1 Radicales. Logaritmos.

Ejercicio 1. Simplificar:

$$\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}$$

Solución:

$$\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}=\sqrt{9a^2+\sqrt{(6a+1)^2}}=\sqrt{9a^2+6a+1}=\sqrt{(3a+1)^2}=3a+1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Simplificar:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{15}-3-5-\sqrt{15}}{5-3}=-4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular:

$$2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$$

Solución:

Sacando factores de los radicales:

$$\begin{aligned}2\sqrt{12}-&3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}\\&=2\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{25\cdot 3}+5\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{16\cdot 3}+4\sqrt{3}+\sqrt{81\cdot 3}\\&=4\sqrt{3}-15\sqrt{3}+15\sqrt{3}-12\sqrt{3}+4\sqrt{3}+9\sqrt{3}\\&=5\sqrt{3}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot\sqrt{\frac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\frac{192}{9}}$$

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot\sqrt{\frac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\frac{192}{9}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 63\cdot 192}{15\cdot 14\cdot 48\cdot 9}}=\sqrt{4}=2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_{25}\dfrac{1}{5}$ (b) $\log_3\dfrac{9}{\sqrt{3}}$

Solución:

(a) Pasando a logaritmos base 5:

$$\log_{25}\frac{1}{5}=\frac{\log_5\frac{1}{5}}{\log_5 25}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

(b) Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente:

$$\log_3\frac{9}{\sqrt{3}}=\log_3 9-\log_3\sqrt{3}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{2}\right)$ (b) $\log_4\dfrac{8}{\sqrt[5]{16}}$

Solución:

(a) Aplicando la propiedad del logaritmo del producto y de la raíz:

$$\log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{2}\right)=\log_2\sqrt[3]{16}+\log_2\sqrt[4]{2}=\frac{1}{3}\log_2 16+\frac{1}{4}\log_2 2=\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$$

(b) Por las propiedades del logaritmo del cociente y de la raíz y cambiando a base 2:

$$\log_4\frac{8}{\sqrt[5]{16}}=\log_4 8-\log_4\sqrt[5]{16}=\log_4 8-\frac{1}{5}\log_4 16=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}-\frac{2}{5}=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{11}{10}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Sabiendo que $\log 2=0.3010$ calcular $\log\sqrt[3]{12.5}$

Solución:

Aplicando la propiedades de los logaritmos:

$$\log\sqrt[3]{12.5}=\frac{1}{3}\log 12.5=\frac{1}{3}\log\frac{125}{10}=\frac{1}{3}(\log 125-\log 10)=\frac{1}{3}\left(\log 5^3-1\right)=\frac{1}{3}(3\log 5-1)=\log 5-\frac{1}{3}$$

Además:

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3010=0.6990$$

Entonces:

$$\log\sqrt[3]{12.5}=0.6990-0.3333=0.3657$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$3^x+\frac{1}{3^{x-1}}=4$$

Solución:

Puesto que:

$$3^{x-1} = \frac{3^x}{3}$$

podemos escribir la ecuación como:

$$3^x + \frac{3}{3^x} = 4$$

Quitando denominadores:

$$3^{2x} + 3 = 4 \cdot 3^x \ ; \qquad 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado con la incógnita 3^x y resulta:

$$3^x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 3 = 1$$

$$3^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 1 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Calcular el valor de a sabiendo que la ecuación:

$$\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x - 2)} - 2\log 5 = \log 40$$

tiene dos raíces, cuyo producto es -15.

Solución:

Agrupamos los términos constantes:

$$\frac{\log(x^3 - a)}{\log(x - 2)} = \log 40 + 2\log 5 \ ; \qquad \frac{\log(x^3 - a)}{\log(x - 2)} = \log(40 \cdot 25) \frac{\log(x^3 - a)}{\log(x - 2)} = 3$$

Entonces:

$$\log(x^3 - a) = 3\log(x - 2) \ ; \qquad \log(x^3 - a) = \log(x - 2)^3 \ ; \qquad (x^3 - a) = (x - 2)^3$$

Desarrollando el cubo del binomio y simplificando:

$$x^3 - a = x^3 - 6x^2 + 24x - 8$$

$$6x^2 - 24x + 8 - a = 0$$

Entonces:

$$\frac{8 - a}{6} = -15 \quad \Longrightarrow \quad a = 98$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Resolver la ecuación

$$8^{x-1} = 6^{3x}$$

Expresar la solución en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Solución:

Aplicando logaritmos neperianos a ambos miembros de la igualdad:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x}$$

$$(x - 1)\ln 8 = 3x \ln 6$$

$$(x - 1)\ln 2^3 = 3x \ln(2 \cdot 3)$$

$$3(x - 1)\ln 2 = 3x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$(x - 1)\ln 2 = x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$x\ln 2 - \ln 2 = x\ln 2 + x\ln 3$$

$$-\ln 2 = x\ln 3$$

$$x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

♠♠♠♠

2 Combinatoria. Inducción.

Ejercicio 1. Con las letras de la palabra REPASO:

(a) ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes pueden formarse en que las vocales y las consonantes se encuentren alternadas?

(b) ¿Cuántas en que las vocales estén separadas?

Solución:

(a) $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$

(b) $C_{4,3} \cdot 3! \cdot 3! = 144$

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

(a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse 4 cartas de una baraja española de 40 cartas?

(b) ¿Cuántas están formadas por dos parejas? (por ejemplo dos sietes y dos cuatros)

(c) ¿Cuántas están formadas por 2 copas y 2 bastos?

(d) ¿En cuántas hay alguna carta de oros?

Solución:

(a) $C_{40,4} = 91390$

(b) $C_{10,2}C_{4,2}C_{4,2} = 1620$

(c) $C_{10,2}C_{10,2} = 2025$

(d) $C_{40,4} - C_{30,4} = 63985$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Desarrollar y simplificar

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$$

(b) A partir de lo anterior, determinar el término constante del desarrollo

$$\left(2x^2 + 1\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$$

Solución:

(a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4 = x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot \frac{2}{x} + 6 \cdot x^2 \cdot \frac{4}{x^2} - 4 \cdot x \cdot \frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4} = x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}$

(b) El término constante será:

$$1 \cdot 24 + 2x^2 \cdot \left(\frac{-32}{x^2}\right) = -40$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Demostrar por inducción que $7^{8n+3}+2$, $n \in \mathbb{N}$, es divisible por 5.

Solución:

– La fórmula se cumple para $n=0$:
$$7^{8\cdot 0+3}+2=7^3+2=343+2=\dot{5}$$
– Supongamos que se cumple para $n=k$:
$$7^{8k+3}+2=\dot{5}$$
y demostremos que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$. Demostremos que:
$$7^{8(k+1)+3}+2=\dot{5}$$
En efecto:
$$\begin{aligned}7^{8(k+1)+3}+2&=7^{8k+11}+2\\&=7^{8k+3+8}+2\\&=7^8\cdot 7^{8k+3}+2\\&=7^8\cdot(\dot{5}-2)+2\\&=\dot{5}-2\cdot 7^8+2\\&=\dot{5}-2(\dot{5}+1)+2\\&=\dot{5}+2-2\\&=\dot{5}\end{aligned}$$
– Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{N}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demostrar por inducción que, para $n \in \mathbb{Z}^+$,
$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$$

Solución:

– La expresión se cumple para $n=1$ pues, en ese caso, el primer miembro vale 1 y el segundo:
$$4-\frac{1+2}{2^{1-1}}=4-3=1$$
– Supongamos que se cumple para $n=k$:
$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}$$
y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$, es decir, demostremos que:
$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=4-\frac{k+3}{2^k}$$
En efecto,
$$\begin{aligned}1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k&=4-\frac{k+3}{2^k}\\&=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+\frac{k+1}{2^k}\\&=4-\frac{2k+4-k-1}{2^k}\\&=4-\frac{k+3}{2^k}\end{aligned}$$
– Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

3 Polinomios

Ejercicio 1. Resolver la ecuación $12x^3 + 49x^2 + 3x - 4 = 0$

Solución:

Obtenemos una primera solución $x = -4$ por tanteo y factorizamos el polinomio:

	12	49	3	-4
-4		-48	-4	4
	12	1	-1	0

De forma que la ecuación se puede escribir factorizada:

$$(x+4)(12x^2 + x - 1) = 0$$

Igualando a cero cada uno de los factores obtenemos las soluciones $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ y $x_3 = \frac{1}{4}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En la siguiente ecuación:

$$x^2 - 12x + m = 0$$

calcular el valor de m para que una raíz sea triple que la otra.

Solución:

Sean r y $3r$ las dos soluciones. Puesto que su suma $4r$ debe ser igual a 12 las soluciones son $r = 3$ y $3r = 9$. Entonces m es el producto de las dos soluciones, es decir, $m = 27$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. La ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + (k-1) = 0$ tiene por raíces α y β tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Sin resolver la ecuación, halle los posibles valores del número real k.

Solución:

Por las relaciones de Cardano:

$$\alpha + \beta = 2k$$
$$\alpha\beta = k - 1$$

Entonces, puesto que:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

Sustituyendo:

$$4k^2 = 4 + 2(k-1)\ ; \qquad 4k^2 - 2k - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 1\ ; \qquad k = -\frac{1}{2}$$

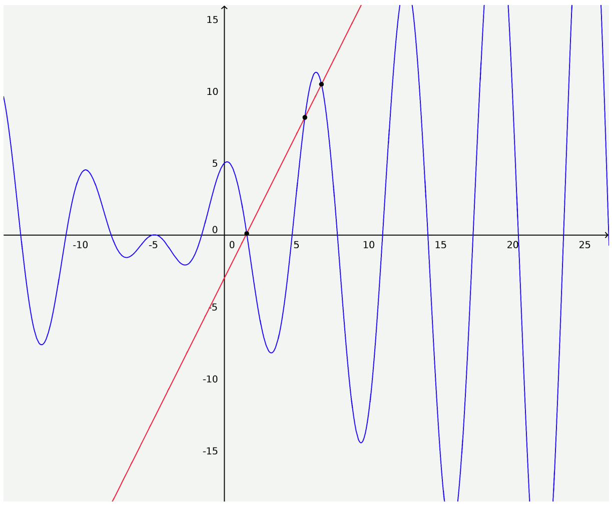
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Con ayuda de la calculadora obtener todas las soluciones de la ecuación:

$$2x - 3 = (x+5)\cos x$$

Dibujar aproximadamente el gráfico utilizado.

Solución:



Las soluciones son $x \simeq 1.55$, $x \simeq 5.60$ y $x \simeq 6.75$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$$

Solución:

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$2xy = 14 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{7}{x}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{7x}{x} + \frac{49}{x^2} = 57 \\ & x^2 + 7 + \frac{49}{x^2} - 57 = 0 \\ & x^4 - 50x^2 + 49 = 0 \\ & x^2 = 1 \; ; \qquad x^2 = 49 \end{aligned}$$

Y de aquí $x = \pm 1$ y $x = \pm 7$.

Sustituimos en $y = \frac{7}{x}$ y obtenemos las soluciones $(1, 7)$, $(-1, -7)$, $(7, 1)$ y $(-7, -1)$. Se puede comprobar que todas ellas son solución también de la segunda ecuación.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x - 5} + 2 = \sqrt{5x + 1}$$

Solución:

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x-5}+2\right)^2=\left(\sqrt{5x+1}\right)$$
$$3x-5+4+4\sqrt{3x-5}=5x+1$$
$$4\sqrt{3x-5}=2x+2$$
$$2\sqrt{3x-5}=x+1$$
$$4(3x-5)=x^2+2x+1$$
$$x^2-02x+21=0$$

Las soluciones son $x=3$ y $x=7$. Ambas soluciones son válidas.

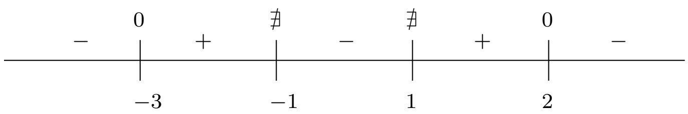
♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2+x-6}{1-x^2}\geq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son -3 y 2 y las del denominador -1 y 1. El esquema de signos es el siguiente:



La solución es $x\in[-3,-1)\cup(1,2]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. El polinomio $f(x)=4x^3+2ax-7a,\ a\in\mathbb{R}$, da un resto -10 cuando se divide por $(x-a)$. Calcular el valor de a.

Solución:

Según el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x=a$ es igual a -10:

$$4a^3+2a^2-7a=-10 \quad\Longrightarrow\quad 4a^3+2a^2-7a+10=0$$

Una solución es $x=-2$. Factorizamos:

	4	2	−7	10
−2		8	12	−10
	4	−6	5	0

Y resulta la ecuación:

$$(a+2)(4a^2-6a+5)=0$$

La única solución es $a=-2$.

♠♠♠♠

4 Logaritmos. Combinatoria. Polinomios

Ejercicio 1. Use el método de inducción matemática para demostrar que $5^{2n} - 24n - 1$ es divisible por 576 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

- Para $n = 1$ se cumple:

$$5^2 - 24 \cdot 1 - 1 = 0 = \dot{576}$$

- Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$5^{2k} - 24k - 1 = \dot{576}$$

Debemos demostrar que, en ese caso, también se cumple para $n = k + 1$. Debemos demostrar:

$$5^{2(k+1)} - 24(k+1) - 1 = 5^{2k+2} - 24k - 25 = \dot{576}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 5^{2k+2} - 24k - 25 &= 25 \cdot 5^{2k} - 24k - 25 && \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= 25(\dot{576} + 24k + 1) - 24k - 25 \\ &= \dot{576} + 25 \cdot 24k - 24k \\ &= \dot{576} + 576k \\ &= \dot{576} \end{aligned}$$

- Por el principio de inducción matemática, la propiedad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Cuando se divide $2x^3 + kx^2 + 6x + 32$ y $x^4 - 6x^2 - k^2x + 9$ entre $x + 1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k.

Solución:

Si dan el mismo resto el valor numérico de ambos polinomios para $x = -1$ es el mismo:

$$-2 + k - 6 + 32 = 1 - 6 + k^2 + 9 \quad \Longrightarrow \quad k^2 - k - 20 = 0$$

Los valores posibles son $k = -4$ y $k = 5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Solución:

Aplicando el logaritmo a los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} &\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x} \\ &(x-1)\ln 8 = 3x \ln 6 \\ &\cancel{3}(x-1)\ln 2 = \cancel{3}x(\ln 2 + \ln 3) \\ &-\ln 2 = x \ln 3 \\ &x = -\frac{\ln 2}{\ln 3} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación $\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$.

Solución:

Podemos escribir:

$$\log_2 \frac{x}{5} = \log_2 4 + \log_2 3 \quad \Longrightarrow \quad \log_2 \frac{x}{5} = \log_2 12 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{5} = 12\ ; \qquad x = 60$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. De cuántas maneras pueden repartirse cinco cartas de una baraja de 40 cartas de forma que:

(a) Sean de números diferentes (no puede haber parejas)

(b) Haya exactamente un trío (tres cartas del mismo número y otras dos de números distintos)

Solución:

(a) Hay que elegir 5 números diferentes y después elegir cartas de estos números:

$$C_{10,5} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 258048$$

Otro modo de pensarlo sería la siguiente: la primera carta se puede elegir de 40 maneras, la segunda de 36, la tercera de 32, la cuarta de 28 y la quinta de 24. Como no importa el orden hay que dividir el producto de estos números por 5!:

$$\frac{40 \cdot 36 \cdot 32 \cdot 28 \cdot 24}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 258048$$

(b) El trío se puede elegir de $10 \cdot C_{4,3} = 10 \cdot 4 = 40$ maneras diferentes. Una vez elegido el trío las otras dos cartas pueden elegirse de $C_{9,2} \cdot 4 \cdot 4 = 576$ maneras. En total:

$$40 \cdot 576 = 23040$$

♠♠♠♠

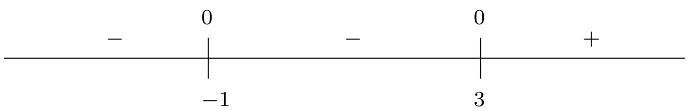
Ejercicio 6. Resolver la inecuación:

$$(x+1)^2(x-3)(x^2+1) \le 0$$

Solución:

Las raíces son -1 (doble) y 3.

El esquema de signos es el siguiente:



La solución es $x \in (-\infty, 3]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Halle el término constante en el desarrollo de $\left(4x^2 - \dfrac{3}{2x}\right)^{12}$.

Solución:

El término n-ésimo de este desarrollo tiene la forma:

$$\binom{12}{n} \left(4x^2\right)^n \left(-\frac{3}{2x}\right)^{12-n}$$

El término independiente cumple que

$$2n = 12 - n \quad \Longrightarrow \quad n = 4$$

El término que buscamos es:

$$\binom{12}{4} \cdot 4^4 \cdot \frac{3^8}{2^8} = 3247695$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 180 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$$

Solución:

El sistema puede escribirse:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 180 \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$$

Despejando xy de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$xy = \frac{20}{9}(x+y)\ ; \qquad \frac{20}{9}(x+y)^2 = 180\ ; \qquad (x+y)^2 = 81$$

De forma que tenemos dos posibilidades:

$$x + y = 9\ ; \qquad xy = 20$$

y las soluciones son $(4, 5)$ y $(5, 4)$.

La otra posibilidad es:

$$x + y = -9\ ; \qquad xy = -20$$

Las soluciones en este caso son $\left(\frac{-9+\sqrt{161}}{2}, \frac{-9-\sqrt{161}}{2}\right)$ y $\left(\frac{-9-\sqrt{161}}{2}, \frac{-9+\sqrt{161}}{2}\right)$

♠♠♠♠

5 Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular el área de un pentágono regular de 40 cm de lado.

Solución:

La apotema es:

$$a = \frac{20}{\operatorname{tg} 36^{\circ}} \simeq 27.5$$

y el área, si p es el perímetro:

$$S = \frac{1}{2}\, pa \simeq 2750 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En el triángulo $a = 157$ cm, $B = 65^{\circ}$, $C = 39^{\circ}$. calcular la altura correspondiente al lado a.

Solución:

Calculamos el ángulo A:

$$A = 180^{\circ} - 65^{\circ} - 39^{\circ} = 76^{\circ}$$

Entonces por el teorema del seno:

$$\frac{157}{\operatorname{sen} 76^{\circ}} = \frac{b}{\operatorname{sen} 65^{\circ}} \quad \Longrightarrow \quad b = 147 \text{ cm}$$

y la altura:

$$h_a = b \operatorname{sen} C \simeq 92.3 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver la ecuación

$$3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0 \; ; \qquad -180^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0 \\
&3(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 7\cos x - 2 = 0 \\
&3\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 2 = 0 \\
&6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0 \\
&\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{12} = \frac{7 \pm 13}{12}
\end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones para $\cos x$:

$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{5}{3} \quad &\Longrightarrow \quad \text{no hay solución} \\
\cos x = -\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad x = -120^{\circ},\ x = 120^{\circ}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación:

$$3\sec^2 x + 1 = 8 \operatorname{tg} x \; ; \qquad 0^{\circ} \leq x \leq 360^{\circ}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&3\sec^2 x + 1 = 8 \operatorname{tg} x\\
&3(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 1 = 8 \operatorname{tg} x\\
&3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 4 = 0\\
&\operatorname{tg} x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}
\end{aligned}
$$

Tenemos dos soluciones para $\operatorname{tg} x$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} x = 2 \quad &\Longrightarrow \quad x = 63^{\circ},\ x = 243^{\circ}\\
\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \quad &\Longrightarrow \quad x = 34^{\circ},\ x = 214^{\circ}
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Demostrar la identidad:

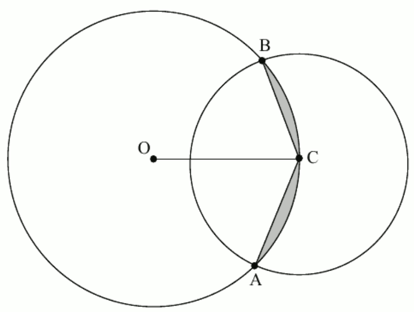
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha)\\
&= \cos 2\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \alpha\\
&= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)\cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha\\
&= \cos^3 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha\\
&= \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha\\
&= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. El punto O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) $\widehat{BOC}$;

(b) el área de la región sombreada.

Solución:

(a) Llamemos $\varphi = \widehat{BOC}$:

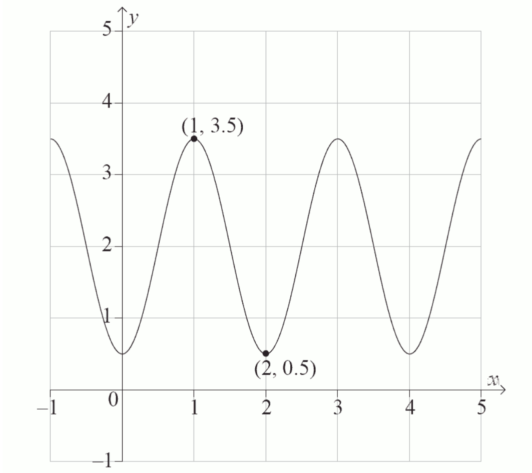
$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{1.5}{4} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 2 \operatorname{arsen} \frac{1.5}{4} \simeq 0.769$$

(b) La región sombreada está formada por dos segmentos circulares de amplitud φ sobre un círculo de 4 cm de radio. El área será igual a

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\, r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1.18$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. En la figura se muestra la curva $y = a \operatorname{sen}(b(x+c)) + d$, donde a, b, c y d son constantes positivas. La curva tiene un punto máximo en $(1; 3.5)$ y un mínimo en $(2; 0.5)$.



(a) Calcular los valores de a y d.

(b) Calcular los valores de b y c, si $c > 0$.

Solución:

(a) $a = \frac{3}{2}$, $d = 2$.

(b) El período de la función es igual a 2. Entonces:

$$\frac{2\pi}{b} = 2 \quad \Longrightarrow \quad b = \pi$$

Puesto que hay un máximo en $x = 1$:

$$\operatorname{sen}(b(x+c)) = \operatorname{sen}(\pi(1+c)) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi + \pi c = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{1}{2} \pm 2k$$

Puesto que nos piden un valor positivo de c, damos a k el valor 1 y obtenemos $c = \frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. El triángulo ABC es tal que $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm y $B\hat{A}C = \frac{\pi}{9}$.

(a) Utilice el teorema del coseno para hallar los dos posibles valores de AC.

(b) Halle la diferencia entre las áreas de los dos posibles triángulos ABC.

Solución:

(a) Por el teorema del coseno, sea $b = AC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos B\hat{A}C$$

$$9 = 16 + b^2 - 8b\cos\frac{\pi}{9}$$

$$b^2 - 8b\cos\frac{\pi}{9} + 7 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $b \simeq 6.43$ y $b \simeq 1.09$.

(*b*) El área del triángulo se puede calcular mediante:

$$S = \frac{1}{2}\,AB \cdot AC \cdot \,\operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{1}{2}\,4 \cdot b \cdot \,\operatorname{sen}\frac{\pi}{9} = 2b\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$$

Sustituyendo los valores de b que hemos obtenido resultan los valores del área 4.40 y 0.74. Su diferencia es aproximando a tres cifras significativas 3.65.

♠♠♠♠

6 Números complejos

Ejercicio 1. Calcular el número real k de forma que

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea un número real.

Solución:

Operando:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki} = \frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2} = \frac{5-12k}{1+k^2} + \frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

La parte imaginaria debe ser cero de modo que:

$$-5k-12=0\ ; \qquad k=-\frac{12}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular las raíces cuadradas del número complejo $20-21i$ sin utilizar la calculadora.

Solución:

Sea $\sqrt{20-21i}=x+yi$. Se cumple que

$$\begin{aligned} x^2-y^2&=20\\ 2xy&=-21 \end{aligned}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y=\frac{-21}{2x} \quad\Longrightarrow\quad x^2-\frac{441}{4x^2}=20 \quad\Longrightarrow\quad 4x^4-80x^2-441=0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$x^2=\frac{80\pm\sqrt{6400+16\cdot 441}}{8}=\frac{80\pm 116}{8}$$

La solución negativa no es válida. Así, una solución es

$$x=\sqrt{\frac{196}{8}}=\frac{14}{2\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}\ ; \qquad y=-\frac{21}{2x}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

y la solución es:

$$z_1=\frac{7}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i$$

La otra raíz es opuesta de la primera:

$$z_2=-\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Escribe los siguientes números complejos en forma polar:

(a) -4 (b) $2i$ (c) $-\frac{3}{4}i$ (d) $-2+2\sqrt{3}i$

Solución:

(a) $-4=4_{180^\circ}$ (b) $2i=2_{90^\circ}$ (c) $-\frac{3}{4}i=\left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}$ (d) $-2+2\sqrt{3}i=4_{120^\circ}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:

(a) $1_{\pi/2}$ (b) $5_{270^{\text{o}}}$ (c) $1_{150^{\text{o}}}$ (d) $4_{300^{\text{o}}}$

Solución:

(a) $1_{\pi/2} = i$
(b) $5_{270^{\text{o}}} = -5i$
(c) $1_{150^{\text{o}}} = \cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$
(d) $4_{300^{\text{o}}} = 4(\cos 300^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 300^{\text{o}}) = 4\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular en forma binómica las raíces sextas de -1.

Solución:

En forma polar $-1 = 1_{180^{\text{o}}}$. Sus raíces sextas son:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1_{30^{\text{o}}} = 1\,(\cos 30^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 30^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= 1_{90^{\text{o}}} = i \\
z_3 &= 1_{150^{\text{o}}} = 1\,(\cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= 1_{210^{\text{o}}} = 1\,(\cos 210^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 210^{\text{o}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_1 &= 1_{270^{\text{o}}} = -i \\
z_1 &= 1_{330^{\text{o}}} = 1\,(\cos 330^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 330^{\text{o}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. El punto $A(3,5)$ es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices B y C.

Solución:

Basta girar el afijo del complejo $z = 3 + 5i$ alrededor del origen ángulos de 120^{o} y 240^{o}:

$$\begin{aligned}
(3+5i)\,(\cos 120^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 120^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
(3+5i)\,(\cos 240^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 240^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Haciendo las operaciones se obtienen los puntos:

$$B\left(-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)\ ; \qquad C\left(-\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Sabiendo que z es el número complejo $x + iy$ y que $|z| + z = 6 - 2i$, calcular el valor de x y el valor de y.

Solución:

Sustituyendo $z = x + iy$:

$$\sqrt{x^2+y^2} + x + iy = 6 - 2i$$

Igualamos partes imaginarias y obtenemos $y = -2$. Para la parte real tenemos que:

$$\sqrt{x^2+4} + x = 6$$
$$x = \frac{8}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. A partir de la fórmula de Moivre demostrar que:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\ \operatorname{tg}\varphi - 10\ \operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\ \operatorname{tg}^2\varphi + 5\ \operatorname{tg}^4\varphi}$$

Demostrar que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Solución:

De acuerdo con la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi + i \operatorname{sen} 5\varphi &= (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^5\\ &= \cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi \cdot i \operatorname{sen}\varphi + 10\cos^3\varphi \cdot i^2 \operatorname{sen}^2\varphi + 10\cos^2\varphi \cdot i^3 \operatorname{sen}^3\varphi + 5\cos\varphi \cdot i^4 \operatorname{sen}^4\varphi + i^5 \operatorname{sen}^5\varphi\\ &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi + i(5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi)\end{aligned}$$

Por consiguiente, igualando partes reales e imaginarias:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi$$
$$\operatorname{sen} 5\varphi = 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 5\varphi &= \frac{\operatorname{sen} 5\varphi}{\cos 5\varphi}\\ &= \frac{5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi}\end{aligned}$$

Y, dividiendo numerador y denominador por $\cos^5\varphi$:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\ \operatorname{tg}\varphi - 10\ \operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\ \operatorname{tg}^2\varphi + 5\ \operatorname{tg}^4\varphi}$$

Para $\varphi = \frac{\pi}{5}$ resulta:

$$0 = 5\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - 10\ \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg}^5\frac{\pi}{5}$$

Tenemos entonces que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ es una de las raíces de la ecuación:

$$x^5 - 10x^3 + 5x = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 0$, $x = \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ y $x = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. La tangente de $\frac{\pi}{5}$ tiene que ser uno de estos cinco números. Podemos descartar 0 y los dos valores negativos porque el ángulo pertenece al primer cuadrante. Nos quedan dos posibilidades $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ y $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Como el ángulo $\frac{\pi}{5}$ es menor de 45º su tangente debe ser menor que 1. Por tanto

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

♠♠♠♠

7 Geometría analítica

Ejercicio 1. Se considera la recta $r:\ 3x+4y+1=0$ y el punto P de esta recta cuya abscisa es igual a 1. Calcular los puntos de la recta que se encuentran a una distancia de P igual a 5 unidades.

Solución:

El punto de la recta de abscisa 1 es $C(1,-1)$. La circunferencia con centro en este punto y radio 5 es:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

Los puntos que buscamos son las intersecciones de la recta y la circunferencia, es decir, las soluciones del sistema:

$$\begin{cases}3x+4y+1=0\\(x-1)^2+(y+1)^2=25\end{cases}$$

Por sustitución, despejamos y en la ecuación de la recta:

$$y=\frac{-3x-1}{4}$$

Sustituyendo:

$$x^2-2x+1+\frac{(-3x-1)^2}{16}+2\,\frac{-3x-1}{4}+1-25=0$$

$$x^2-2x+1+\frac{9x^2+6x+1}{16}+\frac{-6x-2}{4}-24=0$$

$$16x^2-32x+16+9x^2+6x+1-24x-8-384=0$$

$$25x^2-50x-375=0$$

$$x^2-2x-15=0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x_1=-3$ y $x_2=5$. Los puntos son $(-3,2)$ y $(5,-4)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el área del triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(4,-3)$ y $C(1,5)$.

Solución:

– Tomamos como base el lado AB:

$$AB=\sqrt{(4+2)^2+(-3-3)^2}=6\sqrt{2}$$

– Para calcular la altura, calculamos primero la ecuación de la recta AB:

$$y-3=-1(x+2)\ ;\qquad x+y-1=0$$

La altura es la distancia desde C a esta recta:

$$h=\frac{1+5-1}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

– El área del triángulo es igual a:

$$S=\frac{1}{2}\,6\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=15$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el punto de la recta $x+2y-3=0$ que se encuentra a la misma distancia de los puntos $P(3,-2)$ y $Q(4,4)$.

Solución:

Si el punto que buscamos está a la misma distancia de los dos puntos se encuentra en su mediatriz:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-4)^2$$

$$-6x+9+4y+4=-8x+16-8y+16$$

$$2x+12y-19=0$$

Puesto que también se encuentra en la recta $x+2y-3=0$, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x+12y-19=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$$

resolvemos por sustitución:

$$2(3-2y)+12y-19=0\ ; \qquad 8y-13=0\ ; \qquad y=\frac{13}{8}$$

El punto que buscamos es $\left(-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-3,-2)$ y forman con la recta
$2x-3y+1=0$ un ángulo cuya tangente es igual a 2.

Solución:

Sea m la pendiente de la rectas que buscamos. Puesto que la recta qu3 nos dan tiene pendiente $\frac{2}{3}$:

$$\left|\frac{m-\frac{2}{3}}{1+\frac{2m}{3}}\right|=2\ ; \qquad \left|\frac{3m-2}{3+2m}\right|=2$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{3m-2}{3+2m}=2 \implies m=-8$$
$$\frac{3m-2}{3+2m}=-2 \implies m=-\frac{4}{7}$$

Las rectas que nos piden son:

$$y+2=-8\ (x+3)$$
$$y+2=-\frac{4}{7}\ (x+3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Determinar el punto simétrico del $(2,3)$ respecto a la recta $x+2y=3$.

Solución:

– Calculamos la perpendicular a la recta dada por el punto:

$$y-3=2(x-2)\ ; \qquad 2x-y-1=0$$

– La intersección de las dos rectas es el punto:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \implies x+4x-2=3 \implies x=1$$

El punto de intersección es $P(1,1)$.

– El punto obtenido es punto medio entre el punto dado y su simétrico:

$$1=\frac{2+x'}{2}\ ; \qquad 1=\frac{3+y'}{2}$$

El simétrico es $(0,-1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dada la recta $12x - 5y + 1 = 0$ calcular las paralelas que distan de ellas 5 unidades.

Solución:

Una paralela a esta recta tiene por ecuación:

$$12x - 5y + D = 0$$

La distancia entre las rectas debe ser igual a 5:

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{144+25}} = 5\ ; \qquad \frac{|D-1|}{13} = 5\ ; \qquad D - 1 = \pm 65$$

Las soluciones son $D = 66$ y $D = -64$. La es ecuaciones de las paralelas son $12x - 5y + 66 = 0$ y $12x - 5y - 64 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular el circuncentro del triángulo de vértices $A(-1,-1)$, $B(6,2)$ y $C(4,-3)$.

Solución:

- Calculamos la mediatriz de AB:

$$\begin{aligned}&(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-6)^2 + (y-2)^2\\&2x + 1 + 2y + 1 = -12x + 36 - 4y + 4\\&14x + 6y - 38 = 0\\&7x + 3y - 19 = 0\end{aligned}$$

- La mediatriz de BC:

$$\begin{aligned}&(x-6)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2\\&-12x + 36 - 4y + 4 = -8x + 16 + 6y + 9\\&4x + 10y - 15 = 0\end{aligned}$$

- El circuncentro es el punto de intersección de las dos mediatrices:

$$\begin{cases}7x + 3y - 19 = 0\\4x + 10y - 15 = 0\end{cases}$$

  Resolviendo el sistema se obtiene el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(5,-2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.

Solución:

Sea $P(x,0)$. La pendiente de AP y de BP son:

$$m_{AP} = \frac{-3}{x-1}\ ; \qquad m_{BP} = \frac{2}{x-5}$$

Puesto que las rectas son perpendiculares:

$$\frac{2}{x-5} = \frac{x-1}{3} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 6x - 1 = 0$$

Resolviendo, se obtienen dos soluciones $x_1 = 3 + \sqrt{10}$ y $x_2 = 3 - \sqrt{10}$.

♠♠♠♠

8 Números complejos. Geometría.

Ejercicio 1. Calcular en forma binómica las raíces sextas de -1.

Solución:

En forma polar:

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^o}}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1_{30^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= 1_{90^o} = i \\
z_3 &= 1_{150^o} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= 1_{210^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= 1_{270^o} = -i \\
z_6 &= 1_{300^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular en forma binómica $(1-2i)^5$.

Solución:

Aplicando la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned}
(1-2i)^5 &= 1^5 - 5\cdot 1^4 \cdot 2i + 10\cdot 1^3 \cdot 4i^2 - 10\cdot 1^2 \cdot 8i^3 + 5\cdot 1\cdot 16i^4 - 32i^5 \\
&= 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i \\
&= 41 + 38i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar dos números complejos, cuya suma sea $1+4i$ y cuyo cociente sea i.

Solución:

Sean z y w los complejos que buscamos. Entonces:

$$\begin{cases} w + z = 1 + 4i \\ \frac{w}{z} = i \end{cases} \quad ; \qquad w = iz\ ; \qquad iz + z = 1 + 4i \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1+4i}{1+i}$$

Operando:

$$z = \frac{1+4i}{1+i} = \frac{(1+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - i + 4i - 4i^2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

y, sustituyendo:

$$w = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Las raíces cúbicas de z son z_1, z_2 y z_3. Sabiendo que $z_1 = 3 - 2i$, calcular el área del triángulo que tiene como vértices z_1, z_2 y z_3.

Solución:

La raíz tiene módulo $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Se trata de un triángulo equilátero cuya área se puede considerar como suma de tres triángulos isósceles en los que los lados iguales miden $\sqrt{13}$ y el ángulo desigual es de 120º:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}\sqrt{13}\,\mathrm{sen}\,120^{\mathrm{o}} = \frac{3 \cdot 13 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los puntos de la recta $3x - 11y - 6 = 0$ que se encuentra a una distancia $\sqrt{65}$ del punto $P(9, -4)$.

Solución:

Son los puntos de intersección de la recta con la circunferencia de centro $P(9, -4)$ y radio $\sqrt{65}$:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+4)^2 = 65 \\ 3x - 11y - 6 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos $A(2, 0)$ y $B(13, 3)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el circuncentro del triángulo de vértices $A(1, -4)$, $B(4, 2)$ y $C(11, -9)$.

Solución:

Calculamos la mediatriz de AB:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + (y+4)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ &-2x + 1 + 8y + 16 = -8x + 16 - 4y + 4 \\ &6x + 12y - 3 = 0 \end{aligned}$$

y la mediatriz de BC:

$$\begin{aligned} &(x-11)^2 + (y+9)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ &-22x + 121 + 18y + 81 = -8x + 16 - 4y + 4 \\ &14x - 22y - 182 = 0 \\ &7x - 11y - 91 = 0 \end{aligned}$$

La intersección de las dos mediatrices es el punto $\left(\frac{15}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(2, -3)$ y forman con la recta $x - 2y + 5 = 0$ un ángulo cuya tangente es igual a 2.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{1}{2}$. La pendiente de la recta que nos piden cumple que:

$$\left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\,m}\right| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{2m-1}{2+m}\right| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2m - 1 = 2(2+m) \\ 2m - 1 = -2(2+m) \end{cases}$$

La primera igualdad solo puede cumplirse si la recta es vertical ($m = \infty$). La segunda nos da $m = -\frac{3}{4}$. La recta que nos piden es:

$$y + 3 = -\frac{3}{4}\,(x - 2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Los puntos $A(12,3)$ y $B(4,2)$ son dos vértices de un triángulo cuyo ortocentro es el punto $H(8,0)$. Calcular el tercer vértice C.

Solución:

La altura h_A pasa por A y por el ortocentro. Su pendiente es $m = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$. El lado BC pasa por $B(4,2)$ y tiene pendiente $-\frac{4}{3}$. Su ecuación es:

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x-4) \; ; \qquad 4x + 3y - 22 = 0$$

La altura h_B pasa por B y por el ortocentro. Su pendiente es $m = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. El lado AC pasa por $A(12,3)$ y tiene pendiente 2. Su ecuación es:

$$y - 3 = 2(x-12) \; ; \qquad 2x - y - 21 = 0$$

El vértice C es la intersección de las dos rectas. Es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 22 = 0 \\ 2x - y - 21 = 0 \end{cases}$$

La solución es el punto $C\left(\frac{17}{2}, -4\right)$.

♠♠♠♠

9 Estadística y probabilidad

Ejercicio 1. Una variable estadística toma los valores que aparecen en la siguiente tabla de frecuencias:

Valor	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	200	180	230	140	80	120	50

Calcular:

(a) La mediana y los cuartiles.

(b) La media y la desviación típica.

Solución:

x_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	200	200	0	0
1	180	380	180	180
2	230	610	460	920
3	140	750	420	1280
4	80	830	320	1280
5	120	950	600	3000
6	50	1000	300	1800
Total	1000		2280	8440

A partir de estos datos tenemos:

(a) Puesto que hay 1000 datos, el primer cuartil es el valor intermedio entre el que ocupa el lugar 250 y 251, la mediana entre el 500 y 501 y el tercero entre el 750 y 751. A partir de la tabla de frecuencias acumuladas resulta que:

$$Q_1 = 1 \qquad Q_2 = 2\ ; \qquad Q_3 = 3.5$$

(b) La media es:

$$\bar{x} = \frac{2280}{1000} = 2.28$$

La varianza es

$$\sigma^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{8440}{1000} - 2.28^2 = 3.2416$$

de modo que la desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{3.2416} = 1.8004$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Tres chicas y cuatro chicos se sientan al azar en un banco. Calcular la probabilidad de que tanto las chicas como los chicos se sienten juntos.

Solución:

Los siete pueden sentarse de 7! maneras. Si han se estar juntos los chicos y las chicas hay $2 \cdot 3! \cdot 4!$ maneras de hacerlo. El factor 2 se debe a que pueden estar las chicas a la derecha de los chicos o a la izquierda. La probabilidad es:

$$p = \frac{2 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{35}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Sabiendo que $\mathrm{p}\left(A \cup B\right) = \frac{4}{9}$, $\mathrm{p}\left(B|A\right) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{p}\left(B|A'\right) = \frac{1}{6}$, calcule $\mathrm{p}\left(A\right)$ y $\mathrm{p}\left(B\right)$.

Solución:

Puesto que

$$\mathrm{p}\left(B|A'\right) = \frac{1}{6} = \frac{\mathrm{p}\left(A' \cap B\right)}{\mathrm{p}\left(A'\right)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(A' \cap B\right) = \frac{1}{6}\,\mathrm{p}\left(A'\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(A \cup B\right) = \frac{4}{9} &= \mathrm{p}\left(A\right) + \mathrm{p}\left(A' \cap B\right) \\ &= \mathrm{p}\left(A\right) + \frac{1}{6}\,\mathrm{p}\left(A'\right) \\ &= \mathrm{p}\left(A\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \mathrm{p}\left(A\right)\right) \end{aligned}$$

y, resolviendo la ecuación, resulta $\mathrm{p}\left(A\right) = \frac{1}{3}$.

Puesto que

$$\mathrm{p}\left(B|A\right) = \frac{1}{3} = \frac{\mathrm{p}\left(A \cap B\right)}{\mathrm{p}\left(A\right)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(A \cap B\right) = \frac{1}{9}$$

y de

$$\mathrm{p}\left(A \cup B\right) = \mathrm{p}\left(A\right) + \mathrm{p}\left(B\right) - \mathrm{p}\left(A \cap B\right)\ ; \qquad \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \mathrm{p}\left(B\right) - \frac{1}{9}$$

obtenemos $\mathrm{p}\left(B\right) = \frac{2}{9}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dos sucesos A y B son tales que $\mathrm{p}\left(A \cap B'\right) = 0.2$ y $\mathrm{p}\left(A \cup B\right) = 0.9$. Halle $\mathrm{p}\left(A'|B'\right)$.

Solución:

Tenemos que:

$$\mathrm{p}\left(A \cap B'\right) = \mathrm{p}\left(A - B\right) = \mathrm{p}\left(A\right) - \mathrm{p}\left(A \cap B\right) = 0.2$$

También:

$$0.9 = \mathrm{p}\left(A \cup B\right) = \mathrm{p}\left(A\right) + \mathrm{p}\left(B\right) - \mathrm{p}\left(A \cap B\right) = \mathrm{p}\left(B\right) + 0.2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(B\right) = 0.7$$

Entonces:

$$\mathrm{p}\left(A'|B'\right) = \frac{\mathrm{p}\left(A' \cap B'\right)}{\mathrm{p}\left(B'\right)} = \frac{\mathrm{p}\left(\left(A \cup B\right)'\right)}{\mathrm{p}\left(B'\right)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Considere dos sucesos A y B tales que $\mathrm{p}\left(A\right) = k$, $\mathrm{p}\left(B\right) = 3k$, $\mathrm{p}\left(A \cap B\right) = k^2$ y $\mathrm{p}\left(A \cup B\right) = 0.5$.

(a) Calcule k

(b) Halle $\mathrm{p}\left(A' \cap B\right)$.

Solución:

(a) Puesto que

$$\mathrm{p}\left(A \cup B\right) = \mathrm{p}\left(A\right) + \mathrm{p}\left(B\right) - \mathrm{p}\left(A \cap B\right)$$

Sustituyendo:

$$0.5 = k + 3k - k^2 \quad \Longrightarrow \quad k^2 - 4k + 0,5 = 0$$

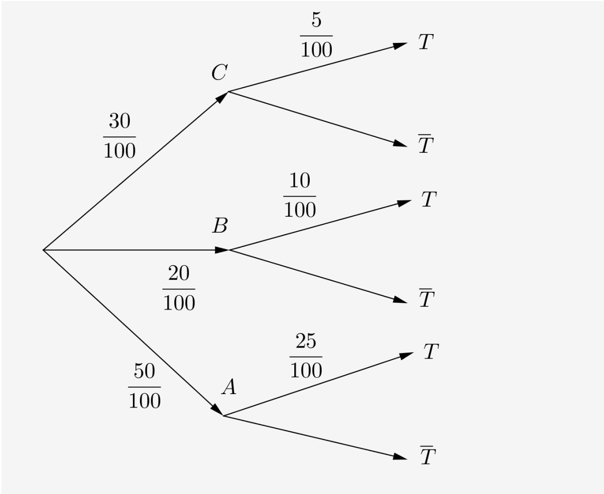
Resolviendo la ecuación resulta $k \simeq 0.129$.

(b) $\mathrm{p}\left(A' \cap B\right) = \mathrm{p}\left(B\right) - \mathrm{p}\left(A \cap B\right) = 3k - k^2 \simeq 0.371$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Josie tiene tres formas de ir al colegio. Un 30% de las veces va en coche, un 20% de las veces va en bicicleta y un 50% de las veces va andando. Cuando va en coche, Josie llega tarde el 5% de las veces. Cuando va en bicicleta, llega tarde el 10% de las veces. Cuando va andando, llega tarde el 25% de las veces. Sabiendo que llegó a la hora, halle la probabilidad de que haya ido en bicicleta.

Solución:



$$\mathrm{p}\,(B \mid \overline{T}) = \frac{\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{30}{100}\cdot\frac{95}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{50}{100}\cdot\frac{75}{100}} = \frac{3}{14}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. El 25% de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20% ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5% de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.

(*a*) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio técnico ya fueron reparados en otra ocasión?

(*b*) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía?

(*c*) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía?

Solución:

(*a*) Llamamos a los sucesos:

G : el aparato está en garantía

R : el aparato fue reparado anteriormente

Los datos que tenemos son $\mathrm{p}\,(G) = 0.25$, $\mathrm{p}\,(R \mid \bar{G}) = 0.20$ y $\mathrm{p}\,(G \cap R) = 0.05$.
Entonces:

$$0.20 = \mathrm{p}\,(R \mid \bar{G}) = \frac{\mathrm{p}\,(R \cap \bar{G})}{\mathrm{p}\,(\bar{G})} = \frac{\mathrm{p}\,(R) - \mathrm{p}\,(R \cap G)}{\mathrm{p}\,(\bar{G})} = \frac{\mathrm{p}\,(R) - 0.05}{0.75}$$

y, de aquí, $\mathrm{p}\,(R) = 0.2$.

(*b*) Debemos calcular $\mathrm{p}\,(\bar{G} \cap \bar{R})$:

$$\mathrm{p}\,(\bar{G} \cap \bar{R}) = \mathrm{p}\,(\overline{G \cup R}) = 1 - \mathrm{p}\,(G \cup R) = 1 - (0.25 + 0.20 - 0.05) = 0.60$$

(*c*) Ahora debemos calcular $\mathrm{p}\,(G \mid R)$:

$$\mathrm{p}\,(G \mid R) = \frac{\mathrm{p}\,(G \cap R)}{\mathrm{p}\,(R)} = \frac{0.05}{0.20} = 0.25$$

♠♠♠♠

10 Probabilidad y estadística

Ejercicio 1. Una variable aleatoria X tiene la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla:

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
$\mathrm{p}\,(X=x)$	0.12	0.18	0.20	0.28	0.14	0.08

(a) Determine el valor de $\mathrm{E}(X^2)$.

(b) Halle el valor de $\mathrm{Var}(X)$.

Solución:

(a) El valor medio de los cuadrados es:

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum p_i x_i^2 = 10.37 \simeq 10.4$$

(b) La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media. La media es:

$$\mathrm{E}(X)=\sum p_i x_i = 2.88$$

y entonces la varianza

$$\mathrm{Var}(X)=10.37-2.88^2 \simeq 2.08$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Considere dos sucesos A y B definidos en el mismo espacio muestral.

(a) Muestre que $\mathrm{p}\,(A\cup B)=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(A'\cap B)$.

(b) Sabiendo que $\mathrm{p}\,(A\cup B)=\frac{4}{9}$, $\mathrm{p}\,(B|A)=\frac{1}{3}$ y $\mathrm{p}\,(B|A')=\frac{1}{6}$,

  (i) muestre que $\mathrm{p}\,(A)=\frac{1}{3}$

  (ii) a partir de lo anterior, halle $\mathrm{p}\,(B)$.

Solución:

(a) Puesto que $\mathrm{p}\,(A'\cap B)=\mathrm{p}\,(B)-\mathrm{p}\,(A\cap B)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\,(A\cup B)&=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(B)-\mathrm{p}\,(A\cap B)\\&=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(B)-\mathrm{p}\,(B)+\mathrm{p}\,(A'\cap B)\\&=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(A'\cap B)\end{aligned}$$

(b) (i) Puesto que

$$\mathrm{p}\,(B|A')=\frac{1}{6}=\frac{\mathrm{p}\,(A'\cap B)}{\mathrm{p}\,(A')}\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{p}\,(A'\cap B)=\frac{1}{6}\,\mathrm{p}\,(A')$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\,(A\cup B)=\frac{4}{9}&=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(A'\cap B)\\&=\mathrm{p}\,(A)+\frac{1}{6}\,\mathrm{p}\,(A')\\&=\mathrm{p}\,(A)+\frac{1}{6}\,(1-\mathrm{p}\,(A))\end{aligned}$$

y, resolviendo la ecuación, resulta $\mathrm{p}\,(A)=\frac{1}{3}$.

(ii) Puesto que

$$\mathrm{p}\,(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{\mathrm{p}\,(A\cap B)}{\mathrm{p}\,(A)}\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{p}\,(A\cap B)=\frac{1}{9}$$

y de

$$\mathrm{p}\,(A\cup B)=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(B)-\mathrm{p}\,(A\cap B)\ ;\qquad \frac{4}{9}=\frac{1}{3}+\mathrm{p}\,(B)-\frac{1}{9}$$

obtenemos $\mathrm{p}\,(B)=\frac{2}{9}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. El número de quejas que se reciben diariamente en un servicio de atención al cliente sigue una distribución de Poisson de media 0.6.

(a) En un día elegido al azar, calcular la probabilidad de que:

- (i) no haya ninguna queja;
- (ii) haya al menos tres quejas.

(b) En una semana laboral de 5 días elegida al azar, calcular la probabilidad de que no haya quejas.

(c) En un día elegido al azar, calcular el número más probable de quejas.

La empresa introduce algunos cambios de modo que ahora el número de quejas sigue una distribución de Poisson de media λ. En un día elegido al azar, la probabilidad de que no haya quejas es ahora 0.8.

(d) Calcular el valor de λ.

Solución:

(a) Sea X el número de quejas que se reciben en un día, $X \sim \text{Po}(0.6)$:

- (i) $\text{p}\,(X = 0) \simeq 0.549$
- (ii) $\text{p}\,(X \geq 3) = 1 - \text{p}\,(X \leq 2) \simeq 0.0231$

(b) Sea Y el número de quejas que se reciben durante los cinco días, $Y \sim \text{Po}(3)$:

$$\text{p}\,(Y = 0) \simeq 0.0498$$

(c) Basta ver las probabilidades en Po(0.6). El valor más probable es $X = 0$.

(d) Teniendo en cuenta que en una distribución de Poisson Po(m)

$$\text{p}\,(X = k) = \frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

Haciendo $m = \lambda$ y $k = 0$:

$$e^{-\lambda} = 0.8 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\ln 0.8 \simeq 0.223$$

También puede resolverse con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\text{poissonpdf}(x, 0) = 0.8$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Una tienda de bombones anuncia obsequios gratuitos para aquellos clientes que reúnan tres cupones. Los cupones se introducen al azar en el 10% de las chocolatinas que se venden en esa tienda. Kati compra algunas de estas chocolatinas y las va abriendo de una en una para ver si contienen un cupón. Sea $\text{p}\,(X = n)$ la probabilidad de que Kati consiga su tercer cupón en la n-ésima chocolatina que abre.

(Se supone que la probabilidad de que una chocolatina dada contenga un cupón sigue siendo del 10% durante toda la pregunta.)

(a) Muestre que $\text{p}\,(X = 3) = 0,001$ y $\text{p}\,(X = 4) = 0,0027$.

Se sabe que $\text{p}\,(X = n) = \frac{n^2+an+b}{2000} \times 0.9^{n-3}$ para $n \geq 3$ y $n \in \mathbb{N}$.

(b) Halle el valor de las constantes a y b.

(c) Deduzca que:

$$\frac{\text{p}\,(X = n)}{\text{p}\,(X = n-1)} = \frac{0.9(n-1)}{n-3} \qquad \text{para } n > 3$$

(d) (i) A partir de lo anterior, muestre que X tiene dos modas, m_1 y m_2.

(*ii*) Indique los valores de m_1 y m_2.

La madre de Kati va a la tienda y compra x chocolatinas. Se las lleva a casa para que Kati las abra.

(*e*) Determine el valor mínimo de x tal que la probabilidad de que Kati reciba al menos un obsequio gratuito sea mayor que $0,5$.

Solución:

(*a*) En el primer caso la probabilidad de tener tres premios en las tres primeras chocolatinas es:

$$\mathrm{p}\left(X=3\right)=0,1\cdot 0.1\cdot 0.1=0.001$$

En el segundo caso debe haber 2 éxitos en las tres primeras pruebas y éxito en la cuarta:

$$p(X=4)=\binom{3}{2}0.1^2\cdot 0.9\cdot 0.1=0.0027$$

(*b*) La probabilidad de que los tres premios se obtengan con la enésima chocolatina es la probabilidad de obtener dos premios con las $n-1$ primeras por la probabilidad de tener premio en la enésima:

$$\mathrm{p}\left(X=n\right)=\binom{n-1}{2}0,1^2\cdot 0.9^{n-3}\cdot 0.1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 0.1^3\cdot 0.9^{n-3}=\frac{n^2-3n+2}{2000}\cdot 0.9^{n-3}$$

de donde $a=-3$ y $b=2$.

También podrían haberse obtenido a y b sustituyendo en la fórmula los valores conocidos de $\mathrm{p}\left(X=3\right.$ y $\mathrm{p}\left(X=4\right)$ y resolviendo el sistema.

(*c*) De la fórmula anterior:

$$\frac{\mathrm{p}\left(X=n\right)}{\mathrm{p}\left(X=n-1\right)}=\frac{(n^2-3n+2)\cdot 0.9^{n-3}}{((n-1)^2-3(n-1)+2)\cdot 0.9^{n-1-3}}=\frac{(n-1)(n-2)\cdot 0.9^{n-3}}{(n^2-5n+6)\cdot 0.9^{n-4}}=\frac{(n-1)\cdot 0.9}{n-3}$$

(*d*) La sucesión $\{\mathrm{p}\left(X=n\right)\}$ es creciente si

$$\frac{\mathrm{p}\left(X=n\right)}{\mathrm{p}\left(X=n-1\right)}>1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(n-1)\cdot 0.9}{n-3}>1 \quad\Longrightarrow\quad (n-1)\cdot 0.9>n-3 \quad\Longrightarrow\quad n<21$$

Ademas la sucesión es decreciente si

$$\frac{\mathrm{p}\left(X=n\right)}{\mathrm{p}\left(X=n-1\right)}<1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(n-1)\cdot 0.9}{n-3}<1 \quad\Longrightarrow\quad (n-1)\cdot 0.9>n-3 \quad\Longrightarrow\quad n>21$$

Por otra parte:

$$\frac{\mathrm{p}\left(X=n\right)}{\mathrm{p}\left(X=n-1\right)}=1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(n-1)\cdot 0.9}{n-3}=1 \quad\Longrightarrow\quad (n-1)\cdot 0.9=n-3 \quad\Longrightarrow\quad n=21$$

Entonces $n=20$ y $n=21$ son las dos modas.

(*e*) Sea Y el número de chocolatinas premiadas. Y sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(x;0.1)$. Debe ocurrir que:

$$\mathrm{p}\left(Y\geq 3\right)>0.5 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{p}\left(Y\leq 2\right)<0.5$$

Mediante la calculadora formamos la tabla $\mathrm{binomcdf}\left(x,\frac{1}{10},2\right)$. Vemos que el primer valor para el que se verifica la desigualdad es $x=27$.

♠♠♠♠

11 Examen final

Primera parte (sin calculadora)

Ejercicio 1. Sea la sucesión:

$$-11,\ -7,\ -3,\ 1,\ \ldots$$

Calcular el menor número de términos de esta sucesión hay que tomar para que su suma sea mayor que 5000.

Solución:

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + d(n-1)]n}{2} = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}$$

Para la sucesión dada debe ocurrir:

$$\frac{[-22 + 4(n-1)]n}{2} = (-13 + 2n)n > 5000$$

El menor número que cumple la condición es $n = 54$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular la función inversa de

$$f(x) = 2e^{1-x}$$

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 2e^{1-y}\ ; \qquad e^{1-y} = \frac{x}{2}\ ; \qquad 1 - y = \ln\frac{x}{2}\ ; \qquad y = f^{-1}(x) = 1 - \ln\frac{x}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el dominio de definición de la función

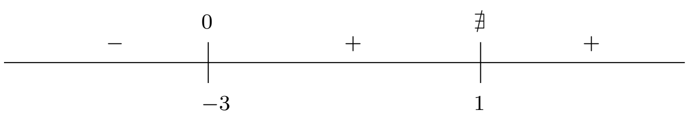
$$f(x) = \ln\frac{x+3}{(x-1)^2}$$

Solución:

El dominio de la función es la solución de la inecuación:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} > 0$$

El numerador tiene una raíz $x = -3$ y el denominador tiene una raíz doble $x = 1$:



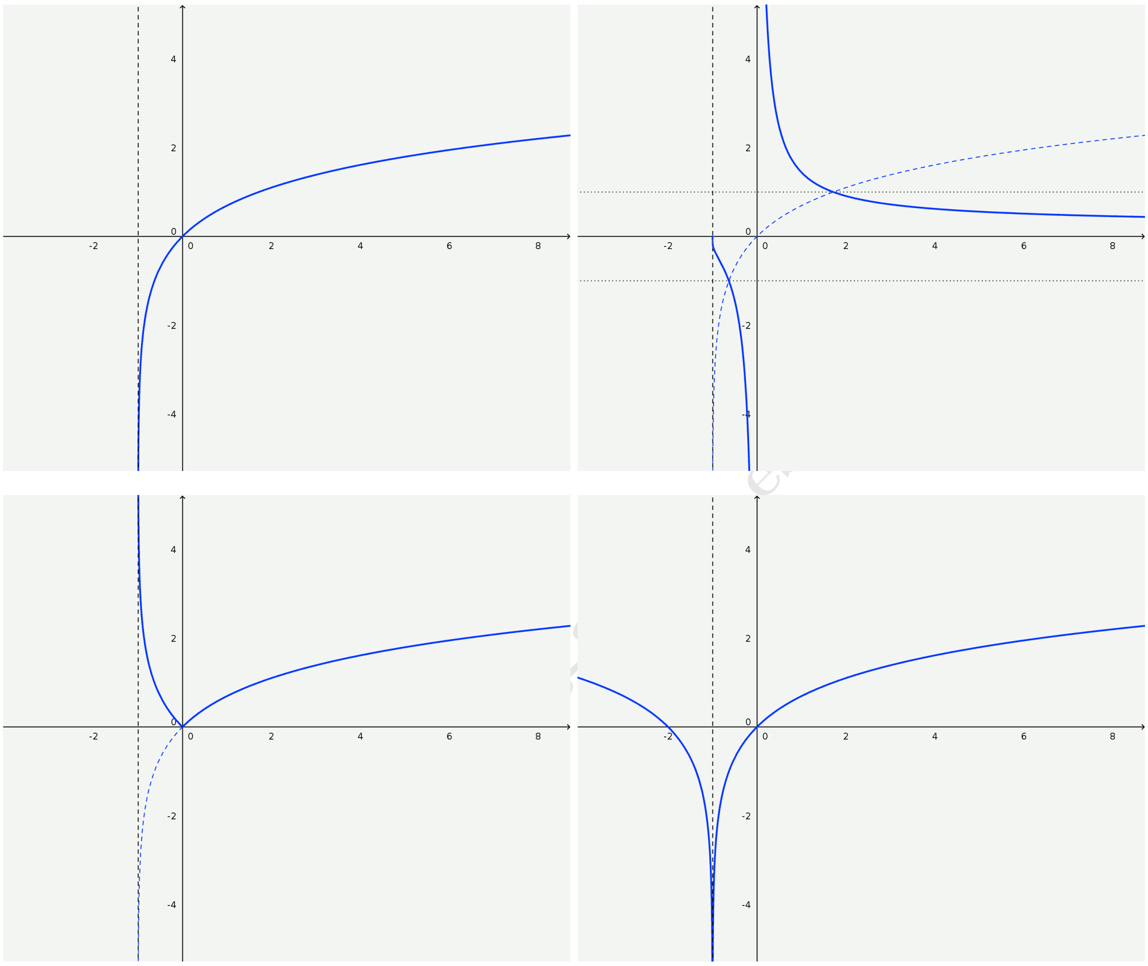
El dominio es el conjunto $(-3, \infty) - \{1\}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Representar gráficamente las funciones

$$y = \ln(x+1), \qquad y = \frac{1}{\ln(x+1)}, \qquad y = |\ln(x+1)|, \qquad y = \ln|x+1|$$

Solución:



♠♠♠♠

Segunda parte (sin calculadora)

Ejercicio 1. Sabiendo que $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 - i$:

(*a*) Expresar u y v en forma polar.

(*b*) Calcular a partir del apartado anterior u^3v^4.

(*c*) Sean A y B los afijos de los complejos u y v. El punto A se gira 90º alrededor del origen O en sentido contrario a las agujas del reloj convirtiéndose en el punto A'. El punto B se gira 90º en el sentido del reloj y se convierte en el punto B'. Calcular el área del triángulo $OA'B'$.

Solución:

(a) $u = 2_{60^o}$ y $v = (\sqrt{2})_{-45^o}$.

(b) $u^3v^4 = 8_{180^o} \cdot 4_{-180^o} = 32_{0^o} = 32$.

(c) Es fácil ver que $A'OB' = 75^o$. Entonces, el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \operatorname{sen} 75^o = \sqrt{2} \operatorname{sen}(45^o + 30^o) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Halle todas las soluciones de la ecuación $\tan x + \tan 2x = 0$ donde $0^o \leq x < 360^o$.

Solución:

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 0$$

$$\tan x\left(1 - \tan^2 x\right) + 2\tan x = 0$$

$$\tan x\left(3 - \tan^2 x\right) = 0$$

$$\tan x = 0 \implies x = 0^o, \quad x = 180^o$$

$$\tan x = \sqrt{3} \implies x = 60^o, \quad x = 240^o$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \implies x = 120^o, \quad x = 300^o$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Halle tres raíces distintas de la ecuación $8z^3 + 27 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, en forma módulo-argumental.

(b) Las raíces se representan mediante los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand. Muestre que el área del triángulo es igual a $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

Solución:

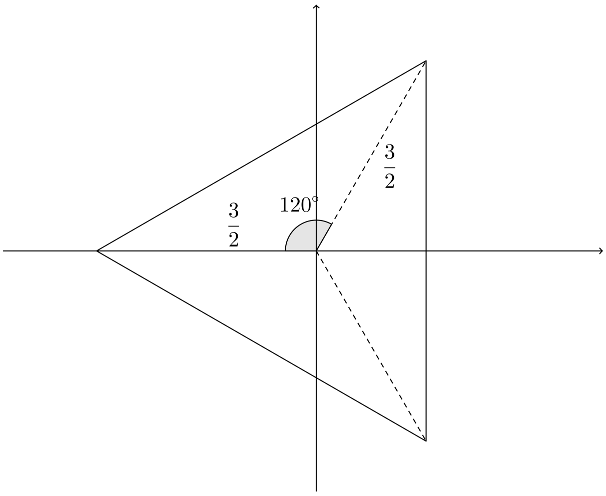
(a) Puesto que:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)_{180^o}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{60^o + 120^o K} \qquad K = 0, 1, 2$$

de modo que las tres raíces son:

$$\left(\frac{3}{2}\right)_{60^o}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)_{180^o}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)_{300^o}$$

(b) Representamos las raíces:



El área del triángulo la podemos calcular como suma de las áreas de tres triángulos isósceles:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ sen } 120^{\text{o}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

(a) Indique el conjunto de valores de a para los cuales la función $x \longmapsto \log_a x$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Sabiendo que $\log_x y = 4 \log_y x$, halle todas las posibles expresiones de y en función de x.

Solución:

(a) La función existe para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Podemos pasar ambos logaritmos a la base neperiana:

$$\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}\ ; \qquad \ln_y x = \frac{\ln x}{\ln y} \implies \log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \log_x y = \frac{4}{\log_x y} \quad &\implies \quad (\log_x y)^2 = 4 \\ &\implies \quad \log_x y = \pm 2 \\ &\implies \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = x^{-2} \end{cases} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. La ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + c = 0$, tiene por raíces α, β y γ. Desarrollando $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ muestre que:

(a) (i) $p = -(\alpha + \beta + \gamma)$.

(ii) $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

(iii) $c = -\alpha\beta\gamma$.

Ahora se sabe que $p = -6$ y $q = 18$ para los apartados (b) y (c).

(b) (i) En el caso de que las tres raíces formen una progresión aritmética, muestre que una de las raíces es 2.

(ii) A partir de lo anterior, determine el valor de c.

(c) En otro caso, las tres raíces α, β y γ forman una progresión geométrica. Determine el valor de c.

Solución:

(a) Desarrollando:

$$\begin{aligned} x^3+px^2+qx+c &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

e igualando coeficientes resulta:

$$\begin{aligned} p &= -(\alpha+\beta+\gamma) \\ q &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ c &= -\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

(b) (i) Puesto que las raíces están en progresión aritmética, las podemos representar mediante $a-d$, a y $a+d$. Entonces:

$$a-d+a+a+d=6 \quad\Longrightarrow\quad 3a=6 \quad\Longrightarrow\quad a=2$$

El segundo término de la progresión es igual a 2.

(ii) Por otra parte puesto que $x=2$ es una raíz de $x^3-6x^2+18x+c$:

$$2^3-6\cdot 2^2+18\cdot 2+c=0 \quad\Longrightarrow\quad c=-20$$

(c) Sean las raíces $\frac{a}{r}$, a y ar. Debe cumplirse que:

$$-\left(\frac{a}{r}+a+ar\right)=a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=6$$

$$\frac{a}{r}\cdot a+\frac{a}{r}\cdot ar+a\cdot ar=a^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=18$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene $a=3$. Entonces:

$$c=-\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar=-a^3=-27$$

♠♠♠♠

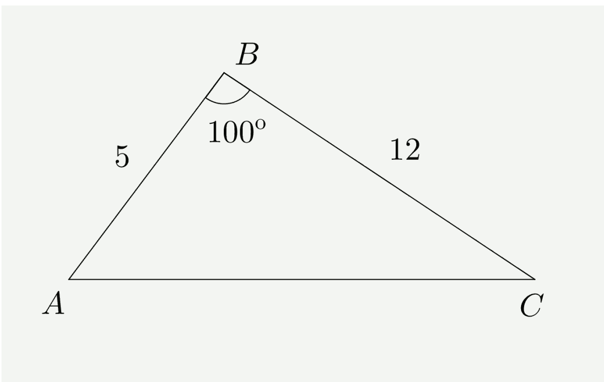
Tercera parte (con calculadora)

Ejercicio 1. En el triángulo ABC, $AB=5$ cm, $BC=12$ cm, $A\hat{B}C=100^{\circ}$.

(a) Halle el área del triángulo.

(b) Halle AC.

Solución:



(*a*) El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 100^{\mathrm{o}} \simeq 29.5 \text{ cm}^2$$

(*b*) Por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos 100^{\mathrm{o}} \quad \Longrightarrow \quad AC \simeq 13.8 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. De un grupo compuesto por cinco hombres y seis mujeres se eligen cuatro personas.

(*a*) Determine cuantos grupos posibles se pueden elegir.

(*b*) Determine cuántos grupos se pueden formar que estén compuestos por dos hombres y dos mujeres.

(*c*) Determine cuántos grupos se pueden formar en los que haya al menos una mujer.

Solución:

(*a*) Hay 11 personas y hay que escoger 4:

$$C_{11,4} = 330$$

(*b*) Los dos hombres pueden escogerse de $C_{5,2}$ y las mujeres de $C_{6,2}$ maneras. En total:

$$C_{5,2} \cdot C_{6,2} = 150$$

(*c*) Son todos menos los grupos formados exclusivamente por hombres. En total

$$C_{11,4} - C_{5,4} = 325$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

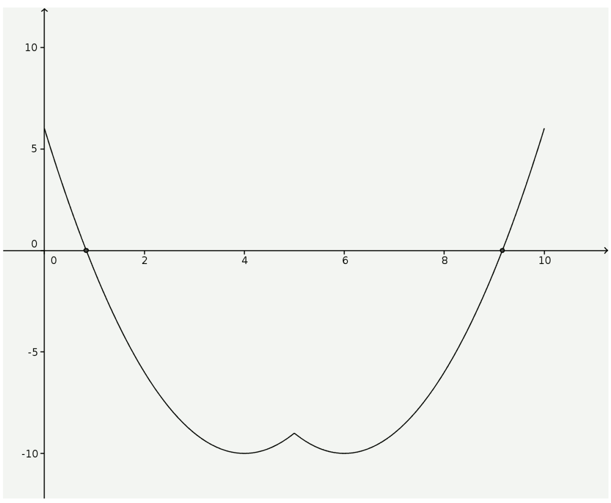
(*a*) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = (x-5)^2 - 2|x-5| - 9$, para $0 \le x \le 10$.

(*b*) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación:

$$(x-5)^2 - 2|x-5| - 9 = 0$$

Solución:

(*a*) Puede dibujarse con la calculadora. El resultado es algo como esto:



(b) Las soluciones de la ecuación pueden obtenerse como las intersecciones de la curva del apartado anterior con el eje OX. De esta manera se obtiene:

$$x_1 = 0.84\ ; \qquad x_2 = 9.16$$

El valor exacto puede calcularse resolviendo:

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(x-5) - 9 = 0 \\ x > 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 6 + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(5-x) - 9 = 0 \\ x < 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 4 - \sqrt{10}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. A Emma le regalan un teléfono móvil nuevo para su cumpleaños y en él recibe mensajes de texto de sus amigos. Se supone que el número de mensajes de texto que Emma recibe al día sigue una distribución de Poisson de media $m = 5$.

(a) (i) Halle la probabilidad de que en un día dado Emma reciba más de 7 mensajes de texto.

(ii) Determine el número esperado de días a la semana en los que Emma recibe más de 7 mensajes de texto.

(b) Halle la probabilidad de que Emma reciba menos de 30 mensajes de texto a lo largo de una semana dada.

Solución:

(a) (i) Sea X la variable aleatoria que representa el número de mensajes de texto que recibe Emma. Sabemos que $X \sim \text{Po}(5)$:

$$\text{p}\,(X \leq 7) \simeq 0.867 \quad \Longrightarrow \quad p = \text{p}\,(X > 7) \simeq 0.133$$

(ii) Sea Y el número de días a la semana que Emma recibe más de 7 mensajes, $Y \sim \text{B}(7, p)$. El valor esperado es:

$$\overline{X} = 7 \cdot \text{p}\,(X > 7) \simeq 0.934$$

(b) En este caso la distribución de Poisson tiene media 35:

$$\text{p}\,(X < 30) \simeq 0.177$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. La agricultora Suzie cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cosecha siguen una distribución normal de media 122 g y desviación típica 14.7 g.

(a) (i) Calcule el porcentaje de los nabos de Suzie que pesan entre 110 g y 130 g.

(ii) Suzie tiene listos 100 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de 130 g.

(iii) Halle la probabilidad de que al menos 30 de estos 100 nabos pesen más de 130 g.

(b) El agricultor Ray también cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cultiva siguen una distribución normal de media 144 g. Ray solamente lleva al mercado aquellos nabos que pesan más de 130 g. Durante un determinado período, Ray observa que tiene que rechazar 1 de cada 15 nabos por pesar menos de lo debido.

(i) Halle la desviación típica de los nabos de Ray.

(ii) Ray tiene listos 200 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de 150 g.

Solución:

(a) (i) Sea X el peso de los nabos que cultiva Suzie, $X \sim \mathrm{N}(122; 14.7)$:

$$\mathrm{p}\,(110 < X < 130) = 50.0\%$$

(ii) Ahora $X' \sim B(100, \mathrm{p}\,(X > 130))$:

$$\mathrm{p}\,(X > 130) = 0.293$$

El número esperado será $\mathrm{E}(X') = 0.293 \times 100 = 29.3$.

(iii) Con la distribución binomial del apartado anterior:

$$p(X' \geq 30) = 1 - \mathrm{p}\,(X' \leq 29) = 0.478$$

(b) (i) Sea ahora X el peso de los nabos que cultiva Ray, $X \sim \mathrm{N}(144; \sigma)$ de desviación típica desconocida. Pero sabemos que:

$$\mathrm{p}\,(X < 130) = \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{130 - 144}{\sigma}\right) = \frac{1}{15}$$

Con la función inversa de la normal obtenemos:

$$\frac{-14}{\sigma} = -1.50108... \quad \Longrightarrow \quad \sigma \simeq 9.33$$

(ii) Puesto que los nabos están listos para llevarlos al mercado, pesan más de 130 g. Con el valor obtenido de la desviación, la probabilidad de que un nabo pese más de 150 g es:

$$p(X > 150 \mid X > 130) = \frac{\mathrm{p}\,(X > 150)}{\mathrm{p}\,(X > 130)} = 0.278579...$$

y por tanto, el número esperado de nabos que pesan más de 150 g es $200 \times 0.278... \simeq 55.7$.

♠♠♠♠