Matemáticas. Primero de Bachillerato.
Curso 2013-2014. Exámenes

1. Raíces y logaritmos

Ejercicio 1. *Simplificar:*

$(a)\ \sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}} \qquad (b)\ \frac{\sqrt{20}}{3}+\frac{\sqrt{45}}{2}-\frac{5\sqrt{80}}{6}+\frac{\sqrt{125}}{3}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}} &= \sqrt{9a^2+\sqrt{(6a+1)^2}}\\ &= \sqrt{9a^2+6a+1}\\ &= \sqrt{(3a+1)^2}\\ &= 3a+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{20}}{3}+\frac{\sqrt{45}}{2}-\frac{5\sqrt{80}}{6}+\frac{\sqrt{125}}{3} &= \frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{20\sqrt{5}}{6}+\frac{5\sqrt{5}}{3}\\ &= \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{20}{6}+\frac{5}{3}\right)\sqrt{5}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5}\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Simplificar:

$(a)\ \left(1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right) \qquad (b)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Solución:

$$\left(1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=(1+\sqrt{2})^2-12=1+2+2\sqrt{2}-12=2\sqrt{2}-9$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})-\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{15}-3-5-\sqrt{15}}{5-3}=\frac{-8}{2}=-4$$

Ejercicio 3. Racionalizar y simplificar:

$(a)\ \frac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-2} \qquad (b)\ 7\sqrt{\frac{3}{5}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}-3\sqrt{15}+2\sqrt{60}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-2}=\frac{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{6+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-6}{6-4}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{aligned}7\sqrt{\frac{3}{5}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}-3\sqrt{15}+2\sqrt{60}&=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-3\sqrt{15}+2\cdot 2\sqrt{15}\\&=\frac{7\sqrt{3}\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}\sqrt{3}}{3}-3\sqrt{15}+4\sqrt{15}\\&=\left(\frac{7}{5}+\frac{2}{3}-3+4\right)\sqrt{15}\\&=\frac{46}{15}\sqrt{15}\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_3\sqrt{27}$ (b) $\log_{49}343$ (c) $\log_9\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ (d) $\log_{25}\frac{1}{5}$

Solución:

$$\log_3\sqrt{27}=\frac{1}{2}\log_3 27=\frac{3}{2}$$

$$\log_{49}343=\frac{\log_7 343}{\log_7 49}=\frac{3}{2}$$

$$\log_9\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\log_9 1-\log_9\sqrt[3]{3}=-\frac{\log_3\sqrt[3]{3}}{\log_3 9}=-\frac{\frac{1}{3}}{2}=-\frac{1}{6}$$

$$\log_{25}\frac{1}{5}=\log_{25}1-\log_{25}5=-\frac{1}{2}$$

Ejercicio 5. Conocido $\log 5=0{,}6990$, hallar $\log 12{,}5$ y $\log 0{,}032$.

Solución:

Conocido $\log 5$ se conoce también $\log 2$ ya que:

$$\log 2=\log\frac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-0{,}6990=0{,}3010$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\log 12{,}5&=\log\frac{25}{2}\\&=\log 25-\log 2\\&=\log 5^2-\log 2\\&=2\log 5-\log 2\\&=2\cdot 0{,}6990-0{,}3010\\&=1{,}0970\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 0{,}032 &= \log \frac{32}{1000} \\
&= \log 32 - \log 1000 \\
&= \log 2^5 - 3 \\
&= 5 \log 2 - 3 \\
&= 5 \cdot 0{,}3010 - 3 \\
&= -1{,}4950
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. Resolver la ecuación: $\quad 2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-3}} = 5$

Solución:

$$2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$$

$$\frac{2^x}{2} + \frac{2^3}{2^x} = 5 \qquad \text{Quitando denominadores}$$

$$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$$

Ecuación de segundo grado en la incógnita 2^x que tiene como soluciones:

$$2^x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

Ejercicio 7. Resolver la ecuación

$$3 \log x - 2 \log \frac{x}{3} = 2 \log 3 + \log 2$$

Solución:

$$3 \log x - 2 \log \frac{x}{3} = 2 \log 3 + \log 2$$

$$3 \log x - 2(\log x - \log 3 = 2 \log 3 + \log 2$$

$$3 \log x - 2 \log x + 2 \log 3 = 2 \log 3 + \log 2$$

$$\log x^3 - \log x^2 = \log 2$$

$$\log \frac{x^3}{x^2} = \log 2$$

$$\log x = \log 2$$

$$x = 2$$

Ejercicio 8. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 626 \\ \log x + \log y + \log 2 = 1 \end{cases}$$

Solución:

La segunda ecuación puede escribirse:

$$\log x + \log y + \log 2 = 1$$

$$\log(xy) = \log 10 - \log 2$$

$$\log(xy) = \log \frac{10}{2}$$

$$xy = 5$$

Resolvemos por sustitución $y = \dfrac{5}{x}$:

$$x^4 + \frac{5^4}{x^4} = 626 \qquad \text{Quitando denominadores}$$

$$x^8 - 626x^4 + 625 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en la incógnita x^4. Las soluciones son:

$$x^4 = 1 \implies x = \pm 1$$

$$x^4 = 625 \implies x = \pm 5$$

Las soluciones negativas no son válidas porque no existe logaritmos de números negativos. Por consiguiente, las soluciones del sistema son $(1, 5)$ y $(5, 1)$.

---

2. Combinatoria e inducción

Ejercicio 1. *Demostrar por inducción que, para $n \geq 1$, $3^{2n+6} - 2^n$ es múltiplo de 7.*

Solución:

Cuando un número es múltiplo de 7 lo indicaremos por $\overset{\circ}{7}$.

- ⋄ El teorema se cumple para $n = 1$ puesto que:

$$3^{2\cdot 1+6} - 2^1 = 3^8 - 2^1 = 6561 - 2 = 6559 = \overset{\circ}{7}$$

- ⋄ Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir:

$$3^{2k+6} - 2^k = \overset{\circ}{7}$$

Debemos demostrar que en ese caso se cumple para $n = k + 1$, es decir, debemos demostrar:

$$3^{2(k+1)+6} - 2^{k+1} = 3^{2k+8} - 2^{k+1} = \overset{\circ}{7}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 3^{2k+8} - 2^{k+1} &= 3^2 \cdot 3^{2k+6} - 2 \cdot 2^k && \text{por la hipótesis } 3^{2k+6} = \overset{\circ}{7} + 2^k\text{:} \\ &= 9 \cdot (\overset{\circ}{7} + 2^k) - 2 \cdot 2^k \\ &= \overset{\circ}{7} + 9 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k \\ &= \overset{\circ}{7} + 7 \cdot 2^k \\ &= \overset{\circ}{7} && \square \end{aligned}$$

◇ De los apartados anteriores se deduce que el teorema se cumple para $n \geq 1$.

Ejercicio 2. *Demostrar por inducción matemática que:*

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Solución:

◇ El teorema se cumple para $n = 1$ puesto que:

$$\sum_{r=1}^{1} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

◇ Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir:

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

y debemos demostrar que, en este caso, también se cumple para $n = k + 1$, es decir:

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1} = \frac{k+1}{2k+3}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} &= \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2k+3} && \square \end{aligned}$$

◇ Como consecuencia de los apartados anteriores, el teorema se cumple para $n \geq 1$.

Ejercicio 3. *Hallar el coeficiente de x^{14} en el desarrollo de:* $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^{10}$.

Solución:

Primero calculemos qué término contiene la potencia 14 de x:

$$(-1)(10-k) + 2k = 14 \quad \Longrightarrow \quad 3k = 24 \quad \Longrightarrow \quad k = 8$$

Este término es:

$$\binom{10}{8}\left(\frac{2}{x}\right)^2 \left(x^2\right)^8 = \binom{10}{2} 2^2 x^{14} = 45 \cdot 4x^{14} = 180x^{14}$$

El coeficiente de x^{14} es 180.

Ejercicio 4. *El coeficiente de x en el desarrollo de:*

$$\left(x + \frac{1}{ax^2}\right)^7$$

es $\frac{7}{3}$. Hallar el valor de a.

Solución:

El término que contiene la potencia x es:

$$7 - k - 2k = 1 \quad \Longrightarrow \quad -3k = -6 \quad \Longrightarrow \quad k = 2$$

Este término es entonces:

$$\binom{7}{2} x^5 \left(\frac{1}{ax^2}\right)^2 = \frac{21}{a^2}\, x$$

Por consiguiente:

$$\frac{21}{a^2} = \frac{7}{3} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad a = \pm 3$$

Ejercicio 5. *¿De cuántas maneras pueden repartirse 4 cartas de una baraja de cuarenta cartas? ¿Cuántas de ellas contienen exactamente dos ases?*

Solución:

El número de modos en que pueden repartirse las cartas es:

$$\binom{40}{4} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 91390$$

De estas contienen dos ases:

$$\binom{4}{2}\binom{36}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{36 \cdot 35}{2 \cdot 1} = 3780$$

Ejercicio 6. *Con las letras de la palabra GLORIA, ¿cuántas palabras de 6 letras diferentes pueden formarse? ¿En cuántas de ellas aparecen las tres vocales juntas?*

Solución:

El número de palabras que pueden formarse es:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

El grupo de vocales puede estar en 4 posiciones diferentes. Para cada una de ellas las vocales pueden ordenarse de 3! maneras y las consonantes de otras 3! maneras. En total:

$$4 \cdot 3! \cdot 3! = 144$$

Ejercicio 7. *Con 10 personas se desean formar dos equipos, uno de 6 y otro de 4 personas. ¿De cuántas maneras puede hacerse? ¿Y si los dos equipos fueran de 5 personas?*

Solución:

En el primer caso, se trata de combinaciones:

$$C_{10,6} = C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Si los equipos son de 5 personas es preciso dividir por 2 ¿por qué?:

$$\frac{1}{2}\,C_{10,5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Ejercicio 8. *Con las cifras* $1, 2, 3, \ldots, 9$*, ¿cuántos números impares de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos de ellos son mayores de 800?*

Solución:

La cifra de las unidades puede elegirse de 5 maneras distintas. Para cada una de ellas, la de las decenas puede elegirse de 8 y la de las centenas de 7 modos diferentes. La cantidad de números de tres cifras es:

$$8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

En el segundo caso, la cifra de las centenas puede ser 8 o 9. Si es 8 tenemos 5 posibilidades para las unidades y 7 para las decenas. Si es 9, tenemos 4 posibilidades para las unidades y 7 para las decenas. En total:

$$5 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 63$$

---

3. Examen de la primera evaluación

Ejercicio 1. *Calcular los valores de* m *para los cuales la ecuación:*

$$m - 2 + (2m + 1)x + mx^2 = 0$$

no tiene soluciones reales.

Solución:

El discriminante de la ecuación debe ser menor que cero:

$$(2m+1)^2 - 4m(m-2) < 0 \quad \Longrightarrow \quad 12m+1<0 \quad \Longrightarrow \quad m < -\frac{1}{12}$$

Ejercicio 2. *Encontrar el valor de a sabiendo que al dividir $x^4-3x^3+ax^2-4x+7$ por $x+2$, da de resto 7.*

Solución:

El valor numérico del polinomio para $x=-2$ debe ser 7. Entonces:

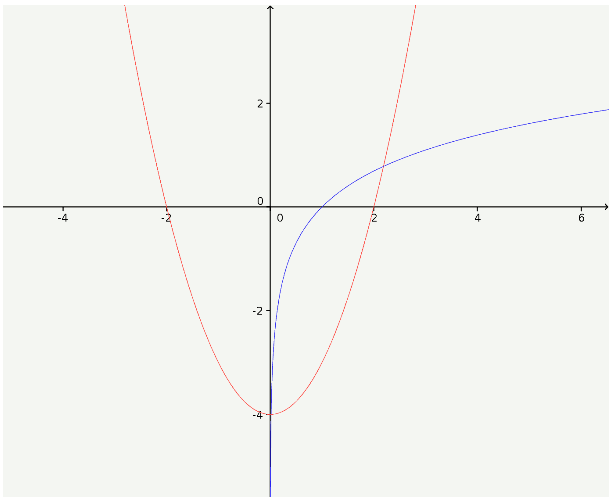
$$(-2)^4-3(-2)^3+a(-2)^2-4(-2)+7=7 \quad \Longrightarrow \quad 16+24+4a+8=0 \quad \Longrightarrow \quad a=-12$$

Ejercicio 3. *Con ayuda de la calculadora resolver la ecuación:*

$$x^2 = 4 + \ln x$$

Solución:

Como se ve en el gráfico, las curvas $y=\ln x$ e $y=x^2-4$ se cortan en dos puntos.



Las abscisas de los dos puntos de intersección son las soluciones de la ecuación. Con tres cifras decimales, estos números son $x=0,018$ y $x=2{,}187$.

Ejercicio 4. *Sin ayuda de la calculadora, resolver:*

$$6x^4+16x^3+12x^2-2>0$$

Solución:

Las posibles raíces enteras son ± 1 y ± 2. Probamos con -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 16 & 12 & 0 & -2 \\ -1 & & -6 & -10 & -2 & 2 \\ \hline & 6 & 10 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Tenemos una primera factorización:

$$6x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 2 = (x+1)(6x^3 + 10x^2 + 2x - 2)$$

Volvemos a dividir por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 10 & 2 & -2 \\ -1 & & -6 & -4 & 2 \\ \hline & 6 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$

De modo que obtenemos:

$$6x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 2 = (x+1)(6x^3 + 10x^2 + 2x - 2) = (x+1)^2(6x^2 + 4x - 2)$$

y factorizando el polinomio de segundo grado obtenemos finalmente:

$$6x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 2 = (x+1)(6x^3 + 10x^2 + 2x - 2) = (x+1)^2(6x^2 + 4x - 2) = (x+1)^3(6x-2)$$

Las raíces del polinomio son $x = -1$ y $x = \frac{1}{3}$.

Hacemos el esquema de signos:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + \\ \hline & -1 & & \frac{1}{3} & \end{array}$$

La solución de la inecuación es $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$.

Ejercicio 5. *¿De cuántas maneras pueden repartirse* 5 *cartas de una baraja española de* 40 *cartas de modo que* 2 *sean de oros y* 3 *de copas?.*

Solución:

Los oros pueden elegirse de $\binom{10}{2}$ maneras y las copas de $\binom{10}{3}$ maneras. En total:

$$\binom{10}{2}\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 45 \cdot 120 = 5400$$

Ejercicio 6. *Resolver la ecuación:*

$$3^x - 3^{2-x} = 8$$

Solución:

$$3^x - 3^{2-x} = 8$$

$$3^x - \frac{3^2}{3^x} = 8$$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3^x = 9, \quad 3^x = -1$$

La segunda solución de 3^x no da ninguna solución para x. Así pues la única solución es $x = 2$.

Ejercicio 7. *Calcular el término independiente de:*

$$\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$$

Solución:

El término independiente cumple:

$$2n - (9 - n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad n = 3$$

Este término es:

$$\binom{9}{3}(3x^2)^3\left(\frac{1}{2x}\right)^6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3^3}{2^6} = \frac{567}{16}$$

Ejercicio .8 *Demostrar por inducción que* $3^{2n} - 8n - 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+$*, es un múltiplo de* 64*.*

Solución:

- ⋄ El teorema se cumple para $n = 1$:

  $$3^2 - 8 - 1 = 0 = \overset{o}{64}$$

- ⋄ Suponemos que se cumple para $n = h$, es decir se cumple que:

  $$3^{2h} - 8h - 1 = \overset{0}{64}$$

  y debemos demostrar que se cumple para $n = h + 1$. Debemos demostrar que:

  $$3^{2(h+1)} - 8(h + 1) - 1 = 9 \cdot 3^{2h} - 8h - 9 = \overset{o}{64}$$

  En efecto, puesto que el teorema se cumple para $n = h$:

  $$3^{2h} = 8h + 1 + \overset{o}{64}$$

  Entonces:

  $$\begin{aligned} 3^{2(h+1)} - 8(h + 1) - 1 &= 9 \cdot 3^{2h} - 8h - 9 \\ &= 9(8h + 1 + \overset{o}{64}) - 8h - 9 \\ &= 72h + 9 + \overset{o}{64} - 8h - 9 \\ &= 64h + \overset{o}{64} = \overset{o}{64} \end{aligned}$$

- ⋄ De los apartados anteriores se deduce que el teorema se cumple para $n \geq 1$

Ejercicio 9. *Calcular el valor de a tal que las raíces α y β de la ecuación:*

$$x^2 + ax + a + 1 = 0$$

cumplen que $\alpha^3 + \beta^3 = 9$.

Solución:

Las soluciones de la ecuación cumplen:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = a + 1 \\ \alpha^3 + \beta^3 = 9 \end{cases}$$

Pero:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

Por tanto:

$$-a^3 - 3(a + 1)(-a) = 9 \quad \Longrightarrow \quad -a^3 + 3a^2 + 3a - 9 = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones $a = 3$, $a = -\sqrt{3}$ y $a = \sqrt{3}$.

---

4. Trigonometría

Ejercicio 1. *La función:*

$$f(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) + C$$

toma como valor máximo 72 y como valor mínimo 54. Sabiendo además que su período es igual a 20 y que el máximo de la función se da para $x = 7$, calcular A, ω, φ y C.

Solución:

La amplitud está dada por:

$$\frac{72 - 54}{2} = 9$$

El desplazamiento vertical:

$$C = \frac{72 + 54}{2} = 63$$

La frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} = 0{,}314$$

Finalmente, el desfase: puesto que el máximo se da para $x = 7$, el valor cero de la función se puede obtener restando una cuarta parte del período, o sea que la función vale cero para $x = 2$. Entonces:

$$\frac{\varphi}{\omega} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -2 \cdot 0{,}314 = -0{,}628$$

La función es:

$$f(x) = 9\,\mathrm{sen}(0{,}314x - 0{,}628) + 63$$

Ejercicio 2. *En el triángulo de lados* $a = 345$ cm*,* $b = 207$ cm*,* $c = 185$ cm*, calcular el ángulo* A *en grados minutos y segundos.*

Solución:

Por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{207^2 + 185^2 - 345^2}{2 \cdot 207 \cdot 185} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 123^{\rm o}12'42''$$

Ejercicio 3. *De un triángulo se conoce* $A = 57^o$*,* $B = 68^o$ *y* $c = 110$ m*. Calcular su área.*

Solución:

El ángulo C mide:

$$C = 180^{\rm o} - 57^{\rm o} - 58^{\rm o} = 55^{\rm o}$$

Calculamos el lado b por el teorema del seno:

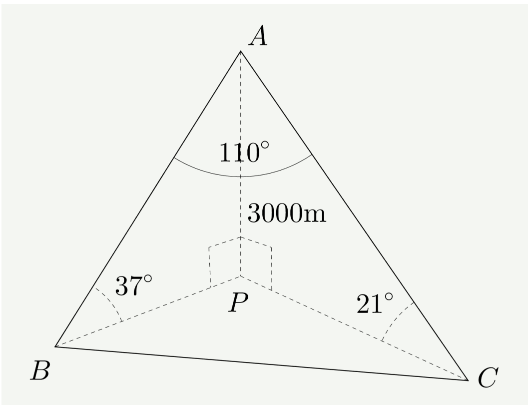
$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{110 \operatorname{sen} 68^{\rm o}}{\operatorname{sen} 55^{\rm o}} = 124{,}51 \text{ cm}$$

El área mide:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A = 5743{,}12 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4. *Desde un avión de reconocimiento* A *volando sobre un punto* P *de la superficie del mar a* 3000 *metros de altura, se divisa un carguero* B *bajo un ángulo de depresión de* 37^o *y un petrolero* C *bajo un ángulo de depresión de* 21^o*. Sabiendo que el ángulo* BAC *es de* 110^o *calcular la distancia* BC *entre los dos barcos.*

Solución:



De la figura se deduce:

$$AB = \frac{3000}{\operatorname{sen} 37^{\rm o}} \qquad\qquad AC = \frac{3000}{\operatorname{sen} 21^{\rm o}}$$

y por el teorema del coseno:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 110^{\rm o} \qquad \Longrightarrow \qquad BC = 11111{,}84 \text{ m}$$

Ejercicio 5. *Resolver la ecuación:*

$$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$$

Solución:

$$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 3 = 0$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

La solución $\cos x = -2$ es imposible, de forma que tenemos:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 120^{\text{o}} \pm 360^{\text{o}} K \\ x = 240^{\text{o}} \pm 360^{\text{o}} K \end{cases} \qquad K = 0, 1, 2, \dots$$

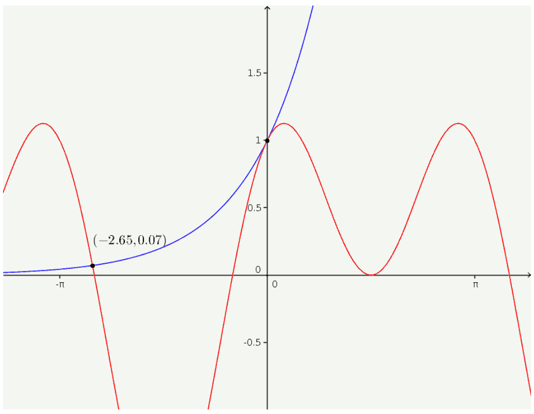
Ejercicio 6. *Calcular con tres cifras significativas las soluciones de la ecuación:*

$$e^x = \cos 2x + \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución:

Representamos gráficamente las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x \cos 2x + \operatorname{sen} x)$ y obtenemos:



Las gráficas se cortan en $x = -2{,}65$ y $x = 0$. Éstas son las soluciones de la ecuación.

Ejercicio 7. *Demostrar la identidad:*

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$$

Solución:

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$$

Ejercicio 8. *Sabiendo que* $A \operatorname{sen} 4x + B \operatorname{sen} 2x = 0$ *y que* $0 < x < \frac{\pi}{2}$*, calcular* $\cos 2x$ *en función de* A *y* B.

Solución:

$$A \operatorname{sen} 4x + B \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$A \cdot 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$\operatorname{sen} 2x\,(2A \cos 2x + B) = 0$$

Puesto que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, el primer factor es distinto de cero. Por consiguiente, debe ser cero el segundo factor:

$$2A \cos 2x + B = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos 2x = -\frac{B}{2A}$$

---

5. Números complejos

Ejercicio 1. *Calcular:*

$$\frac{(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)}{(1+i)^3 + (1-i)^3}$$

Solución:

El denominador es una suma de complejos conjugados. Por consiguiente, la parte imaginaria es nula. En el numerador hay dos productos de complejos conjugados que, como es sabido, es igual al módulo del complejo al cuadrado. Así:

$$\frac{(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)}{(1+i)^3 + (1-i)^3} = \frac{(1+1)(4+1)}{1-3+1-3} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

Ejercicio 2. *Calcular en forma binómica el complejo z' resultado de girar $z = -1 + i$ un ángulo de 120^o en torno a $c = 3 - 2i$.*

Solución:

$$\begin{aligned}
z' &= c + (z - c)(\cos 120^{\circ} + i \operatorname{sen} 120^{\circ}) \\
&= 3 - 2i + (-1 + i - 3 + 2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 3 - 2i + (-4 + 3i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 3 - 2i + 2 - 2\sqrt{3}i - \frac{3}{2}\,i - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\
&= \left(5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{7}{2} - 2\sqrt{3}\right) i
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Calcular mediante la fórmula de Moivre* $\operatorname{tg}(3\varphi)$ *en función de* $\operatorname{tg}\varphi$.

Solución:

Por la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 &= \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi \\
&= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i \operatorname{sen}\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2 \operatorname{sen}^2\varphi + i^3 \operatorname{sen}^3\varphi \\
&= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + (3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi)i
\end{aligned}$$

y de aquí, igualando partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3\varphi &= 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi \\
\cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi
\end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro resulta:

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi}$$

y dividiendo numerador y denominador por $\cos^3\varphi$ se obtiene finalmente:

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi}$$

Ejercicio 4. *Determinar los complejos cuyo cubo sea igual a su conjugado.*

Solución:

Debemos resolver la ecuación:

$$z^3 = z^*$$

Sea $z = r_\varphi$. La ecuación queda:

$$(r_\varphi)^3 = r_{-\varphi} \qquad \text{o bien} \qquad \left(r^3\right)_{3\varphi} = r_{-\varphi}$$

Para que dos complejos sean iguales, sus módulos deben ser iguales, y sus argumentos deben diferir en un número entero de vueltas. Entonces:

$$r^3 = r \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

El único complejo de módulo cero es $z_1 = 0$. Esta es la primera solución.

Si el complejo tiene módulo 1, tenemos la siguiente condición para los argumentos:

$$3\varphi = -\varphi + 360^{\text{o}}K \quad \Longrightarrow \quad 4\varphi = 360^{\text{o}}K, \qquad K \in \mathbb{Z}$$

Lo que nos da las siguientes soluciones:

$$K = 0, \quad \varphi = 0, \qquad z_2 = 1_{0^{\text{o}}} = 1$$
$$K = 1, \quad \varphi = 90^{\text{o}}, \quad z_3 = 1_{90^{\text{o}}} = i$$
$$K = 2, \quad \varphi = 180^{\text{o}}, \quad z_4 = 1_{180^{\text{o}}} = -1$$
$$K = 3, \quad \varphi = 270^{\text{o}}, \quad z_4 = 1_{270^{\text{o}}} = -i$$

Ejercicio 5. *Calcular (sin calculadora) en forma binómica las raíces cuadradas de* $21 - 20i$.

Solución:

Debemos encontrar un $z = x + yi$ tal que:

$$(x + yi)^2 = (x^2 - y^2 + 2xyi) = 21 - 20i$$

Igualando partes reales e imaginarias resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = -20 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$y = -\frac{10}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \frac{100}{x^2} = 21$$
$$x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

Esta ecuación bicuadrada tiene como soluciones $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$. Los valores correspondientes de y son $y_1 = 2$ e $y_2 = -2$. Las raíces del complejo son $z_1 = -5 + 2i$ y $z_2 = 5 - 2i$.

---

6. Geometría: ecuación de la recta

Ejercicio 1. *Dadas las rectas* $2x + y - 1 = 0$ *;* $x - y - 2 = 0$*, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y es perpendicular a la* $3x + 6y - 1 = 0$.

Solución:

Calculamos el punto de intersección de las dos rectas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución el punto $P(1,-1)$.

La recta $3x+6y-1=0$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. La perpendicular tendrá pendiente $m=2$. La ecuación de la recta es:

$$y+1=2\,(x-1)$$

Ejercicio 2. *Determinar el punto simétrico del $P(3,2)$ respecto a la recta $r:\ 2x+y=3$.*

Solución:

- ◇ Recta perpendicular a r por el punto P. La pendiente de r es -2 de modo que la perpendicular es:

$$y-2=\frac{1}{2}\,(x-3)$$
$$2y-4=x-3$$
$$x-2y+1=0$$

- ◇ Pie de la perpendicular. Calculamos la intersección de la perpendicular con la recta dada. Este punto es medio entre el punto dado y su simétrico:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$$

  El punto de intersección es el punto $Q(1,1)$.

- ◇ Punto simétrico. Puesto que $Q(1,1)$ es punto medio entre $P(3,2)$ y su simétrico $P'(x',y')$ se tiene que:

$$1=\frac{3+x'}{2}$$
$$1=\frac{2+y'}{2}$$

  De aquí se obtiene $P'(-1,0)$.

Ejercicio 3. *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $(-8,9)$ forman un ángulo de 45° con la recta $6x-5y=17$.*

Solución:

Si la pendiente de estas rectas es m se cumple que:

$$\operatorname{tg} 45^{\text{o}}=1=\left|\frac{\frac{6}{5}-m}{1+\frac{6}{5}m}\right|=\left|\frac{6-5m}{5+6m}\right|$$

o bien:

$$\frac{6-5m}{5+6m}=\pm 1$$

que da dos soluciones $m=-11$ y $m=\frac{1}{11}$. Las rectas buscadas son:

$$y-9=-11\,(x+8)$$
$$y-9=\frac{1}{11}\,(x+8)$$

Ejercicio 4. *Hallar m sabiendo que vale 20 el área del triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(4,-5)$, $C(5,m)$.*

Solución:

- La longitud del lado AB (base del triángulo) es:

$$c = \sqrt{(4-2)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{40}$$

y la ecuación de este mismo lado es:

$$\begin{aligned} & y - 1 = \frac{-6}{2}(x-2) \\ & y - 1 = -3x + 6 \\ & 3x + y - 7 = 0 \end{aligned}$$

- La distancia de C al lado AB (altura del triángulo) es:

$$\left| \frac{3 \cdot 5 + m - 7}{\sqrt{10}} \right| = \left| \frac{8+m}{\sqrt{10}} \right|$$

- Puesto que el área es igual a 20:

$$\frac{1}{2}\sqrt{40}\left| \frac{8+m}{\sqrt{10}} \right| = |8+m| = 20 \quad \Longrightarrow \quad 8+m = \pm 20$$

y de aquí las dos soluciones $m = 12$ y $m = -28$.

Ejercicio 5. *Calcular el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,2)$ y $C(6,4)$.*

Solución:

- Mediatriz de AB.

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ & x^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \\ & 8x + 4y - 20 = 0 \\ & 2x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

- Mediatriz de AC.

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = (x-6)^2 + (y-4)^2 \\ & x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 \\ & 12x + 8y - 52 = 0 \\ & 3x + 2y - 13 = 0 \end{aligned}$$

- Circuncentro. Calculamos la intersección de las dos mediatrices:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 13 = 0 \end{cases}$$

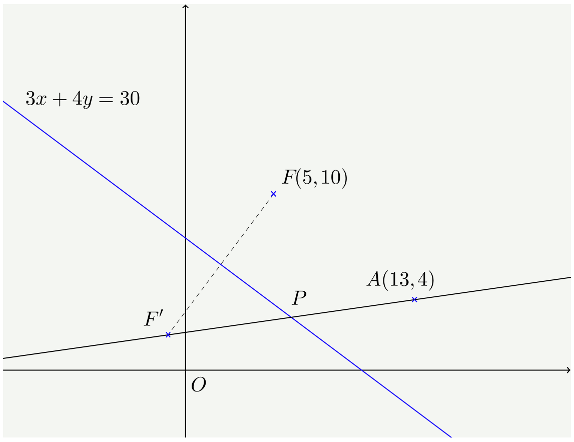
La solución de este sistema es el punto $(-3, 11)$.

- Radio. El radio es la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices:

$$R = \sqrt{(-3-0)^2 + (11-0)^2} = \sqrt{130}$$

Ejercicio 6. *¿En qué punto de la recta $3x + 4y = 30$ tendrá qué reflejarse un rayo luminoso que parte del punto $F(5, 10)$ para que después de la reflexión pase por el punto $A(13, 4)$?*

Solución:



- ⋄ Calculamos F', punto simétrico de $F(5, 10)$ respecto a la recta $3x + 4y = 30$. Este punto es $F'(-1, 2)$.
- ⋄ Calculamos la ecuación de la recta $F'A$. Esta recta es $x - 7y + 15 = 0$.
- ⋄ El punto buscado P es la intersección de la recta $F'A$ con la recta dada:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 30 = 0 \\ x - 7y + 15 = 0 \end{cases}$$

El punto de intersección es $P(6, 3)$.

---

7. Recta y circunferencia

Ejercicio 1. *Hallar el punto de la recta $2x - 4y = 1$ que con el origen de coordenadas y el punto $(-4, 0)$ determina un triángulo de área 3.*

Solución:

Puesto que la base del triángulo mide 4 y el área 3, la altura debe valer:

$$3 = \frac{1}{2}\,4h \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{3}{2}$$

Debemos buscar los puntos de la recta cuya ordenada sea $\frac{3}{2}$ o $-\frac{3}{2}$. estos puntos son:

$$2x - 4\,\frac{3}{2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{7}{2}$$

$$2x - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{5}{2}$$

Los puntos son $P_1\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $P_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Ejercicio 2. *Se considera la recta* $r:\ 3x+4y+1=0$ *y el punto* P *de esta recta cuya abscisa es igual a* 1*. Calcular los puntos de la recta que se encuentran a una distancia de* P *igual a* 5 *unidades.*

Solución:

La ordenada del punto P es:

$$3\cdot 1+4y+1=0 \quad\Longrightarrow\quad y=-1$$

Los puntos que nos piden deben estar sobre la recta ya distancia de P igual a 5. Son, por consiguiente los puntos de intersección de la recta con la circunferencia de centro $P(1,-1)$ y radio 5:

$$\begin{cases} 3x+4y+1=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2-25=0 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son $(5,-4)$ y $(-3,2)$.

Ejercicio 3. *Determinar los valores de* A *a fin de que la recta* $Ax-y+10=0$ *sea tangente a* $x^2+y^2=20$*.*

Solución:

El sistema:

$$\begin{cases} Ax-y+10=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

debe tener una sola solución.

Por sustitución:

$$x^2+(Ax+10)^2-20=0$$

$$x^2+A^2x^2+20Ax+100-20=0$$

$$x^2(1+A^2)+20Ax+80=0$$

Para que el sistema tenga una sola solución, el discriminante de esta ecuación debe ser cero:

$$400A^2-4\cdot 80(1+A^2)=0 \quad\Longrightarrow\quad A=-2 \quad \text{y} \quad A=2$$

Ejercicio 4. *Calcular la longitud del segmento interceptado en la recta* $x-2y+5=0$ *por la circunferencia* $x^2+y^2=25$ *así como su distancia al centro.*

Solución:

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

y obtenemos los puntos $P(3,4)$ y $Q(-5,0)$. La longitud del segmento PQ es:

$$PQ=\sqrt{(-5-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{80}$$

El centro de la circunferencia es $O(0,0)$. La distancia de este punto a la recta dada es:

$$d = \frac{5}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

Ejercicio 5. *Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas* $4x+3y-4=0$*;* $3x-4y+2=0$ *que tienen sus centros sobre la recta* $2x-y+3=0$*.*

Solución:

El centro de la circunferencia debe estar sobre la mediatriz de las dos rectas tangentes. Las mediatrices de estas dos rectas son:

$$\frac{4x+3y-4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{3x-4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

Las dos mediatrices son $x+7y-6=0$ y $7x-y-2=0$.

Como el centro debe estar también sobre la recta $2x-y+3=0$, encontramos sus coordenadas calculando la intersección de esta recta con las bisectrices. Tenemos dos soluciones:

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x+7y-6=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1(-1,1)$$

La segunda solución es:

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 7x-y-2=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_2(1,5)$$

Los radios de las circunferencias los obtenemos calculando las distancias de los centros a las rectas tangentes:

$$r_1 = \left|\frac{4(-1)+3\cdot 1-4}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 1$$

$$r_2 = \left|\frac{4\cdot 1+3\cdot 5-4}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 3$$

Las circunferencias buscadas tienen por ecuaciones:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1$$

$$(x-1)^2+(y-5)^2=9$$

Ejercicio 6. *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto* $A(6,6)$ *y es tangente a la recta* $r:\ 5x+7y+2=0$ *en el punto* $B(1,-1)$*.*

Solución:

El centro está en la mediatriz de AB:

$$(x-6)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$$

$$5x+7y=35$$

También se encuentra en la perpendicular a la recta r por B. Esta recta tiene como ecuación:

$$-7x+5y=-12$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 35 \\ -7x + 5y = -12 \end{cases}$$

La solución del sistema da el punto $C\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. estos cálculos se podían haber facilitado si nos damos cuenta que la mediatriz era paralela a la recta dada y que, por consiguiente, el centro es el punto medio de A y B.

El radio de la circunferencia es la distancia del centro a cualquiera de los puntos A o B (o a la recta r). Por ejemplo:

$$r^2 = \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} + 1\right)^2 = \frac{37}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{2}$$

8. Probabilidad y estadística

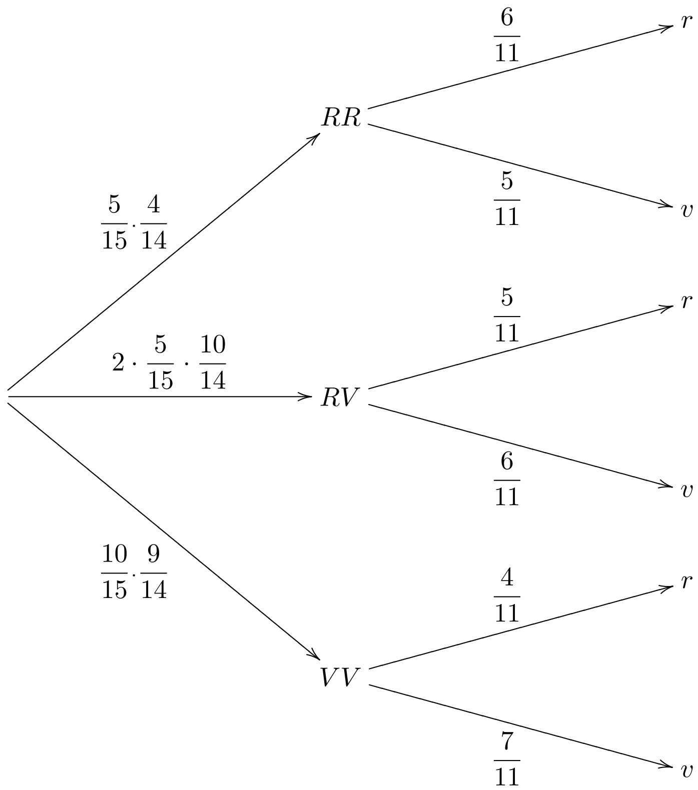
Ejercicio 1. *Tenemos dos jarras con canicas rosas y verdes. En la primera jarra hay 5 canicas rosas y 10 canicas verdes mientras que en la segunda hay 4 rosas y 5 verdes. Se pasan dos canicas de la primera jarra a la segunda y después se extrae una canica de la segunda jarra.*

(*a*) *¿Cuál es la probabilidad de que la canica extraída de la segunda jarra sea verde?*

(*b*) *Si la canica extraída de la segunda jarra ha sido rosa, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan pasado dos canicas rosas de la primera jarra?*

Solución:

El problema responde al siguiente esquema:



(*a*) $\mathrm{p}(v) = \frac{20}{210}\cdot\frac{5}{11} + \frac{100}{210}\cdot\frac{6}{11} + \frac{90}{210}\cdot\frac{7}{11} = \frac{133}{231} = \frac{19}{33}$

(*b*) $\mathrm{p}(RR|r) = \frac{\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{6}{11}}{1-\frac{19}{33}} = \frac{6}{49}$

Ejercicio 2. *Si* $\mathrm{p}(A\cap\bar{B}) = 0{,}5$, $\mathrm{p}(A\cap B) = 0{,}2$ y $\mathrm{p}(A\cup B) = 0{,}85$ *calcular:*

(*a*) $\mathrm{p}(A)$

(*b*) $\mathrm{p}(B)$

(*c*) $\mathrm{p}(\bar{A}\cap B)$

Solución:

(a) $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A \cap B) + \mathrm{p}(A \cap \bar{B}) = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$

(b) $\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(A \cup B) + \mathrm{p}(A \cap B) - \mathrm{p}(A) = 0{,}85 + 0{,}2 - 0{,}7 = 0{,}35$

(c) $p(\bar{A} \cap B) = \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$

Ejercicio 3. *Si* $\mathrm{p}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{p}(A \cup B) = \frac{5}{6}$ y $\mathrm{p}(B|A) = \frac{3}{4}$:

(a) *Calcular* $\mathrm{p}(B)$.

(b) *¿Son independientes los sucesos* A y B?

Solución:

(a) Calculamos primero $\mathrm{p}(A \cap B)$:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Entonces:

$$\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(A \cup B) + \mathrm{p}(A \cap B) - \mathrm{p}(A) = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

(b) Puesto que:

$$\mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = \mathrm{p}(A \cap B)$$

los dos sucesos son independientes.

Ejercicio 4. *El señor Jones, gerente del restaurante* Dolce Vita*, ha recogido datos sobre los hábitos de sus clientes durante un año.*

(a) *De acuerdo con sus datos, el* 6 % *de los clientes que hacen una reserva luego no se presentan. En un día dado, 200 personas reservan mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos dos de ellas no se presenten?*

(b) *Los datos del señor Jones muestran también que la media del tiempo que los clientes pasan en el restaurante es de 52 minutos con una desviación típica de 15 minutos. Calcular el intervalo mínimo de tiempo entre dos reservas de la misma mesa si se desea que la probabilidad de que coincidan dos reservas sea menor del* 1 %.

(c) *En un día especial* Dolce Vita *necesita un mínimo de 15 camareros. Los datos muestran que, en promedio, un* 15 % *de los camareros faltan al trabajo. Calcular el número mínimo de camareros que debe contratar el señor Jones si quiere que la probabilidad de contar con menos de 15 camareros sea menor del* 5 %.

Establecer claramente los modelos de probabilidad que se utilizan para resolver el problema.

Solución:

(a) Las probabilidades pueden asignarse mediante una distribución binomial B(200; 0,06). El número de pruebas es 200 y la probabilidad de éxito (que no se presente el cliente) es 0,06. Entonces:

$$\mathrm{p}(X = 2) = 0{,}000342$$

(b) Supondremos que la duración de la comida D sigue una distribución normal N(52; 15). Calculamos:

$$\mathrm{p}(D < d) = 0{,}99 \quad \Longrightarrow \quad d = 86{,}9 \text{ minutos}$$

El 99 % de las comidas duran menos de 86,9 minutos. Éste es el tiempo que se debería establecer entre dos reservas consecutivas.

(c) En este caso el modelo va a ser una distribución binomial B(n; 0,85) en la que n es el número de camareros que se deben contratar y la probabilidad de éxito (que el camarero no falte al trabajo) es 0,85.

Buscamos el menor n tal que:

$$\mathrm{p}(X \leq 14) \leq 0{,}05$$

Para $n = 20$ obtenemos que la probabilidad es 0,067 (mayor que 0,05). Sin embargo para $n = 21$ ya es menor. El señor Jones debe contratar a 21 camareros.

9. Segundo examen de probabilidad y estadística

Ejercicio 1. *Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ y $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular:*

(a) $\mathrm{p}(B|A)$

(b) $\mathrm{p}(\bar{A}|B)$

Solución:

Puesto que

$$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \mathrm{p}(\overline{A \cap B}) = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(a) $\mathrm{p}(B|A) = \dfrac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(b) $\mathrm{p}(\bar{A}|B) = \dfrac{\mathrm{p}(\bar{A} \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \dfrac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{7}{12}$

Ejercicio 2. *En una clase de 20 alumnos hay 12 que estudian Biología, 15 que estudian Historia y 2 alumnos que no estudian ni Biología ni Historia.*

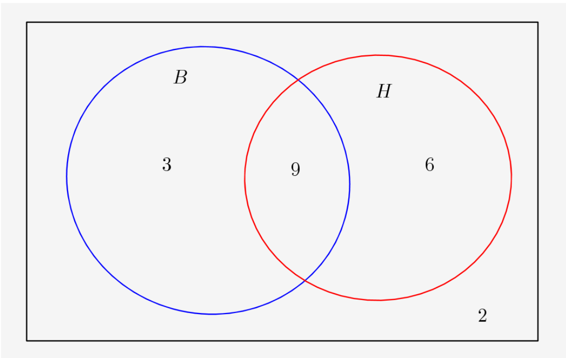
(a) *Represente esta información en un diagrama de Venn.*

(b) *Halle la probabilidad de que un alumno de esta clase elegido al azar esté estudiando ambas asignaturas: Biología e Historia.*

(c) *Sabiendo que un alumno dado, elegido al azar, estudia Biología, halle la probabilidad de que este alumno también estudie Historia.*

Solución:

(a)



(b) $\mathrm{p}(B \cap H = \dfrac{9}{20}$

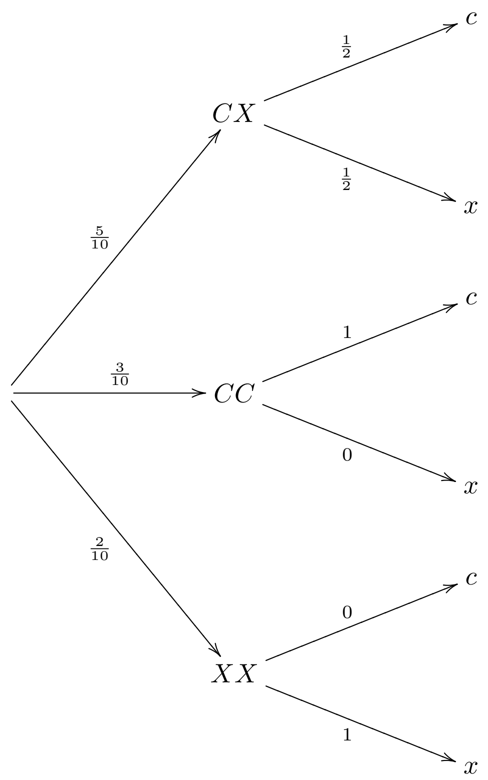
(c) $\mathrm{p}(H|B) = \dfrac{\mathrm{p}(H \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

Ejercicio 3. *Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.*

(a) *Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.*

(b) *Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?*

Solución:



Con el esquema anterior:

(a) $\mathrm{p}(c) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{10} \cdot 1 = \dfrac{11}{20}$

(b) $\mathrm{p}\left(< CX|c\right) = \dfrac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{20}} = \dfrac{5}{11}$

Ejercicio 4. *El tiempo que tardan los autobuses en hacer el recorrido entre dos ciudades dadas sigue una distribución normal, de media igual a 45 minutos y desviación típica igual a 7 minutos.*

(a) *Halle la probabilidad de que un autobús elegido al azar tarde menos de 40 minutos en hacer el viaje.*

(b) *El 90 % de los autobuses tardan menos de t minutos en hacer el viaje. Halle el valor de t.*

(c) *Para una muestra aleatoria de* 10 *autobuses se registra la duración del viaje entre las dos ciudades. Halle la probabilidad de que exactamente* 6 *de estos autobuses tarden menos de* 40 *minutos en hacer el viaje.*

Solución:

(*a*) Es una distribucion normal $\mathrm{N}(45, 7)$:

$$p = \mathrm{p}(X < 40) = 0{,}238$$

(*b*) Con la misma distribución:

$$\mathrm{p}(X < t) = 0{,}90 \quad \Longrightarrow \quad t = 54{,}0$$

(*c*) Es una distribución binomial con 10 pruebas y con la probabilidad de éxito que hemos obtenido anteriormante, es decir $\mathrm{B}(10, p)$:

$$\mathrm{p}(X = 6) = 0{,}0127$$

Ejercicio 5. *El número de accidentes de autobús que hay durante un intervalo de tiempo dado sigue una distribución de Poisson, siendo la media igual a* 0,6 *accidentes por día.*

(*a*) *Halle la probabilidad de que, en un día cualquiera elegido al azar, haya al menos dos accidentes.*

(*b*) *Halle el número más probable de accidentes que hay en un día cualquiera elegido al azar. Justifique su respuesta.*

(*c*) *Halle la probabilidad de que no haya ningún accidente en toda una semana (de siete días) elegida al azar.*

Solución:

(*a*) En una distribución $\mathrm{Po}(0{,}6)$ tenemos que:

$$\mathrm{p}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{p}(X \leq 1) = 0{,}122$$

(*b*) En esta distribución vemos que $\mathrm{p}(X = 0) = 0{,}549$. Es mayor que 0,5 y, por tanto, éste debe ser el valor más probable.

(*c*) Puede calcularse a partir de la distribución binomial de 7 pruebas con la probabilidad de éxito $p = \mathrm{p}(X = 0) = 0{,}549$ obtenida anteriormente o con una de Poisson de media $7 \times 0{,}6$. En cualquier caso se obtiene:

$$p = 0{,}0150$$

---

10. Funciones

Ejercicio 1. *Calcular el dominio de definición de la función:*

$$f(x) = \ln \frac{x^2 - 2x - 3}{4 - x^2}$$

Solución:

Las raíces del numerador son 3 y -1. las raíces del denominador son -2 y 2. Todas ellas son raíces simples por lo que los signos en los distintos intervalos aparecen alternados:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \nexists & & 0 & & \nexists & & 0 & \\ - & | & + & | & - & | & + & | & - \\ & -2 & & -1 & & 2 & & 3 & \end{array}$$

El dominio de la función es:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2 - 2x - 3}{4 - x^2} > 0 \right\} = (-2, -1) \cup (2, 3)$$

Ejercicio 2. *Calcular las funciones inversas de:*

(a) $f(x) = 2\ln(x^2 + 1)$ (b) $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

Solución:

(a) Intercambiamos las variables y despejamos y:

$$\begin{aligned} &x = 2\ln(y^2 + 1) \\ &\ln(y^2 + 1) = \frac{x}{2} \\ &y^2 + 1 = e^{\frac{x}{2}} \\ &y^2 = e^{\frac{x}{2}} - 1 \\ &y = \sqrt{e^{\frac{x}{2}} - 1} \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{e^{\frac{x}{2}} - 1}$$

(b) De forma similar:

$$\begin{aligned} &x = e^{\sqrt{y}} \\ &\sqrt{y} = \ln x \\ &y = (\ln x)^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$g^{-1}(x) = (\ln x)^2$$

Ejercicio 3. *Representar gráficamente la función cuadrática*

$$y = x^2 - 4x - 5$$

Obteniendo previamente el vértice y las intersecciones con los ejes.

Solución:

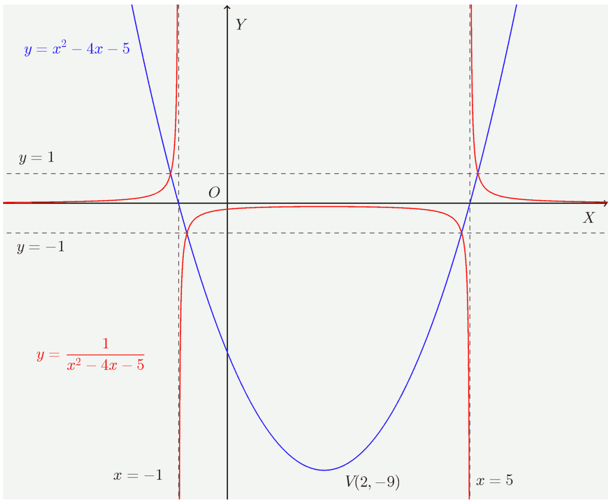


Figura 1: Representación de una función y su recíproca

La abscisa del vértice es:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

y la ordenada:

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$$

Las intersecciones con el eje de abscisas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x - 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

que son los puntos $A_1(-1, 0)$ y $A_2(5, 0)$.

La intersección con el eje OY es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x - 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

que es el punto $B(0, -5)$.

La representación gráfica de esta función aparece en la figura 1.

Ejercicio 4. *Representar gráficamente la recíproca de la función anterior:*

$$y = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$$

Solución:

Ver figura 1.

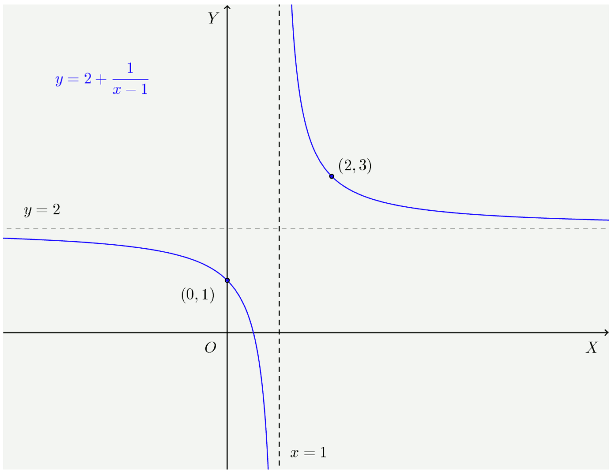
Ejercicio 5. *Representar gráficamente:*

$(a)\ \ y = 2 + \dfrac{1}{x-1}$

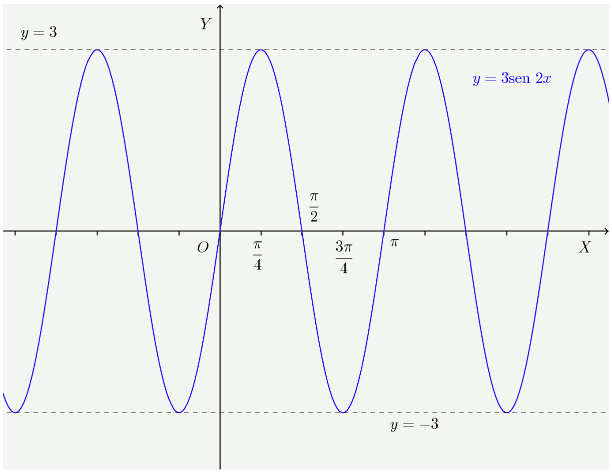
$(b)\ \ y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$

Solución:

(a) Se puede representar por traslación de la curva $y = \dfrac{1}{x}$:



(b) Cambiando la escala de la gráfica de $y = \mathrm{sen}\, x$ se obtiene:



Ejercicio 6. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x - x^2\right)$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{3}{5}$$

(b) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Puesto que la exponencial es un infinito de orden superior:

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^x - x^2\right) = \infty$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo i^∞. Aplicando la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+1}{2x-1}-1\right)\cdot\frac{1}{x-2}} \\
&= \lim_{x\to 2} e^{\frac{x+1-2x+1}{2x-1}\cdot\frac{1}{x-2}} \\
&= \lim_{x\to 2} e^{\frac{-x+2}{2x-1}\cdot\frac{1}{x-2}} \\
&= \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2x-1}} \\
&= e^{\frac{-1}{3}}
\end{aligned}$$

(b) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando las aproximaciones $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

Ejercicio 8. *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

Las posibles asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$. Calculemos los límites en estos puntos. En $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty$$

Por consiguiente, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable. No es asíntota vertical.

No hay asíntota horizontal puesto que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

La recta $y = x$ es una asíntota oblicua puesto que:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

Ejercicio 9. *Obtener y clasificar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3}$$

Solución:

Los puntos de discontinuidad son los valores de x que anulan el denominador. es decir, $x = 1$ y $x = -\frac{3}{2}$. Calculemos los límites de la función en estos puntos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{2x + 3} = \frac{3}{5}$$

Existe el limite y no existe la función. Se trata por consiguiente de una discontinuidad evitable.

En $x = -\frac{3}{2}$:

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \infty$$

hay un infinito de la función.

Ejercicio 10. *Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = \ln x - e^{-x}$$

se hace cero para algún valor de x.

La función $F(x$ es continua para $x > 0$ por ser suma de funciones continuas. Además:

$$F(1) = \ln 1 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0$$

$$F(2) = \ln 2 - \frac{1}{e^2} > 0$$

Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un punto $\xi \in (1, 2)$ tal que $F(\xi) = 0$.

---

11. Examen de mejora

Ejercicio 1. *Resolver la siguiente ecuación con números complejos:*

$$\frac{1}{2+3i} + \frac{1}{3+2i} = \frac{10}{z}$$

Dar el resultado en forma binómica y en forma polar.

Solución:

Multiplicando en el primer miembro el numerador y el denominador de cada una de las fracciones por el conjugado del denominador resulta:

$$\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} + \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{10}{z}$$

$$\frac{2-3i}{4+9} + \frac{3-2i}{9+4} = \frac{10}{z}$$

$$\frac{5-5i}{13} = \frac{10}{z}$$

$$z = \frac{10 \cdot 13}{5-5i} = \frac{26}{1-i} = \frac{26(1+i)}{(1-i)(1+i)} == \frac{26(1+i)}{2} = 13(1+i)$$

El módulo de este complejo es $13\sqrt{2}$ y el argumento $\frac{\pi}{4}$.

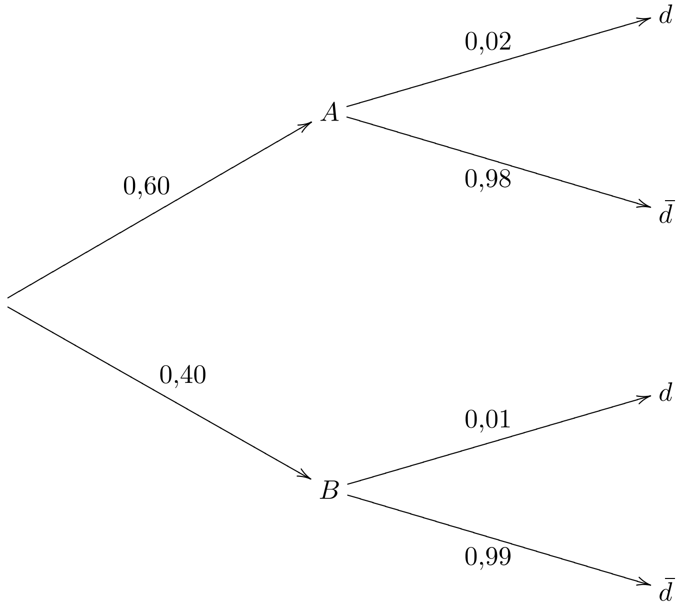
Ejercicio 2. *Hay dos máquinas que fabrican baterías para teléfonos móviles. Con la máquina A se fabrica el $60\,\%$ de la producción diaria y con la máquina B se fabrica el $40\,\%$. Al analizar el proceso se observa que, en promedio, el $2\,\%$ de las baterías que se fabrican con la máquina A son defectuosas , y el $1\,\%$ de las baterías que se fabrican con la máquina B son defectuosas.*

(*a*) *Se elige una batería al azar. Hallar la probabilidad de que sea defectuosa.*

(*b*) *Se elige una batería al azar y se observa que es defectuosa. Hallar la probabilidad de que se haya fabricado con la máquina A.*

Solución:

El problema responde al siguiente esquema:



(*a*) $\mathrm{p}(d) = \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{2}{100} + \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{1}{100} = \dfrac{160}{10000} = 0{,}016$

(*b*) $\mathrm{p}(A|d) = \dfrac{\mathrm{p}(A \cap d)}{\mathrm{p}(d)} = \dfrac{\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{160}{10000}} = \dfrac{120}{160} = \dfrac{3}{4}$

Ejercicio 3. *En un paquete de siete transistores hay tres que son defectuosos. Se eligen al azar tres transistores del paquete sin reposición. La variable aleatoria discreta X representa el número de transistores defectuosos que se han elegido.*

(*a*) *Hallar* $\mathrm{p}(X = 2)$.

(*b*) *Completar la siguiente tabla:*

x	0	1	2	3
$\mathrm{p}(X = x)$				

(*c*) *Determinar* $E(X)$.

Solución:

(*a*) $\mathrm{p}(X = 2) = 3\,\mathrm{p}(d \cap d \cap \bar{d}) = 3 \cdot \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{12}{35}$

(*b*) de la misma manera:

$$\mathrm{p}(X = 0) = \mathrm{p}(\bar{d} \cap \bar{d} \cap \bar{d}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

$$\mathrm{p}(X = 1) = 3\,\mathrm{p}(d \cap \bar{d} \cap \bar{d}) = 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{35}$$

$$\mathrm{p}(X = 3) = \mathrm{p}(d \cap d \cap d) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{35} = \frac{1}{35}$$

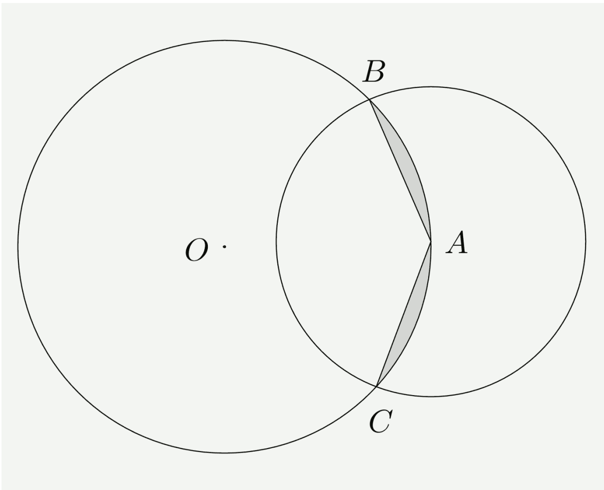
(c) El valor esperado de X es:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{4}{35}\cdot 0 + \frac{18}{35}\cdot 1 + \frac{12}{35}\cdot 2 + \frac{1}{35}\cdot 3 = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

Ejercicio 4. *La siguiente figura muestra dos circunferencias que se cortan, de radios* 4 cm *y* 3 cm*. El centro A de la circunferencia pequeña está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro de la circunferencia grande y las dos circunferencias se cortan en los puntos B y C. Hallar:*

(a) *El ángulo $\widehat{AOB}$.*

(b) *El área de la región sombreada.*



Solución:

(a) El ángulo (en radianes) vale:

$$\operatorname{sen}\frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{1{,}5}{4} = \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{AOB} = 2\operatorname{arsen}\frac{3}{8} = 0{,}769$$

(b) Se trata de dos segmentos circulares: El área de uno de ellos es:

$$S = \frac{1}{2}r^2\left(\widehat{AOB} - \operatorname{sen}\widehat{AOB}\right) = 0{,}588\ \mathrm{cm}^2$$

Multiplicando por 2 obtenemos el área buscada:

$$2S = 1{,}18\ \mathrm{cm}^2$$

Ejercicio 5. *Sabiendo que* $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 - i$:

(a) *Expresar u y v en forma polar.*

(b) *Calcular a partir del apartado anterior u^3v^4.*

(c) *Sean A y B los afijos de los complejos u y v. El punto A se gira 90^o alrededor del origen O en sentido contrario a las agujas del reloj convirtiéndose en el punto A'. El punto B se gira 90^o en el sentido del reloj y se convierte en el punto B'. Calcular el área del triángulo $OA'B'$.*

Solución:

(a) El complejo u tiene de módulo 2 y argumento 60º. El complejo v tiene de módulo $\sqrt{2}$ y argumento $-45º$. Así pues:

$$u = 2_{60^o}\ ; \qquad v = (\sqrt{2})_{-45^o}$$

(b) $u^3v^4 = 8_{180^o} \cdot 4_{-180^o} = (-8) \cdot (-4) = 32$

(c) Cuando u gira 90º en sentido positivo se transforma en 2_{150^o}. Cuando v gira 90º en sentido negativo se transforma en $\left(\sqrt{2}\right)_{-135^o} = \left(\sqrt{2}\right)_{225^o}$. La diferencia de argumentos de los dos complejos es 75º de forma que el ángulo $A'OB = 75^o$.

El área del triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2}\,2\sqrt{2}\,\text{sen}\,75^o = 1{,}366$$

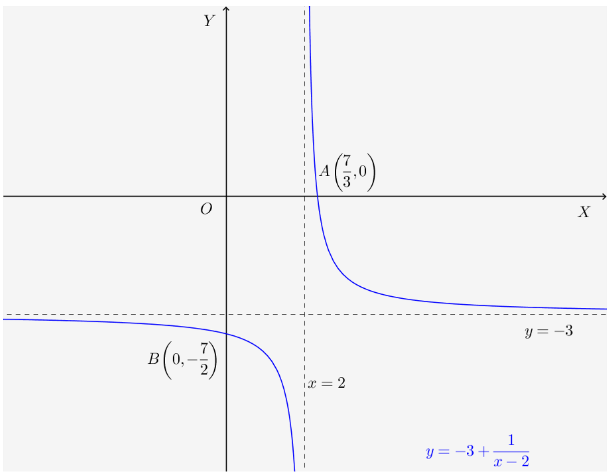
Ejercicio 6. *Sea la función:*

$$f(x) = -3 + \frac{1}{x-2}$$

(a) *Dibujar la gráfica de la función indicando las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.*

(b) *Calcular la función inversa.*

Solución:



Intercambiando las variables y despejando:

$$x = -3 + \frac{1}{y-2}$$

$$x + 3 = \frac{1}{y-2}$$

$$y - 2 = \frac{1}{x+3}$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$$

Ejercicio 7. *La función f viene dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \leq 2 \\ \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3 & x > 2 \end{cases}$$

(a) *Determinar si f es continua o no.*

(b) *El gráfico de la función g se obtiene aplicando las siguientes transformaciones al gráfico de f: una simetría respecto del eje y seguido por una traslación por medio del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcular $g(x)$.*

Solución:

El único posible punto de discontinuidad es $x = 2$. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 1 - 2x = 1 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3 = -3$$

Coinciden los límites laterales con el valor de la función. Por consiguiente, la función es continua en $x = 2$.

La simetría respecto al eje y se obtiene cambiando x por $-x$. Así obtenemos la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1+2x & -x \leq 2 \\ \frac{3}{4}(-x-2)^2 - 3 & -x > 2 \end{cases}$$

o bien:

$$h(x) = \begin{cases} 1+2x & x \geq -2 \\ \frac{3}{4}(x+2)^2 - 3 & x < -2 \end{cases}$$

La traslación se obtiene sustituyendo x por $x - 2$:

$$g(x) = \begin{cases} 1+2(x-2) & x-2 \geq -2 \\ \frac{3}{4}(x-2+2)^2 - 3 & x-2 < -2 \end{cases}$$

o bien:

$$g(x) = \begin{cases} -3+2x & x \geq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - 3 & x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 8. *Los pesos, en kilogramos, de los oseznos de un año siguen una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.*

(a) *Sabiendo que el peso correspondiente al tercer cuartil es de* 21,3 kg *y que el peso correspondiente al primer cuartil es de* 17,1 kg, *calcular el valor de μ y el valor de σ.*

(b) *Se toma una muestra aleatoria de 100 oseznos. Calcular el número esperado de oseznos que pesan más de* 22 kg.

Solución:

Los datos nos dicen que:

$$\text{p}(X < 17{,}1) = 0{,}25$$

$$\text{p}(X < 21{,}3) = 0{,}75$$

Pasando a puntuaciones típicas:

$$\text{p}\left(Z < \frac{17{,}1-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad \frac{17{,}1-\mu}{\sigma} = -0{,}675$$
$$\text{p}\left(Z < \frac{21{,}3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad \frac{21{,}3-\mu}{\sigma} = 0{,}675$$

Resolviendo se obtiene $\mu = 19{,}2$ y $\sigma = 3{,}11$.

La probabilidad de que el osezno pese más de 22 kg es:

$$p(X > 22) = 1 - p(X < 22) = 1 - 0{,}816 = 0{,}184$$

El número esperado de oseznos es 18,4.

Ejercicio 9. *Se considera la recta* $x - 2y + 5 = 0$ *y la circunferencia* $x^2 + y^2 = 25$.

(*a*) *Calcular la longitud del segmento interceptado en la recta por la circunferencia.*

(*b*) *Calcular la distancia entre el segmento y el centro de la circunferencia.*

Solución:

Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$(2y-5)^2 + y^2 = 25$$
$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 = 25$$
$$5y^2 - 20y = 0$$
$$y = 0\,; \; y = 4$$

y obtenemos los puntos $P(-5,0)$ y $Q(3,4)$.

La longitud del segmento es igual a la distancia entre estos puntos:

$$l = \sqrt{(-5-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

El centro de la circunferencia es $O(0,0)$. La distancia del centro a la recta es:

$$d = \frac{5}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$$

---

12. Segundo examen de límites y continuidad

Ejercicio 1. *Calcular el dominio de definición de la función:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4-x^2}}$$

Solución:

La raíz del numerador es 1. las raíces del denominador son -2 y 2. Todas ellas son raíces simples por lo que los signos en los distintos intervalos aparecen alternados:

	-2		1		2	
$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

El dominio de la función es:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{4-x^2} \geq 0 \right\} = (-\infty, -2) \cup [1, 2)$$

Ejercicio 2. *Calcular la función inversa de:*

(a) $f(x) = \ln(x-3)^2$ $\qquad$ (b) $g(x) = e^{3x+2}$

Solución:

(a) Intercambiamos las variables y despejamos:

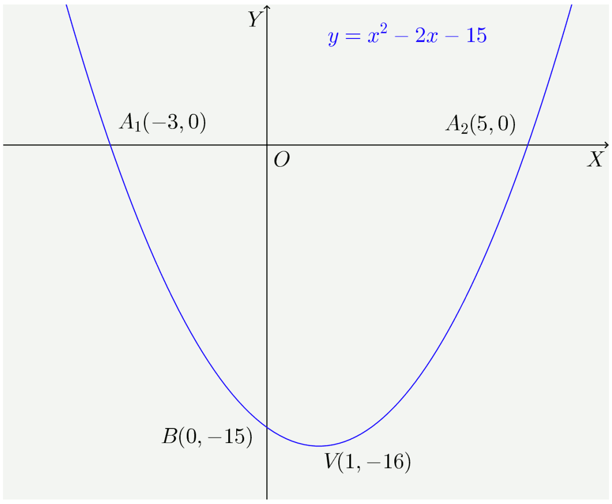
$$\begin{aligned}
&x = \ln(y-3)^2\\
&(y-3)^2 = e^x\\
&y - 3 = \sqrt{e^x}\\
&y = 3 + \sqrt{e^x}\\
&f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{e^x}
\end{aligned}$$

(b) Procediendo de la misma manera:

$$\begin{aligned}
&x = e^{3y+2}\\
&3y + 2 = \ln x\\
&3y = -2 + \ln x\\
&y = \frac{1}{3}(-2 + \ln x)\\
&g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(-2 + \ln x)
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Representar gráficamente la función cuadrática $y = x^2 - 2x - 15$ obteniendo previamente el vértice y las intersecciones con los ejes.*

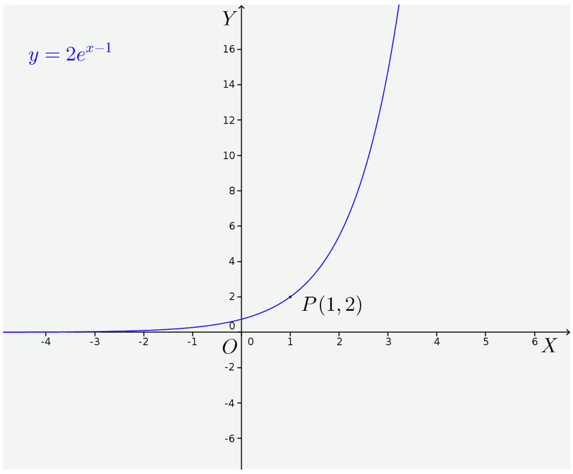
Solución:

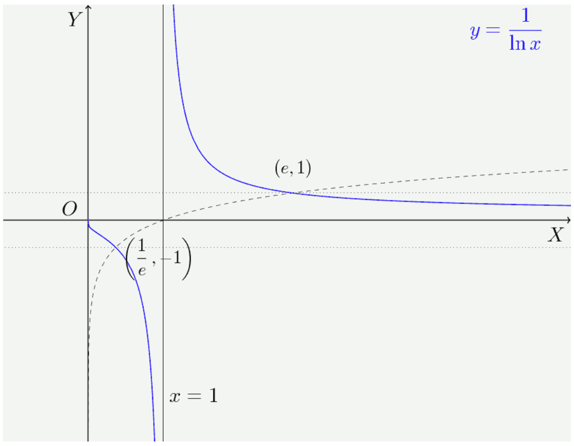


Ejercicio 4. *Representar gráficamente la función:*

$$f(x) = 2e^{x-1}$$

Solución:





Ejercicio 5. *Representar gráficamente la función:*

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

Solución:

Ver figura más arriba.

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right)$

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-1+x}{x(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Transformamos el radicando:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x-2)^2-4+1}-x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} (x-2-x) \\
&= -2
\end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$

Solución:

(a) Aplicando las aproximaciones $e^x - 1 \sim x$ y $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$ cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

(b) Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicamos la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$ válida cuando u tiende a 1 y v a infinito y se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x-3}{x+1}-1\right)2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-3-x-1}{x+1}\,2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-4}{x+1}\,2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x}{x}} \\
&= e^{-8}
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Demostrar mediante el teorema de Bolzano que la ecuación* $2x = \cos x$*, tiene al menos una solución.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = 2x - \cos x$$

se hace cero para algún valor de x.

La función $F(x)$ es continua por ser suma de funciones continuas.

Además:

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \cdot 0 - \cos 0 < 0 \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} > 0 \end{aligned}$$

Por el teorema de Bolzano, existe un número $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $F(\xi) = 0$. Este número es solución de la ecuación.

Ejercicio 9. *Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

Los posibles puntos de discontinuidad son $x = -3$ y $x = 3$. Estudiemos los límites de la función en estos puntos.

En $x = -3$:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) = \infty$$

En este punto hay un infinito de la función.

El límite cuando x tiende a 3 es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Operando resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{(x-3)(x+3)}\right) \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)-12}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Puesto que existe el límite pero no existe la función, se trata de una discontinuidad evitable.

Ejercicio 10. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

$(a)\ y = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $\qquad$ $(b)\ y = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$

Solución:

(a) La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-4} = 0$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to-2} \frac{2x+1}{x^2-4} = \infty$$

También $x = 2$ es asíntota vertical de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to2} \frac{2x+1}{x^2-4} = \infty$$

(b) La recta $x = 3$ es asíntota vertical ya que:

$$\lim_{x\to3} \frac{2x^2+1}{x-3} = \infty$$

No hay asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x-3} = \infty$$

Veamos si hay asíntota oblicua. Calculamos los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{2x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x-3} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x\to0} \frac{6x}{x} = 6$$

Por consiguiente, la recta $y = 2x + 6$ es asíntota de la curva.