Matemáticas 2º Bachillerato.
Exámenes

Jesús García de Jalón de la Fuente

Curso 2019-2020

1. Funciones. Límites (1)

Ejercicio 1. Calcular el dominio de definición de la función:

$$f(x) = \ln \frac{x^2(x-3)}{x^2-x-2}$$

Solución:

El dominio es la solución de la inecuación:

$$\frac{x^2(x-3)}{x^2-x-2} > 0$$

Las raíces del numerador son $x = 0$ (doble) y $x = 3$. Las raíces del denominador son $x = -1$ y $x = 2$.

El signo de la fracción está dado en el siguiente esquema:

	-1		0		2		3	
$-$	$\nexists$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

El dominio de la función es $x \in (-1, 0) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular la función inversa de:

$$g(x) = 4e^{2x-3}$$

Solución:

En

$$y = 4e^{2x-3}$$

intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 4e^{2y-3}\ ; \qquad \frac{x}{4} = e^{2y-3}\ ; \qquad 2y-3 = \ln\frac{x}{4}\ ; \qquad y = g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(3 + \ln\frac{x}{4}\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$$

Solución:

El denominador se anula en $x = 1$ y $x = 3$. Entonces:

- Para $x \notin \{1, 3\}$ la función es continua:
- Para $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \infty$$

hay un salto infinito.

- Para $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

hay una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las asíntotas de las funciones:

(a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$ (b) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$

Solución:

(a) La función tiene una asíntota vertical $x = -3$ porque

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal porque:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \infty$$

Veamos si tiene asíntota oblicua

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1 - x(x+3)}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

La recta $y = x - 3$ es asíntota oblicua.

(b) La función no tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula para ningún valor de x. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal porque:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 4} = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

Solución:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 8e^{2x-4} = 8$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} x(x+2) = 8$$

Los dos límites laterales coinciden. Tenemos entonces que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

y la función es continua en $x = 2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x+2}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x}$

Solución:

(a) El infinito del denominador es de orden superior al del numerador. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x+2} = 0$$

(b) Aplicando las aproximaciones $\operatorname{tg} x \sim x$ y $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, válidas cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 3 - \ln x$ y $g(x) = x^2 + 1$ se cortan en un punto.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = g(x) - f(x) = x^2 + 1 - 3 + \ln x = x^2 + \ln x - 2$$

se anula para algún valor de x.

Tenemos que:

$F(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[1, e]$

$F(1) = 1 + \ln 1 - 2 < 0$

$F(e) = e^2 + \ln e - 2 > 0$

De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, e)$, tal que $F(c) = 0$. Las dos curvas se cortan en $x = c$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x-3}{x+1}-1\right)\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-3-x-1}{x+1}\,\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-4x}{2x}} = e^{-2}$$

♠♠♠♠

2. Funciones. Límites (2)

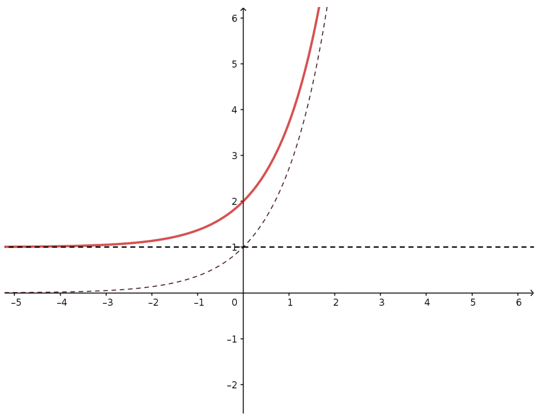
Ejercicio 1. Representar gráficamente la curva:

$$y = 1 + e^x$$

e indicar los puntos de intersección con los ejes y las asíntotas.

Solución:

El punto de intersección con el eje OY es $(0,2)$. La asíntota es $y = 1$.



♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \ln(2x - 1)$$

Solución:

En $y = \ln(2x - 1)$ intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \ln(2y - 1) \ ; \qquad 2y - 1 = e^x \ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + 1\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{2x - x^2}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -1$ y $x = 2$ que anulan el denominador. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos los límites:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x - x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{-3}{0} = \infty$$

En $x = -1$ hay un salto infinito.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - x^2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(2 - x)}{(x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-x}{x + 1} = -\frac{2}{3}$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

(b) Calcúlense sus asíntotas.

Solución:

(a) En $x = 2$ podría haber una discontinuidad de tipo salto finito. Veamos si los límites laterales son iguales o no:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x-1} = 0$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2-2x}{x+1} = \frac{8}{3}$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad de salto finito.

(b) La recta $x = 1$ es una asíntota vertical puesto que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal en $-\infty$ puesto que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$$

En $+\infty$ no hay asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-2x}{x+2} = \infty$$

Veamos que hay una asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{3x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$
$$b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-2x}{x+2} - 3x \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-2x-3x^2-6x}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-8x}{x} = -8$$

La asíntota oblicua en $+\infty$ es $y = 3x - 8$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x - 4$ y $g(x) = \cos \pi x$ se cortan en un punto y calcular la parte entera de la abscisa de ese punto.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x - 4 - cos\pi x$$

se anula en algún punto:

- $F(x)$ es continua en $[1, 2]$
- $F(1) = 1 + 1 - 4 - \cos \pi = -1 < 0$
- $F(2) = 8 + 2 - 4 - \cos 2\pi = 5 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $F(c) = 0$. Las dos curvas se cortan en el punto de abscisa c. La parte entera de c es 1.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$ $\qquad$ (b) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-e^x\right)$

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x-1}-\sqrt{x^2+x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x-1}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2-4x-1}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2-4x-1}-\sqrt{x^2+x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-1-x^2-x}{\sqrt{x^2-4x-1}-\sqrt{x^2+x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{2x}\\ &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(b) Puesto que e^x es un infinito de orden superior a x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-e^x\right)=-\infty$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\mathrm{arsen}\,x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$ $\qquad$ (b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}$

Solución:

(a) Aplicando las aproximaciones $\mathrm{arsen}\,x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ y $\ln(1+x)\sim x$ válidas cuando $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\mathrm{arsen}\,x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}=2$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación $u^v\sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{2x-3}{2x+1}-1\right)\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x-3-2x-1}{2x+1}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-12x}{2x}}=e^{-6}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Dada la función

$$f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$$

se pide:

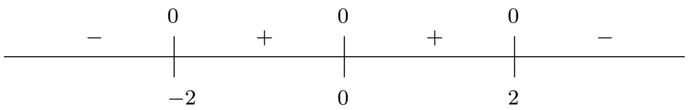
(a) Determinar su dominio.

(b) Calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$$

Solución:

(a) El dominio es la solución de la inecuación $4x^2 - x^4 \geq 0$.
Las raíces del polinomio son $x = -2$, $x = 0$ (doble) y $x = 2$. El signo del polinomio dende de x según el siguiente esquema:



El dominio de la función es el intervalo $[-2, 2]$.

(b) Hay que tener en cuenta que $\sqrt{x^2}$ es igual a x o a $-x$ dependiendo del signo de x. Los límites son:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2(4 - x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{4 - x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2(4 - x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\sqrt{4 - x^2} = -2$$

♠♠♠♠

3. Derivadas (1)

Ejercicio 1. Obtener la derivada de la función $f(x) = x^2$ a partir de la definición de derivada.

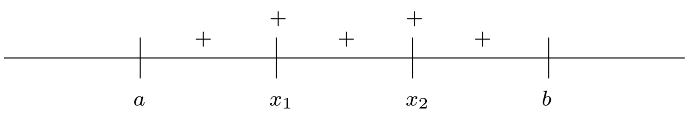
Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Demostrar a partir del teorema del valor medio que si una función tiene derivada positiva en un intervalo (a, b), es creciente en ese intervalo.

Solución:



Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $x_1 < x_2$. Entonces, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ en cuyo interior la derivada es positiva y en cuyos extremos la función es continua (ya que es derivable):

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) > f(x_1)$$

puesto que tanto $f'(c)$ (derivada en un punto intermedio entre x_1 y x_2) y la diferencia $x_2 - x_1$ son números positivos. Entonces:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ creciente}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Derivar las siguientes funciones (no es necesario simplificar pero no puede darse el resultado con exponentes negativos ni fraccionarios):

(a) $y = 3e^{\operatorname{sen}^2 x}$ (b) $y = \sqrt{x^2 + 1}\cos 2x$ (c) $y = \dfrac{1}{\ln(2x + 1)}$ (d) $y = x^x$

Solución:

(a) $y' = 3e^{\operatorname{sen}^2 x} 2 \operatorname{sen} x \cos x$

(*b*) $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cos 2x - (-2 \operatorname{sen} 2x \sqrt{x^2+1})$

(*c*) $y' = \frac{0 - \frac{2}{2x+1}}{(\ln(2x+1))^2}$

(*d*) Escribiendo la función como $y = e^{x \ln x}$:

$$y' = e^{x \ln x} \left(\ln x + \frac{1}{x}\, x \right) = x^x \left(\ln x + 1 \right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

calcular a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

Solución:

Para que sea continua, los límites laterales por la derecha y por la izquierda deben ser iguales e iguales al valor de la función:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax^2 + 1 = 4a + 1$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} e^{2-x} = e^0 = 1$$
$$f(2) = e^{2-2} = 1$$

Para que la función sea continua, debe ocurrir:

$$4a + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$$

Para $a = 0$ la derivada de la función para $x \neq 2$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ -e^{2-x} & x > 2 \end{cases}$$

Las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x = 2$ son:

$$f'(2^-) = 0$$
$$f'(2^+) = -1$$

En consecuencia, la función no es derivable en $x = 2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

(*a*) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

(*b*) Calcular la ecuación de la recta tangente y normal en el punto de abscisa 4.

Solución:

(*a*) La función se puede escribir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & x > 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & x > 0 \end{cases}$$

Los límites cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$ son:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$$

En consecuencia, la asíntota horizontal tanto por la derecha como por la izquierda es $y = 1$.

(*b*) Para $x_0 = 4$:

$$y_0 = \frac{4}{\sqrt{4^2+9}} = \frac{4}{5}$$

La derivada de la función para $x > 0$ es:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}x}{x^2+9} = \frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = \frac{9}{125}$$

Las rectas tangente y normal son:

$$y - \frac{4}{5} = \frac{9}{125}\,(x-2) \;\; ; \qquad y - \frac{4}{5} = -\frac{125}{9}\,(x-2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Hallar a, b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

Las condiciones que nos dan significan que:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \\ f''(3) = 0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

Por consiguiente:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 2 \\ 3 + 2a + b = 0 \\ 18 + 2a = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = -9$, $b = 15$ y $c = -5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide:

(*a*) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

(*b*) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

(*a*) El dominio es la solución de la inecuación $x^2 + 4x - 5 > 0$. Las raíces del polinomio son $x = -5$ y $x = 1$. El signo del polinomio según los valores de x está representado en el siguiente esquema:

$+$	0	$-$	0	$+$
	-5		1	

El dominio es $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$. Las rectas $x = -5$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

(*b*) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$$

El numerador se anula en $x = -2$. El signo de la derivada es el siguiente (teniendo en cuenta el dominio estudiado en el apartado anterior):

$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,\infty)$
$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$

La función es decreciente en $(-\infty, -5)$ y creciente en $(1, \infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x^2+1) + 2xe^{-x} = e^{-x}\left(-x^2+2x-1\right) = -e^{-x}(x-1)^2 \\ f''(x) &= e^{-x}(x-1)^2 + 2(x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x^2-4x+3) \end{aligned}$$

Los signos de la segunda derivada son:

$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
$+$	0	$-$	0	$+$

Hay dos puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$.

♠♠♠♠

4. Derivadas (2)

Ejercicio 1. Obtener la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ a partir de la definición.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+1-x-1}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Demostrar a partir del teorema del valor medio que si una función tiene derivada cero en un intervalo abierto (a, b), es constante en ese intervalo.

Solución:

Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$ y $x_2 < x_1$. Entonces, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ en cuyo interior la derivada es cero y en cuyos extremos la función es continua (ya que es derivable):

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_1)$$

puesto que $f'(c)$ (derivada en un punto intermedio entre x_1 y x_2) es igual a cero. Entonces, la función toma el mismo valor en todos los puntos y es, por consiguiente, constante.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Derivar las siguientes funciones:

(a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ (b) $y = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$ (c) $y = (2x^3 - 3x^2 + 2)^5$ (d) $y = (1+3x)^x$

Solución:

(a) Escribimos la función como:

$$y = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\operatorname{sen} x) - \ln(1-\operatorname{sen} x)\right)$$

La derivada es:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$$

(b) $y' = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(c) $y' = 5(2x^3 - 3x^2 + 2)^4(6x^2 - 6x)$

(d) Escribimos la función como

$$y = e^{x\ln(1+3x)}$$

La derivada es:

$$y' = e^{x\ln(1+3x)}\left(\ln(1+3x) + \frac{3}{1+3x}\cdot x\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\cdot x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\ln x = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

La primera derivada se anula en $x = e^{-2}$ y en $x = 1$. Su signo es:

	0		e^{-2}		1	
$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hay un máximo relativo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

La segunda derivada se anula en $x = e^{-1}$. Su signo es

	$\nexists$		0	
$\nexists$		$-$		$+$
	0		e^{-1}	

Hay un punto de inflexión en $x = e^{-1}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

obtener:

(a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

Solución:

(a) La derivada tiene dos ceros, $x = 1$ (triple) y $x = 5$. El signo de la derivada es:

	0		0	
$+$		$-$		$+$
	1		5	

La función es creciente para $x \in (-\infty, 1) \cup (5\infty)$ y es decreciente para $x \in (1, 5)$.

(b) Hay un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 5$.

Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3x - 15 + x - 1) = (x-1)^2(4x-16)$$

La segunda derivada tiene dos ceros $x = 1$ (doble) y $x = 4$. El signo está dado por el siguiente esquema:

	0		0	
$-$		$-$		$+$
	1		4	

Hay un solo punto de inflexión en $x = 4$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

(a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

(a) La recta $x = 3$ es asíntota vertical puesto que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \infty$$

No hay asíntota horizontal. Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-3)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{x^2} = 6$$

La asíntota oblicua es $y = x + 6$.

(b) La ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = \frac{2^3}{(2-3)^2} = 8$$

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-3)^2 - 2(x-3)x^3}{(x-3)^4} = \frac{3x^2(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = \frac{3\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot 2^3}{(-1)^3} = 28$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - 8 = 28(x-2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los límites:

$(a)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}$ $\quad(b)\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$ $\quad(c)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{\ln\cos(2x)}$ $\quad(d)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^x} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{\ln\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\,\mathrm{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\,\mathrm{sen}(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\,\mathrm{sen}\,3x\cos 2x}{-2\,\mathrm{sen}\,2x\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 3x}{2\cdot 2x} = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{4+x-4+x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

En el primer límite se ha aplicado que e^x es un infinito mayor que x. En el segundo se ha tenido en cuenta que $e^{-\infty} = 0$. En el tercero se ha aplicado la regla de L'Hopital y después se ha aplicado la aproximación $\mathrm{sen}\,u \sim u$ válida si u tiende a cero. El último límite se ha simplificado después de multiplicar numerador y denominador por la suma de las raíces.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Demostrar que la ecuación $2 - x = e^x$ solamente tiene una solución.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = e^x + x - 2$$

se anula para un solo valor de x.

- $F(x)$ es continua para todo $x\in\mathbb{R}$
- $F(0) = 1 + 0 - 2 < 0$
- $F(1) = e + 1 - 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$. En consecuencia, la ecuación dada tiene al menos una solución.

La función $F(x)$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es

$$F'(x) = e^x + 1$$

La derivada nunca se hace cero. Entonces, como consecuencia del teorema de Rolle, la función no puede tener dos ceros pues en ese caso, debería haber entre ellos un cero de la derivada que hemos visto que no existe.

♠♠♠♠

5. Problemas de selectividad 1.

Ejercicio 1. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(b) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

Solución:

(a) Los límites son:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (a - \ln(1-x)) = -\ln\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

puesto que el infinito exponencial es de rango superior al infinito potencial

(b) Calculamos los límites laterales y el valor de la función en cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^?} f(x) &= \lim_{x\to0^-} (a - \ln(1-x)) = a \\ \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x^2e^{-x} = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Para que la función sea continua deben coincidir los tres valores, es decir, $a = 0$.

(c) Para $x \neq 0$ la función es derivable y su derivada vale:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < 0 \\ 2xe^{-x} - e^{-x}x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ la función no es derivable en $x = 0$ al no ser continua. Si $a = 0$:

$$f'(0^-) = 1$$
$$f'(0^+) = 0$$

y la función tampoco es derivable en $x = 0$ cuando $a = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)(x^2+1) - 2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

El signo de la derivada es:

$-$	0	$+$	0	$-$
	-1		1	

Hay un mínimo en $x = -1$ y un máximo local en $x = 1$.

Calculamos ahora la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - 2\cdot 2x\cdot(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

La segunda derivada se anula en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$. El signo de la derivada segunda es:

	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hay puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & x > 3 \end{cases}$$

se pide:

(a) Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

(b) Hallar los puntos en que $f'(x) = 0$.

(c) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

(a) Para $x \neq 3$ la función es continua. Para que sea continua en $x = 3$ deben coincidir estas tres cantidades:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3x + A) = 9 + A$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (-4 + 10x - x^2) = 17$$
$$f(3) = 9 + A$$

Para que la función sea continua $9 + A = 17 \implies A = 8$.
La derivada para $a \neq 3$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 3 \\ 10 - 2x & x > 3 \end{cases}$$

En $x = 3$, si $A \neq 8$ no es derivable porque no es continua. Para $A = 8$, las derivadas laterales son:

$$f'(3^-) = 3$$
$$f'(3^+) = 4$$

Puesto que no coinciden, la función tampoco es derivable en $x = 3$ para $A = 8$.

(b) La derivada se anula en $x = 5$ donde hay un máximo.

(c) Para calcular el máximo absoluto comparamos los valores de la función en el máximo relativo y en los extremos del intervalo:

$$x = 4: \quad f(4) = 20$$
$$x = 5: \quad f(5) = 21$$
$$x = 8: \quad f(8) = 12$$

El máximo absoluto se da en $x = 5$ y la función en ese punto vale 21. El mínimo absoluto se da para $x = 8$ y vale 12.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

(a) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Esbozar la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

(a) Los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ son:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e? = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e? = 1$$

En $x = 0$ calculamos los límites por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$$

Concluimos que no existe el límite de la función cuando x tiende a cero.

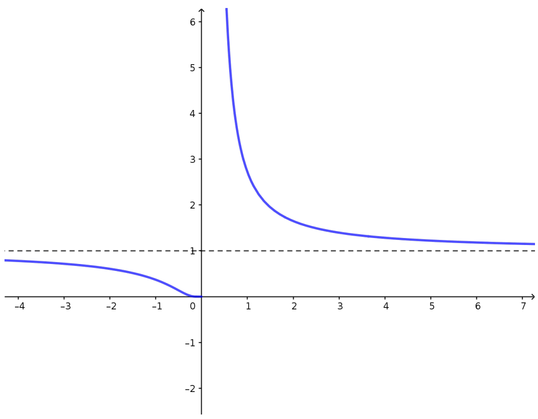
(b) Del apartado anterior se deduce que $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha e $y = 1$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$.

La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

La derivada siempre es negativa y, en consecuencia la función es decreciente en todo su dominio.

La gráfica es:



♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

(a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

(b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

(c) Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

(a) Las rectas $x = 4$ y $x = -1$ son asíntotas verticales puesto que:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}\right) = 0$$

(*b*) Calculamos los signos de las derivadas:

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-4)^2} - \frac{1}{2}\frac{27}{(x+1)^2}$$

La derivada siempre es negativa y, por tanto, la función es decreciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos relativos.

Calculamos la derivada segunda:

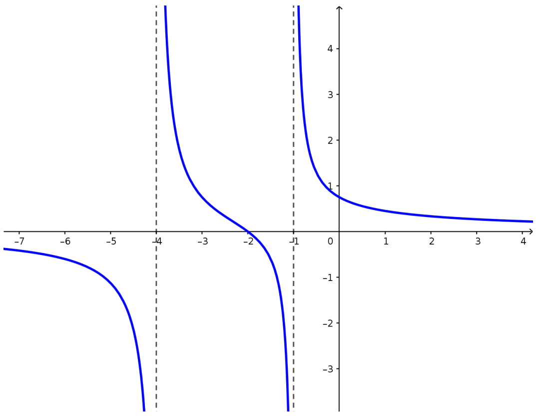
$$f''(x) = \frac{8}{(x-4)^3} + \frac{1}{2}\frac{54}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x-4)^3} + \frac{27}{(x+1)^3}$$

Esta derivada se anula cuando:

$$\frac{8}{(x-4)^3} = -\frac{27}{(x+1)^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{2}{x-4} = -\frac{3}{x+1} \quad\Longrightarrow\quad 2x+2 = -3x+12 \quad\Longrightarrow\quad x = 2$$

La derivada cambia de signo en $x = 2$ de modo que hay un punto de inflexión para $x = 2$.

(*c*) La gráfica es:



♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.

(*b*) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

(*c*) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.

Solución:

(*a*) Para $x \neq 0$ la función es continua. Los límites en $x = 0$ son:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+k) = k$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0
\end{aligned}$$

Para que la función sea continua k debe valer cero.

(b) La inersección con el eje OY el punto de intersección es:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$, $f(x) = x$. El sistema es:

$$\begin{cases} y = x \\ x = 0 \end{cases}$$

y el punto de intersección es $(0,0)$.
El punto de intersección con el eje OX es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Para $x > 0$ este sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} \\ y = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el punto $(1,0)$.
Para $x < 0$ el sistema queda:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases}$$

que nos vuelve a dar el punto $(0,0)$.

(c) El punto de tangencia es:

$$f(1) = 0$$

Es el punto $(1,0)$.
Para calcular la pendiente obtenemos la derivada para $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x})2^x - 2^x \ln 2 \cdot \sqrt{x}\ln x}{2^{2x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

♠♠♠♠

6. Problemas de selectividad 2

Ejercicio 1. Calcular justificadamente:

$(a)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2}$ $\qquad$ $(b)\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Solución:

(a) Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Resolvemos aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2-e^x+3\cos 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-9\operatorname{sen}3x}{2}=-\frac{1}{2}$$

(b) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Teniendo en cuenta los términos de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{2x^3}=\frac{5}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}$$

se pide:

(a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

(b) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de f.

Solución:

(a) El dominio son todos los reales excepto los valores de x que anulan alguno de los denominadores:

$$\text{Dominio}=\mathbb{R}-\{-1,-4\}$$

Las asíntotas son $x=-1$, $x=-4$ e $y=1$ puesto que:

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to -4}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

(b) Derivando:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{x+4-x}{(x+4)^2}=\frac{-(x+4)^2+4(x+1)^2}{(x+1)^2(x+4)^2}=\frac{3x^2-12}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

El signo de la derivada se refleja en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \nexists & & 0 & & \nexists & & 0 & \\ + & | & + & | & - & | & - & | & + \\ & -4 & & -2 & & -1 & & 2 & \end{array}$$

Hay un máximo relativo en $x=-2$ y un mínimo relativo en $x=2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5\operatorname{sen}x}{2x}+\frac{1}{2} & \text{si } x<0\\ a & \text{si } x=0\\ xe^x+3 & \text{si } x>0\end{cases}$$

se pide:

(a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

(b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

Solución:

(a) Para que la función sea continua deben coincidir los límites laterales y el valor de la función:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{5\,\text{sen}\, x}{2x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (xe^x + 3) = 3 \\
f(0) &= a
\end{aligned}$$

Para que la función sea continua $a = 3$.

(b) Para que la función sea derivable debe ser continua. Si $a \neq 3$ la función no es derivable. Para $a = 3$ calculamos las derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{aligned}
f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{5\,\text{sen}\, x}{2x} + \frac{1}{2} - 3}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\, 5x - 5x}{2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{5\cos 5x - 5}{4x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-25\,\text{sen}\, 5x}{4} = 0 \\
f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{xe^x + 3 - 3}{x} = 1
\end{aligned}$$

La función no es derivable en $x = 0$ aunque a valga 3.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

se pide:

(a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

(b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

Solución:

(a) Debe ser $x > -1$ y además $x \neq -2$, $x \neq -1$ y $x \neq 2$. El dominio es el conjunto $(-1, \infty) - \{2\}$.
Las asíntotas son $x = -1$, $x = 2$ e $y = 0$ puesto que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1} \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \infty \\
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \infty \\
\lim_{x\to +\infty} &= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0
\end{aligned}$$

(b) El valor de la función en $x = 0$ es:

$$f(0) = 0$$

de forma que el punto de tangencia es el punto $(0, 0)$.
Para calcular la pendiente derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

La pendiente es:

$$m = f'(0) = -\frac{4}{16} + 1 = \frac{3}{4}$$

La recta tangente es $y = \frac{3}{4}x$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}\,(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\ln x = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

La primera derivada se anula en $x = e^{-2}$ y en $x = 1$. Su signo es:

$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
	0		e^{-2}		1	

Hay un máximo relativo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

La segunda derivada se anula en $x = e^{-1}$. Su signo es

$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	0		e^{-1}	

Hay un punto de inflexión en $x = e^{-1}$.

♠♠♠♠

7. Límites. Derivadas. Integrales.

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

$(a)\ \displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$

$(c)\ \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{2+3\cos x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad (d)\ \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{4x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}\ ; \qquad A = \frac{5}{2},\ B = \frac{3}{2}$$

así que:

$$\int \frac{4x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C$$

(b) Puesto que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

También puede hacerse por partes:

$$\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen} x & \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,\mathrm{d}x$$

de donde:

$$2\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x\cos x + x \quad\Longrightarrow\quad \int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(x - \operatorname{sen} x\cos x) + C$$

(c) Es casi inmediata. Multiplicamos y dividimos por -3:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen} x}{2+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|2+3\cos x| + C$$

(d) Con el cambio $t = \ln x$:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a $2x+y-1=0$.

Solución:

Las tangentes tienen pendiente -2. Para calcular los puntos de tangencia calculamos los puntos en que la derivada vale -2.

$$y' = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \quad\Longrightarrow\quad (x-1)^2 = 1$$

Las abscisas de lo puntos de tangencia son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Los puntos son $(0,0)$ y $(2,4)$. Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = -2x\ ; \qquad y-4 = -2(x-2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto del intervalo $(0,\pi)$.

Solución:

Sea la función $F(x) = \cos x - \sqrt{x}$. El problema es equivalente a demostrar que esta función se hace cero en un único punto del intervalo $(0, \pi)$.

La función F es continua en $[0, \pi]$ y además $F(0) = 1 > 0$ y $F(\pi) = -1 - \sqrt{\pi} < 0$. Por el teorema de Bolzano existe al menos un punto de $(0, \pi)$ en el que la función se hace cero.

Además F es continua en $[0, \pi]$ y derivable en $(0, \pi)$. Su derivada es:

$$F'(x) = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que es distinta de cero en $(0, \pi)$. Entonces, la función no puede tener dos ceros pues, en ese caso, de acuerdo con el teorema de Rolle, debería haber entre ellos un cero de la derivada que hemos visto que no existe.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x \qquad (b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4} \qquad (c)\ \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{artg} e^x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

(a) Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación del logaritmo:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

(b) Este límite es del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - 1}{4x + 4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + 2e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x}{4 + 12x^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) Es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Lo escribimos como fracción para aplicar la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{artg} e^x - \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{artg} e^x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 e^x}{1 + e^{2x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

porque el infinito de mayor rango es e^{2x}.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Se considera la función:

$$y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

Hallar las asíntotas, los extremos locales y los puntos de inflexión. Representar gráficamente la función.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - e^x(x+1)^2}{e^{2x}} = \frac{-x^2 + 1}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-2xe^x - e^x(-x^2 + 1)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 2x - 1}{e^x}$$

La derivada se anula en $x=-1$ y en $x=1$. El signo de la derivada es:

f'	$-$	0	$+$	0	$-$
x		-1		1	

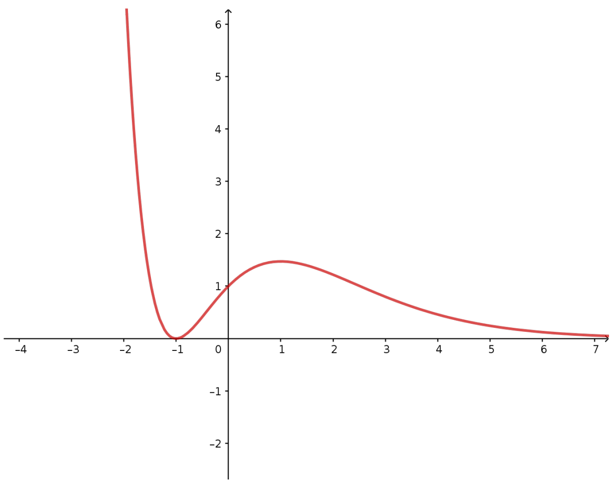
La función es decreciente en $(-\infty,-1)$, creciente en $(-1,1)$ y decreciente en $(1,\infty)$. Tiene un mínimo en $x=-1$ y un máximo en $x=1$.

La derivada segunda se anula en $x=1-\sqrt{2}$ y $x=1+\sqrt{2}$. Su signo es:

f''	$+$	0	$-$	0	$+$
x		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	

Hay una asíntota horizontal $y=0$ en $+\infty$.

Y la gráfica de la función:



♠♠♠♠

8. Límites. Derivadas. Integrales.

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x^2+x}\ ; \qquad A=3,\ B=-3$$

Entonces:

$$\int \frac{3}{x^2+x}\,\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

(b) Con el cambio $t=\cos x$:

$$\int \cos^3 x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x=-\int\cos^3 x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{\cos^4 x}{4}+C$$

(c) Es inmediata teniendo en cuenta que $x^2+4x+10=(x+2)^2+6$:

$$\int\frac{2}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{6+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{artg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$$

(d) Por partes:

$$u=\ln x \qquad \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x \qquad v=\frac{1}{2}x^2$$

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dada la función $f(x)=x^2\operatorname{sen}x$, se pide:

(a) Obtener la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $(\pi,f(\pi))$.

(b) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x)=0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Solución:

(a) La ordenada del punto de tangencia es $f(\pi)=0$. Para obtener la pendiente calculamos previamente la derivada de la función:

$$f'(x)=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x\ ; \qquad m=f'(\pi)=-\pi^2$$

La ecuación de la tangente es:

$$y=-\pi^2(x-\pi)$$

(b) La función no puede ser cero porque x^2 y $\operatorname{sen}x$ son mayores que cero en ese intervalo.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ solo tiene una solución real.

Solución:

Sea la función $F(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$. El problema es equivalente a demostrar que F se hace cero en un solo punto.

F es continua en $[0, 1]$. Además $F(0) = -1 < 0$ y $F(1) = 3 > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe un cero de la función en el intervalo $(0, 1)$.

La derivada de la función F es:

$$F'(x) = 3x^2 + 2x + 2'$$

que es mayor que cero para todo x. Entonces, la función no puede tener dos ceros pues, de acuerdo con el teorema de Rolle entre los dos ceros de la función debería haber un cero de la derivada y hemos visto que la derivada es siempre mayor que cero.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular:

$(a)\ \lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ $\qquad (c)\ \lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución:

(a) Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}}}{1} = \frac{3}{2}$$

(b) Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando reiteradamente la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{1-\cos^3 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x(-\operatorname{sen} x) - 3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)}{-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 3\cos^2 x}{-3\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(c) Escribimos como fracción y aplicamos la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Calcular las asíntotas, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de inflexión y hacer una representación aproximada de la función.

Solución:

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x)$$
$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 2x) + (-2x + 2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

La derivada se anula en $x = 0$ y en $x = 2$. El signo de la derivada es:

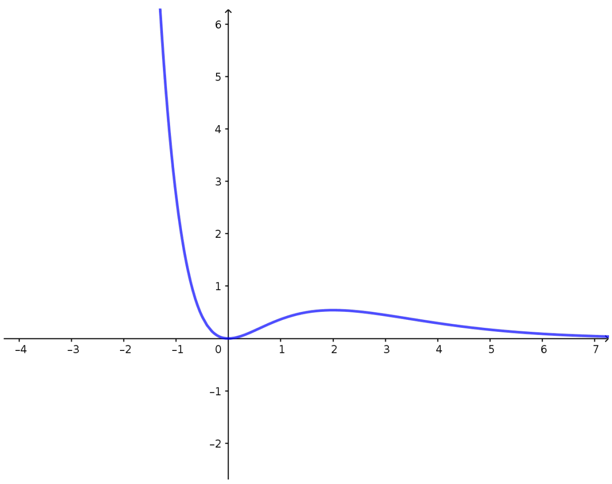
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
x		0		2	

La función es decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$. Tiene un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 2$.

La derivada segunda se anula en $x = 2 - \sqrt{2}$ y $x = 2 + \sqrt{2}$. Su signo es:

f''	$+$	0	$-$	0	$+$
x		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	

Hay puntos de inflexión en $x = 2 - \sqrt{2}$ y en $x = 2 + \sqrt{2}$. La gráfica de la función es:



♠♠♠♠

9. Integrales. Grupo G.

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

$$(a)\ \int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) El denominador tiene una raíz doble. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\ ; \qquad A=2, \quad B=5$$

Entonces:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1} + \int \frac{5}{(x-1)^2} = \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

(b) Con el cambio $t = e^x$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arsen} t + C = \operatorname{arsen} e^x + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales:

$$(a)\ \int x\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\ \int \frac{1-\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Se podría hacer con el cambio $t^2 = 2x-1$. También por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x \quad v = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \int \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{x(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

(b) Con el cambio $t = \ln x$:

$$\int \frac{1-\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int (1-\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x) = \ln x - \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales:

$$(a)\ \int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\ \int xe^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Como el denominador no tiene raíces la integral es la suma de una función logaritmo y una función arcotangente:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{1}{4+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Es fácil ver que $A = 1$ y $B = -1$ de modo que:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{4+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{artg}\frac{x-1}{2} + C$$

(*b*) Con el cambio de variable $t = x^2 - 1$:

$$\int xe^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{x^2-1}\,\mathrm{d}(x^2-1) = \frac{1}{2}\,e^{x^2-1} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (*b*) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) Escribiendo $28 - 12x - x^2 = 64 - (x+6)^2$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{64-(x+6)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsen}\frac{x+6}{8} + C$$

(*b*) Puesto que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales:

(*a*) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$ (*b*) $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) La primera integral es inmediata:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(2-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{3}{2} - \ln 1 = \ln\frac{3}{2}$$

(*b*) La segunda se hace por partes

$$u = 1-x \quad \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad v = -e^{-x}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-e^{-x}(1-x)\Big]_1^4 - \int_1^4 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-e^{-x}(1-x) + e^{-x}\Big]_1^4 \\ &= \Big[xe^{-x}\Big]_1^4 = \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2\ ; \qquad y = 2x+1$$

se pide:

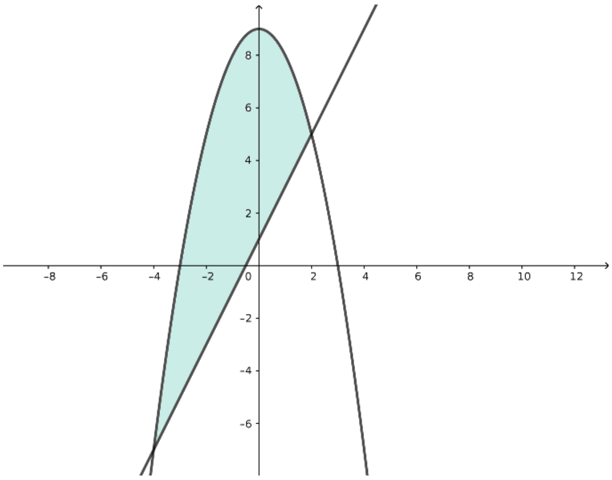
(*a*) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

(*b*) Calcular el área de dicho recinto acotado.

(*c*) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Solución:

(*a*) Se trata de una parábola y una recta:



Los puntos de intersección son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Los puntos de intersección tienen abscisas -4 y 2.

(*b*) El área la calculamos mediante la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{2} \left(9 - x^2 - 2x - 1\right)\, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 8\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} = \left(-\frac{8}{3} - 4 + 16\right) - \left(\frac{64}{3} - 16 - 32\right) \\ &= 60 - 24 = 36 \end{aligned}$$

(*c*) El volumen es:

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)^2\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{3} (9 - x^2)^2\, \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x\right]_{0}^{3} = \frac{1296}{5}\pi$$

♠♠♠♠

10. Integrales. Grupo H.

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{artg} x \, dx$

Solución:

(a) Por partes:

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\, dx$$
$$dv = x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}\,x^2$$

(b) Por partes:

$$u = \operatorname{artg} x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$dv = dx \qquad v = x$$
$$\int \operatorname{artg} x \, dx = x \operatorname{artg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^2}\, dx$

Solución:

(a) Es inmediata:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arsen} 2x + C$$

(b) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\ ; \qquad A = 1, \quad B = 2$$

y entonces:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\, dx = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\, dx$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\, dx$

Solución:

(a) Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = (x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{15} + C\end{aligned}$$

(b) Es inmediata:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+2x-4} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int (2x+1)(3x-2)^5\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por partes:

$$u = 2x+1 \qquad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = (3x-2)^5\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^6}{6}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)(3x-2)^5\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^6}{6}\cdot(2x+1) - \frac{1}{9}\int (3x-2)^6\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^6}{6}\cdot(2x+1) - \frac{1}{9}\frac{1}{3}\frac{(3x-2)^7}{7} + C\end{aligned}$$

(b) Teniendo en cuenta que $5-4x-x^2 = 9-(x+2)^2$:

$$\int \frac{2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = 2\ \mathrm{arsen}\,\frac{x+2}{3} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x-3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Se hace la división:

$$\int \frac{x+3}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x = x + 6\ln|x-3| + C$$

(b) Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \quad v = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x$$

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$

Solución:

(a) Se puede hacer a partir de la fórmula trigonométrica $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. También por partes:

$$\begin{array}{ll} u = \cos x & \mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x & v = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - cos^2 x) \, \mathrm{d}x$$

de donde:

$$2 \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x \cos x + x \quad \Longrightarrow \quad \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(x + \operatorname{sen} x \cos x) + C$$

(b) Se hace la división y resulta:

$$\frac{x^3+2x}{x^2+1} = x + \frac{x}{x^2+1}$$

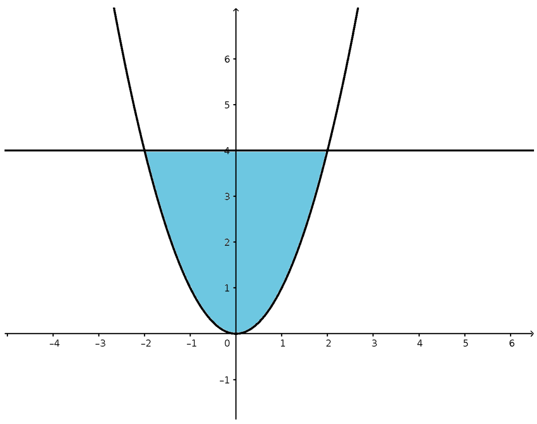
y entonces:

$$\int \frac{x^3+2x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{x}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular el área comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

Solución:



Los límites de integración se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Que da $x = -2$ y $x = 2$.

El área es:

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \, \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{2} (4 - x^2) \, \mathrm{d}x = 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

Solución:

No hace falta saber dibujar la gráfica pero hay que darse cuenta que entre -1 y 0 la función es negativa, y entre 0 y 1 es positiva.

La integral indefinida se hace por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{2}\,e^{2x}$$

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}$$

El área la calculamos mediante dos integrales:

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\,e^{-2} - \frac{1}{4}\,e^{-2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,e^{-2}$$

$$\int_{0}^{1} xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{2}\,e^{2} - \frac{1}{4}\,e^{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,e^{2}$$

El área se obtiene sumando la segunda integral y la primera cambiada de signo:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2} - \frac{3}{4}\,e^{-2}$$

♠♠♠♠

11. Matrices y determinantes (1)

Ejercicio 1. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad C_3 \to C_3 - 2C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollando por la 3}^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -2 \\ 2 & 12 & 4 \end{vmatrix} \qquad C_2 \to C_2 + 5C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollando por la primera fila}$$

$$= 44 + 24 = 68$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcular una matriz X que cumple $B^2X - BX + X = B$.

Solución:

Calculemos en primer lugar B^2:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Sacando X factor común en el primer miembro de la ecuación:

$$(B^2 - B + I)X = B \ ; \qquad X = (B^2 - B + I)^{-1}B$$

Entonces:

$$B^2 - B + I = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(B^2 - B + I)^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$X = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

Solución:

El problema resulta más sencillo si nos damos cuenta que $C_3 = C_1 + C_2$. Entonces:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular el determinante de esta matriz. Teniendo en cuenta que todas las filas suman lo mismo, sumando C_2 y C_3 a C_1 resulta:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m-1 & 1 \\ m+1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 \end{vmatrix} \\ &= (m+1)(m-2)^2 \end{aligned}$$

El determinante se anula para $m = -1$ y $m = 2$. Entonces:

- Si $\neq -1$ y $m \neq 2$ el determinante es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.
- Si $m = -1$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

- Si $m = 2$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM.

Solución:

Calculamos la matriz AM:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es:

$$|AM| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

La matriz adjunta:

$$\text{adj } AM = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$(AM)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

(b) Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = -a\left((a-1)(a+2) - a^2\right) = -a(a-2)$$

Podemos distinguir tres casos:

– Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, el rango de la matriz es 3.

– Si $a = 0$:

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

– Si $a = 2$:

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

(b) La matriz tiene inversa para $a \neq 0$ y $a \neq 2$.
Para $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a 1.
La adjunta de A es:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

12. Matrices y determinantes (2)

Ejercicio 1. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & 8 & -15 \\ -3 & -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} & \qquad C_3 \to C_3 + C_2,\ C_4 \to C_4 - 3C_2 \\
= -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & -15 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} & \qquad \text{desarrollando por la primera fila} \\
= 5\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} & \qquad \text{sacamos factor común} \\
= 5\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \qquad F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 + F_1 \\
= 5\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \qquad \text{desarrollamos por la tercera columna} \\
= 45 &
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Por el método de Gauss. Ponemos ceros en la primera columna:

$$\begin{aligned}
\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} & \qquad F_2 \to F_2 - 2F_1,\ F_3 \to F_3 + F_1,\ F_4 \to F_4 - 2F_1 \\
= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} & \qquad F_2 \to F_2 + F_3 \\
= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \qquad F_3 \to F_3 + 2F_2,\ F_4 \to F_4 - 3F_2 \\
= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \qquad \text{puesto que } F_4 = -4F_3 \\
= 3 &
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución

Desarrollamos el determinante y resulta la ecuación:

$$x + 4(x-1) + x - 2 - 2 - x^2(x-1) = 0 \; ; \qquad -x^3 + x^2 + 6x - 8 = 0$$

La ecuación tiene una raíz $x = 2$. Factorizamos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 6 & -8 \\ 2 & & -2 & -2 & 8 \\ \hline & -1 & -1 & 4 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(-x^2-x+4) = 0 \; ; \qquad -(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

Una solución es $x_1 = 2$. Las otras son:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

es decir:

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \; ; \qquad x_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} -m & 0 & m \\ m & m-1 & 0 \\ 0 & m & m+2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudiar el rango de M según los valores del parámetro m.

(b) ¿Para qué valores de m existe la matriz inversa M^{-1}? Calcular M^{-1} para $m = 1$.

Solución

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -m & 0 & m \\ m & m-1 & 0 \\ 0 & m & m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m & 0 & m \\ 0 & m-1 & m \\ 0 & m & m+2 \end{vmatrix} = -m\left((m-1)(m+2) - m^2\right) = -m(m-2)$$

Podemos distinguir tres casos:

– Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$, el rango de la matriz es 3.

– Si $m = 0$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

– Si $m = 2$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

(b) La matriz tiene inversa para $m \neq 0$ y $m \neq 2$.
Para $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a 1.
La adjunta de A es:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

(b) Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución

(a) Tomamos tres columnas de la matriz B y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -8 \\ 3 & 2-a & 3 \end{vmatrix} = 6 + 36(2-a) - 42 = -36a + 36$$

El determinante se anula para $a = 1$. Pueden ocurrir dos casos:
- Si $a \neq 1$ el rango de la matriz es 3.
- Si $a = 1$:

$$\operatorname{rango} B = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -14 & 0 & -10 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

(b) Para $a = 0$ la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a 4. Calculemos su inversa:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

13. Matrices y sistemas (1)

Ejercicio 1. Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} kx + y - z = 0 \\ -x + ky + z = 0 \\ x + (k+1)y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en esos casos.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ k-1 & k+1 & 0 \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} k-1 & k+1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} = (-1)(k+1)\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(k+1)(k-2)$$

El determinante se anula para $k = -1$ y $k = 2$. Para estos valores, el rango de la matriz de coeficientes sera menor que 3 y el sistema será compatible indeterminado.

Sea $k = -1$. Elegimos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Una solución particular del sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad y = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\ ; \qquad z = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\ ;$$

Por las propiedades de los sistemas homogéneos otra solución es ésta dividida por 2, o sea $(0, 1, 1)$.
La solución general es $(0, \lambda, \lambda)$

Sea ahora $k = 2$. Elegimos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Calculamos una solución particular del sistema:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\ ; \qquad y = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\ ; \qquad z = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\ ;$$

La solución general es $(3\lambda, -\lambda, 5\lambda)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dada la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2a & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

(b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\,(a - a - a + 1 + a^3 - 1) = 2a(a^2 - 1)$$

El determinante se anula para $a = 0$, $a = -1$ y $a = 1$.

- Si $a \notin \{0,-1,1\}$ el determinante es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2$$

- Si $a = -1$:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} = 2$$

- Si $a = 1$:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2$$

(b) La matriz inversa existe si $a \notin \{-1,0,1\}$.
Para $a = 2$ el determinante de la matriz es 12. La matriz es

$$M = \begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz adjunta:

$$\operatorname{adj} M = \begin{pmatrix}5 & -6 & 2\\ -3 & 6 & -6\\ -1 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -6 & 6 & 6\\ 2 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Hallar todas las matrices $A = \begin{bmatrix}a & a\\ 0 & b\end{bmatrix}$ distintas de $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

(b) Para una cualquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular:

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{20}$$

Solución:

(a) Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix}a & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & a\\ 0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 & a^2+ab\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$$

Para que $A^2 = A$ debe cumplirse:

$$\begin{cases}a^2 = a\\ a^2+ab = a\\ b^2 = b\end{cases}$$

Las soluciones son $a = 0,\ b = 1$ o $a = 1,\ b = 0$, es decir, las matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ; \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) Si $A^2 = A$ también las demás potencias son iguales a A. Entonces:

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{20} = 20A$$

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \qquad 20A = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + (k+1)z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - y - 2z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

(a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

(b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k+1 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - k(k+1) + 2(k-1) - (k-1)(k+1) + 1 + 4k = -2k^2 + 5k - 2$$

El determinante se anula para $k = 2$ y para $k = \frac{1}{2}$. Pueden darse los siguientes casos:

– Si $k \neq 2$ y $k \neq \frac{1}{2}$, rango $(A) =$ rango $(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado.

– Si $k = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

– Si $k = \frac{1}{2}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

El rango es igual a 3 y el sistema es incompatible. Para calcular este rango primero hemos suprimido la primera columna que es dependiente de la segunda, luego hemos multiplicado la segunda y la tercera columna por 2 para operar con enteros y hemos puesto ceros en la primera columna.

(b) El sistema tiene infinitas soluciones para $k = 2$. Elegimos dos ecuaciones independientes, por ejemplo, la primera y la segunda:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Tomamos $x = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 2y + 3z = -1 - \lambda \\ y + z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es igual a -1. Entonces:

$$y = -\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2-2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 7 - 5\lambda \; ; \qquad z = -\begin{vmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 1 & 2-2\lambda \end{vmatrix} = -5 + 3\lambda$$

La solución del sistema es $(\lambda, 7 - 5\lambda, -5 + 3\lambda)$.

♠♠♠♠

14. Matrices y sistemas (2)

Ejercicio 1. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación $5x+y+\alpha z = \beta$, el sistema que resulta es compatible indeterminando.

Solución:

Si añadimos la nueva ecuación el sistema puede representarse por la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada debe ser igual a 2:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} = 2$$

Por consiguiente, todos los determinantes de orden 3 que se pueden formar con las filas y columnas de la matriz deben ser iguales a cero. En particular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 11 & \alpha - 15 \end{vmatrix} = 5(\alpha - 15) + 77 = 0 \; ; \qquad \alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \beta = 5$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Considérese el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + (m+1)y + 2z = -1 \\ mx + y + z = m \\ (1-m)x + 2y + z = -m - 1 \end{cases}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de m.

(b) Resuelva el sistema para $m = 2$. Calcular, si es posible una solución para la que $z = 2$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de lamatriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - m^2 + 4m - 2(1-m) - 2 - m(m+1) = -2m^2 + 5m - 2 = -(m-2)(2m-1)$$

El determinante se anula para $m = 2$ y $m = \frac{1}{2}$. Pueden darse los siguientes casos:

– Si $\neq 2$ y $m \neq \frac{1}{2}$ los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 3. El distema es compatible determinaado.

– Si $m = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

– Si $m = \frac{1}{2}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

El sistema es incompatible.

(b) En este caso solo hay dos ecuaciones independientes. Tomemos las dos primeras:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2\lambda \\ 2x + y = 2 - \lambda \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} -1-2\lambda & 3 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda$$

$$y = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & -1-2\lambda \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda$$

La solución es $\left(\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda, -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda, \lambda\right)$.

Para obtener una solución en que z valga 2, basta hacer $\lambda = 2$. Así obtenemos $(1, -2, 2)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Discuta y resuelva cuando sea posible el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda - \lambda^2 + 4 + 1 + 2\lambda^2 - 4\lambda = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

El determinante se anula para $\lambda = 1$ y $\lambda = 5$.

Pueden darse los siguientes casos:

– Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5$ el rango de la matriz es 3 y el sistema es compatible determianado. Solamente tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
– Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 5$ el rango es menor que el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Para $\lambda = 1$ hay dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Una solución particular del sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\ ; \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ; \qquad z = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

La solución general es $(5\lambda, -\lambda, -3\lambda)$.

De la misma manera para $\lambda = 5$ dos ecuaciones independientes son:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Una solución particular es

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\ ; \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5\ ; \qquad z = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15$$

o, por las propiedades de los sistemas homogéneos $(1,-1,-3)$. La solución general es $(\lambda,-\lambda,-3\lambda)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resuelva la ecuación matricial:

$$B(2A+I)=AXA+B$$

siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ; \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\ ; \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:

Puesto que la matriz B es invertible:

$$AXA=B(2A+I)-B=2BA+B-B=2BA \qquad \text{multiplicando a izquierda y derecha por } A^{-1}$$

$$A^{-1}AXAA^{-1}=2A^{-1}BAA^{-1}$$

$$X=2A^{-1}B$$

Entonces:

$$X=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5.

(a) Siendo M una matriz invertible, despejar X en:

$$(X+M)^2-XM=I+X^2$$

(b) Resolver la ecuación anterior cuando:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Desarrollando el cuadrado:

$$X^2+XM+MX+M^2-XM=I+X^2$$

$$MX=I-M^2$$

$$X=M^{-1}(I-M^2)=M^{-1}-M^{-1}M^2=M^{-1}-M$$

(b) Calculamos la inversa de M:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\ ; \qquad \operatorname{adj} M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

de modo que:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

y, finalmente:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

♠♠♠♠