Matemáticas 1ºBI.
Curso 2019-2020. Exámenes

1. Logaritmos (1)

Ejercicio 1. Calcular $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}+3\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{6}-\sqrt{150}$

Solución:

$$\begin{aligned}
&4\sqrt{\frac{2}{3}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{6}-\sqrt{150}\\
&\qquad=\frac{4\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}+\frac{3\cdot\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{6}-\sqrt{25\cdot 6}\\
&\qquad=\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}+2-5\right)\sqrt{6}\\
&\qquad=-\frac{\sqrt{6}}{6}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Simplificar $\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{20}-\sqrt{72}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{20}-\sqrt{72}\right)\\
&\qquad=\left(3\sqrt{5}+5\cdot 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{5}-6\sqrt{2}\right)\\
&\qquad=\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\\
&\qquad=60-3\sqrt{10}+28\sqrt{10}-14\\
&\qquad=46+25\sqrt{10}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Sabiendo que $\log 2=0{,}3010$ calcular $\log\sqrt{62{,}5}$

Solución:

$$\log\sqrt{62{,}5}=\frac{1}{2}\log\frac{625}{10}=\frac{1}{2}\log\frac{125}{2}=\frac{1}{2}\log\frac{1000}{8}=\frac{1}{2}\left(\log 1000-\log 16\right)=\frac{1}{2}\left(3-4\log 2\right)=0,8980$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los siguientes logaritmos:

$(a)\ \log_8 \sqrt{32}$ $\qquad$ $(b)\ \log_3 \dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$

Solución:

$$\log_8 \sqrt{32} = \frac{1}{2}\log_8 32 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = \log_3 \sqrt[3]{9} - \log_3 3 = \frac{1}{3}\log_3 9 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los siguientes logaritmos:

$(a)\ \log_{25} \dfrac{1}{5}$ $\qquad$ $(b)\ \log_9 3\sqrt{3}$

Solución:

$$\log_{25}\frac{1}{5} = \frac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 25} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\log_9 3\sqrt{3} = \frac{\log_3 3\sqrt{3}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3 + \log_3 \sqrt{3}}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resuelva la ecuación $\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = 4$.

Solución:

$$\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = 4 \quad\Longrightarrow\quad \log_2(x+3)(x-3) = 2 \quad\Longrightarrow\quad (x+3)(x-3) = 2^4$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 9 = 16 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -\sqrt{25} = -5 \text{ (no válida) ;} \quad x_2 = \sqrt{25} = 5 \text{ (válida)}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(a) Indique el conjunto de valores de a para los cuales la función $x \longmapsto \log_a x$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Sabiendo que $\log_x y = 4\log_y x$, halle todas las posibles expresiones de y en función de x.

Solución:

(a) La base de la función logarmica puede ser cualquier número real positivo distinto de 1.

(b) Pasando a base x obtenemos:

$$\log_x y = 4\log_y x \quad\Longrightarrow\quad \log_x y = 4\cdot\frac{\log_x x}{\log_x y} \quad\Longrightarrow\quad (\log_x y)^2 = 4$$

Entonces hau dos posibilidades:

$$\log_x y = -2 \quad\Longrightarrow\quad y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\log_x y = 2 \quad\Longrightarrow\quad y = x^2$$

Ambas soluciones son válidas.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación $3^x - \dfrac{4}{3^{x-2}} = 5$

Solución:

$$3^x - \frac{4}{3^{x-2}} = 5 \quad\Longrightarrow\quad 3^x - \frac{4}{\frac{3^x}{3^2}} = 5 \quad\Longrightarrow\quad 3^x - \frac{36}{3^x} = 5$$

Llamando $3^x = u$:

$$u - \frac{36}{u} = 5 \quad\Longrightarrow\quad u^2 - 5u - 36 = 0$$

Tenemos las soluciones:

$$u = 3^x = 9 \quad\Longrightarrow\quad x = \log_3 9 = 2$$
$$u = 3^x = -4 \quad \text{(no tiene solución)}$$

♠♠♠♠

2. Logaritmos (2)

Ejercicio 1. Racionalizar y simplificar

$$\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Solución:

$$\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{a\sqrt{ab} - ab + ba - b\sqrt{ab}}{a - b} = \frac{(a-b)\sqrt{ab}}{a-b} = \sqrt{ab}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Resolver la ecuación:

$$2 \cdot 5^x - 9 = \frac{1}{5^{x-1}}$$

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$2 \cdot 5^x - 9 = \frac{5}{5^x}\ ; \qquad 2 \cdot 5^{2x} - 9 \cdot 5^x - 5 = 0$$

Despejando con la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$5^x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4}$$

Puesto que 5^x debe ser positivo, la única solución es:

$$5^x = 5 \quad\Longrightarrow\quad x = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones escribiendo las soluciones como logaritmos:

(a) $3 \cdot 10^{5x-1} = 45$ $\qquad\qquad$ (b) $3^{2-x} = 7^{\frac{x}{2}}$

Solución:

$$(a)\ \ 3 \cdot 10^{5x-1} = 45 \quad\Longrightarrow\quad 10^{5x-1} = 15 \quad\Longrightarrow\quad 5x - 1 = \log 15 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1 + \log 15}{5}$$

(b) Aplicando, por ejemplo, logaritmos decimales:

$$\log 3^{2-x} = \log 7^{\frac{x}{2}}\ ; \qquad (2-x)\log 3 = \frac{x}{2}\log 7\ ; \qquad 2(2-x)\log 3 = x\log 7$$

Agrupandolos términos y despejando x:

$$4\log 3 = 2x\log 3 + x\log 7\ ; \qquad x(2\log 3 + \log 7) = 4\log 3\ ; \qquad x = \frac{4\log 3}{2\log 3 + \log 7}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ (b) $\log_{25}\left(5\sqrt{5}\right)$

Solución:

(a) Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = \log_3 \sqrt[3]{9} - \log_3 3 = \frac{1}{3}\log_3 9 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

(b) Pasando a base 5:

$$\log_{25}\left(5\sqrt{5}\right) = \frac{\log_5(5\sqrt{5})}{\log_5 25} = \frac{\log_5 5 + \log_5\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ calcular $\log 0{,}125$.

Solución:

$$\log 0{,}125 = \log\frac{125}{1000} = \log\tfrac{1}{8} = -\log 8 = -3\log 2 = -3\cdot 0{,}3010 = -0{,}9030$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver la ecuación $2 - \log_3(x+7) = \log_{\frac{1}{3}} 2x$

Solución:

Teniendo en cuenta que $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$:

$$2 - \log_3(x+7) = -\log_3 2x\ ; \qquad 2 = \log_3(x+7) - \log_3 2x\ ; \qquad 2 = \log_3\frac{x+7}{2x}$$

Entonces:

$$\frac{x+7}{2x} = 3^2\ ; \qquad x+7 = 18x\ ; \qquad x = \frac{7}{17}$$

La solución es válida.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Despejar x en:

(a) $5^{x^2-3} = 2$ (b) $\log_2(3x^2-1) = 5$

Solución:

(a) $5^{x^2-3} = 2 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - 3 = \log_5 2 \quad\Longrightarrow\quad x = \pm\sqrt{3 + \log_5 2}$

(b) $\log_2(3x^2 - 1) = 5 \quad\Longrightarrow\quad 3x^2 - 1 = 2^5 \quad\Longrightarrow\quad 3x^2 = 33 \quad\Longrightarrow\quad x = \pm\sqrt{11}$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Solución:

Aplicando logaritmos neperianos:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x} \;; \qquad (x-1)\ln 8 = 3x\ln 6 \;; \qquad (x-1)\ln 2^3 = 3x\,(\ln 2 + \ln 3) \;; \qquad 3(x-1)\ln 2 = 3x\,(\ln 2 + \ln 3)$$

Simplificando y agrupando los términos:

$$-\ln 2 = x\ln 3 \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

♠♠♠♠

3. Combinatoria. Inducción

Ejercicio 1. Con las letras A, B, C, D y E:

(a) ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse?
(b) ¿Cuántas terminan en C?
(c) ¿Cuantas empiezan y terminan por vocal?

Solución:

(a) $5! = 120$
(b) $4! = 24$
(c) $2 \cdot 3! = 12$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Con las letras de la palabra MURCIELAGO:

(a) ¿Cuantas palabras de 10 letras pueden formarse?
(b) ¿En cuántas de ellas las vocales están separadas?
(c) ¿En cuántas de ellas aparecen exactamente tres vocales juntas?

Solución:

(a) $10! = 3628800$
(b) Las consonantes pueden colocarse de 5! maneras. Una vez colocadas las consonantes tenemos 6 posiciones para las vocales:

$$\bullet C \bullet C \bullet C \bullet C \bullet C \bullet$$

de las que debemos elegir 5. Una vez elegidas las posiciones, las vocales pueden permutarse de 5! maneras. En total:

$$5! \cdot \binom{6}{5} \cdot 5! = 6 \cdot 5! \cdot 5! = 86400$$

(c) Como antes, las consonantes pueden colocarse de 5! maneras:

$$\bullet C \bullet C \bullet C \bullet C \bullet C \bullet$$

Ahora debemos colocar tres vocales juntas. Tenemos 6 posiciones para el grupo. Para colocar las otras dos vocales pueden ocurrir dos casos: que estas dos vocales estén juntas en cuyo caso tendríamos 5 posiciones para la pareja y las podríamos colocar de

$$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5! = 432000$$

maneras. O podrían estar separadas en cuyo caso dispondríamos de $\binom{5}{2}$ posiciones y obtendríamos

$$5! \cdot 6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! = 864000$$

En total

$$5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5! + 5! \cdot 6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! = 432000 + 864000 = 1296000$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Se quiere formar un comité de cuatro personas a partir de 5 profesores de ciencias, 3 de lengua y 4 de matemáticas.

(a) ¿De cuántas maneras puede formarse el comité?
(b) ¿De cuántas si los profesores de ciencias X e Y deben formar parte del comité y el profesor de lengua Z no debe formar parte?
(c) ¿De cuántas si al menos debe haber un profesor de ciencias, uno de lengua y uno de matemáticas?

Solución:

(a) $\binom{12}{4} = 495$

(b) Si X e Y deben formar parte del comité debemos elegir 2 de los otros 10, pero como Z no puede formar parte los debemos elegir de los 9 restantes, o sea que:

$$\binom{9}{2} = 36$$

(c) El comité puede formarse con dos profesores de ciencias, uno de lengua y uno de matemáticas, o uno de ciencias, dos de lengua y uno de matemáticas o uno de ciencias, uno de lengua y dos de matemáticas. En total:

$$\binom{5}{2} \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot \binom{3}{2} \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 6 = 270$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Con las letras de la palabra CALCULUS:

(a) ¿Cuántas palabras de 8 letras pueden formarse?

(b) ¿Cuántas empiezan por A y terminan por S?

(c) ¿Cuántas empiezan por C y terminan por L?

Solución:

(a) Se trata de permutaciones con repetición en las que la letra C se repite dos veces, la letra L se repite dos veces y la letra U también se repite dos veces:

$$PR_{8,2,2,2} = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040$$

(b) En este caso debemos disponer 3 pares de letras repetidas:

$$PR_{6,2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

(c) Ahora hay 6 letras y solamente 2 repetidas:

$$PR_{6,2} = \frac{6!}{2!} = 360$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el término constante del desarrollo:

$$\left(x - \frac{6}{x^2}\right)^9$$

Solución:

Un término cualquiera del desarrollo tiene la forma:

$$T_k = \binom{9}{k} x^k \left(-\frac{6}{x^2}\right)^{9-k}$$

El exponente de x de este término es:

$$k - 2(9 - k)$$

En el término constante el exponente debe ser cero:

$$k - 2(9 - k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 6$$

El término que buscamos es:

$$T_6 = \binom{9}{6} x^6 \left(-\frac{6}{x^2}\right)^3 = -\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} \cdot 6^3 = -9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 36 = -18144$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el coeficiente de x^5 en

$$(3x-1)\,(5+2x)^6$$

Solución:

Calculamos los términos de x^4 y x^5 del desarrollo de $(5+2x)^6$:

$$T_4 = \binom{6}{4}(2x)^4 \cdot 5^2 = 6000x^4$$
$$T_5 = \binom{6}{5}(2x)^5 \cdot 5 = 960x^5$$

Entonces:

$$(3x-1)\,(5+2x)^6 = (3x-1)\left(\ldots + 6000x^4 + 960x^5 + \ldots\right) = \ldots + (3\cdot 6000 - 960)x^5 + \ldots$$

El coeficiente de x^5 es $3 \cdot 6000 - 960 = 17040$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Demostrar por inducción que $5^{2n} - 1$ es múltiplo de 24 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

- Se cumple para $n = 1$:
  $$5^2 - 1 = 24 = \dot{24}$$
- Supongamos que se cumple para $n = k$:
  $$5^{2k} - 1 = \dot{24}$$
  y demostremos que, en ese caso, se cumple para $n = k+1$. Debemos demostrar
  $$5^{2k} - 1 = \dot{24} \quad \Longrightarrow \quad 5^{2(k+1)} - 1 = \dot{24}$$
  En efecto:
  $$5^{2(k+1)} - 1 = 5^2 \cdot 5^{2k} - 1 = 25 \cdot (\dot{24} + 1) - 1 = 25 \cdot \dot{24} + 24 = \dot{24}$$
- Por el principio de inducción matemática la proposición se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Demostrar por inducción:

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \quad ; \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Solución:

Llamemos

$$S_k = \sum_{r=1}^{k} r(r+2)$$

- La fórmula se cumple para $n = 1$:
  $$S_1 = 1 \cdot (1+2) = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} = 3$$
- Supongamos que se cumple para $n = k$:
  $$S_k = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

y demostremos que, en ese caso, también se cumple para $n = k + 1$:

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} \implies S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+3) \\
&= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) \\
&= \frac{k(k+1)(2k+7) + 6(k+1)(k+3)}{6} && \text{sacando factor común} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6k+18)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+13k+18)}{6} && \text{factorizando} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}
\end{aligned}$$

– Como consecuencia del principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

4. Polinomios y ecuaciones

Ejercicio 1. Calcular el valor que deberá tomar m en la ecuación $9x^2 - 18x + m = 0$ para que una de las raíces sea doble que la otra.

Solución:

Sean r y $2r$ las soluciones de la ecuación. Por las relaciones de Cardano:

$$r + 2r = \frac{18}{9} = 2$$

Por tanto las soluciones son $r = \frac{2}{3}$ y $2r = \frac{4}{3}$.

La otra relación de Cardano nos da:

$$\frac{m}{9} = r \cdot 2r = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad m = 8$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{4 - 3x - 2x^2} - 2x = 1$$

Solución:

Despejamos la raíz, elevamos los dos miembros al cuadrado y resolvemos:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4 - 3x - 2x^2} - 2x = 1 \\
&\sqrt{4 - 3x - 2x^2} = 2x + 1 \\
&4 - 3x - 2x^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\
&6x^2 + 7x - 3 = 0 \\
&x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12}
\end{aligned}$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Comprobamos las soluciones:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4 - 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9}} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{25}{9}} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1 \\
&\sqrt{4 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \frac{9}{4}} - 2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = 2 + 3 = 5 \neq 1
\end{aligned}$$

Solamente es válida la solución $x = \frac{1}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver la ecuación:

$$6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

Solución:

Una raíz es $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 5 & -3 & -2 \\
-1 & & -6 & 1 & 2 \\
\hline
 & 6 & -1 & -2 & 0
\end{array}$$

Se puede factorizar la ecuación como:

$$(x + 1)(6x^2 - x - 2) = 0$$

Igualando a cero los dos factores calculamos las soluciones $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = -\frac{1}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dado el polinomio $x^3 + x^2 + ax + b$, calcular a y b sabiendo que es divisible por $x + 2$ y $x - 4$.

Solución:

Si es divisible por $x + 2$ y $x - 4$ por el teorema del factor, $x = -2$ y $x = 4$ son raíces del polinomio:

$$\begin{cases} (-2)^3 + (-2)^2 - 2a + b = 0 \\ 4^3 + 4^2 + 4a + b = 0 \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} -2a + b = 4 \\ 4a + b = -80 \end{cases}$$

y, resolviendo el sistema, se obtiene $a = -14$, $b = -24$.

Otra manera de resolver el problema sería la siguiente: la suma de las tres raíces es -1. Si llamamos r a la tercera raíz:

$$-2 + 4 + r = -1 \quad \Longrightarrow \quad r = -3$$

Entonces, aplicando las otras relaciones de Cardano:

$$b = -(-2) \cdot 4 \cdot (-3) = -24$$
$$a = (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) + 4 \cdot (-3) = -14$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{4 - x^2} < 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son $x = -1$ y $x = 3$. Las raíces del denominador son $x = -2$ y $x = 2$.

El signo de la fracción está dado por el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \nexists & & 0 & & \nexists & & 0 & \\ - & | & + & | & - & | & + & | & - \\ & -2 & & -1 & & 2 & & 3 & \end{array}$$

La solución es $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (3, \infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$$

Solución:

– **Primer método:**
Quitamos denominadores en la primera ecuación y despejamos y:

$$2x + 3y = 18$$
$$y = \frac{18 - 2x}{3}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
&x^2 + \frac{(18-2x)^2}{9} - \frac{2x(18-2x)}{3} - 1 = 0\\
&9x^2 + (18-2x)^2 - 6x(18-2x) - 9 = 0\\
&9x^2 + 324 - 72x + 4x^2 - 108x + 12x^2 - 9 = 0\\
&25x^2 - 180x + 315 = 0\\
&5x^2 - 36x + 63 = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación resulta $x_1 = 3$, $x^2 = \frac{21}{5}$.
Los valores correspondientes de y son $y_1 = 4$ e $y_2 = \frac{16}{5}$.
Las soluciones son $(3,4)$ y $\left(\frac{21}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

– **Segundo método:**
Se puede resolver el sistema de una manera más sencilla si escribimos la segunda ecuación como:

$$(x-y)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x - y = \pm 1$$

Las soluciones las obtenemos entonces resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

y resultan las soluciones que hemos obtenido anteriormente.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Si α y β son dos de las raíces del polinomio $x^3 - 3x + 1$, demostrar que $\alpha\beta$ es una raíz de $x^3 + 3x^2 - 1$.

Solución:

Sea γ la tercera raíz del polinomio. Por las relaciones de Cardano se cumple que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -3 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

Debemos demostrar que $\alpha\beta$ es una raíz del segundo polinomio, es decir que

$$(\alpha\beta)^3 + 3(\alpha\beta)^2 - 1 = 0$$

En efecto, de la primera relación resulta que

$$\gamma = -(\alpha + \beta)$$

y, entonces, de la tercera:

$$\alpha\beta\gamma = -\alpha\beta(\alpha+\beta) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

Sustituyendo en la segunda relación:

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -3 \\
&\alpha\beta + \gamma(\alpha+\beta) = -3 && \text{sustituyendo } \gamma\\
&\alpha\beta - (\alpha+\beta)^2 + 3 = 0 && \text{sustituyendo } \alpha+\beta\\
&\alpha\beta - \frac{1}{(\alpha\beta)^2} + 3 = 0\\
&(\alpha\beta)^3 + 3(\alpha\beta)^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Si $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + b$ tiene un factor $(x-k)^2$, calcular los posibles valores de k. Para cada uno de ellos calcular b.

Solución:

Si llamamos r a la tercera raíz, el polinomio se puede factorizar:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + b = (x-k)^2(x-r)$$

Entonces, bien igualando coeficientes o bien por las relaciones de Cardano resulta que:

$$2k + r = 3$$
$$k^2 + 2kr = -9$$

Despejando r de la primera ecuación:

$$r = 3 - 2k$$

y sustituyendo en la segunda:

$$k^2 + 2k(3-2k) + 9 = 0 \; ; \qquad -3k^2 + 6k + 9 = 0 \; ; \qquad k^2 - 2k - 3 = 0$$

que tiene como solución $k_1 = -1$ y $k_2 = 3$. Los correspondientes valores para r son $r_1 = 5$ y $r_2 = -3$.

Teniendo en cuenta que $b = -k^2 r$ resulta que $b_1 = -5$ y $b_2 = 27$.

♠♠♠♠

5. Logaritmos. Combinatoria. Polinomios. Trigonometría.

Ejercicio 1. Calcular el coeficiente de x^5 en el desarrollo $(x+3)(2x-1)^6$.

Solución:

$$\begin{aligned}(x+3)(2x-1)^6 &= (x+3)\left(\dots+\binom{6}{4}(2x)^4(-1)^2+\binom{6}{5}(2x)^5(-1)+\dots\right)\\ &= (x+3)\left(\dots+15\cdot 16x^4-6\cdot 32x^5+\dots\right)\end{aligned}$$

El coeficiente de x^5 es:

$$1\cdot 15\cdot 16-3\cdot 6\cdot 32=-336$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Demostrar mediante inducción matemática que 9^n-3^n es múltiplo de 6 para $n\in\mathbb{Z}^+$.

Solución:

– La propiedad se cumple para $n=1$.

– Suponiendo que se cumple para $n=k$ debemos demostrar que se cumple para $n=k+1$. Debemos demostrar:

$$9^k-3^k=\dot{6}\quad\Longrightarrow\quad 9^{k+1}-3^{k+1}=\dot{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}9^{k+1}-3^{k+1} &= 9\cdot 9^k-3\cdot 3^k\\ &= 9\cdot\left(\dot{6}+3^k\right)-3\cdot 3^k\\ &= \dot{6}+(9-3)\cdot 3^k\\ &= \dot{6}+6\cdot 3^k\\ &= \dot{6}+\dot{6}\\ &= \dot{6}\end{aligned}$$

– Por el el principio de inducción matemática, la propiedad se cumple para $n\in\mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver sin calculadora $x^3-4x^2-9x+6\le 0$.

Solución:

Buscamos las raíces enteras entre los divisores del término independiente. Ni 1 ni -1 son raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -9 & 6\\ -2 & & -2 & 12 & -6\\ \hline & 1 & -6 & 3 & 0\end{array}$$

Tenemos entonces unaa raíz $x=-2$. Las otras raíces son:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{2}=3\pm\sqrt{6}$$

Ya tenemos las raíces, podemos hacer un esquema del signo del polinomio:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ - & | & + & | & - & | & +\\ & -2 & & 3-\sqrt{6} & & 3+\sqrt{6} & \end{array}$$

La solución de la inecuación es $x\in(-\infty,-2]\cup[3-\sqrt{6},3+\sqrt{6}]$.

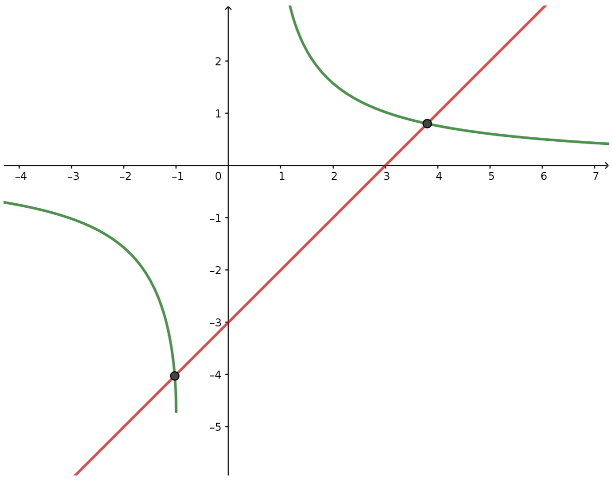
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver gráficamente la ecuación:

$$3 \operatorname{arsen} \frac{1}{x} = x - 3$$

Solución:

Representamos las curvas $y = 3 \operatorname{arsen}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $y = x - 3$



Los puntos de intersección son $x_1 = -1{,}03$ y $x_2 = 3{,}80$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. En la ecuación $x^2 - 12x + m = 0$ calcular el valor de m para que una raíz sea triple que la otra.

Solución:

Sean las raíces r y $3r$. Según las relaciones de Cardano, la suma $4r = 12$ de forma que las raíces son 3 y 9. El término independiente es el producto de las raíces, o sea que $m = 3 \cdot 9 = 27$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. El polinomio $x^3 - 3x + p$ tiene una raíz doble. Calcular p.

Solución:

Sea a la raíz doble y b la otra raíz. Entonces, por las relaciones de Cardano:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a^2 + 2ab = -3 \\ a^2 b = -p \end{cases}$$

De la primera ecuación $b = -2a$. Sustituyendo en la segunda:

$$a^2 - 4a^2 = -3\ ; \qquad -3a^2 = -3\ ; \qquad a = -1, \quad a = 1$$

Para $a = -1$, $b = 2$ y $p = -2$.

Para $a = 1$, $b = -2$ y $p = 2$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular el área de un segmento circular limitado por una cuerda de 24 cm en una circunferencia de 15 cm de radio.

Solución:

Llamando φ el ángulo central determinado por el arco, se cumple que

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{12}{15}\ ;\qquad \varphi=2\ \operatorname{arsen}\frac{12}{15}$$

El área del segmento es:

$$S=\frac{1}{2}r^2(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)\simeq 101\ \text{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación

$$\log_{\frac{1}{9}} x=\log_9 5$$

Solución:

Escribimos los logaritmos en base 9:

$$\frac{\log_9 x}{\log_9 \frac{1}{9}}=\log_9 5\ ;\qquad \log_9 x=(-1)\log_9 5=\log_9 5^{-1}$$

Entonces:

$$x=5^{-1}=\frac{1}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Se debe elegir un comité de 4 personas entre 8 ingenieros, 7 físicos y 6 matemáticos.

(*a*) ¿Cuántos comités diferentes pueden elegirse?

(*b*) ¿Cuántos están formados solo por ingenieros?

Solución:

(*a*) En total hay 21 personas. El número de personas de elegir 4 es:

$$C_{21,4}=5985$$

(*b*) Hay 8 ingenieros. Si se deben elegir 4:

$$C_{8,4}=70$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. En el problema anterior, ¿cuántos comités cuentan con al menos una persona de cada profesión?

Solución:

Los distintos comités pueden estar formados por dos ingenieros, un físico y un matemático, un ingeniero, dos físicos y un matemático o un ingeniero, un físico y dos matemáticos. El número de comités posibles es:

$$C_{8,2}\cdot 7\cdot 6+8\cdot C_{7,2}\cdot 6+8\cdot 7\cdot C_{6,2}=3024$$

♠♠♠♠

6. Logaritmos. Combinatoria. Polinomios. Trigonometría.

Ejercicio 1. Calcular el coeficiente de x en el desarrollo $(2+x)\left(\frac{1}{x}-2x\right)^4$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2+x)\left(\frac{1}{x}-2x\right)^4 &= (2+x)\left(\binom{4}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2x)+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2x)^2+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^1(-2x)^3+\binom{4}{4}(-2x)^4\right)\\ &= (2+x)\left(\frac{1}{x^4}-\frac{8}{x^2}+24-32x^2+16x^4\right)\end{aligned}$$

El coeficiente de x es 24.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Demostrar que 5^n+3 es múltiplo de 4 para todos los enteros mayores que cero.

Solución:

- La propiedad se cumple para $n=1$ puesto que 5^1+3 es múltiplo de 4.
- Supongamos que la propiedad se cumple para $n=k$ y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$. Debemos demostrar:

  $$5^k+3=\dot{4} \quad\Longrightarrow\quad 5^{k+1}+3=\dot{4}$$

  En efecto:

  $$\begin{aligned}5^{k+1}+3 &= 5\cdot 5^k+3\\ &= 5\cdot(\dot{4}-3)+3 && \text{por la hipótesis de inducción}\\ &= \dot{4}-15+3\\ &= \dot{4}-12\\ &= \dot{4}+\dot{4}\\ &= \dot{4}\end{aligned}$$

- Por el principio de inducción matemática, la propiedad se cumple para todos los números enteros mayores que cero.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver sin calculadora $x^3-4x^2-9x+6\le 0$.

Solución:

Buscamos las raíces enteras entre los divisores del término independiente. Ni 1 ni -1 son raíces:

	1	-4	-9	6
-2		-2	12	-6
	1	-6	3	0

Tenemos entonces unaa raíz $x=-2$. Las otras raíces son:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{2}=3\pm\sqrt{6}$$

Ya tenemos las raíces, podemos hacer un esquema del signo del polinomio:

	0		0		0	
$-$		$+$		$-$		$+$
	-2		$3-\sqrt{6}$		$3+\sqrt{6}$	

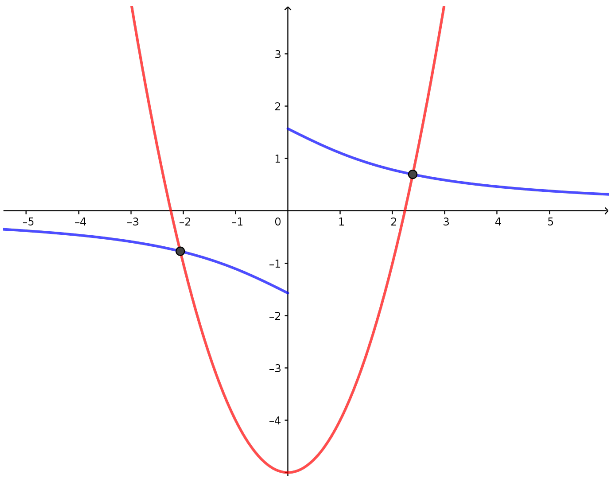
La solución de la inecuación es $x \in (-\infty, -2] \cup [3-\sqrt{6}, 3+\sqrt{6}]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver gráficamente $\operatorname{artg} \frac{2}{x} = x^2 - 5$.

Solución:

La solución se puede obtener gráficamente de varias maneras. Por ejemplo podemos dibujar las curvas $y = \operatorname{artg} \frac{2}{x}$ e $y = x^2 - 5$ y calcular las abscisas de sus puntos de intersección:



Las soluciones de la ecuación aproximadas a la tercera cifra significativa son $x_1 = -2{,}06$ y $x_2 = 2{,}39$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. El polinomio $x^3 - 12x + p$ tiene una raíz doble. Calcular p.

Solución:

Sea a la raíz doble y b la otra raíz. Entonces, por las relaciones de Cardano:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a^2 + 2ab = -12 \\ a^2 b = -p \end{cases}$$

De la primera ecuación $b = -2a$. Sustituyendo en la segunda:

$$a^2 - 4a^2 = -12\ ; \qquad -3a^2 = -12\ ; \qquad a = -2, \quad a = 2$$

Para $a = -2$, $b = 4$ y $p = -16$.

Para $a = 2$, $b = -4$ y $p = 16$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. En la ecuación $x^2 - 15x + m = 0$ calcular el valor de m para que una raíz sea doble que la otra.

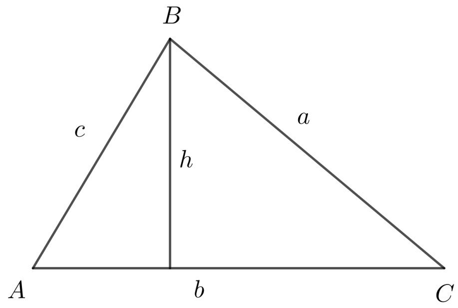
Solución:

Sean las raíces r y $2r$. Según las relaciones de Cardano, la suma $3r = 15$ de forma que las raíces son 5 y 10. El término independiente es el producto de las raíces, o sea que $m = 5 \cdot 10 = 50$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. En el triángulo de lados $a = 25$ cm, $b = 40$ cm y $c = 21$ cm calcular la longitud de la altura correspondiente al lado b.

Solución:



Calculamos el ángulo A por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{40^2 + 21^2 - 25^2}{2 \cdot 40 \cdot 21} \ ; \qquad A =$$

Entonces:

$$h = c \operatorname{sen} A =$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$\log_x 4 + \log_2 x = 3$$

Solución:

Escribimos los logaritmos en base 2:

$$\frac{\log_2 4}{\log_2 x} + \log_2 x = 3 \ ; \qquad \frac{2}{\log_2 x} + \log_2 x = 3$$

Multiplicando por $\log_2 x$:

$$2 + (\log_2 x)^2 = 3 \log_2 x \ ; \qquad (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$$

Las soluciones son:

$$\log_2 x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$
$$\log_2 x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Se debe formar un equipo de 8 personas a partir de 11 hombres y 7 mujeres. Calcular el número de equipos que pueden formarse si

(a) No hay restricciones

(b) Debe haber cuatro hombres y cuatro mujeres

Solución:

(a) Si no hay restricciones debemos elegir 8 a partir de 18. El número de maneras de hacerlo es

$$C_{18,8} = 43758$$

(b) Los hombres pueden elegirse de $C_{11,4}$ maneras y las mujeres de $C_{7,4}$ maneras. El número de equipos es:

$$C_{11,4} \cdot C_{7,4} = 11550$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. En el problema anterior, ¿cuántos de los equipos tienen al menos dos mujeres?

Solución:

Se puede hacer por diferencia restando al número total de equipos los que no tienen mujeres y los que solo tienen una. Los equipos sin mujeres se pueden formar de $C_{11,8}$ maneras. Para los equipos con una mujer, ésta se puede elegir de 7 maneras y los 7 hombres de $C_{11,7}$ maneras:

$$C_{18,8} - C_{11,8} - C_{11,7} \cdot 7 = 43758 - 165 - 2310 = 41283$$

♠♠♠♠

7. Trigonometría. Grupo W.

Ejercicio 1. En el triángulo ABC, $AB = 5$, $BC = 14$ y $AC = 11$. Hallar todos los ángulos interiores del triángulo. Dé la respuesta en grados, con una aproximación de una cifra decimal.

Solución:

Los ángulos se obtienen por rl teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{5^2 + 11^2 - 14^2}{2 \cdot 5 \cdot 11}\ ; \qquad A \simeq 117{,}0$$
$$\cos B = \frac{5^2 + 14^2 - 11^2}{2 \cdot 5 \cdot 11}\ ; \qquad B \simeq 44{,}4$$
$$\cos C = \frac{14^2 + 11^2 - 5^2}{2 \cdot 5 \cdot 11}\ ; \qquad C \simeq 18{,}5$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En el triángulo ABC, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm, $A\hat{B}C = 100$.

(a) Halle el área del triángulo.

(b) Halle AC.

Solución:

(a) El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 100 \simeq 29{,}5\ \text{cm}^2$$

(b) Por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos 100 \quad \Longrightarrow \quad AC \simeq 13{,}8\ \text{cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. El triángulo ABC tiene un área de 21 cm^2. Los lados AB y AC tienen una longitud de 6 cm y 11 cm, respectivamente. Halle los dos posibles valores de la longitud del lado BC.

Solución:

Puesto que el área del triángulo es

$$S = \frac{1}{2}\, AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} A \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} A = \frac{2 \cdot 21}{6 \cdot 11} = \frac{7}{11}$$

Hay dos ángulo que tienen este valor del seno, uno agudo y otro obtuso, uno con el coseno positivo

$$\cos A = \sqrt{1 - \frac{49}{121}} = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

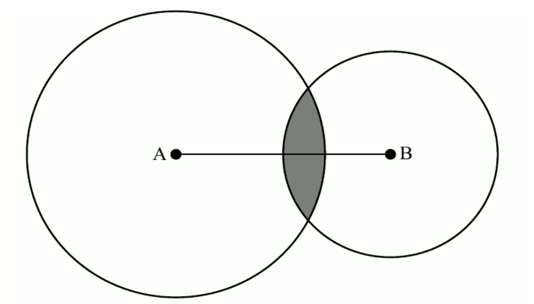
y otro con el coseno negativo $-\frac{6\sqrt{2}}{11}$.

Ahora podemos calcular los dos valores posibles de BC por el teorema del coseno:

$$BC^2 = 6^2 + 11^2 - 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} \quad \Longrightarrow \quad BC \simeq 7{,}43\ \text{cm}$$
$$BC^2 = 6^2 + 11^2 + 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} \quad \Longrightarrow \quad BC \simeq 16{,}1\ \text{cm}$$

♠♠♠♠

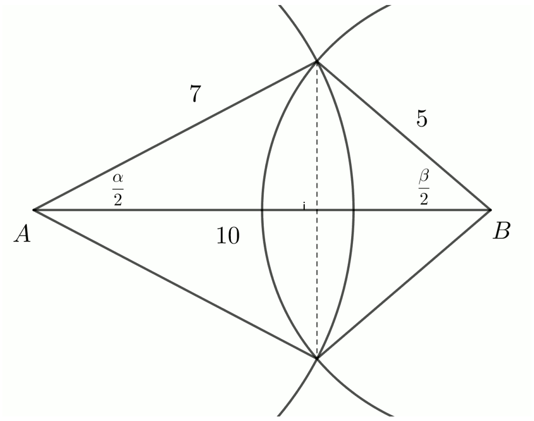
Ejercicio 4. El barco A está situado a 10 km del barco B y los dos barcos tienen un radiotrasmisor a bordo. El alcance del radiotrasmisor de A es 7 km y el alcance del radiotrasmisor de B es 5 km. La región en la que ambos radiotrasmisores pueden ser detectados está representada por la región sombreada de la siguiente figura.



Calcular su área.

Solución:

El área es la suma de las áreas de dos segmentos circulares, uno en el círculo de centro A y otro en el círculo de centro B. Calculemos los ángulos α y β



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{10^2+7^2-5^2}{2\cdot 10\cdot 7}\ ; \qquad \alpha = 2\ \mathrm{arcos}\,\frac{10^2+7^2-5^2}{2\cdot 10\cdot 7}$$
$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{10^2+5^2-7^2}{2\cdot 10\cdot 5}\ ; \qquad \beta = 2\ \mathrm{arcos}\,\frac{10^2+5^2-7^2}{2\cdot 10\cdot 5}$$

El área es entonces:

$$S = \frac{1}{2}\,7^2\,(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) + \frac{1}{2}\,5^2\,(\beta - \operatorname{sen}\beta) \simeq 8{,}85\ \mathrm{km}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5.

(a) Demuestre la identidad

$$\frac{1+\operatorname{sen}2x}{\cos 2x} = \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$$

(b) Resuelva la ecuación:

$$\frac{1+\operatorname{sen}2x}{\cos 2x} = \sqrt{3}\ ; \qquad 0 \le x < 2\pi$$

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} &= \frac{1+2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{dividiendo numerador y denominador por } \cos^2 x \\
&= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} && \text{puesto que } \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x \\
&= \frac{1+\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \\
&= \frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{(1+\operatorname{tg} x)(1-\operatorname{tg} x)} \\
&= \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}
\end{aligned}$$

(b) La ecuación puede resolverse gráficamente mediante la calculadora. También, teniendo en cuenta el apartado anterior, la ecuación es equivalente a:

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \sqrt{3}\ ; \qquad 1+\operatorname{tg} x = \sqrt{3}(1-\operatorname{tg} x)\ ; \qquad \operatorname{tg} x(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}-1$$

Entonces:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \Longrightarrow \quad x \simeq 0{,}262\ ; \qquad x \simeq 3{,}40$$

Puede obtenerse el resultado exacto sin necesidad de calculadora teniendo en cuenta que

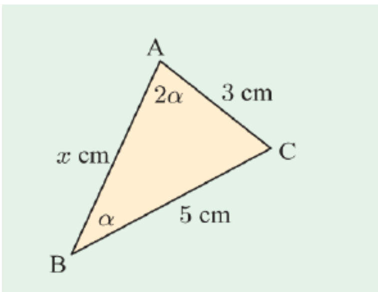
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \operatorname{tg}(45-30) = \operatorname{tg} 15$$

y de aquí:

$$x = 15$$
$$x = 180 + 15 = 195$$

8. Trigonometría. Grupo Z.

Ejercicio 1. Considérese el siguiente triángulo:



(a) Demostrar que $\cos\alpha = \frac{5}{6}$

(b) Demostrar que x cumple la ecuación $3x^2 - 25x + 48 = 0$

(c) Calcular x

Solución:

(a) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{5}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{3}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{2\cos\alpha} = 3$$

y, de aquí:

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}$$

(b) Calculando el lado de longitud 3 mediante el teorema del coseno:

$$3^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos\alpha = x^2 + 25 - 10x \cdot \frac{5}{6} = x^2 + 25 - \frac{25x}{3}$$

Quitando denominadores y pasando todos los sumandos al segundo miembro resulta:

$$27 = 3x^2 + 75 - 25x \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 25x + 48 = 0$$

(c) Las soluciones de la ecuación son $x = 3$ y $x = \frac{16}{3}$. La primera no es válida pues en tal caso, el triángulo es isósceles y el ángulo desigual no es doble de los ángulos iguales sino suplementario del doble. Puede comprobarse que para $x = \frac{16}{3}$ sí se cumple que $A = 2B$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

(a) Demostrar que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(b) A partir del resultado anterior, resolver la ecuación $8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0$ para $-\pi \leq x \leq \pi$.

Solución:

(a) Puesto que $3\theta = 2\theta + \theta$:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

(b) Sea la ecuación:

$$8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0$$

Por la relación demostrada anteriormente:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\ ; \qquad 4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x\ ; \qquad 8\cos^3 x = 2\cos 3x + 6\cos x$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned}
&8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0 \\
&2\cos 3x + 6\cos x - 6\cos x + 1 = 0 \\
&2\cos 3x + 1 = 0 \\
&\cos 3x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son:

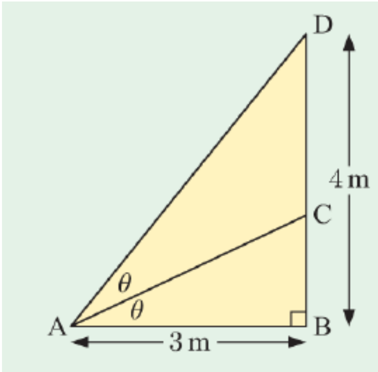
$$\begin{aligned}
3x &= \frac{2\pi}{3} \pm 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{9} \pm \frac{2k\pi}{3} \\
3x &= \frac{4\pi}{3} \pm 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4\pi}{9} \pm \frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

Dando valores a k obtenemos las soluciones comprendidas entre $-\pi$ y π:

$$x = \frac{2\pi}{9}, \quad x = \frac{8\pi}{9}, \quad x = -\frac{4\pi}{9}, \quad x = \frac{4\pi}{9}, \quad x = -\frac{2\pi}{9}, \quad x = -\frac{8\pi}{9}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. En el triángulo



calcular la longitud de BC.

Solución:

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{4}{3}\ ; \qquad \frac{\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2}{3}\ ; \qquad 3\operatorname{tg}\theta = 2 - 2\operatorname{tg}^2\theta\ ; \qquad 2\operatorname{tg}^2\theta + 3\operatorname{tg}\theta - 2 = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{tg}\theta = -2$. Puesto que θ es agudo, la solución negativa no es válida. Entonces:

$$BC = 3\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{2}\text{ m}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Escribir $3\operatorname{sen} x - \cos x$ en la forma $A\operatorname{sen}(x+\phi)$ donde $A > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.

Solución:

$$3\operatorname{sen} x - \cos x = A\operatorname{sen}(x+\phi) = A(senx\cos\phi + \cos x\operatorname{sen}\phi)$$
$$3 = A\cos\phi$$
$$-1 = A\operatorname{sen}\phi$$

Elevando al cuadrado ambas igualdades y sumando se obtiene:

$$A = \sqrt{10}$$

El ángulo ϕ debe estar en el cuarto cuadrante y

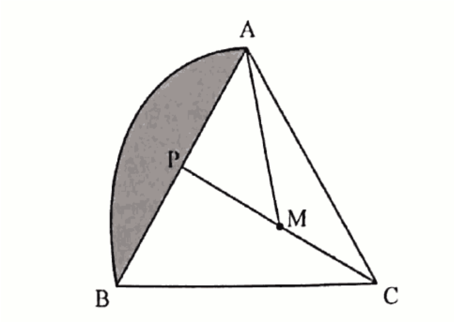
$$\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad\Longrightarrow\quad \phi = 5{,}96$$

Por consiguiente:

$$3\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{10}\operatorname{sen}(x + 5{,}96)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Considere la siguiente figura



Los lados del triángulo equilátero ABC tienen longitudes de 1 m. P es el punto medio de $[AB]$. El arco de circunferencia AB tiene por centro M, el punto medio de $[CP]$.

(a) (i) Halle AM.
    (ii) Halle $A\hat{M}P$ en radianes.

(b) Halle el área de la región sombreada.

Solución:

(a) Por ser ABC un triángulo equilátero:

$$PC = 1 \cdot \operatorname{sen} 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \qquad PM = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

y por el teorema de Pitágoras:

$$AM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}\ \text{m}$$

Además:

$$\operatorname{tg} A\hat{M}P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad A\hat{M}P \simeq 0{,}857$$

(b) El área del segmento es:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AM^2 \left(2A\hat{M}P - \operatorname{sen} 2A\hat{M}P\right) \simeq 0{,}158\ \text{m}^2$$

♠♠♠♠

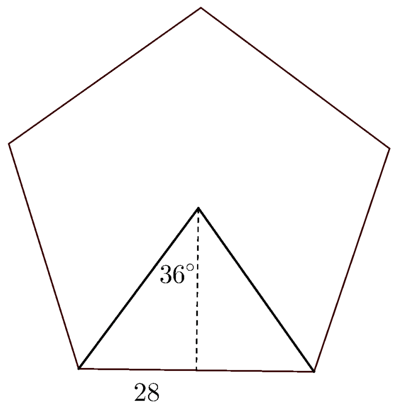
9. Trigonometría

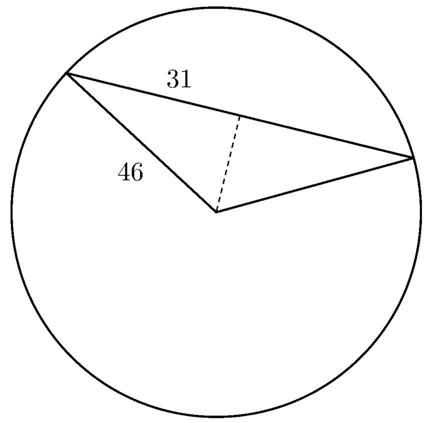
Ejercicio 1a.

(a) Calcular el área de un pentágono regular de 56 cm de lado.

(b) Calcular el área de un segmento circular limitado por una cuerda de 62 cm en una circunferencia de 46 cm de radio.

Solución:





(a) La apotema del pentágono mide:

$$a = \frac{28}{\operatorname{tg} 36} \simeq 38{,}5 \text{ cm}$$

El área es la mitad del perímetro por la apotema:

$$S = \frac{1}{2}\, 5 \cdot 56 \cdot \frac{28}{\operatorname{tg} 36} \simeq 5400 \text{ cm}^2$$

(b) El ángulo del segmento es:

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{31}{46}\,; \qquad \varphi = 2 \operatorname{arsen} \frac{31}{46}$$

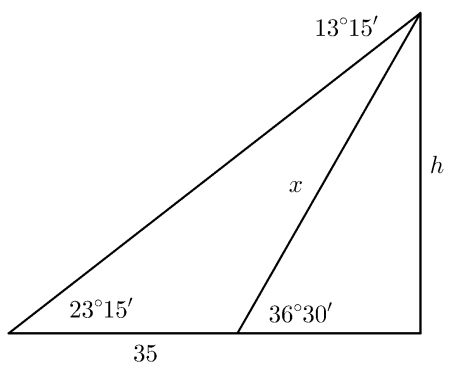
Y el àrea del segmento:

$$S = \frac{1}{2}\, 46^2\, (\varphi - \operatorname{sen} \varphi) \simeq 511 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2a. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de 3630′ y 2315′. Si la distancia entre estos dos puntos es de 35 m hallar la altura de la torre.

Solución:



En el triángulo de la izquierda el ángulo de arriba es $3630' - 2315' = 1315'$ por la propiedad del ángulo exterior. Por el teorema del seno:

$$\frac{35}{\operatorname{sen} 1315'} = \frac{x}{\operatorname{sen} 2315'}\ ; \qquad x = \frac{35 \operatorname{sen} 2315'}{\operatorname{sen} 1315'}$$

y entonces, en el triángulo de la derecha:

$$h = x \operatorname{sen} 3630' \simeq 35,9 \text{ m}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3a. Demostrar la identidad:

$$\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2\sec\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\cos\alpha\cos\alpha + (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)} \\
&= \frac{\cos^2\alpha + 1 + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)} \\
&= \frac{2+2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)} \\
&= \frac{2(1+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)} \\
&= \frac{2}{\cos\alpha} \\
&= 2\sec\alpha
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4a.

(a) Demostrar

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}\operatorname{sen} x} + \frac{1}{1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x} = 2\sec 2x$$

(b) A partir del resultado anterior, explicar por qué la ecuación:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}\operatorname{sen} x} + \frac{1}{1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x} = 1$$

no tiene solución.

Solución:

(a) Sumando las fraciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}\operatorname{sen} x} + \frac{1}{1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x} &= \frac{1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1 + \sqrt{2}\operatorname{sen} x}{(1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{2}\operatorname{sen} x)} \\
&= \frac{2}{1-2\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2}{\cos 2x} \\
&= 2\sec 2x
\end{aligned}$$

(b) Por el apartado anterior:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}\operatorname{sen}x}+\frac{1}{1-\sqrt{2}\operatorname{sen}x}=1 \quad\Longrightarrow\quad 2\sec 2x=1\ ;\qquad \frac{2}{\cos 2x}=1\ ;\qquad \cos 2x=2$$

que es imposible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

♠♠♠♠

Ejercicio 5a. Resolver la ecuación

$$\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}2x=0\ ;\qquad x\in[-\pi,\pi]$$

Solución: Sustituyendo $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$:

$$\sqrt{3}\cos x+2\operatorname{sen}x\cos x=0$$
$$\cos x\left(\sqrt{3}-2\operatorname{sen}x\right)=0$$

y tenemos dos conjuntos de soluciones:

$$\cos x=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}\pm 2k\pi \end{cases}$$

Las soluciones en el intervalo $[-\pi,\pi]$ son $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{2\pi}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 1b.

(a) Los lados de un triángulo miden $a=23$, $b=37$ y $c=42$ cm. Calcular la longitud de la altura correspondiente al lado c.

(b) Calcular la resultante de dos fuerzas de 120 y 215 kg que forman entre sí un ángulo de $14330'$.

Solución:

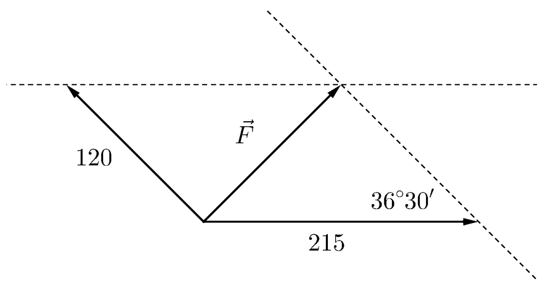
(a) Calculamos el ángulo A o B:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{37^2+42^2-23^2}{2\cdot 37\cdot 42}\ ;\qquad A\simeq 33,1$$

Ahora:

$$h_c=b\operatorname{sen}A\simeq 20,2$$

(b) Los vectores se suman mediante la regla del paralelogramo. Puesto que el ángulo que forman las fuerzas es de $14330'$, el otro ángulo del paralelogramo es su suplementario $3630'$.



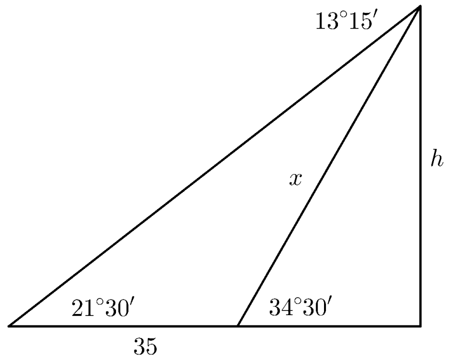
La resultante es:

$$F^2=120^2+215^2-2\cdot 120\cdot 215\cdot\cos 3630'\ ;\qquad F\simeq 138\text{ kg}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2b. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de $3430'$ y $2130'$. Si la distancia entre estos dos puntos es de 35 m hallar la altura de la torre.

Solución:



En el triángulo de la izquierda el ángulo de arriba es $3430' - 2130' = 13$ por la propiedad del ángulo exterior. Por el teorema del seno:

$$\frac{35}{\operatorname{sen} 13} = \frac{x}{\operatorname{sen} 2130'}\ ; \qquad x = \frac{35 \operatorname{sen} 2130'}{\operatorname{sen} 13}$$

y entonces, en el triángulo de la derecha:

$$h = x \operatorname{sen} 3430' \simeq 32,3 \text{ m}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3b. Demostrar la identidad

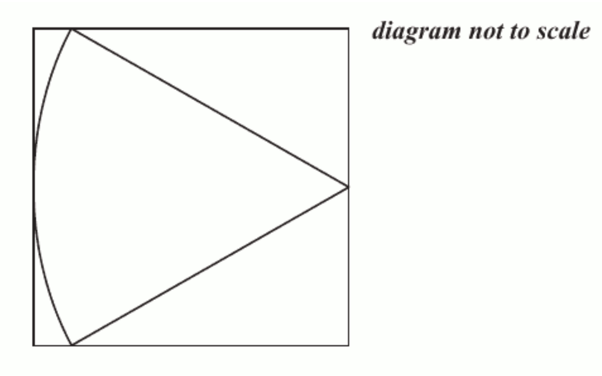
$$\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha - \cos^2\alpha\right) = \operatorname{sen}^2\alpha$$

Solución:

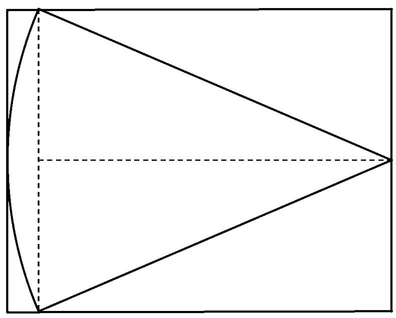
$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha - \cos^2\alpha\right) &= \cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 - \cos\alpha \\ &= 1 - \cos^2\alpha \\ &= \operatorname{sen}^2\alpha\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4b. Se dibuja un rectángulo alrededor de un sector circular como se muestra en la figura. Si el ángulo del sector es de un radián y el área del sector es de 7 cm^2, encontrar las dimensiones del rectángulo aproximando a los milímetros.



Solución:



La base del rectángulo es el radio de la circunferencia. Puesto que el área es 7 cm^2 y el ángulo es de un radián:

$$S = \frac{1}{2}r^2\varphi \ ; \qquad 7 = \frac{1}{2}r^2 \cdot 1 \ ; \qquad r \simeq 37 \text{ mm}$$

La altura es igual a la cuerda:

$$\frac{l}{2} = r \operatorname{sen} 0{,}5 \ ; \qquad l = 2r \operatorname{sen} 0{,}5 \simeq 36 \text{ mm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5b.

(a) Escribir $3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$ en la forma $A \operatorname{sen}(x + \varphi)$ donde $A > 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(b) Resolver la ecuación:

$$3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x = 4$$

Solución:

(a) Por la fórmula del seno de la suma de ángulos:

$$3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x = A(senx \cos \varphi + \cos x \operatorname{sen} \varphi)$$

Igualando los coeficientes de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

$$\begin{cases} A \cos \varphi = 3 \\ A \operatorname{sen} \varphi = -5 \end{cases}$$

De aquí resulta que:

$$A = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

y φ es un ángulo del cuarto cuadrante tal que

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{3}\ ; \qquad \varphi \simeq -1{,}03$$

De modo que puede escribirse:

$$3\operatorname{sen}x - 5\cos x = \sqrt{14}\operatorname{sen}(x - 1{,}03)$$

(*b*) Teniendo en cuenta el apartado anterior::

$$\begin{aligned} &3\operatorname{sen}x - 5\cos x = 4\\ &\sqrt{14}\operatorname{sen}(x - 1{,}03) = 4\\ &\operatorname{sen}(x - 1{,}03) = \frac{4}{\sqrt{34}} \end{aligned}$$

Obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x - 1{,}03 = 0{,}756 \pm 2k\pi\\ x - 1{,}03 = 2{,}39 \pm 2k\pi \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1{,}79 \pm 2k\pi\\ x = 3{,}42 \pm 2k\pi \end{cases}$$

♠♠♠♠

10. Números complejos

Ejercicio 1. Escribir los siguientes números complejos en forma polar:

(*a*) -2 (*b*) $-3i$ (*c*) $\frac{3}{4}i$ (*d*) $2 - 2\sqrt{3}i$

Solución:

$$\begin{aligned} -2 &= 2_{180}\\ -3i &= 3_{270}\\ \frac{3}{4}i &= \left(\frac{3}{4}\right)_{90}\\ 2 - 2\sqrt{3}i &= 4_{300} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Escribir en la forma binómica los siguientes números complejos:

(*a*) $5_{\pi/2}$ (*b*) 2_{150} (*c*) 1_{300} (*d*) 2_{270}

Solución:

$$\begin{aligned} 5_{\pi/2} &= 5i\\ 2_{150} &= -\sqrt{3} + i\\ 1_{300} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\\ 2_{270} &= -2i \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular en forma binómica las raíces cúbicas de $-64i$. Calcular el área del triángulo que tiene como vértices los afijos de estas raíces.

Solución:

Teniendo en cuenta que $-64i = 64_{270}$, sus raíces cúbicas son:

$$z_1 = 4_{90} = 4i$$

$$z_2 = 4_{210} = 4\left(\cos 210 + i \operatorname{sen} 210\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_3 = 4_{330} = 4\left(\cos 330 + i \operatorname{sen} 330\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} - 2i$$

Las tres raíces tienen módulo 4. El área del triángulo que tiene como vértices los afijos de las tres raíces es:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2}\, 4 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} 120 = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Escribir $-16i$ en forma polar. Sea z la raíz cuarta de $-16i$ que se encuentra en el segundo cuadrante. Calcular z en forma polar y binómica.

Solución:

Teniendo en cuenta que $-16i = 16_{270}$, sus raíces cuartas son:

$$z_1 = 2_{6730''}\ ; \qquad z_2 = {}_{15730'}\ ; \qquad z_3 = 2_{24730'}\ ; \qquad z_4 = 2_{33730'}$$

La del segundo cuadrante es z_2. Vamos a expresarla en forma binómica:

$$\begin{aligned}
z_2 &= 2(\cos 15730' + i \operatorname{sen} 15730') \\
&= 2\left(\cos\frac{315}{2} + i \operatorname{sen}\frac{315}{2}\right) \\
&= 2\left(-\sqrt{\frac{1+\cos 315}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos 315}{2}}\right) \\
&= 2\left(-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\right) \\
&= 2\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \\
&= -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Sea el complejo $z = 4 - 5i$. Calcular w sabiendo que el afijo de w es el resultado de girar el afijo de z alrededor del origen, un ángulo de 210.

Solución:

$$\begin{aligned}
w &= (4-5i)(\cos 210 + i \operatorname{sen} 210) \\
&= (4-5i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\
&= -\frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} + \left(-\frac{4}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)i \\
&= -\frac{5+4\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}-4}{2}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular en forma binómica las raíces cuartas de -4. A partir del resultado anterior descomponer el polinomio $z^4 + 4$ en producto de factores de segundo grado.

Solución:

En forma polar $-4 = 4_{180}$. Sus raíces cuartas son:

$$z_1 = (\sqrt{2})_{45} = \sqrt{2}\,(\cos 45 + i \operatorname{sen} 45) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i$$

$$z_2 = (\sqrt{2})_{135} = \sqrt{2}\,(\cos 135 + i \operatorname{sen} 135) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i$$

$$z_3 = (\sqrt{2})_{225} = \sqrt{2}\,(\cos 225 + i \operatorname{sen} 225) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i$$

$$z_4 = (\sqrt{2})_{315} = \sqrt{2}\,(\cos 315 + i \operatorname{sen} 315) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i$$

El factor cuadrático correspondiente a dos raíces conjugadas $a + bi$ y $a - bi$ es $(z - a)^2 + b^2$.

Entonces, el factor correspondiente a $1 + i$ y $1 - i$ es

$$(z - 1)^2 + 1^2 = z^2 - 2z + 2$$

y el correspondiente a $-1 + i$ y $-1 - i$:

$$(z + 1)^2 + 1^2 = z^2 + 2z + 2$$

De modo que:

$$z^4 + 4 = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$$

♠♠♠♠

11. Geometría analítica (1)

Ejercicio 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las $x - 4y + 7 = 0$; $3x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a $2x + 3y + 3 = 0$.

Solución:

El punto de corte es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

que es el punto $(1, 2)$. Tiene que ser perpendicular a $2x + 3y + 3 = 0$ que tiene pendiente $-\frac{2}{3}$. La perpendicular tendrá pendiente $\frac{3}{2}$ y su ecuación será:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad 3x - 2y + 1 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $P(0, 2)$ forman un ángulo de 45 con la recta $x - 3y + 8 = 0$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{1}{3}$. Si llamamos m a la pendiente de las rectas que buscamos, debe ocurrir que;

$$\operatorname{tg} 45 = 1 = \left| \frac{m - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}m} \right| = \left| \frac{3m - 1}{3 + m} \right|$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{3m - 1}{3 + m} = 1 \; ; \qquad 3m - 1 = 3 + m \; ; \qquad m = 2$$

o bien:

$$\frac{3m - 1}{3 + m} = -1 \; ; \qquad 3m - 1 = -3 - m \; ; \qquad m = -\frac{1}{2}$$

Las dos rectas son:

$$y - 2 = 2x \; ; \qquad 2x - y + 2 = 0$$
$$y - 2 = -\frac{1}{2}x \; ; \qquad x + 2y - 4 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar la distancia del punto $P(6, 1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(-3, 4)$.

Solución:

La recta que pasa por A y B es:

$$y - 5 = \frac{1}{5}(x - 2) \; ; \qquad x - 5y + 23 = 0$$

La distancia de P a esta recta es:

$$d = \frac{6 - 5 + 23}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{24}{\sqrt{26}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de cada una de las paralelas a la $3x - 4y + 2 = 0$ y que distan de ella 3 unidades.

Solución:

Las paralelas tienen como ecuación $3x - 4y + D = 0$. Si la distancia entre las rectas es de 3 unidades debe cumplirse:

$$\frac{|D-2|}{\sqrt{9+16}} = 3 \ ; \qquad |D-2| = 15$$

Entonces:

$$\begin{aligned} D - 2 = 15 \ ; &\qquad D = 17 \\ D - 2 = -15 \ ; &\qquad D = -13 \end{aligned}$$

Las dos rectas son $3x - 4y + 17 = 0$ y $3x - 4y - 13 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. En el triángulo de vértices $A(-3, 3)$, $B(3, 4)$ y $C(2, -1)$ calcular la ecuación de la altura correspondiente al vértice C.

Solución:

El lado AB tiene de pendiente $\frac{1}{6}$. Puesto que la altura correspondiente al vértice C es perpendicular, su pendiente será -6 y su ecuación:

$$y + 1 = -6(x - 2) \ ; \qquad 6x + y - 11 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $P(4, 3)$ respecto de la recta $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente -2. La perpendicular por el punto P será:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4) \ ; \qquad x - 2y + 2 = 0$$

El punto de intersección de la recta que nos dan y la perpendicular es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

que resulta ser el punto $(0, 1)$. Este punto es punto medio entre el punto P y su simétrico $P'(x', y')$:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{4 + x'}{2} \ ; &\qquad x' = -4 \\ 1 = \frac{3 + y'}{2} \ ; &\qquad y' = -1 \end{aligned}$$

El simétrico es $P'(-4, -1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(2, 5)$ y es tangente a la recta $y = 5x - 18$ en el punto $A(4, 2)$.

Solución:

Elcentro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz de AP:

$$\begin{aligned} &(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2 \\ &-8x + 16 - 4y + 4 = -4x + 4 - 10y + 25 \\ &4x - 6y + 9 = 0 \end{aligned}$$

También debe encontrarse en la perpendicular a la tangente $y=5x-18$ en el punto de tangencia $A(4,2)$:

$$\begin{aligned}&y-2=-\frac{1}{5}\,(x-4)\\&5y-10=-x+4\\&x+5y-14=0\end{aligned}$$

El centro es entonces la intersección de las dos rectas, es decir, la solución del sistema:

$$\begin{cases}4x-6y+9=0\\x+5y-14=0\end{cases}$$

que resulta ser el punto $C\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

El radio es la distancia desde el centro al punto P:

$$r^2=\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{5}{2}-5\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=\frac{13}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

o, en forma general $x^2+y^2-3x-5y+2=0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Dadas las rectas $x-2y-4=0$ y $2x-y+4=0$ calcular las rectas que pasan por $P(1,3)$ y forman con las anteriores ángulos iguales.

Solución:

Las rectas que nos dan tienen pendientes $\frac{1}{2}$ y 2. Sea m la pendiente de la recta que debemos calcular. Si forma el mismo ángulo con ambas rectas debe cumplirse que;

$$\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\,m}\right|=\left|\frac{2-m}{1+2m}\right|\ ;\qquad \left|\frac{2m-1}{2+m}\right|=\left|\frac{2-m}{1+2m}\right|$$

o bien

$$\frac{2m-1}{2+m}=\pm\frac{2-m}{1+2m}\ ;\qquad 4m^2-1=\pm(m^2-4)$$

que tiene como soluciones $m=-1$ y $m=1$.

Las rectas son:

$$\begin{aligned}&y-3=x-1\\&y-3=-(x-1)\end{aligned}$$

o bien $x-y+2=0$ y $x+y-4=0$.

♠♠♠♠

12. Geometría analítica (2)

Ejercicio 1. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $P(-8,9)$ forman un ángulo de 45 con la recta $6x-5y=17$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{6}{5}$. Si la pendiente de la recta que buscamos es m se cumple que:

$$\left|\frac{m-\frac{6}{5}}{1+\frac{6}{5}m}\right|=1\ ; \qquad \frac{5m-6}{5+6m}=\pm 1$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{5m-6}{5+6m}=1\ ; \qquad 5m-6=5+6m\ ; \qquad m=-11$$

$$\frac{5m-6}{5+6m}=-1\ ; \qquad 5m-6=-5-6m\ ; \qquad m=\frac{1}{11}$$

Las rectas son:

$$y-9=-11(x+8)\ ; \qquad y-9=\frac{1}{11}(x+8)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $(-4,-1)$ respecto de la recta $2x+y-1=0$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente -2. La perpendicular por el punto P será:

$$y+1=\frac{1}{2}(x+4)\ ; \qquad x-2y+2=0$$

El punto de intersección de la recta que nos dan y la perpendicular es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$$

que resulta ser el punto $(0,1)$. Este punto es punto medio entre el punto P y su simétrico $P'(x',y')$:

$$0=\frac{-4+x'}{2}\ ; \qquad x'=4$$

$$1=\frac{-1+y'}{2}\ ; \qquad y'=3$$

El simétrico es $P'(3,4)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,2)$ y $C(5,8)$.

Solución:

La pendiente de la recta AB es

$$m_{AB}=\frac{2-2}{8-0}=0$$

Es una recta horizontal. La altura que pasa por C será vertical y su ecuación es $x=5$.

La pendiente de la recta BC es:

$$m_{BC}=\frac{8-2}{5-8}=-2$$

La altura que pasa por A tendrá pendiente $\frac{1}{2}$ y por ecuación:

$$y-2=\frac{1}{2}(x-2)\ ; \qquad x-2y+2=0$$

El ortocentro es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

que resulta ser el punto $H\left(5, \frac{7}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Hallar el área del triángulo de vértices $A(7,2)$, $B(8,3)$ y $C(1,0)$.

Solución:

Tomemos como base el lado BC. La longitud de este lado es:

$$BC = \sqrt{(1-8)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{58}$$

La pendiente de este lado es:

$$m_{BC} = \frac{0-3}{1-8} = \frac{3}{7}$$

Su ecuación es:

$$y - 3 = \frac{3}{7}(x-8) \; ; \qquad 3x - 7y - 3 = 0$$

La altura correspondiente al vértice A es la distancia de A a esta recta:

$$h_A = \frac{|3 \cdot 7 - 7 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{49+9}} = \frac{4}{\sqrt{56}}$$

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{56} \cdot \frac{4}{\sqrt{56}} = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,2)$ y $C(6,4)$.

Solución:

Vamos a calcular el centro de la circunferrencia como punto de intersección de las mediatrices de AB y AC. La mediatriz de AB es:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2$$
$$0 = -8x + 16 - 4y + 4$$
$$2x + y - 5 = 0$$

y la mediatriz de AC:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (x-6)^2 + (y-4)^2$$
$$0 = -12x + 36 - 8y + 16$$
$$3x + 2y - 13 = 0$$

El centro es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 13 = 0 \end{cases}$$

que resulta ser el punto $(-3, 11)$.

Entonces, el radio es igual a:

$$r = \sqrt{(-3-0)^2 + (11-0)^2} = \sqrt{130}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Se considera la recta $r: 3x + 4y + 1 = 0$ y el punto P de esta recta cuya abscisa es igual a 1. Calcular los puntos de la recta que se encuentran a una distancia de P igual a 5 unidades.

Solución:

El punto de la recta con abscisa igual a 1 es el punto $P(1, -1)$. Los puntos que buscamos se encuentra a distancia 5 de P. Se encuentran, por tanto, en la circunferencia de centro P y radio 5:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Como también se encuentran sobre la recta, son la solución del sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ 3x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Haciendo operaciones, resultan los puntos $(5, -4)$ y $(-3, 2)$.

♠♠♠♠