Matemáticas 1ºBI
Exámenes
Curso 2016-2017

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Radicales y logaritmos

Ejercicio 1. *Simplificar:*

(*a*) $\sqrt[6]{729a^7b^{12}c^6}$

(*b*) $\sqrt{4+\sqrt{16x^2+8x^3+x^4}}$

Solución:

(*a*) $\sqrt[6]{729a^7b^{12}c^6} = \sqrt[6]{3^6a^6ab^{12}c^6} = 3ab^2c\sqrt[6]{a}$

(*b*) $\sqrt{4+\sqrt{16x^2+8x^3+x^4}} = \sqrt{4+\sqrt{(4x+x^2)^2}} = \sqrt{4+4x+x^2} = \sqrt{(2+x)^2} = 2+x$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular:*

(*a*) $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$

(*b*) $3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}$

Solución:

(*a*)
$$\begin{aligned}
&2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}\\
&\quad= 2\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{25\cdot 3}+5\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{16\cdot 3}+4\sqrt{3}+\sqrt{81\cdot 3}\\
&\quad= 4\sqrt{3}-15\sqrt{3}+15\sqrt{3}-12\sqrt{3}+4\sqrt{3}+9\sqrt{3}\\
&\quad= 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned}
&3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}\\
&\quad= 3\sqrt[3]{64\cdot 2}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{8\cdot 2}+3\sqrt[3]{27\cdot 2}\\
&\quad= 12\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}\\
&\quad= 13\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular:*

(*a*) $\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot\sqrt{\frac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\frac{192}{9}}$

(*b*) $\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}}$

Solución:

(*a*)
$$\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot\sqrt{\frac{5}{48}}\cdot\sqrt{63}\cdot\sqrt{\frac{192}{9}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 63\cdot 192}{15\cdot 14\cdot 48\cdot 9}} = 2$$

(*b*)
$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}} &= \sqrt[3]{(2x)^2-4(x^2-2)}\\
&= \sqrt[3]{4x^2-4x^2+8}\\
&= 2
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Calcular el valor de* $\log \sqrt[4]{781{,}25}$ *conocido* $\log 2 = 0{,}3010$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\log \sqrt[4]{781{,}25} &= \frac{1}{4}\log\frac{78125}{100}\\
&= \frac{1}{4}(\log 78125 - \log 100)\\
&= \frac{1}{4}\big(\log 5^7 - 2\big)\\
&= \frac{1}{4}(7\log 5 - 2)\\
&= \frac{1}{4}\left(7\log\frac{10}{2} - 2\right)\\
&= \frac{1}{4}(7 - 7\log 2 - 2)\\
&= \frac{1}{4}(5 - 7\log 2)\\
&= 0,72325
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular el valor de* a *sabiendo que la ecuación:*

$$\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} - 2\log 5 = \log 40$$

tiene dos raíces, cuyo producto es -15.

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} - 2\log 5 &= \log 40\\
\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} &= \log 40 - 2\log 5\\
\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} &= \log 1000\\
\frac{\log(x^3-a)}{\log(x-2)} &= 3
\end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned}
&\log(x^3-a) = 3\log(x-2)\\
&\log(x^3-a) = \log(x-2)^3\\
&x^3 - a = (x-2)^3\\
&x^3 - a = x^3 - 6x^2 + 12x - 8\\
&6x^2 - 12x + 8 - a = 0
\end{aligned}$$

Como el producto de las soluciones debe ser -15:

$$\frac{8-a}{6} = -15 \quad\Longrightarrow\quad a = 98$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Resolver la ecuación:*

$$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$$

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$343 \cdot 7^{2x} - 56 \cdot 7^x + 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{49}$. Es decir:

$$\begin{aligned} 7^x &= \frac{1}{7} \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \\ 7^x &= \frac{1}{49} \quad \Longrightarrow \quad x = -2 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Sea*

$$a = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{31} 32$$

Calcular el valor de a.

Solución:

Escribiendo en la base 10:

$$\begin{aligned} a &= \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{31} 32 \\ &= \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \ldots \frac{\log 32}{\log 31} \\ &= \frac{\log 32}{\log 2} \\ &= \frac{5 \log 2}{\log 2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Resolver la ecuación:*

$$8^{x-1} = 6^{3x}$$

Expresar la solución función de $\ln 2$ *y* $\ln 3$.

Solución:

Aplicamos como logaritmos neperianos:

$$\begin{aligned} &\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x} \\ &(x-1) \ln 2^3 = 3x \ln(2 \cdot 3) \\ &3x \ln 2 - 3 \ln 2 = 3x \ln 2 + 3x \ln 3 \\ &-3 \ln 2 = 3x \ln 3 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\ln 2}{\ln 3} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Sabiendo que* $\log_x y = 4\log_y x$*, halle todas las posibles expresiones de* y *en función de* x*.*

Solución:

$$
\begin{aligned}
\log_x y = 4\log_y x \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\ln y}{\ln x} = \frac{4\ln x}{\ln y} \\
&\Longrightarrow \quad (\ln y)^2 = 4(\ln x)^2 \\
&\Longrightarrow \quad \ln y = \pm 2\ln x \\
&\Longrightarrow \quad \ln y = \ln x^{\pm 2}
\end{aligned}
$$

Lo que da $y = x^2$ y $y = x^{-2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Resolver la ecuación:*

$$2 - \log_3(x+7) = \log_{\frac{1}{3}} 2x$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&2 - \log_3(x+7) = \log_{\frac{1}{3}} 2x \\
&2 - \log_3(x+7) = -\log_3 2x \\
&2 = \log_3(x+7) - \log_3 2x \\
&\log_3 \frac{x+7}{2x} = 2 \\
&\frac{x+7}{2x} = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{7}{17}
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

2. Combinatoria e inducción

Ejercicio 1.

(*a*) *Desarrolle y simplifique:*

$$\left(\frac{1}{x}+2x\right)^6$$

(*b*) *Halle el coeficiente de x^{-2} del desarrollo:*

$$(x-1)^3\left(\frac{1}{x}+2x\right)^6$$

Solución:

(*a*) Los coeficientes son 1, 6, 15, 20, 15, 6 y 1. El desarrollo es:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}+2x\right)^6 &= \frac{1}{x^6}+6\cdot\frac{1}{x^5}\cdot 2x+15\cdot\frac{1}{x^4}\cdot 4x^2+20\cdot\frac{1}{x^3}\cdot 8x^3+15\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 16x^4+6\cdot\frac{1}{x}\cdot 32x^5+64x^6\\ &= \frac{1}{x^6}+\frac{12}{x^4}+\frac{60}{x^2}+160+240x^2+192x^4+64x^6\end{aligned}$$

(*b*) Vemos que el desarrollo anterior solo presenta potencias pares de x. Por ello el término de x^{-2} estará formado por el término en x^2 del primer factor por el término en x^{-4} del segundo más el termino constante del primero por el término en x^{-2} del segundo:

$$-3x^2\cdot\frac{12}{x^4}-1\cdot\frac{60}{x^2}=(-36-60)\,\frac{1}{x^2}=-96x^{-2}$$

El coeficiente de x^{-2} es -96.

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

(*a*) *Desarrolle y simplifique*

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$$

(*b*) *A partir de lo anterior, determine el término constante del desarrollo*

$$\left(2x^2+1\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$$

Solución:

(*a*) Desarrollamos:

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{2}{x}\right)^4 &= x^4-4x^3\frac{2}{x}+6x^2\frac{4}{x^2}-4x\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^4}\\ &= x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}\end{aligned}$$

(b) El término constante de

$$\left(2x^2+1\right)\left(x^4-8x^2+24-\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)$$

resulta de multiplicar $2x^2$ por $-\frac{32}{x^2}$ y 1 por 24. El resultado es -40.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Demostrar mediante inducción matemática que* $7^{8n+3}+2$ *,* $n\in\mathbb{N}$*, es divisible por* 5.

Solución:

- El resultado se cumple para $n=0$ pues $7^3+2=345=\dot{5}$.
- Supongamos que se cumple para $n=k$:

  $$7^{8k+3}+2=\dot{5}$$

  y debemos demostrar que entonces, se cumple para $n=k+1$. Es decir debemos demostrar que

  $$7^{8(k+1)+3}+2=\dot{5}$$

  En efecto:

  $$7^{8(k+1)+3}+2=7^{8k+3+8}+2=7^{8k+3}7^8+2$$

  Pero $7^{8k+3}=\dot{5}-2$ por lo que la expresión anterior es igual

  $$(\dot{5}-2)7^8+2=\dot{5}-2(7^8-1)=\dot{5}-2\cdot\dot{5}=\dot{5}$$

  La cifra de las unidades de 7^2 es 9 por lo que la de 7^4 será 1 y la de 7^8 será también 1. Entonces, 7^8-1 es múltiplo de 5.
- Por el principio de inducción, $7^{8n+3}+2$ es múltiplo de 5 para $n\in\mathbb{N}$,

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Demostrar por inducción que para todo* $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Solución:

- Para $n=1$ se cumple la igualdad puesto que el primer miembro es igual a 1 y el segundo también.
- Supongamos que se cumple para $n=k$, es decir, Supongamos que la suma de los primeros k términos es

  $$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}$$

  Debemos demostrar que, entonces

  $$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=4-\frac{k+1+2}{2^{k+1-1}}=4-\frac{k+3}{2^k}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+\frac{k+1}{2^k} \\
&= 4-\frac{2(k+2)-k-1}{2^k} \\
&= 4-\frac{k+3}{2^k}
\end{aligned}$$

– Como consecuencia del principio de inducción, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Hay que elegir un equipo de 6 entre 10 jugadores de voleybol, de los cuales 8 son chicos y 2 son chicas.*

(*a*) *¿De cuántas maneras puede elegirse el equipo?*

(*b*) *¿Y si debe haber exactamente una chica en el equipo?*

Solución:

(*a*) $C_{10,6} = 210$

(*b*) $2 \cdot C_{8,5} = 112$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Quince niños y diez niñas están sentados en una sola fila.*

(*a*) *¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar en una sola fila, de forma que los niños y las niñas estén en dos grupos separados?*

(*b*) *Se escogen a dos niños y a tres niñas para que vayan al teatro. ¿De cuántas formas distintas se puede realizar esta selección?*

Solución:

(*a*) $2 \cdot 15! \cdot 10! \simeq 9{,}49 \cdot 10^{18}$

(*b*) $C_{15,2} \cdot C_{10,3} = 12600$

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(*a*) *¿De cuántas maneras pueden repartirse 5 cartas de una baraja de 40?*

(*b*) *¿De cuántas si dos deben ser de espadas y tres de bastos?*

Solución:

(*a*) $C_{40,5} = 658008$

(*b*) $C_{10,2} \cdot C_{10,3} = 5400$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Una clase consta de 12 personas:*

(*a*) *¿De cuántas maneras pueden dividirse en un grupo de 5, uno de 4 y uno de 3 personas?*

(*b*) *¿De cuántas en tres grupos de 4 personas?*

Solución:

(*a*) $C_{12,5} \cdot C_{7,4} \cdot C_{3,3} = 27720$

(*b*) $\dfrac{C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}}{3!} = 5775$

♠♠♠♠

3. Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 1. *Determinar m con la condición de que el polinomio $2x^4 + 5x^3 + mx^2 + 4$, sea divisible por $x + 4$.*

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x + 4$, $x = 4$ es una raíz del polinomio:

$$2 \cdot (-4)^4 + 5 \cdot (-4)^3 + m \cdot (-4)^2 + 4 = 0 \; ; \qquad 512 - 320 + 16m + 4 = 0$$

y de aquí $m = -\frac{49}{4}$.

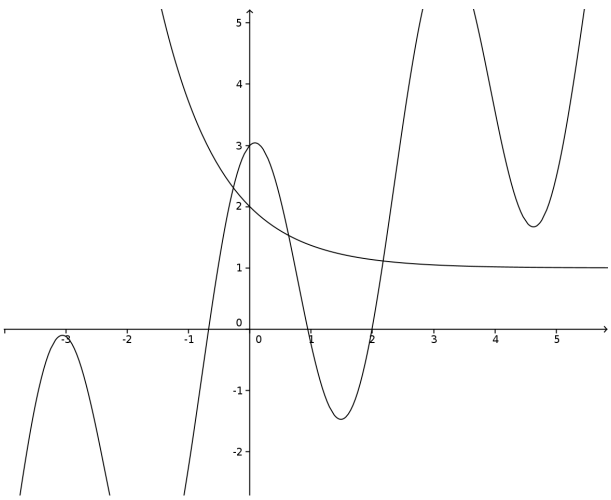
♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Representar gráficamente y calcular con tres cifras significativas todas las soluciones de la ecuación*

$$3 \cos 2x + x = e^{-x} + 1$$

Solución:

Representamos las funciones $f(x) = 3 \cos 2x + x$ y $g(x) = e^{-x} + 1$:



Sus puntos de intersección son las soluciones de la ecuación $x \simeq 0{,}269$, $x \simeq 0{,}634$ y $x \simeq 2{,}18$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) *En la ecuación $x^2 - bx + 25 = 0$, hallar b con la condición de que las dos raíces sean iguales.*

(b) *En la ecuación $9x^2 + bx + 28 = 0$, determinar b con la condición de que la diferencia de las raíces de dicha ecuación sea igual a la unidad.*

Solución:

(a) Si las dos raíces son iguales el discriminante debe ser cero:

$$b^2 - 4 \cdot 25 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \pm 10$$

(b) Sean x y $x+1$ las dos raíces. Puesto que su producto es $\frac{28}{9}$:

$$x(x+1)=\frac{28}{9}\ ;\qquad x^2+x=\frac{28}{9}\ ;\qquad 9x^2+9x-28=0$$

Resolviendo esta ecuación resulta $x_1=\frac{4}{3}$ y $x_2=-\frac{7}{3}$.
Para $x=\frac{4}{3}$

$$-\frac{b}{9}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+1=\frac{11}{3}\qquad\Longrightarrow\qquad b=-33$$

Para $x=-\frac{7}{3}$:

$$-\frac{b}{9}=-\frac{7}{3}-\frac{7}{3}+1=-\frac{11}{3}\qquad\Longrightarrow\qquad b=33$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Resolver la ecuación:*

$$x^4-5x^2-36=0$$

Solución:

Es una ecuación bicuadrada. resolviendo se obtiene $x^2=-4$ y $x^2=9$. La primera igualdad es imposible así que $x=\pm3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Resolver:*

$$\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$$

Solución:

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{36+x})^2=(2+\sqrt{x})^2$$
$$36+x=4+4\sqrt{x}+x$$
$$8=\sqrt{x}$$
$$x=64$$

Puede comprobarse que la solución es válida.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Resolver:*

$$5x^3+19x^2+11x-3=0$$

Solución:

Hay una raíz entera $x=-1$. Factorizando:

	5	19	11	-3
-1		-5	-14	3
	5	14	-3	0

resulta:

$$(x+1)(5x^2+14x-3)=0$$

Igualando a cero cada uno de los factores obtenemos $x=-1$, $x=-3$ y $x=\frac{1}{5}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=1 \\ y+\dfrac{1}{x}=6 \end{cases}$$

Solución:

Quitando denominadores resulta:

$$\begin{cases} xy+2=y \\ xy+1=6x \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$-1=6x-y\ ; \qquad y=6x+1$$

Sustituyendo:

$$x(6x+1)+1=6x\ ; \qquad 6x^2-5x+1=0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $\left(\frac{1}{2},4\right)$ y $\left(\frac{1}{3},3\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Resolver la inecuación:*

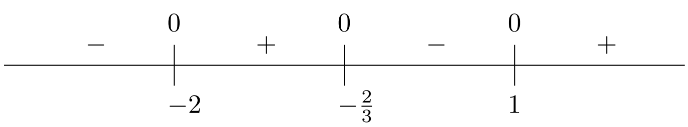
$$3x^3+5x^2-4x-4\leq 0$$

Solución:

Factorizando el polinomio resulta:

$$(x-1)(x+2)(3x+2)\leq 0$$

Las raíces del polinomio son $x=1$, $x=-2$ y $x=-\frac{2}{3}$. El signo del polinomio esta dado en el siguiente esquema:



La solución de la inecuación es $x\in(-\infty,-2]\cup[-\frac{2}{3},1]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{x^2-3x-4}{4-x^2} \leq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son 4 y -1. Las raíces del denominador son -2 y 2. El esquema de signos de la fracción es el siguiente:

	-2		-1		2		4	
$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

La solución de la inecuación es $x \in (-\infty,-2) \cup [-1,2) \cup [4,\infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2+6x-3=0$ son α y β. Sin resolver la ecuación calcular $\alpha^2+\beta^2$.*

Solución:

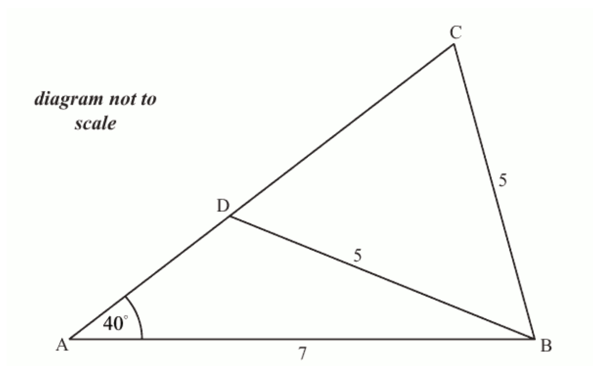
Por las relaciones de Cardano sabemos que $\alpha+\beta=-3$ y $\alpha\beta=-\frac{3}{2}$. Entonces:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\left(-\frac{3}{2}\right)=9+3=12$$

♠♠♠♠

4. Trigonometría

Ejercicio 1. *Dado el triángulo ABC, con los datos que se muestran en la figura, calcular la longitud del segmento CD.*



Solución: El ángulo C es agudo porque es uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles. Lo podemos calcular por el teorema del seno:

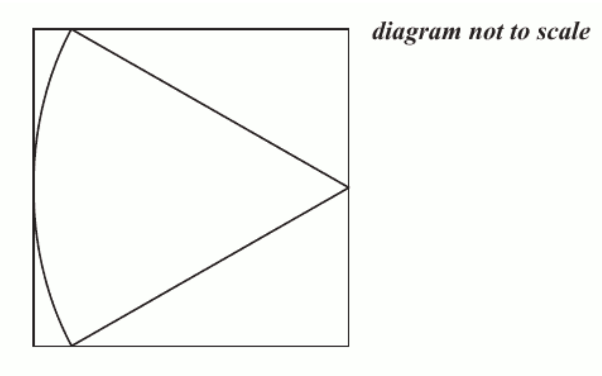
$$\frac{5}{\operatorname{sen} 40^{\circ}}=\frac{7}{\operatorname{sen} C} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} C=\frac{7 \operatorname{sen} 40^{\circ}}{5}$$

Por otra parte en el triángulo isósceles:

$$\frac{1}{2}CD = 5\cos C \; ; \qquad CD = 10\cos C \simeq 4{,}36$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Se dibuja un rectángulo alrededor de un sector como se muestra en la figura. Si el ángulo del sector es 1 radian y el área del sector es* $7\ \mathrm{cm}^2$*, calcular las dimensiones del rectángulo, aproximando la respuesta al milímetro más próximo.*



Solución:

La base del rectángulo es igual al radio. Puesto que el área del sector es $700\ \mathrm{mm}^2$

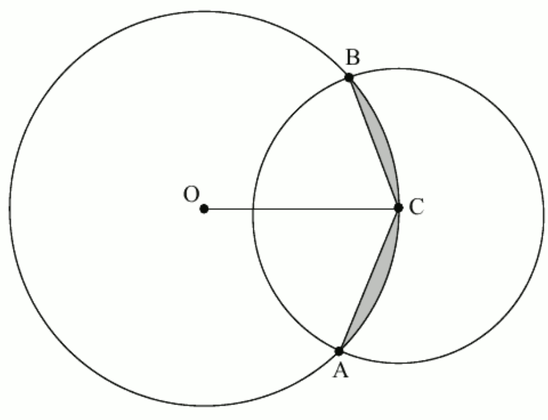
$$\frac{1}{2}\,r^2\varphi = \frac{1}{2}\,r^2 = 700 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{1400} = 10\sqrt{14} \simeq 37\ \mathrm{mm}$$

La altura del rectángulo es igual a la longitud de la cuerda correspondiente al arco del dibujo. Llamando l a esta longitud:

$$\frac{l}{2} = r\operatorname{sen} 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad l = 2\cdot 10\sqrt{14}\operatorname{sen} 0{,}5 \simeq 36\ \mathrm{mm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios* 4 cm *y* 3 cm*. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B*



Halle:

(a) $\widehat{BOC}$;

(b) *el área de la región sombreada.*

Solución:

(a) Llamemos $\varphi = \widehat{BOC}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{1{,}5}{4} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 2 \operatorname{arsen}\frac{1{,}5}{4} \simeq 0{,}769$$

(b) La región sombreada está formada por dos segmentos circulares de amplitud φ sobre un círculo de 4 cm de radio. El área será igual a

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1{,}18$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Halle todas las soluciones de la ecuación* $\tan x + \tan 2x = 0$ *donde* $0^o \leq x < 360^o$*.*

Solución:

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 0$$
$$\tan x\left(1 - \tan^2 x\right) + 2\tan x = 0$$
$$\tan x\left(3 - \tan^2 x\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \tan x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = 0^{\text{o}}, \quad x = 180^{\text{o}} \\ \tan x = \sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad x = 60^{\text{o}}, \quad x = 240^{\text{o}} \\ \tan x = -\sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad x = 120^{\text{o}}, \quad x = 300^{\text{o}} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Resuelva la ecuación* $\operatorname{sen} 2x - \cos 2x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x \qquad$ *para* $x \in [-\pi, \pi]$*.*

Solución:

$$\begin{aligned} &2\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x \\ &2\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x \\ &2\operatorname{sen} x\cos x - 2\cos^2 x = \operatorname{sen} x - \cos x \\ &2\cos x(\operatorname{sen} x - \cos x) = \operatorname{sen} x - \cos x \\ &(\operatorname{sen} x - \cos x)(2\cos x - 1) = 0 \end{aligned}$$

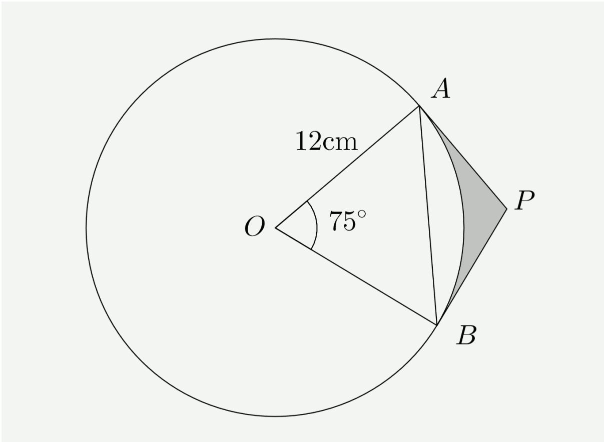
Y de aquí

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \\ 2\cos x - 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

5. Trigonometría y números complejos

Ejercicio 1. *La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio 12 cm. La cuerda AB determina un ángulo central de 75^o. Las tangentes a la circunferencia en A y en B se encuentran en P.*



(a) *Utilizando la regla del coseno compruebe que la longitud de AB es:*

$$AB = 12\sqrt{2\,(1 - \cos 75^o)}$$

(b) *Calcule la longitud de BP.*

(c) *A partir de lo anterior, halle:*

(I) *el área del triángulo OBP*

(II) *el área del triángulo ABP*

(d) *Halle el área del sector OAB.*

(e) *Halle el área de la región sombreada.*

Solución:

(a) Por el teorema deel coseno:

$$\begin{aligned} AB^2 &= 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 75^o \\ &= 2 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^2 \cdot \cos 75^o \\ &= 2 \cdot 12^2 (1 - \cos 75^o) \end{aligned}$$

y haciendo la raíz cuadrada:

$$AB = 12\sqrt{2(1 - \cos 75^o)}$$

(b) El ángulo $\widehat{APB}$ es igual a $180^o - 75^o = 105^o$. Entonces:

$$BP = \frac{\frac{AB}{2}}{\operatorname{sen} \frac{105}{2}} = \frac{6\sqrt{2(1 - \cos 75^o)}}{\operatorname{sen} 52{,}5^o} \simeq 9{,}21 \text{ cm}$$

(c) (I) Es un triángulo rectángulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BP \simeq 55{,}2 \text{ cm}^2$$

(II) Es un triángulo isósceles:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BP^2 \operatorname{sen} 105^{\text{o}} \simeq 40{,}9 \text{ cm}^2$$

(d) El área del sector es:

$$S = \frac{\pi 12^2 \cdot 75}{360} \simeq 94{,}2 \text{ cm}^2$$

(e) El área de la región sombreada puede obenerse como diferencia del área del cuadrilátero menos el área del sector:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BP - \frac{\pi 12^2 \cdot 75}{360} \simeq 16{,}2 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Sabiendo que:*

$$\frac{z}{z+2} = 2 - i, \qquad z \in \mathbb{C}$$

calcule z en la forma $a + ib$.

Solución:

Despejando z:

$$\begin{aligned} z &= (z+2)(2-i) \\ z &= 2z - iz + 4 - 2i \\ -z + iz &= 4 - 2i \\ z &= \frac{4-2i}{-1+i} \end{aligned}$$

Para calcular el cociente multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(4-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4-2-4i+2i}{2} = \frac{-6-2i}{2} = -3 - i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Calcular:*

$$\frac{(2+i)(3-4i)}{(1+2i)(4-3i)}$$

Expresar el resultado en forma binómica y en forma polar.

Solución:

$$\frac{(2+i)(3-4i)}{(1+2i)(4-3i)} = \frac{10-5i}{10+5i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i = 1_{-0{,}927}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *La representación de las soluciones de la ecuación* $z^5 + 32 = 0$ *en el plano de Argand son los vértices de un pentágono regular. Calcule el área del pentágono.*

Solución:

Las raíces tiene módulo 2. El área del pentágono es 5 veces el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 2 y el ángulo desigual 72º:

$$S = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \operatorname{sen} 72^{\text{o}} \simeq 9{,}51$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *A partir de la fórmula de Moivre demostrar que:*

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}^4\varphi}$$

Demostrar que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Solución:

Por la fórmula de Moivre:

$$(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\operatorname{sen} 5\varphi$$

Por otra parte, aplicando la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned}
&(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^5\\
&\quad= \cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi \cdot i\operatorname{sen}\varphi + 10\cos^3\varphi \cdot i^2\operatorname{sen}^2\varphi + 10\cos^2\varphi \cdot i^3\operatorname{sen}^3\varphi + 5\cos\varphi \cdot i^4\operatorname{sen}^4\varphi + i^5\operatorname{sen}^5\varphi\\
&\quad= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^3\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi - 10i\cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}^3\varphi + 5\cos\varphi \cdot \operatorname{sen}^4\varphi + i\operatorname{sen}^5\varphi\\
&\quad= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos\varphi \cdot \operatorname{sen}^4\varphi + i(5\cos^4\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^5\varphi)
\end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias resulta:

$$\begin{aligned}
\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos\varphi \cdot \operatorname{sen}^4\varphi\\
\operatorname{sen} 5\varphi &= 5\cos^4\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^5\varphi
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la tangente dividiendo el seno entre el coseno:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5\cos^4\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^5\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos\varphi \cdot \operatorname{sen}^4\varphi}$$

y dividiendo numerador y denominador por $\cos^5\varphi$ resulta:

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}^4\varphi}$$

Para $\varphi = \frac{\pi}{5}$:

$$\operatorname{tg}\pi = 0 = \frac{5\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - 10\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg}^5\frac{\pi}{5}}{1 - 10\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5} + 5\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{5}} \quad\Longrightarrow\quad 5\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - 10\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg}^5\frac{\pi}{5} = 0$$

Entonces, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ es una raíz del polinomio $5x - 10x^3 + x^5 = x(x^4 - 10x^2 + 5)$.

Una raíz de este polinomio es $x = 0$. Las otras son:

$$x = \pm\sqrt{\frac{10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2}} = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}}$$

Puesto que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ debe ser positivo y menor que 1 (este ángulo es menor que $\frac{\pi}{4}$) debe ser:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

♠♠♠♠

6. Geometría

Ejercicio 1. *Hallar la distancia del punto $P(2,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(-2,-3)$.*

Solución:

La recta que pasa por A y B es:

$$y-1=\frac{-4}{-3}\,(x-1)$$

o, en forma implícita:

$$4x-3y-1=0$$

La distancia de P a esta recta es:

$$d=\frac{4\cdot 2-3\cdot(-1)-1}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5}=2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Hallar las coordenadas del punto que equidista de los $A(-1,2)$, $B(-2,0)$ y que se halla sobre la recta $2x-y-1=0$.*

Solución:

El punto que buscamos se encuentra en la mediatriz de A y B:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+y^2$$
$$2x+1-4y+4=4x+4$$
$$2x+4y-1=0$$

Si además se encuentra sobre la recta $2x-y-1=0$ será la solución del sistema:

$$\begin{cases}2x+4y-1=0\\2x-y-1=0\end{cases}$$

que es el punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,2)$ y $C(5,8)$.*

Solución:

– Ecuación de la altura correspondiente al vértice A. Calculamos la pendiente de BC:

$$m_{BC}=\frac{6}{-3}=-2\ ;\qquad h_A:\ y-2=\frac{1}{2}(x-2)\ ;\quad x-2y+2=0$$

– Ecuación de la altura correspondiente al vértice B. Calculamos la pendiente de AC:

$$m_{AC}=\frac{6}{3}=2\ ;\qquad h_B:\ y-2=-\frac{1}{2}(x-8)\ ;\quad x+2y-12=0$$

– Calculamos la intersección de las dos alturas:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

y encontramos el ortocentro $H\left(5, \frac{7}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Hallar el área del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(-1, 4)$.*

Solución:

– Tomamos como base el lado BC:

$$BC = \sqrt{(-1-6)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

– Para obtener la altura h_A calculamos la ecuación del lado BC:

$$y - 3 = \frac{1}{-7}(x - 6)\ ; \qquad x + 7y - 27 = 0$$

La altura es la distancia desde A a esta recta:

$$h_A = \frac{|2 + 7 - 27|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}}$$

– El área es:

$$S = \frac{1}{2}5\sqrt{2} \cdot \frac{18}{5\sqrt{2}} = 9$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Se tiene un punto A de coordenadas $(0, 3)$ y otro B de coordenadas $(3, 2)$. Situar en el eje X otro C de tal modo que si AC es el rayo incidente en OX, el CB sea el reflejado.*

Solución:

Sea $C(a, 0)$ el punto buscado. La pendiente de AC debe ser igual y de sentido contrario a la pendiente de BC:

$$\frac{-3}{a} = -\frac{-2}{a-3}\ ; \qquad -3a + 9 = 2a\ ; \qquad a = \frac{9}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Dada la recta $3x - 4y - 2 = 0$, y el punto $P(2, 1)$ sobre ella, determinar en la recta los puntos que distan 5 unidades del dado.*

Solución:

Los puntos buscados son las intersecciones de la recta con la circunferencia de centro P y radio 5:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ 3x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Despejando:

$$y = \frac{3x-2}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia:

$$(x-2)^2 + \left(\frac{3x-2}{4} - 1\right)^2 = 25\ ; \qquad (x-2)^2 + \left(\frac{3x-6}{4}\right)^2 = 25$$

Haciendo operaciones:

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{9x^2 - 36x + 36}{16} = 25\ ; \qquad 25x^2 - 100x - 300 = 0\ ; \qquad x^2 - 4x - 12 = 0$$

y obtenemos los puntos $(-2, -2)$ y $(6, 4)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas* $3x - 2y - 20 = 0$*;* $2x + 3y - 9 = 0$ *y que pasan por el punto* $(3, 1)$.

Solución:

El problema se simplifica si nos damos cuentas que el punto $(3, 1)$ se encuentra sobre la segunda tangente. El centro se encuentra en la bisectriz de las dos tangentes

$$\frac{3x - 2y - 20}{\sqrt{9+4}} = \pm\frac{2x + 3y - 9}{\sqrt{4+9}}\ ; \qquad 3x - 2y - 20 = \pm(2x + 3y - 9)$$

Así obtenemos las dos bisectrices:

$$x - 5y - 11 = 0\ ; \qquad 5x + y - 29 = 0$$

También debe encontrarse en la perpendicular a $2x + 3y - 9 = 0$ por el punto $(3, 1)$ o sea en la recta:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 3)\ ; \qquad 3x - 2y - 7 = 0$$

Los centros de las circunferencias solución son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} x - 5y - 11 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 5x + y - 29 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos los dos centros $C(1, -2)$ y $C'(5, 4)$

Calculamos los radios, por ejemplo, como la distancia del centro al punto:

$$r^2 = (1-3)^2 + (-2-1)^2 = 13$$
$$r'^2 = (5-3)^2 + (4-1)^2 = 13$$

Las dos circunferencias son:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13\ ; \qquad (x-5)^2 + (y-4)^2 = 13$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Determinar los valores de c a fin de que la recta $3x + 4y + c = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$.*

Solución:

El centro de la circunferencia es el punto $C(1,0)$ y el radio es:

$$1 + 0 - r^2 = -24\ ; \qquad r = 5$$

Puesto que la distancia del centro a la tangente debe ser 5:

$$\frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + c|}{5} = 5\ ; \qquad |3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + c| = 25\ ; \qquad 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + c = \pm 25$$

y obtenemos $c = 22$ y $c = -28$.

♠♠♠♠

7. Probabilidad

Ejercicio . Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $\mathrm{p}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{p}(A|B)=\frac{3}{4}$ y $\mathrm{p}(B|A)=\frac{1}{4}$.

(a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

(b) Calcúlese $\mathrm{p}(\bar{A}|\bar{B})$.

Solución:

(a) Puesto que:

$$\mathrm{p}(A\cap B)=\mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B|A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

la probabilidad de $A\cap B$ es distinta de cero y los sucesos no son incompatibles.

Por otra parte:

$$\mathrm{p}(A|B)=\frac{\mathrm{p}(A\cap B)}{\mathrm{p}(B)}\ ;\qquad \mathrm{p}(B)=\frac{\mathrm{p}(A\cap B)}{\mathrm{p}(A|B)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}$$

Puesto que:

$$\mathrm{p}(A)\cdot\mathrm{p}(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}=\mathrm{p}(A\cap B)$$

los sucesos son independientes.

(b)

$$\mathrm{p}(\bar{A}|\bar{B})=\frac{\mathrm{p}(\bar{A}\cap\bar{B})}{\mathrm{p}(\bar{B})}=\frac{1-\mathrm{p}(A\cup B)}{1-\mathrm{p}(B)}=\frac{1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Los sucesos A y B son tales que $P(A)=0{,}2$ y $P(B)=0{,}5$.*

(a) *Determínese el valor de $P(A\cup B)$ cuando*

  (I) *A y B son mutuamente excluyentes;*

  (II) *A y B son independientes.*

(b) *Calcúlese el valor más pequeño y mas grande que puede tomar $P(A|B)$.*

Solución:

(a) (I) Si son mutuamente excluyentes $\mathrm{p}(A\cap B)=0$ y

$$\mathrm{p}(A\cup B)=\mathrm{p}(A)+\mathrm{p}(B)=0{,}2+0{,}5=0{,}7$$

(II) Si son independientes $\mathrm{p}(A\cap B)=\mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1$ y

$$\mathrm{p}(A\cup B)=\mathrm{p}(A)+\mathrm{p}(B)-\mathrm{p}(A\cap B)=0{,}2+0{,}5-0{,}1=0{,}6$$

(b) La probabilidad de A condicionada a B se define por

$$\mathrm{p}(A|B)=\frac{\mathrm{p}(A\cap B)}{\mathrm{p}(B)}$$

El valor más pequeño se obtiene cuando los sucesos son incompatibles. En este caso la probabilidad es cero.

El valor mayor se dará cuando el suceso A está contenido en B ya que así $\mathrm{p}(A\cap B)=\mathrm{p}(A)=0{,}2$.

El valor de la probabilidad condicionada es

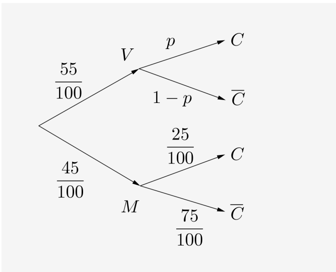
$$\mathrm{p}(A|B)=\frac{\mathrm{p}(A\cap B)}{\mathrm{p}(B)}=\frac{\mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(B)}=\frac{2}{5}$$

Ejercicio 3. *Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:*

(a) *Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.*

(b) *Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.*

Solución:



(a) Calculemos p:

$$\frac{30}{100} = \frac{55}{100} \cdot p + \frac{25}{100} \cdot \frac{45}{100} \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{15}{44}$$

Entonces:

$$\mathrm{p}\left(M|C\right) = \frac{\frac{45}{100} \cdot \frac{25}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{3}{8}$$

(b)

$$\mathrm{p}\left(C \cap V\right) = \frac{55}{100} \cdot \frac{15}{44} = \frac{3}{16}$$

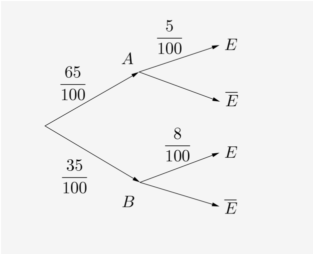
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

(a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

(b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:



(a)
$$\mathrm{p}(E) = \frac{65}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{8}{100} = \frac{605}{10000} = \frac{121}{2000}$$

(b)
$$\mathrm{p}(A|E) = \frac{\frac{65}{100} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{605}{10000}} = \frac{65}{121}$$

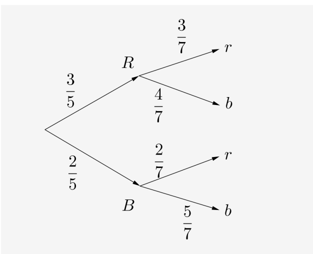
♠♠♠♠

Ejercicio 5. Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

(a) La segunda bola extraída sea roja.

(b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

Solución:



(a)
$$\mathrm{p}(r) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35}$$

(b)
$$\mathrm{p}(B \cap b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

♠♠♠♠

8. Probabilidad. Variable aleatoria.

Ejercicio 1. *Se consideran los sucesos* A*,* B *y* C *de un experimento aleatorio tales que :* $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}09$*;* $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}07$ *y* $\mathrm{p}\,(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}97$*. Además los sucesos* A *y* C *son incompatibles.*

(a) *Estúdiese si los sucesos* A *y* B *son independientes.*

(b) *Calcúlese* $\mathrm{p}\,(A \cap B|C)$*.*

Solución:

(a) Los sucesos serán independientes si $\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A)\mathrm{p}\,(B)$:

$$\mathrm{p}\,(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}97 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}97 = \mathrm{p}\,(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathrm{p}\,(A \cap B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(A \cap B) = 0{,}03$$

Puesto que $\mathrm{p}\,(A)\mathrm{p}\,(B) = 0{,}063$ los sucesos no son independientes.

(b) Puesto que A y C son incompatibles:

$$\mathrm{p}\,(A \cap B|C) = \frac{\mathrm{p}\,(A \cap B \cap C)}{\mathrm{p}\,(C)} = 0$$

puesto que $\mathrm{p}\,(A \cap C) = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *La envergadura de una cierta especie de ave puede representarse mediante una distribución normal de media* 60,2 cm *y desviación típica* 2,4 cm*.*

De acuerdo con este modelo, 99 % *de las aves tiene más de* x cm *de envergadura.*

(a) *Calcular el valor de* x*.*

En un experimento, un equipo de investigación estudia una amplia muestra de estas aves. La envergadura de cada una de ellas se mide con una precisión de 0,1 cm*.*

(b) *Calcular la probabilidad de que un ave seleccionada al azar mida* 60,2 cm *de envergadura.*

Solución:

(a) Sabemos que $\mathrm{p}\,(X > x) = 0{,}99$ o bien $\mathrm{p}\,(X < x) = 0{,}01$. Con ayuda de la calculadora obtenemos $x \simeq 54{,}6$ cm.

(b) $\mathrm{p}\,(60{,}15 < X < 60{,}25) \simeq 0{,}0166$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *El número de quejas recibidas diariamente por el servicio de atención al cliente de unos grandes almacenes sigue una distribución de Poisson de media* 0,6*.*

(a) *En un día escogido al azar, calcular la probabilidad de que*

(I) *no haya ninguna queja;*

(II) *haya al menos dos quejas.*

(b) *En una semana de cinco días escogida al azar, calcular la probabilidad de que no haya quejas.*

(c) *En un día escogido al azar, calcular el número más probable de quejas que se reciben. Justifique la respuesta.*

Los grandes almacenes introducen un nuevo método para mejorar la atención al cliente. El número de quejas recibidas sigue ahora una distribución de Poisson de media λ. En un día escogido al azar, la probabilidad de que no haya quejas es ahora 0,8.

(*d*) *Calcule el valor de λ.*

Solución:

(*a*) En la distribución Po(0,6):

(I) $\mathrm{p}\,(X = 0) \simeq 0{,}549$

(II) $\mathrm{p}\,(X \geq 2) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 1) \simeq 0{,}122$

(*b*) En este caso en Po(3) la probabilidad es $\mathrm{p}\,(X = 0) \simeq 0{,}0498$.

(*c*) Basta ver las probabilidades en Po(0,6). El valor más probable es $X = 0$.

(*d*) Teniendo en cuenta que en una distribución de Poisson Po(m)

$$\mathrm{p}\,(X = k) = \frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

Haciendo $m = \lambda$ y $k = 0$:

$$e^{-\lambda} = 0{,}8 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\ln 0{,}8 \simeq 0{,}223$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *En un puesto del mercado se venden manzanas, peras y ciruelas.*

(*a*) *Los pesos de las manzanas siguen una distribución normal de media 200 gramos y con una desviación típica de 25 gramos.*

(I) *Sabiendo que en el puesto hay 450 manzanas, ¿cuál es el número esperado de manzanas con un peso superior a 225 gramos?*

(II) *Sabiendo que el* 70 % *de las manzanas pesa menos de m gramos, halle el valor de m.*

(*b*) *Los pesos de las peras siguen una distribución normal de media μ gramos y con una desviación típica de σ gramos. Sabiendo que el* 8 % *de estas peras tiene un peso superior a 270 gramos y que el* 15 % *tiene un peso inferior a 250 gramos, halle μ y σ.*

(*c*) *Los pesos de las ciruelas siguen una distribución normal de media 80 gramos y con una desviación típica de 4 gramos. Se cogen 5 ciruelas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas pesen más de 82 gramos?*

Solución:

(*a*) (I) Calculamos la probabilidad de que una manzana pese más de 225 g

$$p = \mathrm{p}\,(X > 225) \simeq 0{,}159$$

Sea X la variable aleatoria número de manzanas de peso mayor que 225 g. En la binomial $\mathrm{B}(450, p)$ el valor esperado es

$$\mathrm{E}(X) = 450 \cdot p \simeq 71{,}4$$

(II) Sabiendo ahora que

$$\mathrm{p}\,(X < m) = 0{,}70$$

con la función inversa de la función de distribución que encontramos en la calculadora encontramos $m \simeq 213$.

(b) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Conocemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}\,(X > 270) = 0{,}08 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X < 270) = 0{,}92 \\ &\mathrm{p}\,(X < 250) = 0{,}15 \end{aligned}$$

Tipificamos la variable y obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}\left(Z < \frac{270-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 \quad \Longrightarrow \quad \frac{270-\mu}{\sigma} \simeq -1{,}04 \\ &\mathrm{p}\left(Z < \frac{250-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}15 \quad \Longrightarrow \quad \frac{250-\mu}{\sigma} \simeq 1{,}41 \end{aligned}$$

Obteniendo los valores con la calculadora y resolviendo el sistema resulta $\mu \simeq 258$, $\sigma \simeq 8{,}19$.

(c) Sea $X \sim \mathrm{N}(80, 4)$. Con esta distribución:

$$p = \mathrm{p}\,(X > 82) \simeq 0{,}309$$

El número de ciruelas que pesan más de 82 g sigue en este caso una binomial $\mathrm{B}(5, p)$ con la probabilidad p calculada anteriormente. La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}\,(X = 3) \simeq 0{,}140$$

♠♠♠♠

9. Examen de mejora

9.1. Primera parte. Sin calculadora.

Ejercicio 1.

Hallar el término independiente del desarrollo del binomio $\left(2x^2 + \dfrac{1}{2x^3}\right)^{10}$.

Solución:

El término enésimo del desarrollo es:

$$T_n = \binom{10}{n}\left(2x^2\right)^n\left(\frac{1}{2x^3}\right)^{10-n}$$

El término independiente cumple que:

$$2n - 3(10-n) = 0 \quad\Longrightarrow\quad n = 6$$

Así que:

$$T_6 = \binom{10}{6}2^6\,\frac{1}{2^4} = 840$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

La función f se define mediante $f(x) = 2x^3 + 5$, $-2 \leq x \leq 2$.

(a) Escriba el recorrido de f.

(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(c) Escriba el dominio y el recorrido de f^{-1}.

Solución:

(a) Puesto que $f'(x) = 6x^2 > 0$ la función es creciente. Puesto que además es continua, toma todos los valores comprendidos entre su valor más pequeño $f(-2) = -11$ y su valor más grande $f(2) = 21$. El recorrido es el intervalo cerrado $[-11, 21]$.

(b) Intercambiamos las variables:

$$x = 2y^3 + 5$$

y despejamos:

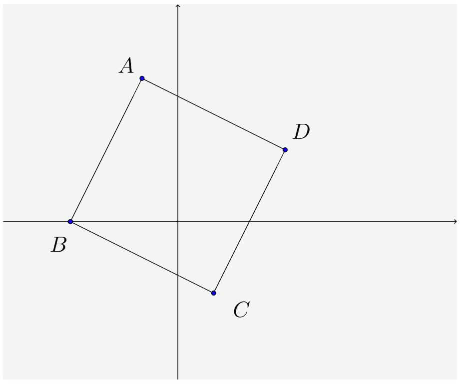
$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$$

(c) El dominio es $[-11, 21]$ y el recorrido $[-2, 2]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

En el siguiente diagrama de Argand, el punto A representa el número complejo $-1 + 4i$ y el punto B representa el complejo $-3 + 0i$. La forma de $ABCD$ es un cuadrado. Determine los números complejos que representan los puntos C y D.



Solución:

Método 1.

El vector $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. El vector $\vec{AD}$ es perpendicular a este y tiene el mismo módulo. Puede ser:

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por coherencia con el diagrama debe ser $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El punto C representa el complejo $1 - 2i$ y el punto D representa el complejo $3 + 2i$.

Método 2.

Un giro de centro c y ángulo φ se expresa mediante complejos por:

$$z' = c + (z - c)e^{i\varphi}$$

El punto C lo podemos obtener girando A un ángulo de -90^{o} alrededor de B:

$$z_C = -3 + (-1 + 4i + 3)(-i) = -3 - (2 + 4i)i = 1 - 2i$$

El punto D lo obtenemos girando B un ángulo de 90^{o} alrededor de A:

$$z_D = -1 + 4i + (-3 + 1 - 4i)i = -1 + 4i + (-2 - 4i)i = 3 + 2i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

(a) La variable aleatoria X sigue la distribución de Poisson $\text{Po}(m)$. Sabiendo que $\text{p}\,(X > 0) = \frac{3}{4}$, halle el valor de m en la forma $\ln a$ donde a es un número entero.

(b) La variable aleatoria Y sigue la distribución de Poisson $\text{Po}(2m)$. Halle $\text{p}\,(Y > 1)$ en la forma $\frac{b - \ln c}{c}$, donde b y c son números enteros.

Solución:

(a) La función de probabilidad de la distribución $\text{Po}(m)$ es:

$$\text{p}\,(X = k) = \frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

Puesto que $\text{p}\,(k = 0) = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{m^0 e^{-m}}{0!} = e^{-m} \qquad \Longrightarrow \qquad -m = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

Por tanto $m = \ln 4$.

(*b*) Calculemos las probabilidades de 0 y 1:

$$\mathrm{p}\,(k=0) = \frac{(2m)^0 e^{-2m}}{0!} = e^{-2m} = (e^m)^{-2} = \left(e^{\ln 4}\right)^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

$$\mathrm{p}\,(k=1) = \frac{2me^{-2m}}{1!} = 2me^{-2m} = \frac{2\ln 4}{16} = \frac{\ln 16}{16}$$

Entonces:

$$\mathrm{p}\,(Y>1) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{\ln 16}{16} = \frac{15-\ln 16}{16}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5.

Demuestre mediante inducción matemática que:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

Solución:

- Se cumple para $n=3$ puesto que $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$.
- Supongamos que la fórmula se cumple para $n=k$, es decir

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k-1}{2} = \binom{k}{3}$$

Debemos demostrar que entonces también se cumple para $n=k+1$, o sea, debemos demostrar:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{3}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k-1}{2} + \binom{k}{2} \\ &= \binom{k}{3} + \binom{k}{2} \\ &= \binom{k+1}{3}\end{aligned}$$

En el último paso se ha aplicado la propiedad delos números combinatorios que se utiliza en la construcción del triángulo de Pascal.
- Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \geq 3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6.

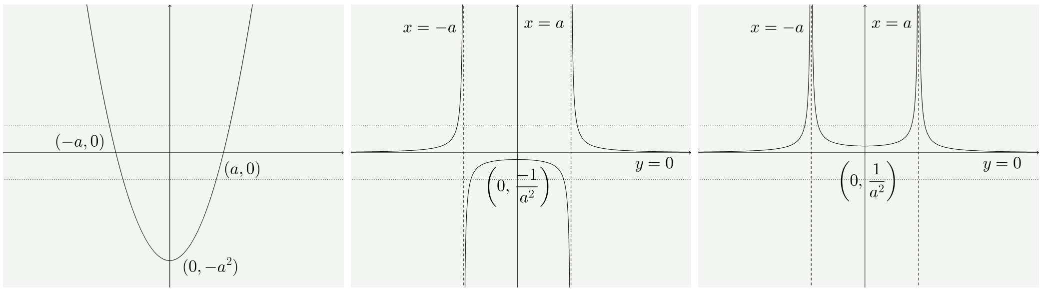
Considere la función f definida por $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$ donde x es una constante positiva.

Dibuje aproximadamente las siguientes curvas en sistemas de ejes separados, mostrando todos los cortes con los ejes x e y, los máximos, los mínimos y las asíntotas que haya:

(I) $y = f(x)$ (II) $y = \frac{1}{f(x)}$ (III) $y = \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

Solución:

Las gráficas son las siguientes:



♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(a) Resuelva $2\operatorname{sen}(x + 60^{\text{o}}) = \cos(x + 30^{\text{o}})$, $0 \leq x \leq 180^{\text{o}}$.

(b) Muestre que $\operatorname{sen} 105^{\text{o}} + \cos 105^{\text{o}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Sea $z = 1 - \cos 2\theta - i \operatorname{sen} 2\theta$, $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

(I) Halle en función de θ el módulo y el argumento de z. Exprese cada respuesta en su forma más simple.

(II) A partir de lo anterior, halle las raíces cúbicas de z en forma modulo-argumental.

Solución:.

(a) Desarrollando el seno y el coseno de la suma de ángulos:

$$2\left(\operatorname{sen} x \cos 60^{\text{o}} + \cos x \operatorname{sen} 60^{\text{o}}\right) = \cos x \cos 30^{\text{o}} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 30^{\text{o}}$$
$$2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$
$$3\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

Dividiendo por $\cos x$ (que no puede ser cero):

$$3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$
$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

y, por consiguiente $x = 150^{\text{o}}$.

(b) Teniendo en cuenta que $105^{\text{o}} = 60^{\text{o}} + 45^{\text{o}}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 105^{\text{o}} + \cos 105^{\text{o}} &= \operatorname{sen}(60^{\text{o}} + 45^{\text{o}}) + \cos(60^{\text{o}} + 45^{\text{o}}) \\
&= \operatorname{sen} 60 \cos 45^{\text{o}} + \operatorname{sen} 45^{\text{o}} \cos 60^{\text{o}} + \cos 60^{\text{o}} \cos 45^{\text{o}} - \operatorname{sen} 60^{\text{o}} \operatorname{sen} 45^{\text{o}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(c) (I) El módulo de z es igual a:

$$|z| = \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 2\theta} = \sqrt{1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta} = \sqrt{2(1 - \cos 2\theta)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$1 - \cos 2\theta = 1 - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta$$

resulta:

$$|z| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2\theta} = 2\operatorname{sen}\theta$$

El argumento de z cumple que:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\operatorname{sen}2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta} = -\operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}(\pi-\theta)$$

Esto quiere decir que φ y $\pi-\theta$ son complementarios:

$$\varphi+\pi-\theta=\frac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad \varphi=\theta-\frac{\pi}{2}$$

(ii) El módulo de las raíces es $\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}$ y los argumentos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\theta}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\theta-\pi}{6}\\
\alpha_2 &= \alpha_1+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta-\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta+3\pi}{6}\\
\alpha_3 &= \alpha_2+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta+3\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta+7\pi}{6}
\end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\left(\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}\right)_{\frac{2\theta-\pi}{6}}\ ; \qquad \left(\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}\right)_{\frac{2\theta+3\pi}{6}}\ ; \qquad \left(\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}\right)_{\frac{2\theta+7\pi}{6}}$$

♠♠♠♠

9.2. Segunda parte. Con calculadora.

Ejercicio 1.

En un club de golf hay 75 jugadores que participan en un torneo de golf. En la siguiente tabla se muestran las puntuaciones que han obtenido en el 18º hoyo:

Puntuación	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	3	15	28	17	9	3

(a) Se elige al azar uno de los jugadores. Halle la probabilidad de que la puntuación de este jugador fuera de 5 o más.

(b) Calcule la media de las puntuaciones.

Solución:

(a) Si llamamos X a la variable aleatoria puntuación obtenida por un jugador elegido al azar:

$$\mathrm{p}\ (X\geq 5)=\frac{17+9+3}{75}=\frac{29}{75}$$

(b) La media es:

$$\mathrm{E}(X)=\frac{2\cdot 3+3\cdot 15+4\cdot 28+5\cdot 17+6\cdot 9+7\cdot 2}{75}\simeq 4{,}31$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

Una máquina elabora paquetes de galletas. Los pesos X, en gramos, de los paquetes de galletas se pueden modelizar por una distribución normal, donde $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Un paquete de galletas se considera que tiene un peso insuficiente si pesa menos de 250 gramos.

(a) Sabiendo que $\mu=253$ y $\sigma=1{,}5$, halle la probabilidad de que un paquete de galletas elegido al azar tenga un peso insuficiente.

El fabricante decide que la probabilidad de que un paquete tenga un peso insuficiente debería ser igual a 0,002. Para conseguirlo se aumenta μ mientras que σ no cambia.

(b) Calcule el nuevo valor de μ con una aproximación de dos lugares decimales.

El fabricante está contento con la decisión de que la probabilidad de que un paquete tenga un peso insuficiente sea igual a 0,002, pero está descontento con la manera en que ha logrado. Para ello, se ajusta la máquina para reducir σy hacer que μ sea igual a 253.

(c) Calcule el nuevo valor de σ.

Solución:

(a) Con al calculadora obtenemos:

$$\text{p}\,(X < 250) \simeq 0{,}0228$$

(b) Ahora $X \sim N\,(\mu, 1{,}5)$:

$$\text{p}\,(X < 250) = \text{p}\left(Z < \frac{250-\mu}{1{,}5}\right) = 0{,}002$$

$$\frac{250-\mu}{1{,}5} = -2{,}878\ldots$$

$$\mu \simeq 254{,}32$$

(c) En este caso $X \sim N\,(253, \sigma)$:

$$\text{p}\,(X < 250) = \text{p}\left(Z < \frac{250-253}{\sigma}\right) = 0{,}002$$

$$\frac{-3}{\sigma} = -2{,}878\ldots$$

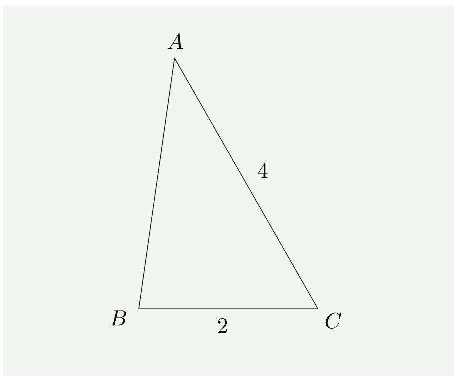
$$\sigma \simeq 1{,}04$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

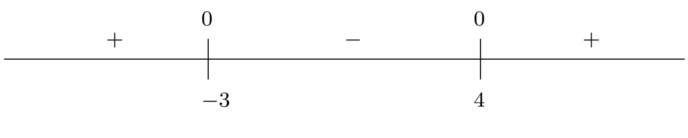
(a) Halle el conjunto de valores de k que satisfacen la inecuación $k^2 - k - 12 < 0$.

(b) El triángulo ABC se muestra en la siguiente figura. Sabiendo que $\cos B < \frac{1}{4}$, halle el rango de posibles valores de AB.



Solución:

(a) las raíces del polinomio son $k = -3$ y $k = 4$. El esquema de signos es el siguiente:



La solución es $k \in (-3, 4)$.

(*b*) Llamemos $x = AB$. Por el teorema del coseno:

$$\cos B = \frac{4 + x^2 - 16}{2 \cdot 2 \cdot x} = \frac{x^2 - 12}{4x}$$

Por tanto, debe cumplirse:

$$\frac{x^2 - 12}{4x} < \frac{1}{4}$$

El ángulo B puede ser obtuso. Debe cumplirse también:

$$\frac{x^2 - 12}{4x} > -1$$

Resolviendo con la calculadora (o sin ella) se obtiene $x \in (2, 4)$

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

A John le gusta salir a navegar todos los días. Para ayudarle a decidir si es seguro o no salir a navegar, cada día de julio lo califica como ventoso o como tranquilo. Si un día dado del mes de julio es tranquilo, la probabilidad de que el día siguiente sea tranquilo es igual a 0,9. Si un día dado del mes de julio es ventoso, la probabilidad de que el día siguiente sea tranquilo es de 0,3. El pronóstico del tiempo para el 1 de julio predice que la probabilidad de que sea un día tranquilo es de 0,8.

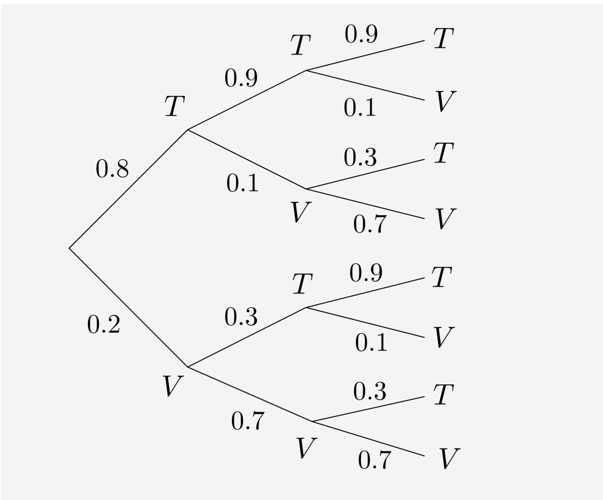
(*a*) Dibuje un diagrama de árbol que represente esta información para los tres primeros días de julio.

(*b*) Halle la probabilidad de que el 3 de julio sea un día tranquilo.

(*c*) Halle la probabilidad de que el 1 de julio fuera un día tranquilo, sabiendo que el 3 de julio es un día ventoso.

Solución:

(*a*) El diagrama sería el siguiente:



(*b*) $\mathrm{p}(T_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}768$

(*c*) La probabilidad de que el día 3 fuera ventoso es:

$$\mathrm{p}(V_3) = 1 - 0{,}768 = 0{,}232$$

La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(T_1 \mid V_3) = \frac{\mathrm{p}(T_1 \cap V_3)}{\mathrm{p}(V_3)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}232} \simeq 0{,}552$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5.

Sabiendo que:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)\right)=\frac{1}{2}\,(\log_{10}p+\log_{10}q)\ ;\qquad p>0,\ q>0$$

halle p en función de q.

Solución:

Aplicando la propiedad del logaritmo del producto y de la raíz:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)\right)=\frac{1}{2}\,(\log_{10}p+\log_{10}q)$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)\right)=\log_{10}\sqrt{pq}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)=\sqrt{pq}$$

Elevando al cuadrado:

$$(p+2q)^2=8pq$$

$$p^2+4pq+4q^2=8pq$$

$$p^2-4pq+4q^2=0$$

$$(p-2q)^2=0$$

y de aquí:

$$p-2q=0\quad\Longrightarrow\quad p=2q$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6.

En una convocatoria de exámenes de prueba, un alumno de un colegio tiene que hacer 18 exámenes incluido el de Física, el de Química y el de Biología. No le está permitido hacer consecutivamente dos de estos tres exámenes.No existe ninguna otra limitación relativa al orden en el que puede hacer el resto de los exámenes.

Halle el número de órdenes distintos en los que se pueden hacer estos 18 exámenes.

Solución:

Método 1

Los 18 exámenes se pueden ordenar de 18! maneras diferentes. Debemos contar en cuántas de estas aparecen consecutivamente dos de las tres asignaturas señaladas.

Las dos asignaturas consecutivas se pueden ordenar de 6 maneras diferentes y hay 17 días en que se podría hacer la primera. Las 16 asignaturas restantes se podrían ordenar de 16! maneras diferentes. Podríamos pensar entonces, que el número de maneras de poner las dos asignaturas de forma consecutiva es:

$$17\cdot 6\cdot 16!$$

pero en ese caso, las permutaciones en las que aparecen las tres asignaturas de forma consecutiva las contaríamos dos veces. Por ejemplo, si se realizan seguidos los exámenes FQB lo contaríamos como una permutación en la que están seguidos F y Q y también Q y B. Debemos quitar por tanto aquellas permutaciones en que aparecen en forma consecutiva las tres asignaturas. El número de estas permutaciones es:

$$16\cdot 6\cdot 15!$$

En total el número de permutaciones válidas es:

$$18!-17\cdot 6\cdot 16!+16\cdot 6\cdot 15!\simeq 4{,}39\cdot 10^{15}$$

Método 2

Otra manera de resolver este problema sería la siguiente. Representemos mediante un símbolo cualquiera los exámenes de las 15 asignaturas que no son Física, Química o Biología:

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Algunas posiciones de los exámenes que no pueden ir seguidos serían por ejemplo:

○ F ○ ○ ○ Q ○ ○ ○ ○ ○ ○ B ○ ○ ○ ○ ○
Q ○ F ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ B ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ Q ○ ○ ○ F ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ B

En total, tenemos 16 posiciones de las que debemos escoger 3. Además tenemos 3! modos de disponer estos 3 exámenes y 15! maneras de disponer los restantes. El número de disposiciones posibles es:

$$C_{16,3} \cdot 3! \cdot 15! \simeq 4{,}39 \cdot 10^{15}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

Sea $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, donde a y b son números enteros positivos.

(a) Sabiendo que $x^2 - 1$ es un factor de $f(x)$, halle el valor de a y el valor de b.

(b) Factorice $f(x)$, expresándolo como producto de factores lineales.

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $f(x)$, y rotule todos los puntos máximos, los puntos mínimos y los puntos de corte con los ejes x e y.

(d) Utilizando este gráfico, indique el rango de valores de c para los cuales $f(x) = c$ tiene exactamente dos raíces reales distintas.

Solución:

(a) Si $x^2 - 1$ es un factor, $x = -1$ y $x = 1$ son raíces del polinomio. Por tanto:

$$3 + a + b - 7 - 4 = 0$$
$$3 - a + b + 7 - 4 = 0$$

resolviendo el sistema resulta $a = 7$ y $b = 1$.

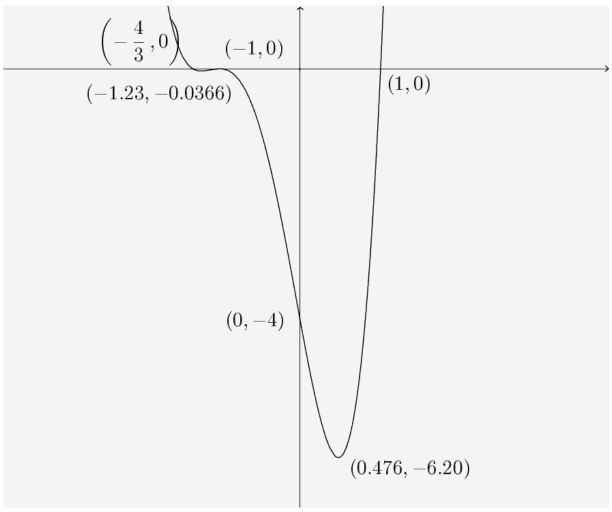
(b) Dividiendo por $x^2 - 1$ obtenemos:

$$f(x) = (x^2 - 1)\left(3x^2 + 7x + 4\right)$$

El polinomio $3x^2 + 7x + 4$ tiene como raíces $x = -1$ y $x = -\frac{4}{3}$. La factorización resulta:

$$f(x) = (x^2 - 1)\left(3x^2 + 7x + 4\right) = (x-1)(x+1)3(x+1)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (x+1)^2(x-1)(3x+4)$$

(c) Podemos hacer la representación y obtener los puntos que nos piden con ayuda de la calculadora:



(d) La recta horizontal $y = c$ debe cortar a la curva en dos puntos. Esto sucederá para:

$$c \in (-6{,}20; -0{,}0366) \cup (0, \infty)$$

♠♠♠♠