay un solo punto de inflexión en $x = 4$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

(a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

(a) La recta $x = 3$ es asíntota vertical puesto que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \infty$$

No hay asíntota horizontal. Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-3)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

La asíntota oblicua es $y = x + 6$.

(b) La ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = \frac{2^3}{(2-3)^2} = 8$$

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-3)^2 - 2(x-3)x^3}{(x-3)^4} = \frac{3x^2(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = \frac{3 \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 2^3}{(-1)^3} = 28$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - 8 = 28(x - 2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demostrar que la ecuación $2 - x = e^x$ solamente tiene una solución.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = e^x + x - 2$$

se anula para un solo valor de x.

- $F(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$
- $F(0) = 1 + 0 - 2 < 0$
- $F(1) = e + 1 - 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$. En consecuencia, la ecuación dada tiene al menos una solución.

La función $F(x)$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es

$$F'(x) = e^x + 1$$

La derivada nunca se hace cero. Entonces, como consecuencia del teorema de Rolle, la función no puede tener dos ceros pues en ese caso, debería haber entre ellos un cero de la derivada que hemos visto que no existe.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los límites:

$(a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)e^{-x}$ $\quad (b)\ \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x)e^{-x}$ $\quad (c)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos(3x)}{\ln\cos(2x)}$ $\quad (d)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - x)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (1 - x)e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x}{e^x} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\cos(3x)}{\ln\cos(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{-3\operatorname{sen}3x\cos 2x}{-2\operatorname{sen}2x\cos 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot 3x}{2 \cdot 2x} = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{4 + x - 4 + x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

En el primer límite se ha aplicado que e^x es un infinito mayor que x. En el segundo se ha tenido en cuenta que $e^{-\infty} = 0$. En el tercero se ha aplicado la regla de L'Hopital y después se ha aplicado la aproximación $\operatorname{sen} u \sim u$ válida si u tiende a cero. El último límite se ha simplificado después de multiplicar numerador y denominador por la suma de las raíces.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (opcional) Demostrar a partir del teorema del valor medio que si una función tiene derivada cero en un intervalo abierto (a, b), es constante en ese intervalo.

Solución:

Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ y $x_2 < x_1$. Entonces, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ en cuyo interior la derivada es cero y en cuyos extremos la función es continua (ya que es derivable):

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_1)$$

puesto que $f'(c)$ (derivada en un punto intermedio entre x_1 y x_2) es igual a cero. Entonces, la función toma el mismo valor en todos los puntos y es, por consiguiente, constante.

♠♠♠♠