

**Matemáticas I.**  
**Bachillerato Internacional**  
**Curso 2015-2016. Exámenes**

[www.five-fingers.es](http://www.five-fingers.es)

## Índice

1. Logaritmos y combinatoria (grupo W)	3
2. Logaritmos y combinatoria (grupo Z)	6
3. Combinatoria. Inducción. Ecuaciones. (Grupo Z).	10
4. Combinatoria. Inducción. Ecuaciones. (Grupo W).	15
5. Trigonometría (grupo W)	20
6. Trigonometría (grupo Z)	24
7. Más trigonometría (grupo W)	28
8. Más trigonometría (grupo Z)	33
9. Números complejos	37
10. Números complejos	41
11. Geometría	44
12. Segundo examen de geometría. Grupo Z	50
13. Segundo examen de geometría. Grupo W.	54
14. Probabilidad. Grupo Z	57
15. Probabilidad. Grupo W.	61
16. Variable aleatoria. Probabilidad. Grupo W.	64
17. Variable aleatoria. Probabilidad. Grupo Z,	67
18. Sucesiones- Funciones (grupo W).	71
19. Sucesiones. Funciones (grupo Z).	77
20. Sucesiones. Funciones (segundo examen).	83
21. Examen final	88

## 1. Logaritmos y combinatoria (grupo W)

**Ejercicio 1.** *Calcular:*

$$(a) \sqrt[3]{13 + 2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{13 - 2\sqrt{11}}$$

$$(b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

**Solución:**

$$(a) \sqrt[3]{13 + 2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{13 - 2\sqrt{11}} = \sqrt[3]{169 - 44} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$(b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - \sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{15} - 3 - 5 - \sqrt{15}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$


---

**Ejercicio 2.** *Resolver la ecuación:*

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$$

**Solución:**

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$$

$$3^x + \frac{3}{3^x} = 4$$

$$3^{2x} + 3 = 4 \cdot 3^x$$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

resolviendo esta ecuación de segundo grado en  $3^x$  resulta:

$$3^x = 1 \implies x = \log_3 1 = 0$$

$$3^x = 3 \implies x = \log_3 3 = 1$$


---

**Ejercicio 3.** *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

**Solución:**

La segunda ecuación equivale a:

$$\log x - \log y = 1$$

$$\log \frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{y} = 10$$

Tenemos entonces el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema resulta  $x = 100$ ,  $y = 1000$ .

---

**Ejercicio 4.** Con las cifras 3, 4, 5, 8 y 9:

- (a) ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden formarse?  
(b) ¿Cuántos son mayores de 500?

**Solución:**

- (a)  $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$   
(b) Son mayores que 500 los que empiezan por 5, por 8 o por 9. Hay 12 que empiezan por 5, 12 que empiezan por 8 y 12 que empiezan por 9. En total hay 36 números que son mayores que 500.
- 

**Ejercicio 5.**

- (a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 estudiantes en una fila?  
(b) ¿De cuántas si tres de ellos A, B y C deben sentarse juntos?

**Solución:**

- (a)  $10! = 3628800$   
(b) Hay 8 posiciones en que pueden estar juntos los tres estudiantes. En cada una de estas posiciones se pueden sentar de  $3! = 6$  maneras. Los otros 7 estudiantes se pueden sentar de  $7!$  maneras. En total, aplicando la regla del producto, tenemos que:

$$8 \cdot 6 \cdot 7! = 241920$$

---

**Ejercicio 6.** Con las 27 letras del alfabeto:

- (a) ¿Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?  
(b) ¿Cuántas empiezan y terminan con vocal?

**Solución:**

- (a)  $V_{27,4} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421200$   
(b) Las dos letras de comienzo y fin de la palabra se pueden seleccionar de  $V_{5,2}$  maneras (dos de cinco vocales). Las dos letras restantes se pueden elegir de  $V_{25,2}$  maneras. En total, aplicando la regla del producto:

$$V_{5,2} \cdot V_{25,2} = 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 24 = 12000$$

**Ejercicio 7.** Con las letras de la palabra *MARTES*, cuántas palabras de 4 letras pueden formarse si:

- (a) Debe contener al menos una vocal.  
 (b) Debe contener las dos vocales en posiciones separadas.

**Solución:**

- (a) En total se pueden formar  $V_{6,4}$  palabras. Las que no contienen vocales son  $V_{4,4}$  de ellas. Las palabras que contienen alguna vocal son:

$$V_{6,4} - V_{4,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4! = 360 - 24 = 336$$

- (b) Hay tres posiciones para las vocales separadas (primera y tercera, primera y cuarta y segunda y cuarta). Para cada una de ellas, las dos vocales pueden estar de dos maneras diferentes. Para las dos posiciones restantes, las consonantes pueden situarse de  $V_{4,2} = 12$  maneras. En total

$$3 \cdot 2 \cdot 12 = 72$$


---

**Ejercicio 8.** En un juego se reparten simultáneamente 5 cartas (de una baraja de 40) a un jugador:

- (a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?  
 (b) ¿De cuántas si sabemos que 2 son de oros y 3 de copas?

**Solución:**

- (a)  $C_{40,5} = 658008$

- (b) Las dos de oros pueden elegirse de  $C_{10,2} = 45$  maneras y las tres de copas de  $C_{10,3} = 120$  maneras. En total:

$$45 \cdot 120 = 5400$$


---

**Ejercicio 9.** Calcular el coeficiente de  $x^3$  en el desarrollo

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{12}$$

**Solución:**

Un término genérico del desarrollo tiene la forma:

$$\binom{12}{n} (x^2)^n \left(-\frac{1}{2x}\right)^{12-n}$$

Si el exponente de  $x$  es 3:

$$2n - (12 - n) = 3 \implies n = 5$$

El término correspondiente a  $n = 5$  es

$$\binom{12}{5} (x^2)^5 \left(-\frac{1}{2x}\right)^7 = -\binom{12}{5} x^{10} \frac{1}{2^7 x^7} = -\binom{12}{5} \frac{1}{2^7} x^3$$

El coeficiente que nos piden es:

$$-\binom{12}{5} \frac{1}{2^7} = -\frac{792}{128} = -\frac{99}{16}$$

**Ejercicio 10.** Calcular el coeficiente de  $x^5$  en

$$(2x + 3)(x - 2)^6$$

**Solución:**

El término que buscamos es:

$$2x \cdot \binom{6}{4} x^4 (-2)^2 + 3 \cdot \binom{6}{5} x^5 (-2)^1 = 2 \cdot 15 \cdot 4 x^5 - 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot x^5 = 84x^5$$

El coeficiente es 84.

---

## 2. Logaritmos y combinatoria (grupo Z)

**Ejercicio 1.** Calcular:

$$(a) 4\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{6} - \sqrt{150}$$

$$(b) \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} (a) \quad 4\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{6} - \sqrt{150} &= 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} \\ &= 4\frac{\sqrt{6}}{3} + 3\frac{\sqrt{6}}{2} - 3\sqrt{6} \\ &= \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 3\right) \sqrt{6} \\ &= -\frac{1}{6} \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 - (2 - 2\sqrt{2} + 1) \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$


---

**Ejercicio 2.** Resolver la ecuación:

$$2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$$

**Solución:**

La ecuación puede escribirse:

$$\frac{2^x}{2} + \frac{8}{2^x} = 5$$

Quitando denominadores resulta:

$$2^{2x} + 16 = 10 \cdot 2^x \implies 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado en la incógnita  $2^x$ . Las soluciones son:

$$2^x = 2 \implies x = 1$$

$$2^x = 8 \implies x = 3$$

**Ejercicio 3.** Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

**Solución:**

La segunda ecuación es equivalente a:

$$\log(xy) = \log 10 \implies xy = 10$$

El sistema puede escribirse:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 10 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución obtenemos las soluciones  $(5, 2)$  y  $(-2, -5)$ . La segunda no es válida pues no existen logaritmos de números negativos.

**Ejercicio 4.** En un juego se reparten simultáneamente 5 cartas (de una baraja de 40) a un jugador:

- (a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?  
 (b) ¿De cuántas si sabemos que exactamente 2 son de oros?

**Solución:**

(a)  $C_{40,5} = 658008$

- (b) Las dos cartas de oros pueden elegirse de  $C_{10,2}$  y las tres que no son de oros de  $C_{30,3}$  maneras.  
 Aplicando la regla del producto:

$$C_{10,2} \cdot C_{30,3} = 182700$$

**Ejercicio 5.** Con las cifras 3, 4, 5, 8 y 9:

- (a) ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes pueden formarse?  
 (b) ¿Cuántos son menores de 4000?

**Solución:**

- (a)  $V_{5,4} = 120$
- (b) Son menores que 4000 los que empiezan por 3, o sea  $V_{4,3} = 24$ .
- 

**Ejercicio 6.**

- (a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 estudiantes en una fila?
- (b) ¿De cuántas si dos de ellos A y B deben sentarse juntos?

**Solución:**

- (a)  $10! = 3628800$
- (b) Hay 9 posiciones en que pueden estar juntos los dos estudiantes. En cada una de estas posiciones se pueden sentar de 2 maneras. Los otros 8 estudiantes se pueden sentar de  $8!$  maneras. En total, aplicando la regla del producto, tenemos que:

$$9 \cdot 2 \cdot 8! = 725760$$


---

**Ejercicio 7.** Con las 27 letras del alfabeto:

- (a) ¿Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?
- (b) ¿Cuántas empiezan y terminan con consonante?

**Solución:**

- (a)  $V_{27,4} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421200$
- (b) Las dos letras de comienzo y fin de la palabra se pueden seleccionar de  $V_{22,2}$  maneras (2 de 22 consonantes). Las dos letras restantes se pueden elegir de  $V_{25,2}$  maneras. En total, aplicando la regla del producto:

$$V_{22,2} \cdot V_{25,2} = 22 \cdot 21 \cdot 25 \cdot 24 = 277200$$


---

**Ejercicio 8.** Con las letras de la palabra *TEMBLOR*, cuántas palabras de 4 letras pueden formarse si:

- (a) Debe contener al menos una vocal.
- (b) Debe contener las dos vocales en posiciones separadas.

**Solución:**

- (a) El número total de palabras es  $V_{7,4}$ . De ellas hay  $V_{5,4}$  que no contienen vocales. Las que contienen alguna vocal son:

$$V_{7,4} - V_{5,4} = 840 - 120 = 720$$

- (b) Hay tres posiciones para las vocales separadas (primera y tercera, primera y cuarta y segunda y cuarta). Para cada una de ellas, las dos vocales pueden estar de dos maneras diferentes. Para las dos posiciones restantes, las consonantes pueden situarse de  $V_{5,2} = 20$  maneras. En total

$$3 \cdot 2 \cdot 20 = 120$$

**Ejercicio 9.** Calcular el coeficiente de  $x^4$  en el desarrollo

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{11}$$

**Solución:**

Un término genérico del desarrollo tiene la forma:

$$\binom{11}{n} (x^2)^n \left(-\frac{1}{2x}\right)^{11-n}$$

Si el exponente de  $x$  es 4:

$$2n - (11 - n) = 4 \implies n = 5$$

El término correspondiente a  $n = 5$  es

$$\binom{11}{5} (x^2)^5 \left(-\frac{1}{2x}\right)^6 = \binom{11}{5} x^{10} \frac{1}{2^6 x^6} = \binom{11}{5} \frac{1}{2^6} x^4$$

El coeficiente que nos piden es:

$$\binom{11}{5} \frac{1}{2^6} = \frac{462}{64} = \frac{231}{32}$$


---

**Ejercicio 10.** Calcular el coeficiente de  $x^4$  en

$$(2x + 3)(x - 2)^6$$

**Solución:**

El término que buscamos es:

$$2x \cdot \binom{6}{3} x^3 (-2)^3 + 3 \cdot \binom{6}{4} x^4 (-2)^2 = 2 \cdot 20 \cdot (-8) x^4 + 3 \cdot 15 \cdot 4 x^4 = -140x^4$$

El coeficiente es  $-140$ .

---

### 3. Combinatoria. Inducción. Ecuaciones. (Grupo Z).

**Ejercicio 1.** Demostrar que  $4^n + 2$  es múltiplo de 3 para  $n \geq 0$ .

**Solución:**

◇ La propiedad se cumple para  $n = 0$  puesto que  $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$  es múltiplo de 3.

◇ Demostraremos que si se cumple para un valor  $h$ , es decir, si se cumple:

$$4^h + 2 = \dot{3}$$

entonces, también se cumple para  $h + 1$ , es decir demostraremos que

$$4^{h+1} + 2 = \dot{3}$$

En efecto:

$$4^{h+1} + 2 = 4 \cdot 4^h + 2 = 4 \cdot (\dot{3} - 2) + 2 = \dot{3} - 8 + 2 = \dot{3} - 6 = \dot{3}$$

◇ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para  $n \geq 0$ .

**Ejercicio 2.** Demostrar que si  $n$  es un entero positivo:

$$\sum_{r=1}^n 3r(r+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{2}$$

**Solución:**

Sea  $S_n = \sum_{r=1}^n 3r(r+4)$ .

◇ Demostremos que la propiedad se cumple para  $n = 1$ . El primer miembro es igual a:

$$3 \cdot 1(1+4) = 3 \cdot 5 = 15$$

Y el segundo miembro:

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 13)}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

◇ Ahora demostraremos que si se cumple para un valor cualquiera  $h$ , es decir, si

$$S_h = \frac{h(h+1)(2h+13)}{2}$$

también se cumple para el valor siguiente  $h + 1$ , es decir, demostraremos que:

$$S_{h+1} = \frac{(h+1)(h+1+1)(2h+2+13)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)(2h+15)}{2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 S_{h+1} &= S_h + 3(h+1)(h+1+4) \\
 &= S_h + 3(h+1)(h+5) \\
 &= \frac{h(h+1)(2h+13)}{2} + 3(h+1)(h+5) \\
 &= \frac{h(h+1)(2h+13) + 6(h+1)(h+5)}{2} && \text{sacando factor común } (h+1) \\
 &= \frac{(h+1)[h(2h+13) + 6(h+5)]}{2} \\
 &= \frac{(h+1)(2h^2 + 19h + 30)}{2} && \text{factorizando} \\
 &= \frac{(h+1)(h+2)(2h+15)}{2}
 \end{aligned}$$

◊ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para  $n \geq 1$ .

---

**Ejercicio 3.** Calcular los posibles valores de  $a$  si el coeficiente de  $x^3$  en el desarrollo

$$\left(2x + \frac{1}{ax^2}\right)^9$$

es 288.

**Solución:**

Un término cualquiera del desarrollo de la potencia es:

$$\binom{9}{n} (2x)^n \left(\frac{1}{ax^2}\right)^{9-n}$$

Si el exponente de  $x$  debe ser 3:

$$n - 2(9 - n) = 3 \implies n = 7$$

El coeficiente de  $x^3$  es entonces:

$$\binom{9}{7} 2^7 \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \binom{9}{7} 2^7 \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2^7}{a^2} = \frac{9 \cdot 2^9}{a^2}$$

Si este coeficiente es igual a 288:

$$\frac{9 \cdot 2^9}{a^2} = 288 \implies a^2 = \frac{9 \cdot 2^9}{288} = 16$$

Por tanto hay dos soluciones  $a = -4$  y  $a = 4$ .

---

**Ejercicio 4.** Un examen consta de 9 preguntas de las que se deben contestar 5. ¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas? ¿De cuántas si la primera pregunta es obligatoria?

**Solución:**

Si se deben escoger 5 preguntas de 9:

$$C_{9,5} = 126$$

Si la primera pregunta es obligatoria, se deben escoger 4 preguntas de las ocho restantes:

$$C_{8,4} = 70$$


---

**Ejercicio 5.** Resolver la siguiente ecuación :

$$6x^3 - 13x^2 + 4 = 0$$

**Solución:**

Primero factorizamos el polinomio. Buscamos una raíz entera entre los divisores de 4. Para  $x = 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -13 & 0 & 4 \\ 2 & & 12 & -2 & -4 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Obtenemos la factorización:

$$(x - 2)(6x^2 - x - 2) = 0$$

Calculamos las raíces del polinomio de segundo grado que resultan ser  $x = \frac{2}{3}$  y  $x = -\frac{1}{2}$ .

Las soluciones de la ecuación son  $x = 2$ ,  $x = \frac{2}{3}$  y  $x = -\frac{1}{2}$ .

---

**Ejercicio 6.** Las raíces de la ecuación cuadrática  $2x^2 + 4x - 1 = 0$  son  $\alpha$  y  $\beta$ . Sin resolver la ecuación calcular  $\alpha^2 + \beta^2$ .

**Solución:**

Por las relaciones de Cardano tenemos que  $\alpha + \beta = -2$  y  $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$ . Entonces:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \implies \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

Sustituyendo:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (-2)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 1 = 5$$


---

**Ejercicio 7.** Se debe elegir un comité de 5 personas entre 10 hombres y 6 mujeres. ¿De cuántas maneras puede elegirse si debe estar formado por 3 hombres y 2 mujeres? ¿De cuántas si debe haber al menos un hombre y una mujer?

**Solución:**

En el primer caso, si se eligen tres hombres y dos mujeres, las posibilidades son:

$$C_{10,3}C_{6,2} = 1800$$

El número de posibles comités es:

$$C_{16,5} = 4368$$

Si restamos a este número los que están formados exclusivamente por hombres o mujeres obtenemos

$$C_{16,5} - C_{10,5} - C_{6,5} = 4110$$

Este es el número de comités que están compuestos por al menos un hombre y una mujer.

---

**Ejercicio 8.** Resolver la ecuación  $8^{x-1} = 6^{3x}$ . Expresar la respuesta en función de  $\ln 2$  y  $\ln 3$ .

**Solución:**

Aplicando logaritmos neperianos:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x}$$

$$(x-1) \ln 8 = 3x \ln 6$$

$$(x-1) \ln 2^3 = 3x \ln(2 \cdot 3)$$

$$3(x-1) \ln 2 = 3x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$(x-1) \ln 2 = x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$-\ln 2 = x \ln 3$$

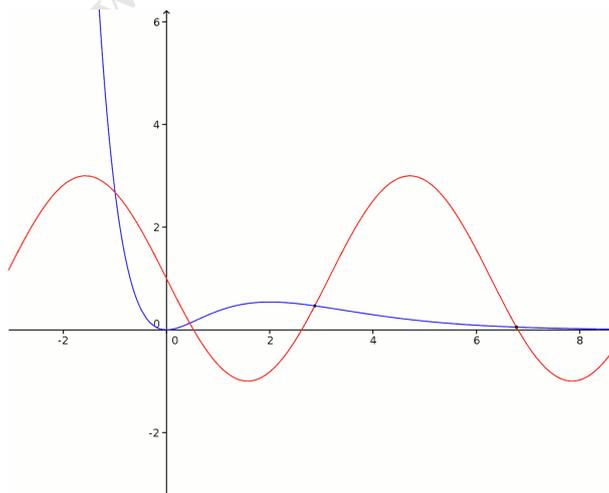
$$x = \frac{-\ln 2}{\ln 3}$$


---

**Ejercicio 9.** Calcular las soluciones de la ecuación  $x^2 e^{-x} = 1 - 2 \sin x$ , comprendidas entre 2 y 7.

**Solución:**

Representamos con la calculadora las funciones  $f(x) = x^2 e^{-x}$  y  $g(x) = 1 - 2 \sin x$ :



Las soluciones de la ecuación son las abscisas de los puntos de corte. Con tres cifras significativas estas soluciones son:

$$x_1 = 2,87, \quad x_2 = 6,78$$

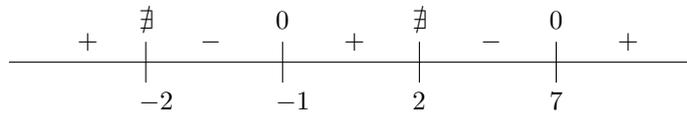
**Ejercicio 10.** Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 4} < 0$$

**Solución:**

Las raíces del numerador son  $-1$  y  $7$ . Las del denominador son  $-2$  y  $2$ .

El signo de la fracción según los valores de  $x$  aparece reflejado en la siguiente figura:



La solución de la inecuación es  $x \in (-2, -1) \cup (2, 7)$

---

## 4. Combinatoria. Inducción. Ecuaciones. (Grupo W).

**Ejercicio 1.** *Demostrar que  $6^n - 1$  es múltiplo de 5 para  $n \geq 0$ .*

**Solución:**

◇ La propiedad se cumple para  $n = 0$  puesto que  $6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$  es múltiplo de 5.

◇ Demostraremos que si se cumple para un valor  $h$ , es decir, si se cumple:

$$6^h - 1 = \dot{5}$$

entonces, también se cumple para  $h + 1$ , es decir demostraremos que

$$6^{h+1} - 1 = \dot{5}$$

En efecto:

$$6^{h+1} - 1 = 6 \cdot 6^h - 1 = 6 \cdot (\dot{5} + 1) - 1 = \dot{5} + 6 - 1 = \dot{5} + 5 = \dot{5}$$

◇ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para  $n \geq 0$ .

---

**Ejercicio 2.** *Demostrar por inducción que si  $n$  es un número entero positivo:*

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{(3r-1)(3r+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

**Solución:**

Sea  $S_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{(3r-1)(3r+2)}$ .

◇ Demostremos que la propiedad se cumple para  $n = 1$ . El primer miembro es igual a:

$$\frac{1}{(3-1)(3+2)} = \frac{1}{10}$$

Y el segundo miembro:

$$\frac{1}{6+4} = \frac{1}{10}$$

◇ Ahora demostraremos que si se cumple para un valor cualquiera  $h$ , es decir, si

$$S_h = \frac{h}{6h+4}$$

también se cumple para el valor siguiente  $h + 1$ , es decir, demostraremos que:

$$S_{h+1} = \frac{h+1}{6(h+1)+4} = \frac{h+1}{6h+10}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 S_{h+1} &= S_h + \frac{1}{[3(h+1)-1][3(h+1)+2]} \\
 &= S_h + \frac{1}{(3h+2)(3h+5)} \\
 &= \frac{h}{6h+4} + \frac{1}{(3h+2)(3h+5)} \\
 &= \frac{h(3h+5)+2}{(6h+4)(3h+5)} \\
 &= \frac{3h^2+5h+2}{(6h+4)(3h+5)} && \text{factorizando} \\
 &= \frac{(h+1)(3h+2)}{2(3h+2)(3h+5)} && \text{simplificando} \\
 &= \frac{h+1}{2(3h+5)} \\
 &= \frac{h+1}{6h+10}
 \end{aligned}$$

◇ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para  $n \geq 1$ .

---

**Ejercicio 3.** Factorizar el polinomio

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18$$

**Solución:**

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 18. Para  $x = 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -2 & -3 & -18 \\
 2 & & 2 & 8 & 12 & 18 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 6 & 9 & 0
 \end{array}$$

Con lo que tenemos una primera factorización:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x^3 + 4x^2 + 6x + 9)$$

Buscamos una raíz entera del polinomio de tercer grado entre los divisores de 9. Para  $x = -3$ :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 6 & 9 \\
 -3 & & -3 & -3 & -9 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 3 & 0
 \end{array}$$

con lo que:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x+3)(x^2 + x + 3)$$

El polinomio de segundo grado tiene discriminante menor que cero. Entonces, es irreducible y la factorización está terminada.

---

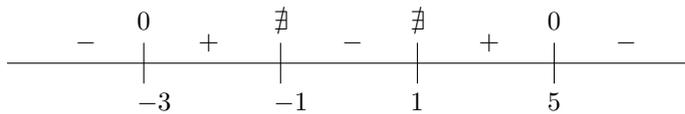
**Ejercicio 4.** Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{1 - x^2} > 0$$

**Solución:**

Las raíces del numerador son  $-3$  y  $5$ . Las del denominador son  $-1$  y  $1$ .

El signo de la fracción según los valores de  $x$  aparece reflejado en la siguiente figura:



La solución de la inecuación es  $x \in (-3, -1) \cup (1, 5)$

---

**Ejercicio 5.** Las raíces de la ecuación cuadrática  $2x^2 + 6x - 3 = 0$  son  $\alpha$  y  $\beta$ . Sin resolver la ecuación calcular  $\alpha^2 + \beta^2$ .

**Solución:**

Por las relaciones de Cardano tenemos que  $\alpha + \beta = -3$  y  $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$ . Entonces:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \implies \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

Sustituyendo:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (-3)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 9 + 3 = 12$$


---

**Ejercicio 6.** Calcular el término independiente del desarrollo:

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$$

**Solución:**

Un término cualquiera del desarrollo tiene la forma:

$$\binom{6}{n} (2x^2)^n \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-n}$$

El término independiente cumple que:

$$2n - (6 - n) = 0 \implies n = 2$$

Por tanto, este término es:

$$\binom{6}{2} 2^2 (-1)^4 = 60$$


---

**Ejercicio 7.** Con las letras de la palabra FUERZA, ¿cuántas palabras de 6 letras pueden formarse?, ¿cuántas tienen las vocales separadas?

**Solución:**

Pueden formarse  $6! = 720$  palabras.

Si queremos que las vocales y las consonantes queden separadas, hay cuatro posibilidades de colocar las vocales separadas VCVVCV, CVCVCV, VCVCCV O VCCVCV. Para cada una de estas dos posibilidades hay  $3!$  maneras de ordenar las vocales y otras tantas para las consonantes. En total:

$$4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$$


---

**Ejercicio 8.** Un examen consta de 9 preguntas de las que se deben contestar 5. ¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas? ¿De cuántas si las dos primeras son obligatorias?

**Solución:**

Si se deben escoger 5 preguntas de 9:

$$C_{9,5} = 126$$

Si las dos primeras preguntas son obligatorias, se deben escoger 3 preguntas de las 7 restantes:

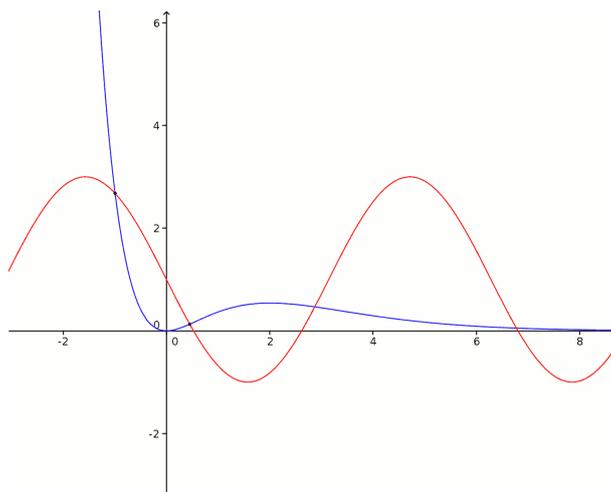
$$C_{7,3} = 35$$


---

**Ejercicio 9.** Calcular las soluciones de la ecuación  $x^2 e^{-x} = 1 - 2 \operatorname{sen} x$ , comprendidas entre  $-2$  y  $2$ .

**Solución:**

Representamos con la calculadora las funciones  $f(x) = x^2 e^{-x}$  y  $g(x) = 1 - 2 \operatorname{sen} x$ :



Las soluciones de la ecuación son las abscisas de los puntos de corte. Con tres cifras significativas estas soluciones son:

$$x_1 = -0,995, \quad x_2 = 0,450$$

**Ejercicio 10.** Resolver la ecuación  $8^{x-1} = 6^{3x}$ . Expresar la respuesta en función de  $\ln 2$  y  $\ln 3$ .

**Solución:** Aplicando logaritmos neperianos:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x}$$

$$(x-1) \ln 8 = 3x \ln 6$$

$$(x-1) \ln 2^3 = 3x \ln(2 \cdot 3)$$

$$3(x-1) \ln 2 = 3x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$(x-1) \ln 2 = x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$- \ln 2 = x \ln 3$$

$$x = \frac{-\ln 2}{\ln 3}$$

---

## 5. Trigonometría (grupo W)

**Ejercicio 1.** *Seno del ángulo inscrito. Teorema del seno: enunciado y demostración.*

**Solución:**

**Teorema 1** (Teorema del seno). *En un triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

*La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

*Demostración.* Puede demostrarse el teorema del seno a partir de la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia:

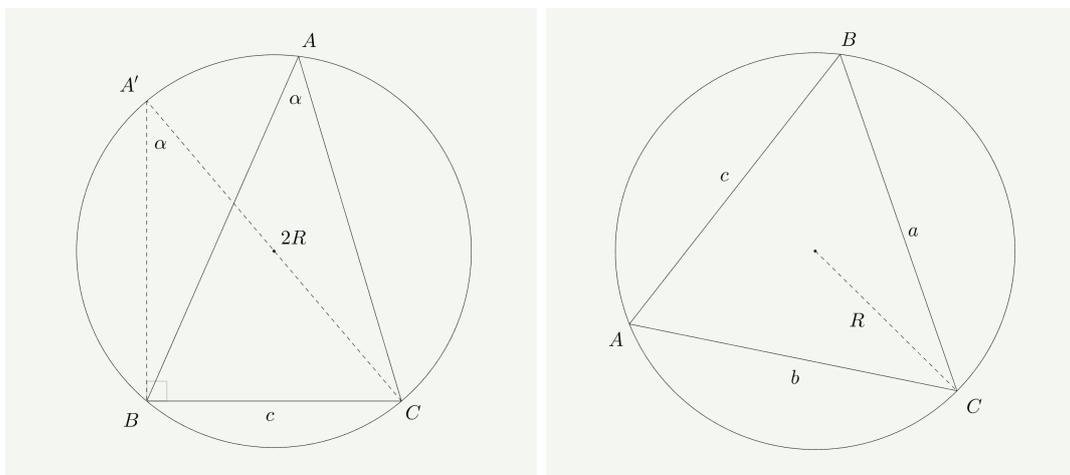


Figura 1: Ángulos inscritos y teorema del seno

Sea el ángulo  $\alpha$  inscrito en una circunferencia que abarca un arco con una cuerda  $c$  (ver figura 2). Construimos otro ángulo sobre el mismo arco en el que uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia. Este ángulo también valdrá  $\alpha$  puesto que está inscrito en el mismo arco que el anterior. Pero, dado que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, el triángulo  $A'BC$  es rectángulo y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{2R}$$

es decir, el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual al cociente de la cuerda y el diámetro.

A partir del resultado anterior deducimos (figura 2 derecha):

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} A = \frac{a}{2R} \\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{2R} \\ \operatorname{sen} C = \frac{c}{2R} \end{array} \right\} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

es decir, los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la razón de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.  $\square$

**Ejercicio 2.** Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo que tiene un cateto  $b = 36$  cm y el ángulo opuesto mide  $B = 57^\circ$ .

**Solución:**

El otro cateto es:

$$c = b \cotg B = \frac{b}{\operatorname{tg} B} = \frac{36}{\operatorname{tg} 57^\circ}$$

y la hipotenusa:

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{36}{\operatorname{sen} 57^\circ}$$

Entonces, el perímetro es:

$$p = 36 + \frac{36}{\operatorname{tg} 57^\circ} + \frac{36}{\operatorname{sen} 57^\circ} \approx 102 \text{ cm}$$


---

**Ejercicio 3.** Calcular el área de un triángulo de lados  $a = 25$  cm,  $b = 34$  cm y  $c = 13$  cm.

**Solución:**

Calculamos un ángulo, por ejemplo  $A$ :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{34^2 + 13^2 - 25^2}{2 \cdot 34 \cdot 13}$$

Y el área es igual a:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \approx 135 \text{ cm}^2$$

También podría calcularse el área por la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde  $p$  es el semiperímetro:

$$p = \frac{25 + 34 + 13}{2} = 36 ; \quad S = \sqrt{36 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 23} \approx 135 \text{ cm}^2$$


---

**Ejercicio 4.** En un triángulo se conoce  $a = 45$  cm,  $A = 37^\circ$ ,  $B = 63^\circ$ . Calcular la altura correspondiente al vértice  $B$ .

**Solución:**

El ángulo  $C$  mide

$$C = 180^\circ - 37^\circ - 63^\circ = 80^\circ$$

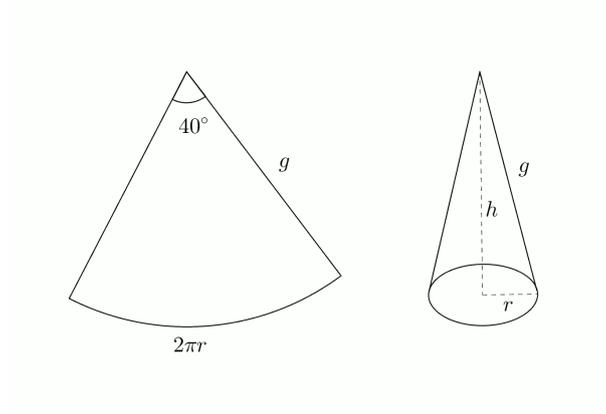
Entonces, es fácil ver que

$$h_B = a \operatorname{sen} C = 45 \operatorname{sen} 80^\circ \approx 44,3 \text{ cm}$$


---

**Ejercicio 5.** Para hacer un gorro cónico se recorta en una cartulina un sector de  $40^\circ$  y 90 cm de radio. Calcular la altura del gorro.

**Solución:**



La longitud del arco es el radio por el ángulo en radianes. Entonces:

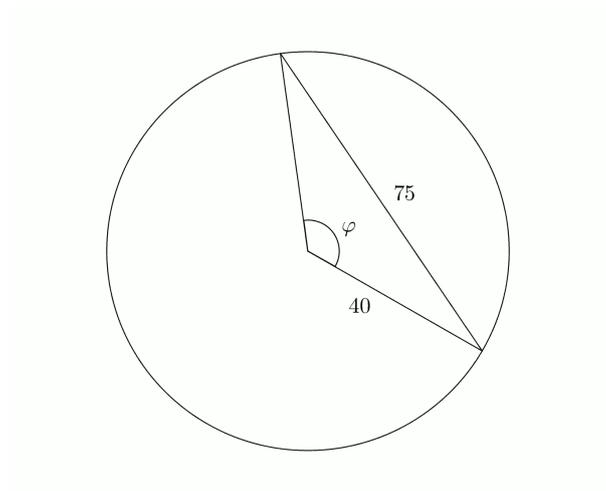
$$2\pi r = 90 \cdot \frac{40\pi}{180} \implies r = 10 \text{ cm}$$

Poe el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{90^2 - 10^2} = \sqrt{8000} \approx 89,4 \text{ cm}$$

**Ejercicio 6.** Calcular el área de un segmento circular encerrado por una cuerda de 75 cm y un arco de una circunferencia de 40 cm de radio.

**Solución:**



Calculamos  $\varphi$ :

$$\text{sen } \frac{\varphi}{2} = \frac{75}{2 \cdot 40} \implies \varphi = 2 \text{ arsen } \frac{75}{80}$$

El área del segmento es:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \text{sen } \varphi) = \frac{1}{2} 40^2 (\varphi - \text{sen } \varphi) \approx 1420 \text{ cm}^2$$

**Ejercicio 7.** Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = -2$  y que  $\alpha$  es un ángulo del cuarto cuadrante, calcular  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos} \alpha$ .

**Solución:**

Puesto que es del cuarto cuadrante, el coseno es positivo:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y el seno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$


---

**Ejercicio 8.** Calcular los ángulos  $x$  comprendidos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  que cumplen:

(a)  $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$

(b)  $\operatorname{tg} x = -3$

**Solución:**

(a) Puesto que el coseno es positivo el ángulo puede estar en el primero o en el cuarto cuadrante. La solución en el primero es  $60^\circ$ . Entonces

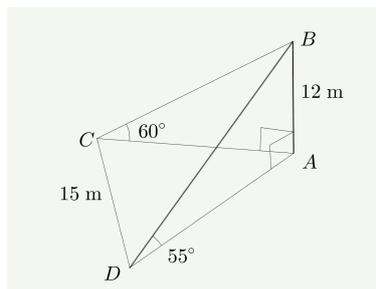
$$x = 60^\circ, \quad x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

(b) Como la tangente es negativa, las soluciones estarán en el segundo o en el cuarto cuadrante. Las soluciones son:

$$x = 180^\circ - \operatorname{artg} 3 = 108^\circ 26', \quad x = 360^\circ - \operatorname{artg} 3 = 288^\circ 26'$$


---

**Ejercicio 9.** La figura muestra un mástil  $AB$  de longitud igual a 12 m. Los puntos  $C$  y  $D$  están sobre el suelo de tal forma que el ángulo de elevación de  $C$  a  $B$  es de  $60^\circ$  y el ángulo de elevación de  $D$  a  $B$  es de  $55^\circ$ . Sabiendo que la distancia entre  $C$  y  $D$  es de 15 m, calcular el ángulo  $CAD$  y el área del triángulo  $CAD$ .



**Solución:**

Calculamos los lados  $AC$  y  $AD$ :

$$AC = \frac{12}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$

$$AD = \frac{12}{\operatorname{tg} 55^\circ}$$

Entonces, el ángulo  $A$  lo obtenemos por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{AC^2 + AD^2 - 15^2}{2 \cdot AC \cdot AD} \implies A = 156^\circ 3'$$

Y el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin A \approx 11,8 \text{ m}^2$$

## 6. Trigonometría (grupo Z)

**Ejercicio 1.** Seno del ángulo inscrito. Teorema del seno: enunciado y demostración.

**Solución:**

**Teorema 2** (Teorema del seno). *En un triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

*La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

*Demostración.* Puede demostrarse el teorema del seno a partir de la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia:

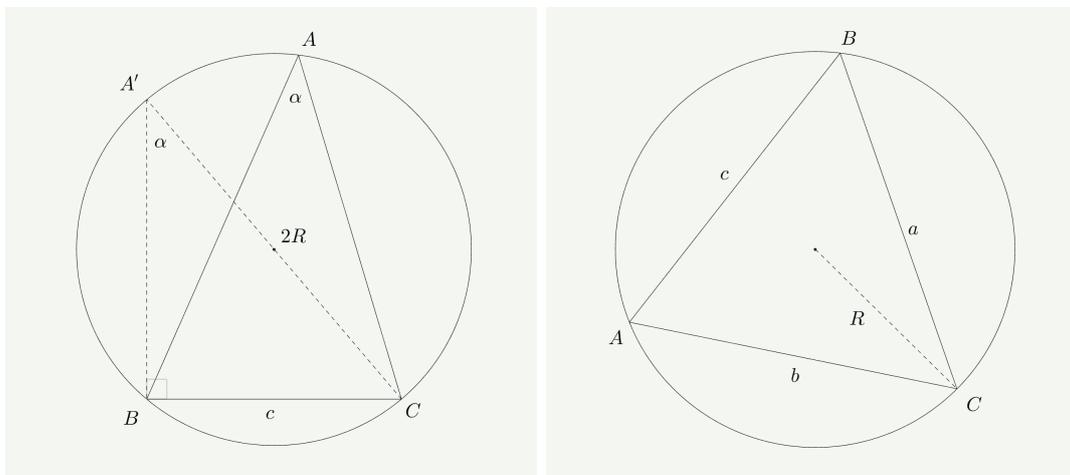


Figura 2: Ángulos inscritos y teorema del seno

Sea el ángulo  $\alpha$  inscrito en una circunferencia que abarca un arco con una cuerda  $c$  (ver figura 2). Construimos otro ángulo sobre el mismo arco en el que uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia. Este ángulo también valdrá  $\alpha$  puesto que está inscrito en el mismo arco que el anterior. Pero, dado que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, el triángulo  $A'BC$  es rectángulo y

$$\sin \alpha = \frac{c}{2R}$$

es decir, el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual al cociente de la cuerda y el diámetro.

A partir del resultado anterior deducimos (figura 2 derecha):

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } A = \frac{a}{2R} \\ \text{sen } B = \frac{b}{2R} \\ \text{sen } C = \frac{c}{2R} \end{array} \right\} \implies 2R = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

es decir, los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la razón de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.  $\square$

---

**Ejercicio 2.** Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo que tiene un cateto  $b = 46$  cm y el ángulo  $C = 57^\circ$ .

**Solución:**

Calculamos el otro cateto y la hipotenusa:

$$c = b \operatorname{tg} C = 46 \operatorname{tg} 57^\circ$$

$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{46}{\cos 57^\circ}$$

Y el perímetro:

$$p = 46 + 46 \operatorname{tg} 57^\circ + \frac{46}{\cos 57^\circ} \approx 201 \text{ cm}$$


---

**Ejercicio 3.** Calcular el área de un triángulo de lados  $a = 35$  cm,  $b = 27$  cm y  $c = 14$  cm.

**Solución:**

Calculamos un ángulo, por ejemplo  $A$ :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{27^2 + 14^2 - 35^2}{2 \cdot 27 \cdot 14}$$

Y el área es igual a:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \approx 173 \text{ cm}^2$$

También podría calcularse el área por la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

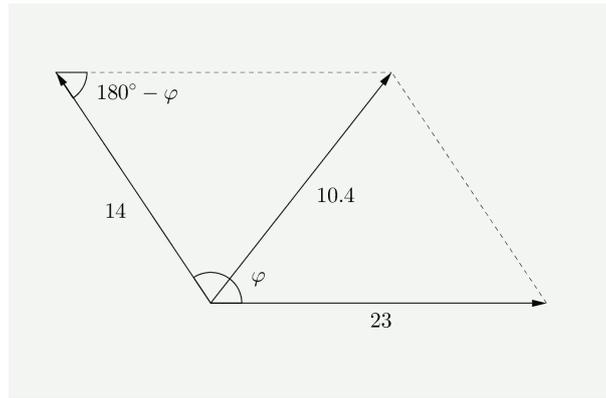
donde  $p$  es el semiperímetro:

$$p = \frac{35 + 27 + 14}{2} = 38 ; \quad S = \sqrt{38 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 24} \approx 173 \text{ cm}^2$$


---

**Ejercicio 4.** Dos fuerzas de 14 y 23 newtons dan una resultante de 10,4 newtons. ¿Qué ángulo forman entre sí las dos fuerzas?

**Solución:**



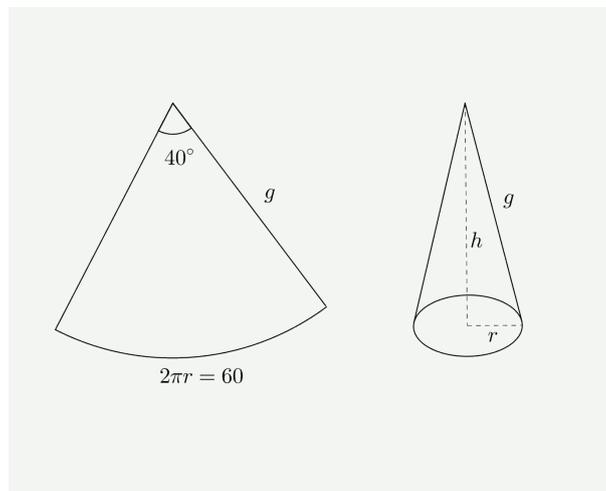
Por el teorema del coseno:

$$\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{14^2 + 23^2 - 10,4^2}{2 \cdot 14 \cdot 23} \implies 180^\circ - \varphi \approx 16^\circ 42'$$

y de aquí  $\varphi \approx 163^\circ 18'$ .

**Ejercicio 5.** Para hacer un gorro cónico se recorta en una cartulina un sector de  $40^\circ$  y 60 cm de arco. Calcular la altura del gorro.

**Solución:**



Puesto que la longitud de un arco es igual al radio por el ángulo en radianes:

$$60 = g \cdot \frac{40\pi}{180} \implies g = \frac{60 \cdot 180}{40\pi}$$

y el radio de cono:

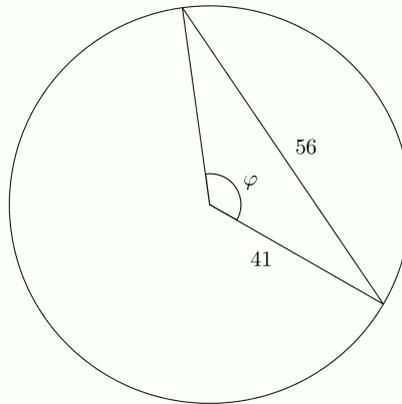
$$r = \frac{60}{2\pi}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la altura del cono:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} \approx 85,4 \text{ cm}$$

**Ejercicio 6.** Calcular el área de un segmento circular encerrado por una cuerda de 56 cm y un arco de una circunferencia de 41 cm de radio.

**Solución:**



Calculamos el ángulo  $\varphi$ :

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{28}{41} \implies \varphi = 2 \operatorname{arsen} \frac{28}{41}$$

El área del segmento está dada por la fórmula

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo en radianes. Sustituyendo se obtiene  $S = 425 \text{ cm}^2$ .

**Ejercicio 7.** Sabiendo que  $\cos \alpha = -0,8$  y que  $\alpha$  es un ángulo del tercer cuadrante, calcular  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

**Solución:**

En el tercer cuadrante el seno es negativo y la tangente positiva:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,64} = -\sqrt{0,36} = -0,6$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,6}{-0,8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

**Ejercicio 8.** Calcular los ángulos  $x$  comprendidos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  que cumplen:

(a)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b)  $\operatorname{tg} x = 2$

**Solución:**

(a) El coseno es negativo luego el ángulo está en el segundo o en el tercer cuadrante. El ángulo del primer cuadrante que tiene el coseno igual a  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  es  $30^\circ$ . Entonces, las soluciones son:

$$x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

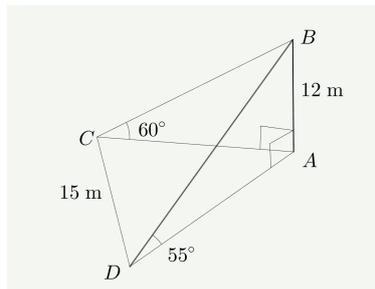
$$x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

(b) Si la tangente es positiva el ángulo está en el primer o en el tercer cuadrante. El ángulo del primer cuadrante que tiene tangente igual a 2 es aproximadamente  $63^{\circ}26'$ . Las soluciones son:

$$x = 63^{\circ}26'$$

$$x = 180^{\circ} + 63^{\circ}26' = 243^{\circ}26'$$

**Ejercicio 9.** La figura muestra un mástil  $AB$  de longitud igual a 12 m. Los puntos  $C$  y  $D$  están sobre el suelo de tal forma que el ángulo de elevación de  $C$  a  $B$  es de  $60^{\circ}$  y el ángulo de elevación de  $D$  a  $B$  es de  $55^{\circ}$ . Sabiendo que la distancia entre  $C$  y  $D$  es de 15 m, calcular el ángulo  $CAD$  y el área del triángulo  $CAD$ .



**Solución:**

Calculamos los lados  $AC$  y  $AD$ :

$$AC = \frac{12}{\operatorname{tg} 60^{\circ}}$$

$$AD = \frac{12}{\operatorname{tg} 55^{\circ}}$$

Entonces, el ángulo  $A$  lo obtenemos por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{AC^2 + AD^2 - 15^2}{2 \cdot AC \cdot AD} \implies A = 156^{\circ}3'$$

Y el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AD \operatorname{sen} A \approx 11,8 \text{ m}^2$$

## 7. Más trigonometría (grupo W)

**Ejercicio 1.** En un triángulo dos de sus lados miden  $a = 56$  m,  $b = 45$  m y el ángulo comprendido  $C = 110^{\circ}$ . Calcular el ángulo  $A$ .

**Solución:**

Calculamos el lado  $c$  por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 56^2 + 45^2 - 2 \cdot 56 \cdot 45 \cdot \cos 110^{\circ} \implies c \simeq 83,0 \text{ m}$$

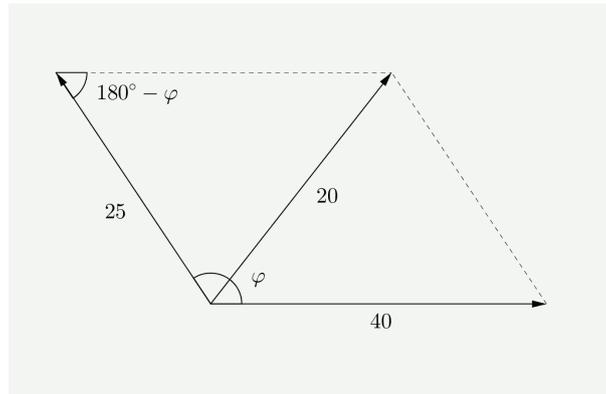
Ahora calculamos el ángulo  $A$ :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \implies A = 39^\circ 22'$$


---

**Ejercicio 2.** Dos fuerzas de 25 y 40 newtons producen una resultante de 20 newtons. Calcular el ángulo que forman.

**Solución:**



Por el teorema del coseno:

$$\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{40^2 + 25^2 - 20^2}{2 \cdot 40 \cdot 25} \implies 180 - \varphi \simeq 24^\circ 9' \implies \varphi = 155^\circ 51'$$


---

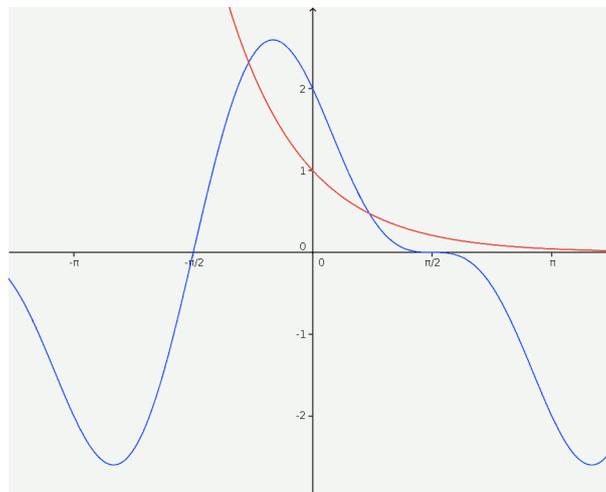
**Ejercicio 3.** Resolver la ecuación:

$$2 \cos x - \operatorname{sen} 2x = e^{-x}$$

en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

**Solución:**

Con la calculadora gráfica representamos las funciones  $f(x) = 2 \cos x - \operatorname{sen} 2x$  y  $g(x) = e^{-x}$ . Obtenemos



Hay dos puntos de corte  $x_1 \simeq -0,843$  y  $x_2 \simeq 0,744$ .

---

**Ejercicio 4.** Resolver en el intervalo  $[0, 2\pi]$  la ecuación:

$$\cos 2x + 5 \operatorname{sen} x = 0$$

**Solución:**

Sustituyendo el coseno del ángulo doble:

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x = 0$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x = 0$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado en  $\operatorname{sen} x$  obtenemos:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4} \text{ (no válida); } \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4}$$

Para este valor del seno tenemos una solución en el tercer cuadrante  $x_1 = 190^\circ 44'$  y una en el cuarto  $x_2 = 349^\circ 16'$ .

---

**Ejercicio 5.** Demostrar que:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\cos \alpha(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha)} \\ &= \frac{\cos \alpha(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$


---

**Ejercicio 6.** Demostrar la identidad

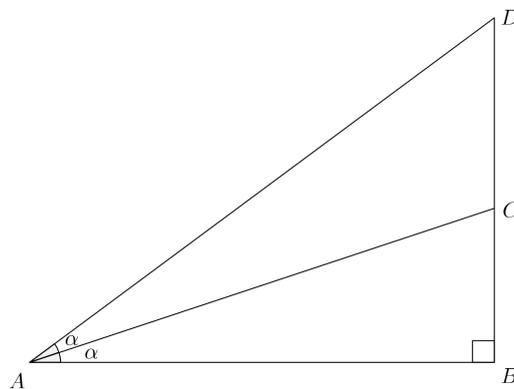
$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha &= \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \\
 &= \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \\
 &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{cosec} 2\alpha
 \end{aligned}$$


---

**Ejercicio 7.** En la figura adjunta  $AB = 3$  m y  $BD = 4$  m. Calcular la longitud de  $BC$ .

**Solución:**

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$$

De aquí:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{3} \implies 6 \operatorname{tg} \alpha = 4 - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha \implies 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en  $\operatorname{tg} \alpha$  y teniendo en cuenta que la solución negativa no es válida porque  $\alpha$  es un ángulo agudo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

Y por tanto:

$$BC = 3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ m}$$


---

**Ejercicio 8.** Un péndulo oscila con un período de 20 segundos. La altura del péndulo está dada por una función del tipo

$$h(t) = h_0 + A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Sabiendo que la altura máxima es de 20 m la tomó cuando  $t = 6$  segundos y la altura mínima es 6 m, calcular  $h_0$ ,  $A$ ,  $\omega$  y  $\varphi$ .

**Solución:**

El valor medio  $h_0$  es el promedio de los valores máximo y mínimo:

$$h_0 = \frac{20 + 6}{2} = 13 \text{ m}$$

La amplitud es la mitad de la diferencia entre el valor máximo y mínimo:

$$A = \frac{20 - 6}{2} = 7 \text{ m}$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ s}^{-1}$$

Para calcular  $\varphi$  tenemos en cuenta que el valor máximo de la función se da cuando  $t = 6$ . En ese momento el ángulo tiene que valer  $\frac{\pi}{2}$  o sea que:

$$\frac{6\pi}{10} + \varphi = \frac{\pi}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5} = -\frac{\pi}{10}$$

La función que da la altura es:

$$h(t) = 7 \text{ sen } \frac{\pi t - 1}{10}$$

---

## 8. Más trigonometría (grupo Z)

**Ejercicio 1.** En un triángulo dos de sus lados miden  $a = 56$  m,  $b = 45$  m y el ángulo  $A = 110^\circ$ . Calcular el área del triángulo.

**Solución:**

Calculamos  $\text{sen } B$  mediante el teorema del seno:

$$\frac{56}{\text{sen } 110^\circ} = \frac{45}{\text{sen } B} \implies \text{sen } B = \frac{45 \text{ sen } 110^\circ}{56}$$

De aquí obtenemos que  $B = 49^\circ 2'$  y  $130^\circ 58'$ . Esta última solución no es válida puesto que el ángulo  $A$  es obtuso y un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.

Calculado  $B$  obtenemos  $C = 180^\circ - A - B = 20^\circ 58'$ , y el área:

$$S = \frac{1}{2} ab \text{sen } C = \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 45 \text{ sen } C \simeq 451 \text{ m}^2$$

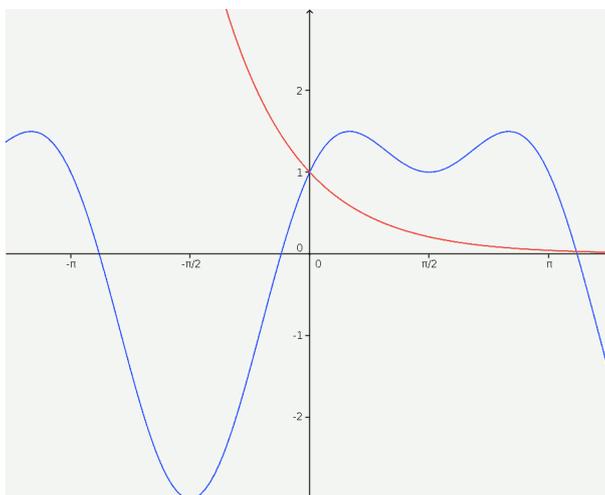
**Ejercicio 2.** Resolver la ecuación:

$$2 \text{sen } x + \cos 2x = e^{-x}$$

en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

**Solución:**

Representamos con la calculadora gráfica las funciones  $f(x) = 2 \text{sen } x + \cos 2x$  y  $g(x) = e^{-x}$ . Obtenemos:



Vemos que en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  se cortan solamente en  $x = 0$ .

**Ejercicio 3.** Sin usar la calculadora gráfica resolver en el intervalo  $[0, 2\pi]$  la ecuación:

$$2 \text{tg}^2 x + 3 \text{sec}^2 x = 7$$

**Solución:**

Escribimos la secante en función de la tangente y resulta:

$$2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \sec^2 x = 7$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x + 3(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 7$$

$$5 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 7$$

$$5 \operatorname{tg}^2 x = 4$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Y a partir de la tangente obtenemos las soluciones  $x_1 = 41^\circ 49'$ ,  $x_2 = 221^\circ 49'$ ,  $x_3 = 138^\circ 11'$  y  $x_4 = 318^\circ 11'$ .

---

**Ejercicio 4.** *Demostrar que:*

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \operatorname{cosec} \alpha$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha + (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha(1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha(1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{2 + 2 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha(1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha(1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \\ &= 2 \operatorname{cosec} \alpha \end{aligned}$$


---

**Ejercicio 5.** *Demostrar*

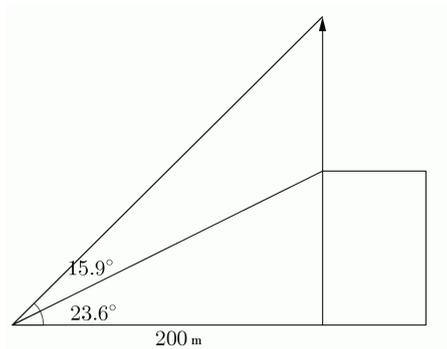
$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

**Solución:**

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$


---

**Ejercicio 6.** *Sobre un edificio se ha construido una torre de telecomunicaciones como se muestra en la figura. Calcular la altura de la torre.*

**Solución:**

La altura del edificio con la torre es:

$$200 \operatorname{tg}(15,9^\circ + 23,6^\circ) = 200 \operatorname{tg} 39,5^\circ$$

La altura del edificio es:

$$200 \operatorname{tg} 23,6^\circ$$

de modo que la altura de la torre es:

$$200 \operatorname{tg} 39,5^\circ - 200 \operatorname{tg} 23,6^\circ \simeq 77,5 \text{ m}$$

**Ejercicio 7.** Calcular el valor exacto de  $\operatorname{tg} \alpha$  si  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{21}{20}$  y  $\alpha$  es obtuso.

**Solución:**

Sabemos que:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Entonces:

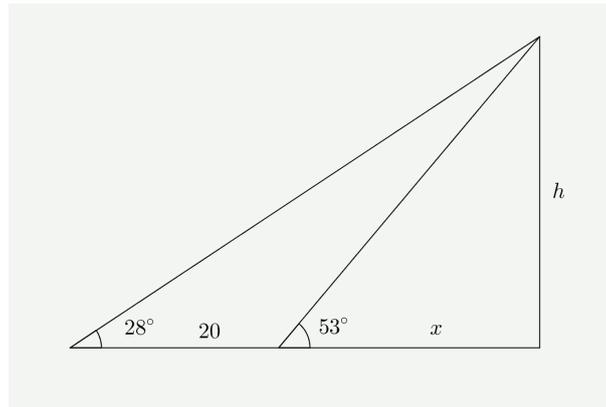
$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{21}{20} \implies 40 \operatorname{tg} \alpha = 21 - 21 \operatorname{tg}^2 \alpha \implies 21 \operatorname{tg}^2 \alpha + 40 \operatorname{tg} \alpha - 21 = 0$$

Resolvemos esta ecuación y obtenemos  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{7}$  y  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{3}$ . Puesto que el ángulo es obtuso, la solución válida es

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{3}$$

**Ejercicio 8.** Desde un cierto punto se ve el extremo de un mástil con un ángulo de  $53^\circ$  con la horizontal y, si nos alejamos 20 m, el ángulo pasa a ser de  $28^\circ$ . ¿Cuál es la altura del mástil?

**Solución:**



De la figura se deduce que:

$$\begin{cases} h = x \operatorname{tg} 53^\circ \\ h = (20 + x) \operatorname{tg} 28^\circ \end{cases}$$

Despejando  $x$  en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene:

$$h = \frac{20 \operatorname{tg} 53^\circ \operatorname{tg} 28^\circ}{\operatorname{tg} 53^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ} \simeq 17,7 \text{ m}$$

---

## 9. Números complejos

**Ejercicio 1.** *Calcular*

$$\frac{2(1-3i)+6i}{-3+2i}$$

**Solución:**

$$\frac{2(1-3i)+6i}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2 \cdot (-3-2i)}{9+4} = -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$$


---

**Ejercicio 1.** *Calcular el número real  $k$  de forma que*

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea:

- (a) *Un número real.*  
 (b) *Un número imaginario puro.*

**Solución:**

Calculamos el cociente:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki} = \frac{9-4-12i}{1+ki} = \frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2} = \frac{5-12k+i(-5k-12)}{1+k^2} = \frac{5-12k}{1+k^2} + \frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

- (a) Si es un número real, la parte imaginaria debe ser cero:

$$\frac{-5k-12}{1+k^2} = 0 \implies k = -\frac{12}{5}$$

- (b) Si es un número imaginario puro, la parte real debe ser cero:

$$\frac{5-12k}{1+k^2} = 0 \implies k = \frac{5}{12}$$


---

**Ejercicio 3.** *Calcular las raíces cuadradas del número complejo  $-45 - 28i$ .*

**Solución:**

Llamando  $x+yi$  a la raíz debe cumplirse que  $(x+yi)^2 = -45 - 28i$ . Igualando partes reales e imaginarias resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -45 \\ 2xy = 28 \end{cases}$$

Despejando  $y$  en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y = \frac{-14}{x}; \quad x^2 - \frac{196}{x^2} = -45; \quad x^4 + 45x^2 - 196 = 0$$

Despejando  $x^2$ :

$$x^2 = \frac{-45 \pm \sqrt{45^2 + 4 \cdot 196}}{2} = \frac{-45 + 53}{2} = 4 \implies \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Para  $x = -2$ ,  $y = 7$ , y para  $x = 2$ ,  $y = -7$ . Las dos raíces son, por tanto,  $-2 + 7i$  y  $2 - 7i$ .

---

**Ejercicio 4.** Escribe los siguientes números complejos en forma polar:

- (a)  $-4$
- (b)  $2i$
- (c)  $-\frac{3}{4}i$
- (d)  $-2 + 2\sqrt{3}i$

**Solución:**

Para los tres primeros números la solución es inmediata:

- (a)  $-4 = 4\pi$
- (b)  $2i = 2\pi/2$
- (c)  $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{3\pi/2}$
- (d) El cuarto complejo tiene como módulo y argumento:

$$r = \sqrt{4 + 12} = 4; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \xrightarrow{\varphi \in II} \varphi = 120^\circ$$

Por consiguiente  $-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{2\pi/3}$ .

---

**Ejercicio 5.** Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:

- (a)  $1_{\pi/2}$
- (b)  $5_{270^\circ}$
- (c)  $1_{150^\circ}$
- (d)  $4_{300^\circ}$

**Solución:**

- (a)  $1_{\pi/2} = i$
  - (b)  $5_{270^\circ} = -5i$
  - (c)  $1_{150^\circ} = 1 \cdot (\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
  - (d)  $4_{300^\circ} = 4 \cdot \cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$
- 

**Ejercicio 6.** Calcular en forma polar las raíces quintas de  $1 - i$ .

**Solución:**

El módulo y argumento de  $1 - i$  son:

$$r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{1} = -1 \xrightarrow{\varphi \in IV} \varphi = 315^\circ$$

Así que  $1 - i = (\sqrt{2})_{315^\circ}$ . La primera raíz la obtenemos haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 5 el argumento:

$$z_1 = \left( \sqrt[5]{2} \right)_{63^\circ}$$

Las restantes raíces las calculamos sumando  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$  a la anterior:

$$z_2 = \left( \sqrt[5]{2} \right)_{135^\circ}; \quad z_3 = \left( \sqrt[5]{2} \right)_{207^\circ}; \quad z_4 = \left( \sqrt[5]{2} \right)_{279^\circ}; \quad z_5 = \left( \sqrt[5]{2} \right)_{351^\circ}$$


---

**Ejercicio 7.** Calcular en forma binómica las raíces sextas de  $-1$ .

**Solución:**

El número  $-1$  en forma polar es  $1_{180^\circ}$ . Como en el caso anterior, la primera raíz sexta se obtiene haciendo la raíz sexta del módulo y dividiendo por 6 el argumento. Las restantes raíces se calculan sumando  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$  al argumento se la raíz anterior:

$$z_1 = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i$$

$$z_3 = \cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_4 = \cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_5 = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i$$

$$z_6 = \cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$


---

**Ejercicio 8.** Calcular en forma binómica  $(-1 - i\sqrt{3})^6$ .

**Solución:**

En primer lugar escribimos el complejo en forma polar:

$$r = \sqrt{1+3} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \xrightarrow{\varphi \in III} \varphi = 240^\circ$$

Por consiguiente:

$$(-1 - i\sqrt{3})^6 = [(2)_{240^\circ}]^6 = 64_{1440^\circ}$$

Dividiendo el argumento por  $360^\circ$  encontramos el argumento equivalente  $0^\circ$ . Tenemos, por tanto:

$$64_{1440^\circ} = 64_0 = 64$$


---

**Ejercicio 9.** Calcular una expresión de  $\cos 3\varphi$  a partir de la fórmula de Moivre.

**Solución:**

Para el ángulo triple, la fórmula de Moivre tiene la forma:

$$\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} \varphi = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3$$

Para calcular  $\cos 3\varphi$  debemos calcular la parte real del segundo miembro. La parte real es la que contiene las potencias 0 y 2 de la unidad imaginaria:

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + 3i^2 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + i^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

La parte real es

$$\cos^3 \varphi + 3i^2 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi$$

de modo que:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi$$


---

**Ejercicio 10.** El punto  $A_1(3, 5)$  es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices  $A_2$  y  $A_3$ .

**Solución:**

Los otros dos vértices los obtendremos girando  $A_1$  ángulos de  $120^\circ$  y  $240^\circ$  alrededor del origen:

$$\begin{aligned} (3 + 5i)(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) &= (3 + 5i) \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{5}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \right) i \\ (3 + 5i)(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) &= (3 + 5i) \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{5}{2}i + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \right) i \end{aligned}$$

Los puntos son:

$$A_2 \left( -\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \right); \quad A_3 \left( -\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \right)$$


---

## 10. Números complejos

**Ejercicio 1.** *Calcular:*

$$\frac{(2-i)^2(1+3i)}{3+2i}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{(2-i)^2(1+3i)}{3+2i} &= \frac{(4-1-4i)(1+3i)}{3+2i} \\ &= \frac{(3-4i)(1+3i)}{3+2i} \\ &= \frac{15+5i}{3+2i} \\ &= \frac{(15+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{55-15i}{13} \\ &= \frac{55}{13} - \frac{15}{13}i \end{aligned}$$


---

**Ejercicio 2.** *Calcular las raíces cuadradas de  $24+10i$ .*

**Solución:**

Sea  $x+yi$  la raíz cuadrada, entonces:

$$(x+yi)^2 = 24+10i \implies \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ 2xy = 10 \end{cases}$$

Resolvemos con la sustitución:

$$y = \frac{10}{2x} = \frac{5}{x} \implies x^2 - \frac{25}{x^2} = 24 \implies x^4 - 24x^2 - 25 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada:

$$x^2 = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 25}}{2} = \frac{24 \pm 26}{2}$$

Las soluciones son  $x^2 = 25$  y  $x^2 = -1$  (no válida). Por tanto  $x_1 = -5$  y  $x_2 = 5$ . Los valores correspondientes de  $y$  son  $y_1 = -1$  e  $y_2 = 1$ . Las raíces cuadradas son  $-5-i$  y  $5+i$ .

---

**Ejercicio 3.** *Aplicar la fórmula de Newton para calcular  $(2-3i)^4$ .*

**Solución:**

$$\begin{aligned} (2-3i)^4 &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 \cdot 3i + 6 \cdot 2^2 \cdot (3i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3i)^3 + (3i)^4 \\ &= 16 - 96i + 216i^2 - 216i^3 + 81i^4 \\ &= 16 - 96i - 216 + 216i + 81 \\ &= -119 + 120i \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.** Calcular en forma polar las raíces quintas de  $-i$ .

**Solución:**

Puesto que  $-i = 1_{270^\circ}$ , las raíces tienen de módulo 1 y de argumento  $\frac{270^\circ + 360^\circ k}{5}$   $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Así obtenemos que las raíces son:

$$1_{54^\circ}, 1_{126^\circ}, 1_{198^\circ}, 1_{270^\circ}, 1_{342^\circ}$$


---

**Ejercicio 5.** Calcular el área del triángulo que tiene como vértices los afijos de las raíces cúbicas de  $3 + 4i$ .

**Solución:**

El módulo de este complejo es 5. Las raíces cúbicas tienen entonces como módulo  $\sqrt[3]{5}$ . Este es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. El área es:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{5} \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt[3]{25}\sqrt{3}}{4}$$


---

**Ejercicio 6.** Calcular las raíces cuartas de  $-16$  y expresar el resultado en forma binómica.

**Solución:**

Puesto que  $-16 = 16_{180^\circ}$ , sus raíces cuartas son  $2_{45^\circ}$ ,  $2_{135^\circ}$ ,  $2_{225^\circ}$  y  $2_{315^\circ}$ . En forma binómica:

$$z_1 = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_3 = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$z_4 = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$


---

**Ejercicio 7.** Expresar en forma polar:

(a)  $\sqrt{3} - i$

(b)  $-2 + 2i$

**Solución:**

(a) Calculamos el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{3+1} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}; \varphi \in IV$$

Por tanto:

$$\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$$

(b) De la misma forma:

$$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{-2} = -1; \varphi \in II$$

y entonces:

$$-2 + 2i = (2\sqrt{2})_{135^\circ}$$


---

**Ejercicio 8.** Expresar en forma binómica:

(a)  $5_{240^\circ}$

(b)  $3_{315^\circ}$

**Solución:**

$$5_{240^\circ} = 5(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 5 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$3_{315^\circ} = 3(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = 3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$


---

**Ejercicio 9.** Obtener a partir de la fórmula de Moivre una expresión para  $\operatorname{sen} 3\varphi$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi &= (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3 \\ &= \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi i \operatorname{sen} \varphi + 3 \cos \varphi i^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + i^3 \operatorname{sen}^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + (3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}^3 \varphi)i \end{aligned}$$

Separando las partes reales e imaginarias:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi; \quad \operatorname{sen} 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}^3 \varphi$$


---

**Ejercicio 10.** Calcular el punto que se obtiene al girar  $P(1, 2)$  en torno al punto  $C(-1, 3)$  un ángulo de  $150^\circ$ .

**Solución:**

Aplicamos la fórmula del giro:

$$z' = c + (z - c)e^{i\varphi}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} z' &= -1 + 3i + (1 + 2i + 1 - 3i)(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) \\ &= -1 + 3i + (2 - i) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= -1 + 3i - \sqrt{3} + i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{8 + \sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

El punto es  $P' \left( \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{8 + \sqrt{3}}{2} \right)$ .

---

## 11. Geometría

**Ejercicio 1.** Hallar la ecuación de la recta perpendicular a  $2y - x = 0$  que pasa por el punto  $P(1, -3)$ .

**Solución:**

La recta dada tiene pendiente  $\frac{1}{2}$  de modo que la perpendicular tendrá pendiente  $-2$ . La ecuación será:

$$y + 3 = -2(x - 1)$$


---

**Ejercicio 2.** Los vértices de un triángulo son  $A(3, -1)$ ,  $B(7, 3)$  y  $C(1, 5)$ . Calcular la longitud de la altura correspondiente al vértice  $A$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta  $BC$  es

$$m = \frac{5 - 3}{1 - 7} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación de  $BC$  es entonces:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 7)$$

$$3y - 9 = -x + 7$$

$$x + 3y - 16 = 0$$

La longitud de la altura es la distancia desde  $A$  a esta recta:

$$h_A = \frac{|3 - 3 - 16|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{16}{\sqrt{10}}$$


---

**Ejercicio 3.** Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto  $P(-3, 5)$  y forman un ángulo de  $45^\circ$  con la recta  $6x - 5y = 17$ .

**Solución:**

La recta que nos dan tiene pendiente  $\frac{6}{5}$ . La pendiente de la que forma un ángulo de  $45^\circ$  cumple que:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m - \frac{6}{5}}{1 + \frac{6m}{5}} \right| = \left| \frac{5m - 6}{5 + 6m} \right|$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{5m - 6}{5 + 6m} = 1 \implies 5m - 6 = 5 + 6m \implies m = -11$$

$$\frac{5m + 6}{5 + 6m} = -1 \implies 5m - 6 = -5 - 6m \implies m = \frac{1}{11}$$

de forma que las dos rectas son:

$$y - 5 = -11(x + 3) \quad y \quad y - 5 = \frac{1}{11}(x + 3)$$


---

**Ejercicio 4.** Determinar el punto  $A'$  simétrico del  $A(-3, -2)$  respecto a la recta  $4x + y = 3$ .

**Solución:**

La recta que nos dan tiene pendiente  $-4$ . La perpendicular por el punto  $A$  es:

$$y + 2 = \frac{1}{4}(x + 3)$$

$$4y + 8 = x + 3$$

$$x - 4y - 5 = 0$$

La intersección de la recta dada con la perpendicular:

$$\begin{cases} x - 4y - 5 = 0 \\ 4x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

sistema que tiene como solución el punto  $P(1, -1)$ . Éste, es punto medio entre  $A$  y su simétrico. Por consiguiente:

$$1 = \frac{x - 3}{2} \implies x = 5$$

$$-1 = \frac{y - 2}{2} \implies y = 0$$

El simétrico es el punto  $A'(5, 0)$ .

---

**Ejercicio 5.** Examinar si las rectas  $3x + 4y + 3 = 0$  y  $6x + 8y + 11 = 0$  son paralelas y, en caso afirmativo, calcular la distancia entre ambas.

**Solución:**

Las rectas son paralelas puesto que los coeficientes de las incógnitas son proporcionales. Las escribimos con los mismos coeficientes:

$$3x + 4y + 3 = 0$$

$$3x + 4y + \frac{11}{2} = 0$$

Su distancia es:

$$d = \frac{|\frac{11}{2} - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$


---

**Ejercicio 6.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto  $P(6, 6)$  y es tangente a la recta  $5x + 7y + 2 = 0$  en el punto  $Q(1, -1)$ .

**Solución:**

El centro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz de los dos puntos y en la perpendicular a la tangente trazada por el punto de tangencia.

La ecuación de la mediatriz es:

$$\begin{aligned}(x-6)^2 + (y-6)^2 &= (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ -12x + 36 - 12y + 36 &= -2x + 1 + 2y + 1 \\ 5x + 7y - 35 &= 0\end{aligned}$$

La pendiente de la tangente es  $-\frac{5}{7}$ . La ecuación de la perpendicular es:

$$\begin{aligned}y + 1 &= \frac{7}{5}(x - 1) \\ 5y + 5 &= 7x - 7 \\ 7x - 5y - 12 &= 0\end{aligned}$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x + 7y - 35 = 0 \\ 7x - 5y - 12 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene el punto  $C\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ . Calculando la distancia a los puntos o a la tangente se obtiene  $r^2 = \frac{37}{2}$ .

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{2}$$


---

**Ejercicio 7.** Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de la recta  $x + 2y - 4 = 0$ , comprendido entre los ejes de coordenadas.

**Solución:**

Los puntos de corte de la recta con los ejes son  $A(4, 0)$  y  $B(0, 2)$ . El punto medio de este segmento  $C(2, 1)$  es el centro de la circunferencia. El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (2-4)^2 + (1-0)^2 = 5$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$


---

**Ejercicio 8.** Una circunferencia de centro  $C(6, 5)$  es tangente a la recta  $4x - 3y + 5 = 0$ . Hallar la ecuación de la circunferencia.

**Solución:**

El radio es la distancia desde el centro a la tangente:

$$r = \frac{|4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{14}{5}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = \frac{196}{25}$$


---

**Ejercicio 9.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(-3, 0)$  y  $B(2, -5)$  y tiene su centro en la recta  $2x + 3y + 21 = 0$ .

**Solución:**

El centro se encuentra en el punto de intersección de la recta dada y la mediatriz de los dos puntos. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x + 3)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y + 5)^2$$

$$6x + 9 = -4x + 4 + 10y + 25$$

$$10x - 10y - 20 = 0$$

$$x - y - 2 = 0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 21 = 0 \end{cases} \implies C(-3, -5)$$

El radio se calcula como distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (-3 + 3)^2 + (-5 - 0)^2 = 25$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$$


---

**Ejercicio 10.** Hallar las coordenadas de los puntos situados, en la recta  $x + 2y - 3 = 0$  y que disten 2 unidades de la  $4x - 3y + 9 = 0$ .

**Solución:**

Calculamos las ecuaciones de las paralelas que disten 2 unidades. Estas paralelas tienen la forma  $4x - 3y + C = 0$ . Calculamos  $C$ :

$$\frac{|C - 9|}{\sqrt{16 + 9}} = 2 \implies C - 9 = \pm 10$$

y obtenemos las rectas  $4x - 3y - 1 = 0$  y  $4x - 3y + 19 = 0$ .

Los puntos que nos piden son las intersecciones de  $x + 2y - 3 = 0$  con estas rectas:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 19 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas obtenemos los puntos  $P(1, 1)$  y  $Q\left(-\frac{29}{11}, \frac{31}{11}\right)$ .

**Ejercicio 11.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(5, -1)$  y es perpendicular a la recta  $3x + 6y - 1 = 0$ .

**Solución:**

La recta dada tiene pendiente  $-\frac{1}{2}$  de modo que la perpendicular tendrá pendiente 2. La ecuación será:

$$y + 1 = 2(x - 5)$$


---

**Ejercicio 12.** Los vértices de un triángulo son  $A(1, 5)$ ,  $B(7, 3)$  y  $C(3, -1)$ . Calcular la longitud de la altura correspondiente al vértice  $A$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta  $BC$  es

$$m = \frac{-1 - 3}{3 - 7} = 1$$

La ecuación de  $BC$  es entonces:

$$y - 7 = 1(x - 3)$$

$$x - y + 4 = 0$$

La longitud de la altura es la distancia desde  $A$  a esta recta:

$$h_A = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$


---

**Ejercicio 13.** Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto  $P(-3, 5)$  forman un ángulo de  $45^\circ$  con la recta  $3x - 2y = 17$ .

**Solución:**

La recta que nos dan tiene pendiente  $\frac{3}{2}$ . La pendiente de la que forma un ángulo de  $45^\circ$  cumple que:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3m}{2}} \right| = \left| \frac{2m - 3}{2 + 3m} \right|$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{2m - 3}{2 + 3m} = 1 \quad \Longrightarrow \quad m = -5$$

$$\frac{2m - 3}{2 + 3m} = -1 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{1}{5}$$

de forma que las dos rectas son:

$$y - 5 = -5(x + 3) \quad \text{y} \quad y - 5 = \frac{1}{5}(x + 3)$$


---

**Ejercicio 14.** Determinar el punto  $A'$  simétrico del  $A(-4, 0)$  respecto a la recta  $2x + 3y = 5$ .

**Solución:**

La recta que nos dan tiene pendiente  $-\frac{2}{3}$ . La perpendicular por el punto  $A$  es:

$$y = \frac{3}{2}(x + 4)$$

$$2y = 3x + 12$$

$$3x - 2y + 12 = 0$$

La intersección de la recta dada con la perpendicular:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 12 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

sistema que tiene como solución el punto  $P(-2, 3)$ . Éste, es punto medio entre  $A$  y su simétrico. Por consiguiente:

$$-2 = \frac{-4 + x'}{2} \implies x' = 0$$

$$3 = \frac{y'}{2} \implies y' = 6$$

El simétrico es el punto  $A'(0, 6)$ .

---

**Ejercicio 15.** Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de la recta  $3x + 2y - 12 = 0$  comprendido entre los ejes coordenados.

**Solución:**

Los puntos de corte de la recta con los ejes son  $A(4, 0)$  y  $B(0, 6)$ . El punto medio de este segmento  $C(2, 3)$  es el centro de la circunferencia. El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (2 - 4)^2 + (3 - 0)^2 = 13$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$


---

**Ejercicio 16.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(-1, 0)$  y  $B(3, -2)$  y tiene su centro en la recta  $x + y - 3 = 0$ .

**Solución:**

El centro se encuentra en el punto de intersección de la recta dada y la mediatriz de los dos puntos. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x + 1)^2 + y^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

$$2x + 1 = -6x + 9 + 4y + 4$$

$$8x - 4y - 12 = 0$$

$$2x - y - 3 = 0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \implies C(2, 1)$$

El radio se calcula como distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (2 + 1)^2 + (1 - 0)^2 = 10$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$$


---

**Ejercicio 17.** Hallar la ecuación de cada una de las paralelas a la  $4x - 3y + 4 = 0$  y que distan de ella una unidad.

**Solución:**

Puesto que son paralelas, estas rectas tienen una ecuación de la forma  $4x - 3y + C = 0$ . Como su distancia a la recta dada es igual a 1, se cumple que:

$$\frac{|4 - C|}{5} = 1 \implies 4 - C = \pm 5 \implies C = -1 \text{ o } C = 9$$

Las ecuaciones son:

$$4x - 3y - 1 = 0$$

$$4x - 3y + 9 = 0$$


---

## 12. Segundo examen de geometría. Grupo Z

**Ejercicio 1.** Dadas las rectas  $2x + y - 1 = 0$ ,  $x - y - 2 = 0$ , hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y es perpendicular a la  $3x + 6y - 1 = 0$ .

**Solución:**

La pendiente de  $3x + 6y - 1 = 0$  es  $-\frac{1}{2}$ . La perpendicular tendrá entonces pendiente 2.

Además debe pasar el punto intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es el punto  $(1, -1)$ . Así pues, la ecuación de la perpendicular es:

$$y + 1 = 2(x - 1)$$


---

**Ejercicio 2.** Calcular los coeficientes  $a$  y  $b$  de las ecuaciones  $ax - 2y = 0$ ;  $bx + 6y = 5$ , sabiendo que las rectas que representan son perpendiculares y que la primera pasa por el punto  $(2, 3)$ .

**Solución:**

Si la primera recta pasa por el punto  $(2, 3)$  se cumple que:

$$2a - 6 = 0 \implies a = 3$$

Si además son perpendiculares:

$$ab - 2 \cdot 6 = 0$$

$$3b - 12 = 0$$

o sea que  $b = 4$ .

---

**Ejercicio 3.** Los vértices de un triángulo son  $A(2, 0)$ ,  $B(3, 2)$  y  $C(4, -3)$ . Hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice  $B$ .

**Solución:**

la ecuación del lado  $AC$  es:

$$y - 0 = \frac{-3}{2}(x - 2) \quad \text{o bien} \quad 3x + 2y - 6 = 0$$

La altura que nos piden es la distancia desde el punto  $B(3, 2)$  a esta recta:

$$h = \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$


---

**Ejercicio 4.** Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto  $P(2, 1)$  y distan 3 unidades de  $A(2, -4)$ .

**Solución:**

Las rectas que pasan por  $P(2, 1)$  tienen como ecuación:

$$y - 1 = m(x - 2)$$

$$mx - y + 1 - 2m = 0$$

Puesto que la distancia de esta recta a  $A(2, -4)$  debe ser 3:

$$\frac{|2m + 4 + 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \quad \text{elevando al cuadrado}$$

$$\frac{25}{m^2 + 1} = 9$$

$$m^2 + 1 = \frac{25}{9}$$

$$m^2 = \frac{16}{9} \implies m = \pm \frac{4}{3}$$

Las rectas que nos piden son:

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \quad \text{y} \quad y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

**Ejercicio 5.** ¿En qué punto de la recta  $3x + 4y = 30$  tendrá que reflejarse un rayo luminoso que parte del punto  $F(5, 10)$  para que después de la reflexión pase por el punto  $A(13, 4)$ ?

**Solución:**

En primer lugar calcularemos el punto simétrico de  $F(5, 10)$  respecto de la recta  $3x + 4y = 30$ :

– Ecuación de la perpendicular por el punto a la recta:

$$y - 10 = \frac{4}{3}(x - 5) \implies 4x - 3y + 10 = 0$$

– Intersección del eje de simetría con la perpendicular:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 0 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \implies P(2, 6)$$

– Punto simétrico:

$$2 = \frac{5 + x'}{2}$$

$$6 = \frac{10 + y'}{2}$$

De forma que el punto simétrico es  $F'(-1, 2)$ .

Ahora calculamos la recta  $F'A$ :

$$y - 2 = \frac{2}{14}(x + 1) \quad \text{o bien} \quad x - 7y + 15 = 0$$

El punto de intersección de esta recta con la recta que nos dan es el punto que nos piden:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ x - 7y + 15 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto  $(6, 3)$ .

---

**Ejercicio 6.** Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(0, 5)$ ,  $B(0, 1)$  y  $C(2, 3)$ .

**Solución:**

La mediatriz de  $AB$  es  $y = 3$ .

La mediatriz de  $BC$  es:

$$x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

$$-2y + 1 = -4x + 4 - 6y + 9$$

$$4x + 4y - 12 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

El centro de la circunferencia es el punto de intersección de las dos mediatrices, es decir, la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \implies P(0, 3)$$

El radio es la distancia desde  $P$  a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (0 - 0)^2 + (3 - 5)^2 = 4$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + (y - 3)^2 = 4$$


---

**Ejercicio 7.** Hallar la ecuación de la tangente trazada en su punto  $(2, 1)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ .

**Solución:**

El centro de la circunferencia es  $C(3, 1)$ . La pendiente del radio en el punto dado es  $m = \frac{0}{1} = 0$ . Puesto que el radio está sobre una recta horizontal (de pendiente cero), la tangente que es perpendicular al radio será una recta vertical. Como ha de pasar por  $(2, 1)$  su ecuación será  $x = 2$ .

---

**Ejercicio 8.** En la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ , determinar el punto más lejano y el más cercano al origen de coordenadas.

El centro de la circunferencia es el punto  $C(-1, -2)$ . La ecuación de la recta que pasa por el origen y por el centro es:

$$y = 2x$$

Los puntos que nos piden son las intersecciones de la circunferencia con esta recta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

Resolvemos:

$$x^2 + 4x^2 + 2x + 8x - 5 = 0$$

$$5x^2 + 10x - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Los puntos son:

$$A(-1 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad B(-1 - \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2})$$


---

### 13. Segundo examen de geometría. Grupo W.

**Ejercicio 1.** Dada la recta  $ax + by = 1$ , determinar  $a$  y  $b$ , sabiendo que es perpendicular a  $2x + 4y = 11$  y pasa por el punto  $P(1, 3/2)$ .

**Solución:**

Puesto que el punto  $(1, \frac{3}{2})$  pertenece a la primera recta, se cumple que:

$$1 \cdot a + \frac{3}{2}b = 1 \implies 2a + 3b = 2$$

Además para que las dos rectas sean perpendiculares debe cumplirse que:

$$2a + 4b = 0 \implies a + 2b = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

y obtenemos  $a = 4$ ,  $b = -2$ .

---

**Ejercicio 2.** Hallar el área del triángulo de vértices  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 3)$ ,  $C(-1, 4)$ .

**Solución:**

La base es la longitud de uno de los lados, por ejemplo,  $BC$ :

$$BC = \sqrt{(-1 - 6)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Para calcular la altura debemos obtener previamente la ecuación del lado  $BC$ :

$$\begin{aligned} y - 4 &= \frac{1}{-7}(x + 1) \\ -7y + 28 &= x + 1 \\ x + 7y - 27 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora calculamos la distancia desde  $A$  a la recta  $BC$ :

$$h = \frac{|2 + 7 - 27|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}}$$

Finalmente, el área es:

$$S = \frac{1}{2} 5\sqrt{2} \frac{18}{5\sqrt{2}} = 9$$


---

**Ejercicio 3.** Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto  $(-3, 0)$  y forman con la  $3x - 5y + 9 = 0$  un ángulo cuya tangente es  $1/3$ .

**Solución:**

La pendiente de esas rectas cumple que:

$$\left| \frac{m - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3m}{5}} \right| = \frac{1}{3} \implies \frac{5m - 3}{5 + 3m} = \pm \frac{1}{3} \implies 15m - 9 = \pm(5 + 3m)$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos  $m = \frac{7}{6}$  y  $m = \frac{2}{9}$ . Las ecuaciones de las rectas son:

$$y = \frac{7}{6}(x + 3)$$

$$y = \frac{2}{9}(x + 3)$$


---

**Ejercicio 4.** *Un triángulo isósceles tiene por base el segmento que une los puntos  $A(1, -2)$  y  $B(6, 3)$  y el otro vértice está situado en la recta  $3x - y + 8 = 0$ . Hallar las coordenadas del tercer vértice.*

**Solución:**

Puesto que el triángulo es isósceles, el tercer vértice debe estar en la mediatriz de  $A$  y  $B$ :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (x - 6)^2 + (y - 3)^2$$

$$-2x + 1 + 4y + 4 = -12x + 36 - 6y + 9$$

$$10x + 10y - 40 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

El tercer vértice es el punto de intersección de la recta dada y la mediatriz:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto  $C(-1, 5)$

---

**Ejercicio 5.** *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto  $P(1, 1)$  y distan dos unidades del  $C(2, 3)$ .*

**Solución:**

Las rectas que pasan por  $P(1, 1)$  tienen por ecuación:

$$y - 1 = m(x - 1) \implies mx - y - m + 1 = 0$$

Si la distancia de este punto a  $C(2, 3)$  vale 2:

$$\frac{|2m - 3 - m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

o, elevando al cuadrado:

$$m^2 - 4m + 4 = 4(m^2 + 1)$$

$$3m^2 + 4m = 0 \implies m = 0, m = -\frac{4}{3}$$

Las ecuaciones de las rectas son:

$$y - 1 = 0, \quad x - 1 = -\frac{4}{3}(x - 1)$$


---

**Ejercicio 6.** Se considera la recta  $3x + 4y + 1 = 0$  y, sobre ella, un punto de abscisa igual a 1. Calcular los puntos de esa recta que distan 5 unidades del punto dado.

**Solución:**

La ordenada del punto la obtenemos sustituyendo  $x = 1$  en la ecuación de la recta:

$$3 + 4y + 1 = 0 \implies y = -1$$

Los puntos que nos piden son las intersecciones de la recta dada con la circunferencia de centro  $(1, -1)$  y radio 5:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25 \\ 3x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en la ecuación de la recta:

$$y = \frac{-3x - 1}{4}$$

y sustituimos en la ecuación de la circunferencia:

$$(x - 1)^2 + \left( \frac{-3x - 1}{4} + 1 \right)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + \left( \frac{-3x - 3}{4} \right)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + \frac{9(x - 1)^2}{16} = 25$$

$$16(x - 1)^2 + 9(x - 1)^2 = 25 \cdot 16$$

$$25(x - 1)^2 = 25 \cdot 16$$

$$(x - 1)^2 = 16$$

$$x - 1 = \pm 4$$

y de aquí  $x = 5$  o  $x = -3$ . Los puntos que nos piden son  $(5, -4)$  y  $(-3, 2)$ .

---

**Ejercicio 7.** Determinar los valores de  $c$  a fin de que la recta  $3x + 4y + c = 0$  sea tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ .

**Solución:**

El centro de la circunferencia es el punto  $C(1, 0)$ . La ecuación puede escribirse:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 25$$

de modo que el radio es igual a 5.

La distancia de la tangente al centro debe ser igual al radio:

$$\frac{|3 + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \implies 3 + c = \pm 25$$

O sea que  $c = 22$  o  $c = -28$ .

---

**Ejercicio 8.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto  $(3, 0)$  y es tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$  en el punto  $(3, 3)$ .

**Solución:**

El centro de la circunferencia que nos piden debe encontrarse en la mediatriz de los puntos  $(3, 0)$  y  $(3, 3)$  que es la recta  $y = \frac{3}{2}$ .

También debe encontrarse en la recta que une el centro de la circunferencia dada  $C(1, -2)$  con el punto de tangencia  $(3, 3)$ . La ecuación de esta recta es:

$$y + 2 = \frac{5}{2}(x - 1)$$

$$2y + 4 = 5x - 5$$

$$5x - 2y - 9 = 0$$

El centro es entonces la solución de sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y - 9 = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Operando resulta  $C\left(\frac{12}{5}, \frac{3}{2}\right)$

El radio es la distancia desde  $C$  a cualquiera de los puntos de la circunferencia:

$$r^2 = \left(\frac{12}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{9}{4} = \frac{261}{100}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{261}{100}$$


---

## 14. Probabilidad. Grupo Z

**Ejercicio 1.** Los sucesos  $A$  y  $B$  son tales que  $p(A) = \frac{2}{5}$ ,  $p(B) = \frac{11}{20}$  y  $p(A|B) = \frac{2}{11}$ .

(a) Calcular  $p(A \cap B)$  y  $p(A \cup B)$ .

(b) Decidir si los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

**Solución:**

(a) Por la definición de probabilidad condicionada:

$$p(A \cap B) = p(B)p(A|B) = \frac{11}{20} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{10}$$

Y por la regla de la suma:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} - \frac{1}{10} = \frac{17}{20}$$

(b)

$$p(A)p(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \neq p(A \cap B)$$

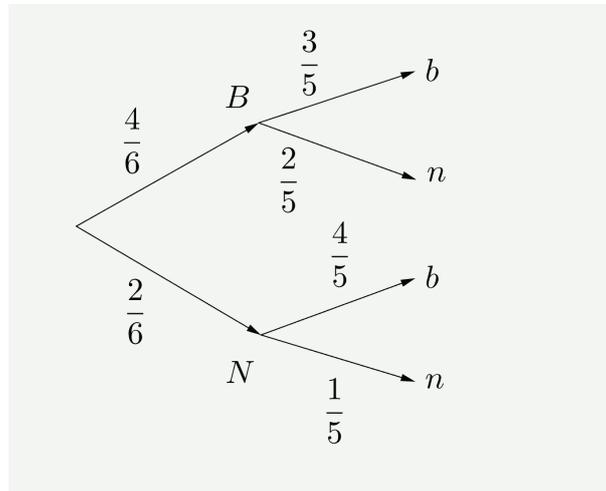
Los sucesos son dependientes.

También se ve que son dependientes porque  $p(A|B) \neq p(A)$ .

**Ejercicio 2.** De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reposición, dos bolas.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?  
 (b) Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?

**Solución:**



$$(a) \quad p(B \cap b) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(b) \quad p(N | n) = \frac{p(n \cap N)}{p(n)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

**Ejercicio 3.** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A) = 0,7$ ,  $p(B) = 0,6$  y  $p(A \cup B) = 0,9$ .

- (a) Justifica si  $A$  y  $B$  son independientes.  
 (b) Calcula  $p(A | \bar{B})$  y  $p(B | \bar{A})$ .

**Solución:**

- (a) Calculamos  $p(A \cap B)$ :

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,7 + 0,6 - 0,9 = 0,4$$

Puesto que  $p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$ , los sucesos no son independientes.

$$(b) \quad p(A | \bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(A - B)}{p(\bar{B})} = \frac{0,7 - 0,4}{0,4} = \frac{3}{4}$$

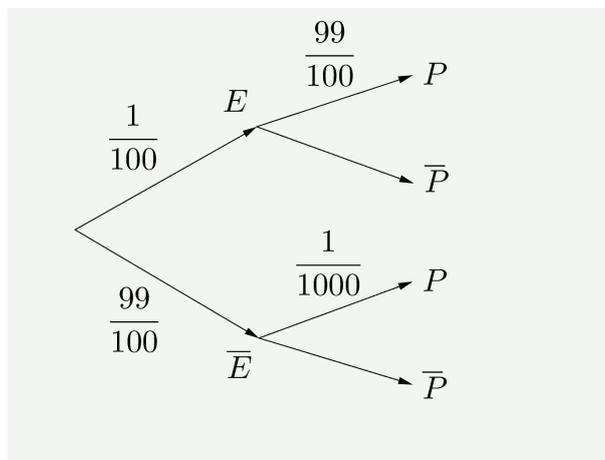
$$p(B | \bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(B - A)}{p(\bar{A})} = \frac{0,6 - 0,4}{0,3} = \frac{2}{3}$$

**Ejercicio 4.** En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y las de que lo sea una de bajo consumo es de 0,09. Se escoge una bombilla al azar:

- (a) Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa.

(b) Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

**Solución:**



$$(a) \quad p(\bar{D}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{98}{100} + \frac{4}{7} \cdot \frac{91}{100} = \frac{94}{100}$$

$$(b) \quad p(H | \bar{D}) = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{94}{100}} = \frac{21}{47}$$

**Ejercicio 5.** Se lanza un dado dos veces consecutivas. Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1 sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 4.

**Solución:**

Se puede obtener suma cuatro de tres maneras diferentes 13, 31 y 22. Por tanto, la probabilidad de obtener suma cuatro al lanzar los dos dados es  $\frac{3}{36}$ . Por otra parte, la probabilidad de sacar 1 en el primer lanzamiento y además suma cuatro es  $\frac{1}{36}$  ya que solamente hay un resultado favorable 13. Entonces:

$$p(1 | \text{SUMA CUATRO}) = \frac{p(1 \cap \text{SUMA CUATRO})}{p(\text{SUMA CUATRO})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

**Ejercicio 6.** Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:

(a) Los cuatro huevos en buen estado.

(b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

**Solución:**

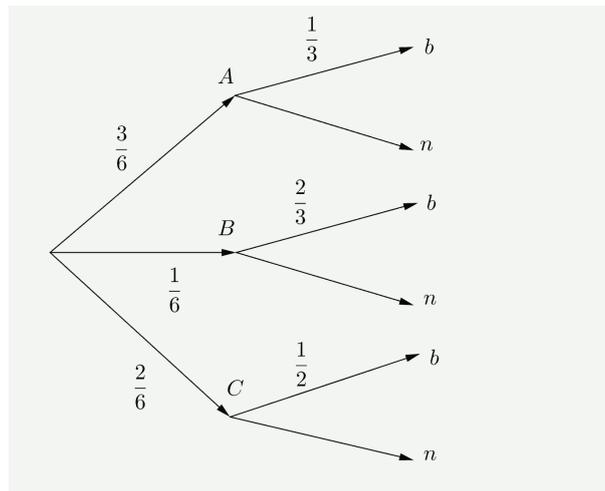
$$(a) \quad p = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$$

$$(b) \quad p = 4 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{33}$$

**Ejercicio 7.** Se dispone de tres urnas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La urna  $A$  contiene una bola blanca y 2 bolas negras, la urna  $B$  contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna  $C$  contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna  $A$ , si sale el 4 se escoge la urna  $B$  y si sale 5 o 6 se escoge la urna  $C$ . A continuación se extrae una bola de la urna elegida.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?  
 (b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna  $C$ ?

**Solución:**



$$(a) \quad p(b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$$

$$(b) \quad p(C | b) = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

**Ejercicio 8.** Una clase tiene 24 alumnos y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas y 4 suspenden inglés y matemáticas.

- (a) Calcula la probabilidad de que, al elegir un alumno de esta clase al azar, resulte que aprueba matemáticas y suspende inglés.  
 (b) En esta clase, ¿son independientes los sucesos “aprobar inglés” y “aprobar matemáticas”?

**Solución:**

- (a) Sea  $I$  el suceso el alumno aprueba inglés y  $M$  el suceso el alumno aprueba matemáticas. Entonces tenemos que:

$$\frac{4}{24} = p(\bar{I} \cap \bar{M}) = p(\overline{I \cup M}) \implies p(I \cup M) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

Entonces:

$$p(I \cap M) = p(I) + p(M) - p(I \cup M) = \frac{12}{24} + \frac{16}{24} - \frac{20}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

y de aquí:

$$p(M \cap \bar{I}) = p(M - I) = \frac{16}{24} - \frac{8}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$(b) \quad p(I)p(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p(I \cap M) = \frac{1}{3}$$

Luego los sucesos son independientes.

---

## 15. Probabilidad. Grupo W.

**Ejercicio 1.** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos con  $p(A) = 0,5$ ,  $p(B) = 0,3$  y  $p(A \cap B) = 0,1$ . Calcular las siguientes probabilidades:

$$(a) \quad p(A \cup B) \qquad (b) \quad p(A | B) \qquad (c) \quad p(A | A \cap B) \qquad (d) \quad p(A | A \cup B)$$

**Solución:**

$$(a) \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$$

$$(b) \quad p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

$$(c) \quad p(A | A \cap B) = 1$$

$$(d) \quad p(A | A \cup B) = \frac{p(A)}{p(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7}$$


---

**Ejercicio 2.** El 60% de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%. Si un alumno sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

**Solución:**

Los datos son  $p(F) = 0,60$ ,  $p(M) = 0,7$  y  $p(F | M) = 0,8$ . Nos piden  $p(M | F)$ .

Tenemos que:

$$p(F \cap M) = p(M) \cdot p(F | M) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$$

Entonces:

$$p(M | F) = \frac{p(F \cap M)}{p(F)} = \frac{0,56}{0,60} = \frac{14}{15}$$


---

**Ejercicio 3.** En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados se pide calcular la probabilidad de obtener:

- (a) Al menos un dos.  
 (b) Tres números distintos.

**Solución:**

$$(a) \quad p(\text{'al menos un dos'}) = 1 - p(\text{'ningún dos'}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

- (b) La probabilidad de obtener en el segundo lanzamiento un número diferente que en el primero es  $\frac{5}{6}$  y la probabilidad de obtener en el tercer lanzamiento un número diferente que en los dos primeros es  $\frac{4}{6}$ . Entonces:

$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$


---

**Ejercicio 4.**  $A$  y  $B$  son dos sucesos tales que  $p(A) = 0,25$ ,  $p(B) = 0,6$  y  $p(A \cup B) = 0,7$ .

- (a) Halle  $p(A \cap B)$ .  
 (b) Determine si los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

**Solución:**

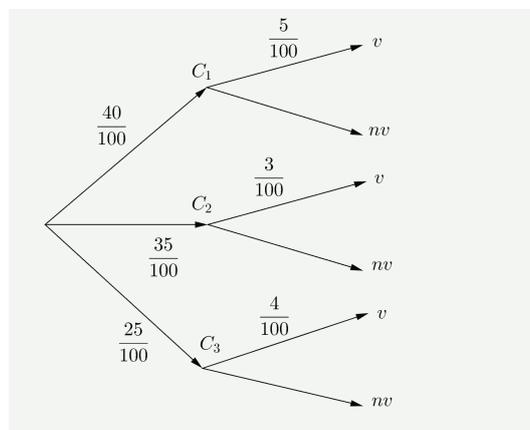
$$(a) \quad p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,25 + 0,6 - 0,7 = 0,15$$

- (b) Puesto que  $p(A) \cdot p(B) = 0,25 \cdot 0,6 = 0,15 = p(A \cap B)$  los sucesos son independientes.
- 

**Ejercicio 5.** Los pianistas de la isla Sordina se forman en tres conservatorios  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  que forman al 40%, 35% y 25% de los pianistas respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5%, 3% y 4% respectivamente. Se selecciona un pianista al azar:

- (a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.  
 (b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio  $C_1$ .

**Solución:**



$$(a) \quad p(v) = \frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{4}{100} = \frac{405}{10000} = \frac{81}{2000}$$

$$(b) \quad p(C_1 | v) = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{405}{10000}} = \frac{200}{405} = \frac{40}{81}$$

**Ejercicio 6.** El 45% del censo de una cierta ciudad vota al candidato A; el 35% al candidato B y el resto se abstiene. Se eligen al azar tres personas del censo. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) Dos personas votan al candidato A y otra al B.  
 (b) Al menos una de las tres personas se abstienen.

**Solución:**

(a)

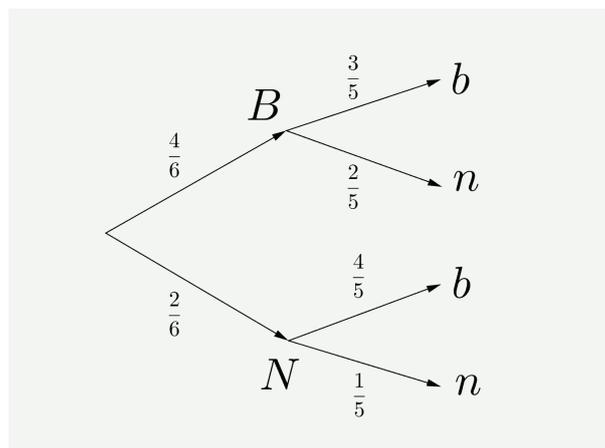
$$p = 3 \cdot \frac{45}{100} \cdot \frac{45}{100} \cdot \frac{35}{100} = \frac{1701}{8000}$$

$$(b) \quad p = 1 - \left(\frac{80}{100}\right)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

**Ejercicio 7.** De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reposición, dos bolas.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?  
 (b) Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?

**Solución:**



$$(a) \quad p(B \cap b) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$(b) \quad p(N | n) = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

**Ejercicio 8.** *Natasha vive en Chicago y tiene familia en Nashville y St. Louis. Cada vez que quiere visitar a su familia, o bien va en avión o bien va en coche.*

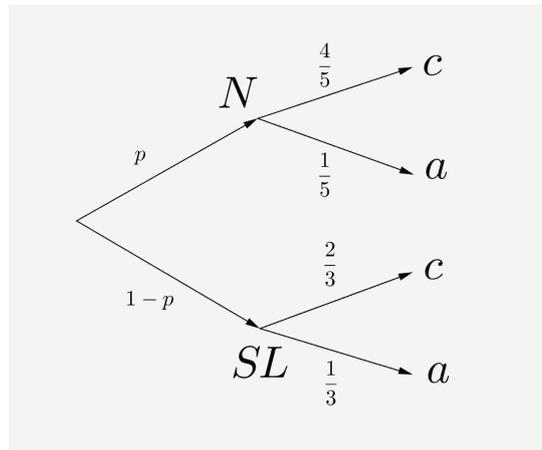
*Cuando va a Nashville, la probabilidad de que vaya en coche es  $\frac{4}{5}$ , y cuando va a St. Louis la probabilidad de que vaya en avión es  $\frac{1}{3}$ .*

*Sabiendo que cuando va a visitar a su familia la probabilidad de que vaya en coche es  $\frac{13}{18}$ , Halle la probabilidad de que para un viaje en particular,*

(a) *Vaya a Nashville.*

(b) *Esté camino de Nashville, sabiendo que está yendo en avión.*

**Solución:**



(a) Si llamamos  $p = p(N)$  entonces:

$$\frac{13}{18} = p \cdot \frac{4}{5} + (1-p) \cdot \frac{2}{3} \implies p = \frac{5}{12}$$

(b) 
$$p(N | A) = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

## 16. Variable aleatoria. Probabilidad. Grupo W.

**Ejercicio 1.** *Los sucesos A y B son tales que  $p(A) = 0,3$  y  $p(B) = 0,4$ .*

(a) *Calcular el valor de  $p(A \cup B)$  cuando:*

(I) *A y B son incompatibles;*

(II) *A y B son independientes.*

(b) *Suponiendo  $p(A \cup B) = 0,6$  calcular  $p(A | B)$ .*

**Solución:**

(a) (I) En este caso  $p(A \cap B) = 0$  y

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0,7$$

(II) Si son independientes  $p(A \cap B) = p(A)p(B) = 0,12$ . Entonces:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58$$

(b) En este caso:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,3 + 0,4 - 0,6 = 0,1$$

y entonces:

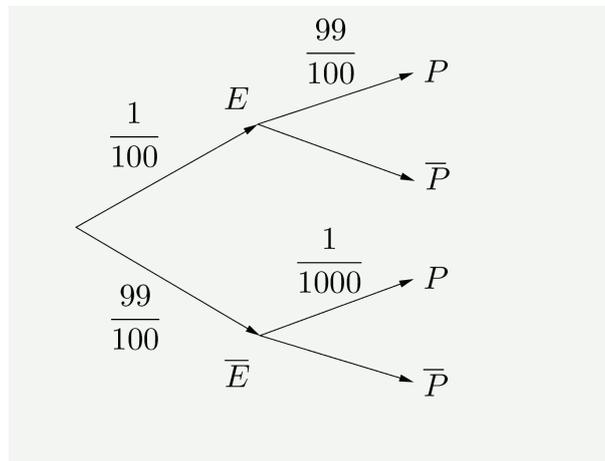
$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

**Ejercicio 2.** En una población de conejos se sabe que un 1% padecen una determinada enfermedad. Se ha desarrollado un test que para los conejos que tienen la enfermedad da un resultado positivo en el 99% de los casos. También se sabe que el test da asimismo un resultado positivo en un 0,1% de los casos cuando el conejo no padece la enfermedad. Se elige aleatoriamente un conejo de la población:

(a) Calcular la probabilidad de que el test dé un resultado positivo.

(b) Supuesto que el test ha dado un resultado positivo, comprobar que la probabilidad de que el conejo no padezca la enfermedad es menor del 10%.

**Solución:**



$$(a) \quad p(P) = \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1089}{100000}$$

$$(b) \quad p(E | P) = \frac{p(E \cap P)}{p(P)} = \frac{99/100000}{1089/100000} = \frac{99}{1089} < \frac{10}{100}$$

**Ejercicio 3.** La variable aleatoria  $X$  tiene una distribución  $Po(m)$ . Sabiendo que

$$p(X = 5) = p(X = 3) + p(X = 4),$$

halle:

(a) El valor de  $m$

(b)  $p(X > 2)$ .

**Solución:**

(a) Sustituyendo las probabilidades:

$$\frac{m^5 e^{-m}}{5!} = \frac{m^3 e^{-m}}{3!} + \frac{m^4 e^{-m}}{4!}$$

Simplificamos dividiendo por  $e^{-m}$  y multiplicando por 3!:

$$\frac{m^5}{20} = m^3 + \frac{m^4}{4} \implies m^5 - 5m^4 - 20m^3 = 0 \implies m^3(m^2 - 5m - 20) = 0$$

Desestimando el caso  $m = 0$  obtenemos:

$$m^2 - 5m - 20 = 0 \implies m = \frac{5 + \sqrt{105}}{2} \simeq 7,62$$

(b) Para esta distribución:

$$p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \simeq 0,982$$

**Ejercicio 4.** Seis clientes hacen cola en un supermercado. Cada cliente puede elegir si paga en efectivo o con tarjeta de crédito. Suponga que el que un cliente pague o no con tarjeta de crédito es independiente del método de pago elegido por otros clientes. Se sabe que el 60% de los clientes eligen pagar con tarjeta de crédito.

(a) Halle la probabilidad de que:

- (I) Los tres primeros clientes paguen con tarjeta de crédito y los siguientes tres paguen en efectivo.
- (II) De los seis clientes, exactamente tres paguen con tarjeta de crédito.

(b) Hay  $n$  clientes en otra cola en el mismo supermercado. La probabilidad de que al menos un cliente pague en efectivo es mayor que 0,995. Halle el mínimo valor de  $n$ .

**Solución:**

(a) (I)  $p = 0,6^3 \cdot 0,4^3 \simeq 0,0138$

- (II) Sea  $X$  la variable aleatoria que representa el número de clientes que paga con tarjeta de crédito.  $X$  sigue una distribución binomial  $B(6; 0,6)$  y

$$p(X = 3) \simeq 0,276$$

(b) Consideremos la distribución binomial  $B(n; 0,4)$  donde  $n$  representa el número de clientes y el éxito es que el cliente pague en efectivo. Debemos encontrar el menor  $n$  que cumple:

$$p(X \geq 1) > 0,995 \implies 1 - p(X = 0) > 0,995 \implies p(X = 0) < 0,005$$

Con la calculadora vemos que el número más pequeño que cumple la condición es  $n = 11$ .

**Ejercicio 5.** En un puesto del mercado se venden manzanas, peras y ciruelas.

(a) Los pesos de las manzanas siguen una distribución normal de media 200 gramos y con una desviación típica de 25 gramos.

- (I) Sabiendo que en el puesto hay 450 manzanas, ¿cuál es el número esperado de manzanas con un peso superior a 225 gramos?
- (II) Sabiendo que el 70% de las manzanas pesa menos de  $m$  gramos, halle el valor de  $m$ .

- (b) Los pesos de las peras siguen una distribución normal de media  $\mu$  gramos y con una desviación típica de  $\sigma$  gramos. Sabiendo que el 8% de estas peras tiene un peso superior a 270 gramos y que el 15% tiene un peso inferior a 250 gramos, halle  $\mu$  y  $\sigma$ .
- (c) Los pesos de las ciruelas siguen una distribución normal de media 80 gramos y con una desviación típica de 4 gramos. Se cogen 5 ciruelas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas pesen más de 82 gramos?

**Solución:**

- (a) (i) Calculamos la probabilidad de que una manzana pese más de 225 g

$$p = p(X > 225) \simeq 0,159$$

Sea  $X$  la variable aleatoria número de manzanas de peso mayor que 225 g- En la binomial  $B(450, p)$  el valor esperado es

$$E(X) = 450 \cdot p \simeq 71,4$$

- (ii) Sabiendo ahora que

$$p(X < m) = 0,70$$

con la función inversa de la función de distribución que encontramos en la calculadora encontramos  $m \simeq 213$ .

- (b) Sea  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Conocemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} p(X > 270) = 0,08 &\implies p(X < 270) = 0,92 \\ p(X < 250) = 0,15 & \end{aligned}$$

Tipificamos la variable y obtenemos

$$\begin{aligned} p\left(Z < \frac{270 - \mu}{\sigma}\right) = 0,92 &\implies \frac{270 - \mu}{\sigma} \simeq -1,04 \\ p\left(Z < \frac{250 - \mu}{\sigma}\right) = 0,15 &\implies \frac{250 - \mu}{\sigma} \simeq 1,41 \end{aligned}$$

Obteniendo los valores con la calculadora y resolviendo el sistema resulta  $\mu \simeq 258$ ,  $\sigma \simeq 8,19$ .

- (c) Sea  $X \sim N(80, 4)$ . Con esta distribución:

$$p = p(X > 82) \simeq 0,309$$

El número de ciruelas que pesan más de 82 g sigue en este caso una binomial  $B(5, p)$  con la probabilidad  $p$  calculada anteriormente. La probabilidad que nos piden es:

$$p(X = 3) \simeq 0,140$$

## 17. Variable aleatoria. Probabilidad. Grupo Z,

**Ejercicio 1.** Los sucesos  $A$  y  $B$  son tales que  $p(A) = \frac{2}{5}$ ,  $p(B) = \frac{11}{20}$  y  $p(A | B) = \frac{2}{11}$ .

- (a) Halle  $p(A \cap B)$ .
- (b) Halle  $p(A \cup B)$ .

(c) Indique, dando una razón, si los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

**Solución:**

$$(a) p(A \cap B) = p(B)p(A | B) = \frac{11}{20} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{10}$$

$$(b) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} - \frac{1}{10} = \frac{17}{20}$$

$$(c) p(A) \cdot p(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \neq p(A \cap B). \text{ No son independientes.}$$

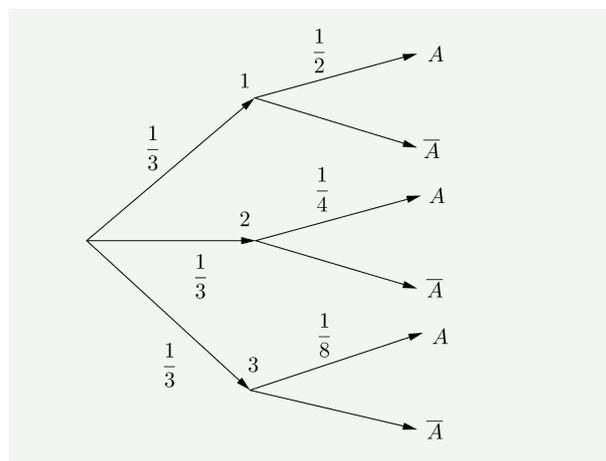

---

**Ejercicio 2.** Una bolsa contiene tres bolas numeradas con los números 1, 2 y 3 respectivamente. Bill elige una de estas bolas al azar y toma nota del número que aparece en la bola seleccionada. A continuación lanza al aire ese número de monedas equilibradas.

(a) Calcule la probabilidad de que no salga ninguna cara.

(b) Sabiendo que no ha salido ninguna cara, halle la probabilidad de que el número de monedas lanzadas haya sido igual a dos.

**Solución:**



Sea  $A$  el suceso consistente en no sacar ninguna cara al lanzar las monedas.

$$(a) p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

$$(b) p(2 | A) = \frac{p(2 \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7}$$


---

**Ejercicio 3.** La variable aleatoria  $X$  tiene una distribución  $B(30, p)$ . Sabiendo que  $E(X) = 10$ , halle:

(a) el valor de  $p$ ;

(b)  $p(X = 10)$ ;

(c)  $p(X \geq 15)$ .

**Solución:**

(a) Puesto que  $30p = 10$  resulta  $p = 1/3$ .

(b) En la distribución binomial  $B(30, \frac{1}{3})$ :

$$p(X = 10) \simeq 0,153$$

(c) Con la misma distribución:

$$p(X \geq 15) = 1 - p(X \leq 14) \simeq 0,0435$$

**Ejercicio 4.** *Un estudiante llega a un centro escolar  $X$  minutos después de las 08:00, donde  $X$  se supone que se distribuye normalmente. En un día particular se observa que el 40% de los estudiantes llegan antes de las 08:30 y un 90% llegan antes de las 08:55.*

(a) *Calcule la media y la desviación típica de  $X$ .*

(b) *El centro cuenta con 1200 estudiantes y las clases empiezan a las 09:00. Estimar el número de estudiantes que llegarán tarde ese día.*

(c) *Maelis no ha llegado a las 08:30. Calcule la probabilidad de que llegue tarde.*

(d) *A las 15:00 se acaban las clases y se supone que la salida de los estudiantes del centro sigue una distribución de Poisson. Una media de 24 estudiantes sale del centro escolar cada minuto. Calcule la probabilidad de que al menos 700 estudiantes hayan salido antes de las 15:30.*

(e) *En un año hay 200 días lectivos. Si  $Y$  representa el número de días del año escolar en que al menos 700 estudiantes salen antes de las 15:30, calcule*

(i)  $E(Y)$ ;

(ii)  $p(Y > 150)$ .

**Solución:**

(a) Sea  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Para determinar los parámetros de la distribución tenemos las siguientes probabilidades:

$$p(X < 30) = 0,40 \implies p\left(Z < \frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 0,40$$

$$p(X < 55) = 0,90 \implies p\left(Z < \frac{55 - \mu}{\sigma}\right) = 0,90$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos aproximadamente:

$$\frac{30 - \mu}{\sigma} = -0,253$$

$$\frac{55 - \mu}{\sigma} = 1,28$$

Resolviendo el sistema se obtiene  $\mu \simeq 34,1$  y  $\sigma \simeq 16,3$ .

(b) La probabilidad de llegar tarde es:

$$p = p(X > 60) \simeq 0,0561$$

y el número esperado de los que llegarán tarde:

$$1200 * p \simeq 67,3$$

(c) La probabilidad que nos piden es

$$p(X > 60 | X > 30) = \frac{p(X > 60)}{p(X > 30)} \simeq 0,0935$$

- (d) La media en media hora de la distribución de Poisson es  $24 \cdot 30 = 720$ . Tenemos una distribución  $Po(720)$ .

$$p(X \geq 700) = 1 - p(X \leq 699) \simeq 0,777$$

- (e) Ahora tenemos una distribución binomial  $B(200, p)$  donde  $p$  es la probabilidad calculada en el apartado anterior.

(i)  $E(Y) = 200p \simeq 155$

(ii)  $p(Y > 150) = 1 - p(Y \leq 150) \simeq 0,797$

**Ejercicio 5.** *Un ferry transporta coches para atravesar un río. Hay un tiempo fijo de  $T$  minutos entre las travesías. La llegada de coches al embarcadero sigue una distribución de Poisson con una media de un coche cada cuatro minutos. Sea  $X$  el número de coches que llegan en  $T$  minutos.*

- (a) *Calcular  $T$  aproximando a los minutos si  $p(X \leq 3) = 0,6$*
- (b) *Se decide que el tiempo entre travesías  $T$  va a ser de 10 minutos. El ferry puede transportar un máximo de 3 coches en cada viaje. Un día, todos los coches que esperan a las 13:00 entran en el ferry. Calcular la probabilidad de que todos los coches que lleguen en los próximos 20 entren bien en el ferry de las 13:10 o bien en el de las 13:20.*

**Solución:**

- (a) Si la media de llegada de coches es una cada cuatro minutos, en  $T$  minutos la media será  $T/4$ . La variable  $X$  sigue entonces una distribución  $Po\left(\frac{T}{4}\right)$ . Entonces

$$e^{-\frac{T}{4}} \left( 1 + \frac{T}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{T}{4}\right)^3 \right) = 0,6$$

Resolviendo la ecuación se obtiene  $T \simeq 12,8$ .

- (b) Para que todos los coches entren en los dos ferrys deben llegar seis o menos. En 20 minutos la media de coches que llegan es 5. Entonces  $X \sim Po(5)$  y

$$p(X \leq 6) \simeq 0,762$$

Pero esta condición no es suficiente. Si llegan 4, 5 o 6 coches en los segundos 10 minutos no podrán subir en el ferry. Sea  $X_1$  el número de coches que llegan en los primeros 10 minutos y  $X_2$  el número de coches que llegan en las siguientes 10 minutos. Habrá que restar a la probabilidad calculada:

$$p(X_1 \leq 2) \cdot p(X_2 = 4)$$

$$p(X_1 \leq 1) \cdot p(X_2 = 5)$$

$$p(X_1 = 0) \cdot p(X_2 = 6)$$

Estas probabilidades se calculan por una Poisson  $Po(2,5)$  puesto que la media de llegada de coches en 10 minutos es 2,5. La suma de esta probabilidades es:

$$p = p(X_1 \leq 2) \cdot p(X_2 = 4) + p(X_1 \leq 1) \cdot p(X_2 = 5) + p(X_1 = 0) \cdot p(X_2 = 6) \simeq 0,0941$$

La probabilidad que se pide se obtiene restando las dos probabilidades calculadas. El resultado con tres cifras significativas es 0,668.

five-fingers.es quiere dar las gracias a Daniel Molpeceres por su colaboración en la resolución de este problema.

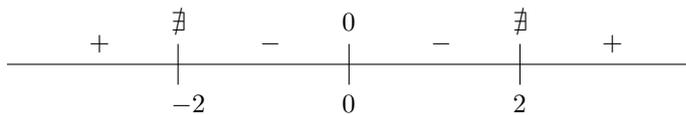
## 18. Sucesiones- Funciones (grupo W).

**Ejercicio 1.** Calcular el dominio de definición de la función

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

**Solución:**

El numerador se anula en  $x = 0$  y el denominador en  $x = -2$  y  $x = 2$ . El signo de la fracción está dado en el siguiente esquema:



El dominio de la función es

$$\text{Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{x^2 - 4} > 0 \right\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

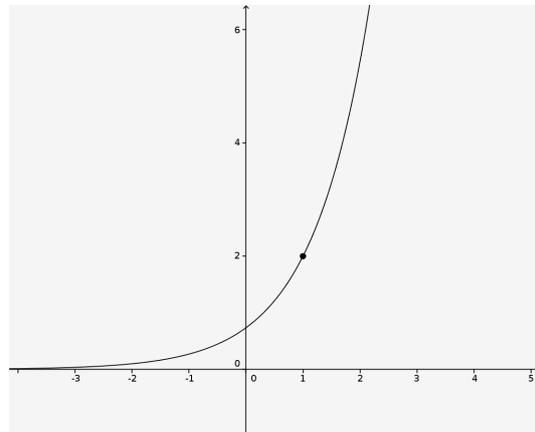
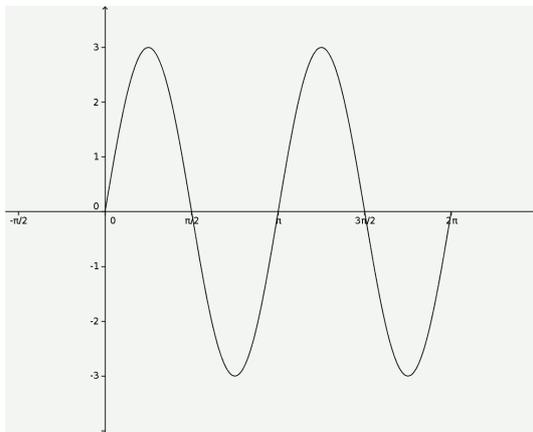

---

**Ejercicio 2.** Representar gráficamente

(a)  $y = 3 \text{ sen } 2x$ ;  $0 \leq x \leq 2\pi$

(b)  $y = 2e^{x-1}$

**Solución:**



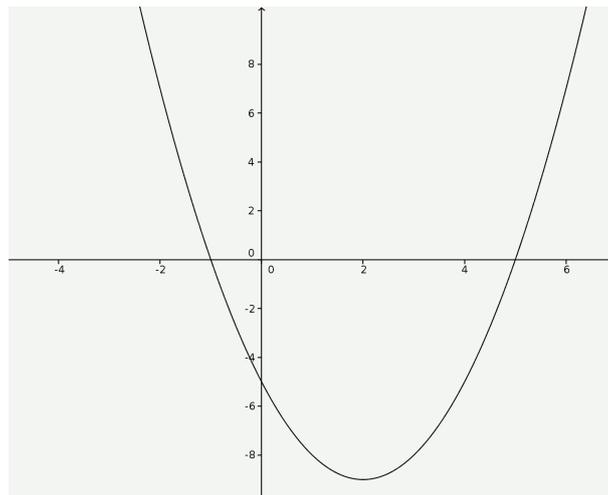
**Ejercicio 3.** Sea la función  $f(x) = x^2 - 4x - 5$ . Representar su gráfica y, a partir de ella, representar:

(a)  $y = |x^2 - 4x - 5|$

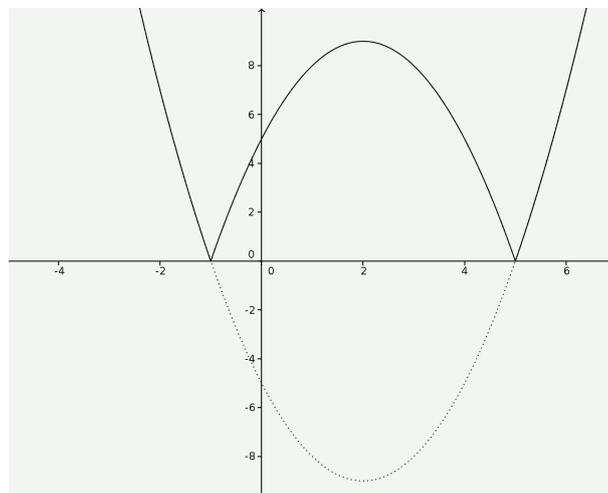
(b)  $y = x^2 - 4|x| - 5$

**Solución:**

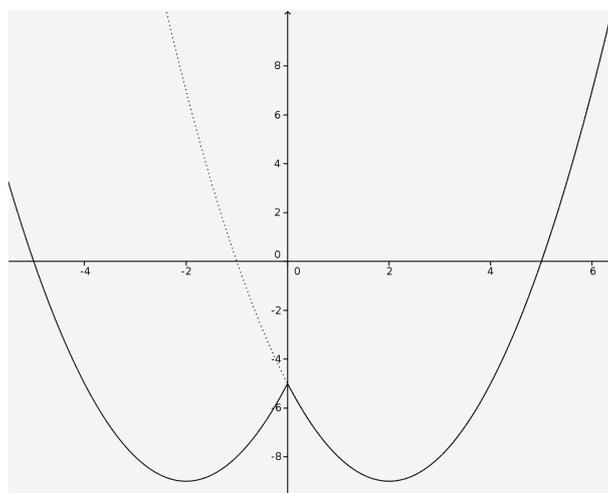
La gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  es:



La gráfica de  $y = |x^2 - 4x - 5|$  es:



La gráfica de  $y = x^2 - 4|x| - 5$  se obtiene reflejando en el eje  $OY$  la parte correspondiente a las  $x$  positivas:



**Ejercicio 4.** La función  $f$  se define mediante

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

(a) Calcular el dominio de  $f$ .

(b) Hallar la función inversa  $f^{-1}$  e indicar el dominio y el recorrido de dicha función.

**Solución:**

El dominio de la función es

$$\text{Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \right\}$$

El signo de la fracción está dado por:



De modo que el dominio es el intervalo  $(-1, 1]$

Para calcular la función inversa, intercambiamos las variables:

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}; \quad x^2 = \frac{1-y}{1+y}$$

y despejamos  $y$ :

$$x^2(1+y) = 1-y; \quad y = f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

El recorrido de esta función es  $(-1, 1]$  (el dominio de  $f$ ). Su dominio es  $\mathbb{R}$ .

---

**Ejercicio 5.** En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es  $-6$ . La suma de los  $n$  primeros términos de esta progresión es negativa. Halle el menor valor de  $n$ .

**Solución:**

Teniendo en cuenta  $a_n = 1000 - 6(n-1) = 1006 - 6n$ :

$$S_n = \frac{(1000 + 1006 - 6n)n}{2} < 0; \quad 2006 - 6n < 0$$

La raíz positiva es 334,33. El menor número es  $n = 335$ .

---

**Ejercicio 6.** Calcular los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^x$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - 6x + 1} - x \right)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

**Solución:**

(a) Aplicando la aproximación  $u^v = e^{(u-1)v}$ , válida cuando  $u$  tiende a 1 y  $v$  a  $\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\frac{2x+1}{2x-1}-1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{(2x+1-2x+1)x}{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{2x-1}} = e$$

(b) El límite es igual a 0.

(c) Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 6x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - 6x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 6x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 6x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{2x} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(d) Aplicando las aproximaciones  $\sin x \sim x$  y  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$


---

**Ejercicio 7.** Sean las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$$

(a) Explicar qué transformaciones permiten pasar de  $f(x)$  a  $g(x)$ .

(b) Representar la curva  $y = g(x)$  indicando sus asíntotas y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

**Solución:**

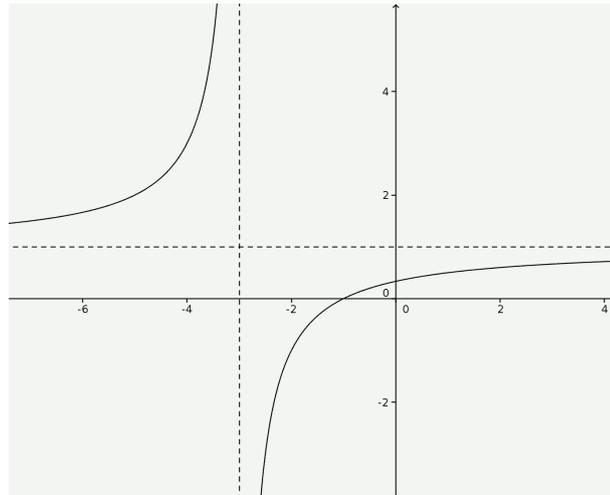
(a) Pueden aplicarse sucesivamente las siguientes transformaciones:

$$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{x+3} \longrightarrow \frac{2}{x+3} \longrightarrow -\frac{2}{x+3} \longrightarrow 1 - \frac{2}{x+3}$$

Es decir:

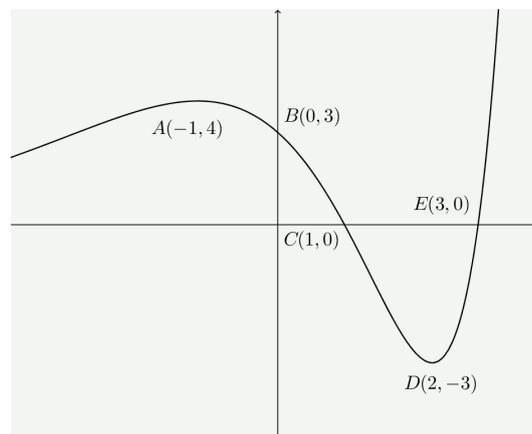
- Traslación en el eje  $OX$
- Cambio de escala en el eje  $OY$
- Simetría respecto a  $OX$
- Traslación en el eje  $OY$

(b) Es una función de proporcionalidad inversa. La gráfica es:



Las asintotas son las rectas  $y = 1$  y  $x = -3$ . Los puntos de intersección con los ejes son  $(-1, 0)$  y  $(0, \frac{1}{3})$ .

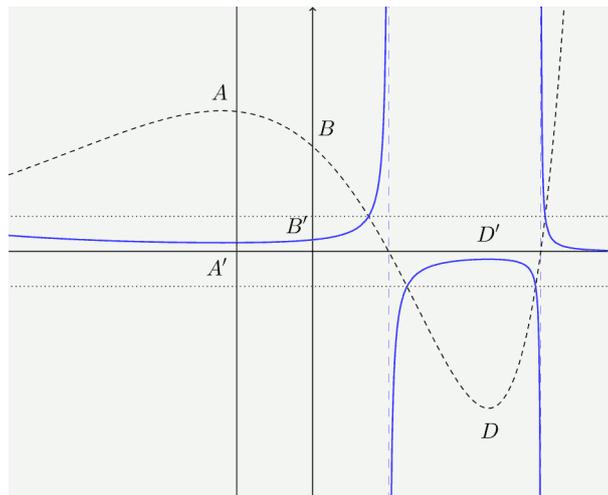
**Ejercicio 8.** A continuación se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ , donde  $A$  es un máximo local y  $D$  es un mínimo local e  $y = 1$  (que no aparece representada) es una asíntota horizontal cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ .



Dibuje aproximadamente la gráfica de  $y = \frac{1}{f(x)}$  mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $D$ , rotulándolos  $A'$ ,  $B'$  y  $D'$  respectivamente, y las ecuaciones de todas las asíntotas.

**Solución:**

Las asíntotas verticales son las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$ . Las asíntotas horizontales son  $y = 1$  (por la izquierda) e  $y = 0$  por la derecha.



## 19. Sucesiones. Funciones (grupo Z).

**Ejercicio 1.** La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.

- (a) Halle el primer término y la diferencia común.  
 (b) Halle el menor valor de  $n$  para el cual la suma de los  $n$  primeros términos es mayor que 600.

**Solución:**

- (a) La suma de los 16 primeros términos es:

$$212 = \frac{8 - 4d + 8 + 11d}{2} n; \quad \frac{212}{8} = 16 + 7d$$

y de aquí  $d = \frac{3}{2}$  y  $a_1 = 2$ .

- (b) Debe cumplirse que:

$$\frac{2 + 2 + \frac{3}{2}(n-1)}{2} n > 600; \quad 3n^2 + 5n - 2400 > 0$$

Resolviendo la inequación resulta que debe ser  $n > 27,5$  de modo que el número de términos más pequeño que cumple la condición es  $n = 28$ .

**Ejercicio 2.** La suma del segundo y el tercer término de una progresión geométrica es igual a 96. La suma de los infinitos términos de esta progresión es igual a 500. Escriba una ecuación cuyas soluciones sean los valores posibles de la razón común.

**Solución:**

Llamemos  $a$  al primer término y  $r$  a la razón. Tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} ar + ar^2 = 96 \\ \frac{a}{1-r} = 500 \end{cases}; \quad 500(1-r)r(1+r) = 96$$

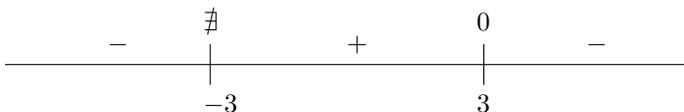
**Ejercicio 3.** Calcular el dominio de definición de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$$

Calcular la inversa de esta función.

**Solución:**

Las raíces del numerador y del denominador de la fracción son 3 y  $-3$  respectivamente. El signo de la fracción según los valores de  $x$  está dado por



Entonces:

$$\text{Dom } f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-x}{3+x} \geq 0 \right\} = (-3, 3]$$

Para calcular la función inversa intercambiamos las variables:

$$x = \sqrt{\frac{3-y}{3+y}}; \quad x^2 = \frac{3-y}{3+y}$$

Despejamos:

$$x^2(3+y) = 3-y \implies y = f^{-1}(x) = \frac{3-3x^2}{1+x^2}$$

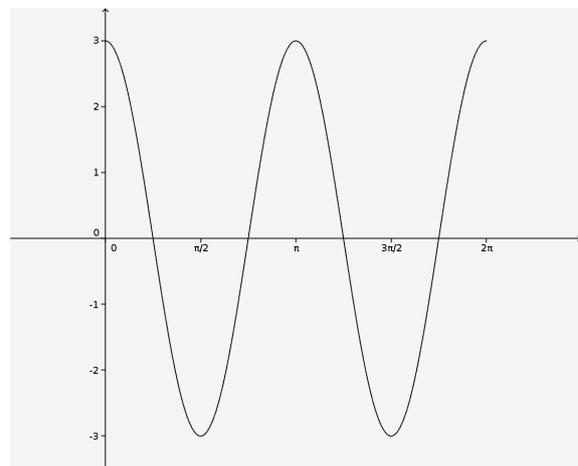
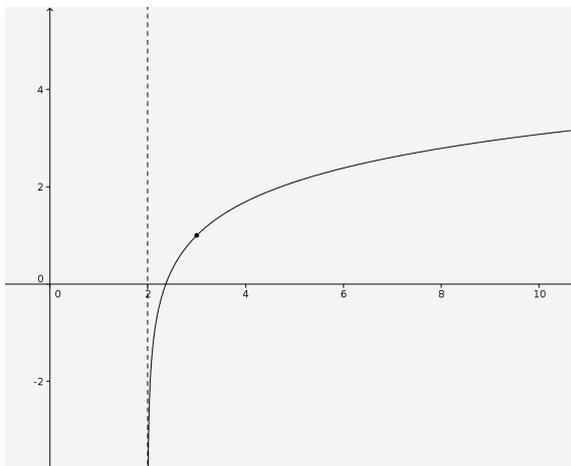

---

**Ejercicio 4.** Dibujar el gráfico de las funciones

(a)  $y = 1 + \ln(x-2)$

(b)  $y = 3 \cos 2x; \quad x \in [0, 2\pi]$ .

**Solución:**



**Ejercicio 5.** Calcular las asíntotas de las curvas

(a)  $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2}$

(b)  $y = e^{\frac{1}{x}}$

**Solución:**

(a) Hay una asíntota vertical  $x = -2$  ya que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} = \infty$$

La pendiente de la asíntota oblicua es

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

y la ordenada en el origen

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

La asíntota oblicua es  $y = x + 4$

(b) La recta  $x = 0$  es una posible asíntota vertical. Vamos a comprobarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty$$

Así pues,  $x = 0$  es una asíntota vertical pero solo por la derecha. Por la izquierda la función presenta una discontinuidad evitable en  $x = 0$ .

La recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal en  $+\infty$  y en  $-\infty$  puesto que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

**Ejercicio 6.** Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{2x}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left( \frac{2x+3}{2x-1} - 1 \right) 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x+3-2x+1}{2x-1} \cdot 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{8x}{2x}} \\ &= e^4 \end{aligned}$$

Hemos aplicado las aproximaciones  $\operatorname{sen} x \sim x$  y  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  cuando  $x$  tiende a cero y  $u^v \sim e^{(u-1)v}$  cuando  $u$  tiende a 1 y  $v$  tiende a infinito.

**Ejercicio 7.** Definir discontinuidad evitable y poner un ejemplo.

**Solución:**

La función  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable en  $x = x_0$  si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

pero, o bien no existe  $f(x_0)$  o bien el límite es distinto de  $f(x_0)$ .

Por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

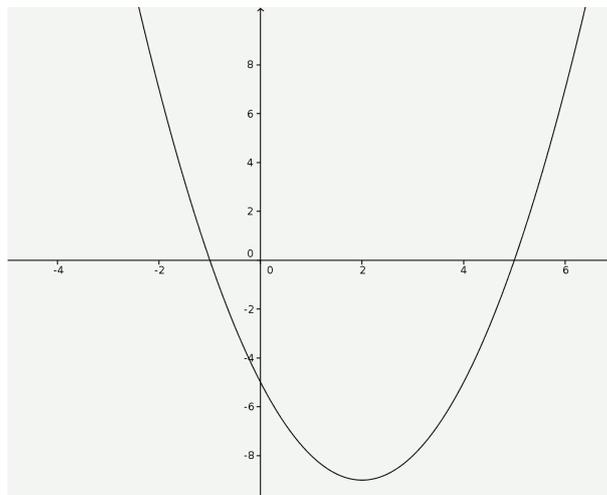
no existe en  $x = 0$  y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

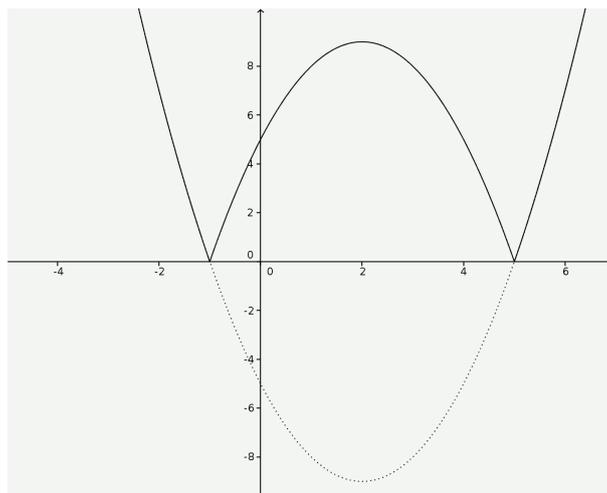
**Ejercicio 8.** Dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = |x^2 - 4x - 5|$  e  $y = x^2 - 4|x| - 5$ .

**Solución:**

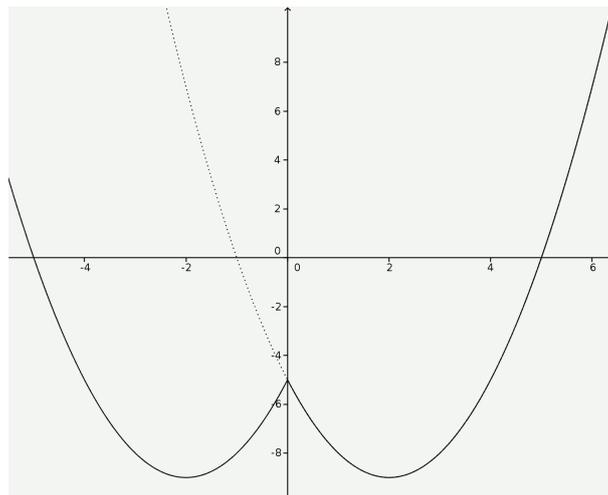
La gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  es:



La gráfica de  $y = |x^2 - 4x - 5|$  es:



La gráfica de  $y = x^2 - 4|x| - 5$  se obtiene reflejando en el eje  $OY$  la parte correspondiente a las  $x$  positivas:



**Ejercicio 9.** Sean las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$$

- (a) Explicar qué transformaciones permiten pasar de  $f(x)$  a  $g(x)$ .  
 (b) Representar la curva  $y = g(x)$  indicando sus asíntotas y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

**Solución:**

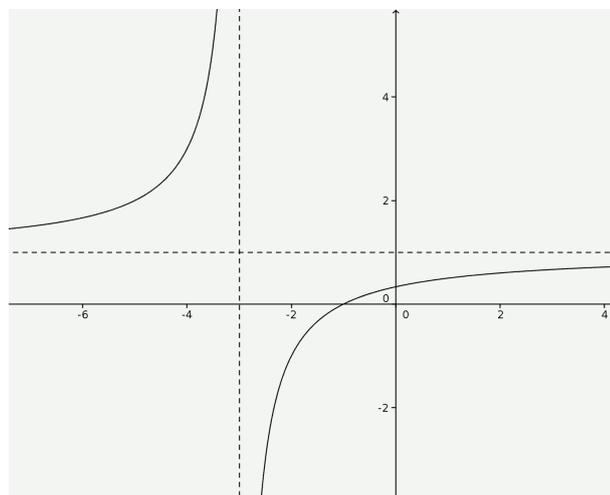
- (a) Pueden aplicarse sucesivamente las siguientes transformaciones:

$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x+3} \rightarrow \frac{2}{x+3} \rightarrow -\frac{2}{x+3} \rightarrow 1 - \frac{2}{x+3}$$

Es decir:

- Traslación en el eje  $OX$
- Cambio de escala en el eje  $OY$
- Simetría respecto a  $OX$
- Traslación en el eje  $OY$

- (b) Es una función de proporcionalidad inversa. La gráfica es:



Las asíntotas son las rectas  $y = 1$  y  $x = -3$ . Los puntos de intersección con los ejes son  $(-1, 0)$  y  $(0, \frac{1}{3})$ .

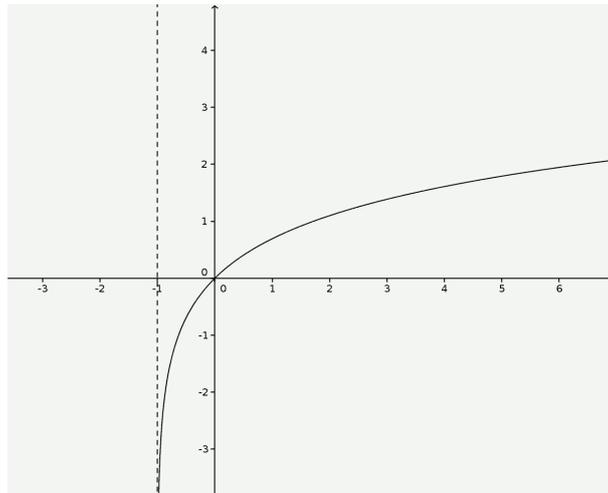
---

**Ejercicio 10.** Representar la curva

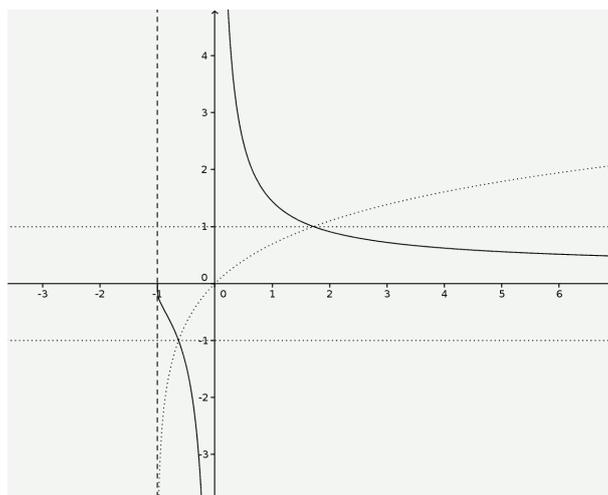
$$y = \frac{1}{\ln(x+1)}$$

**Solución:**

Primero representamos la curva  $y = \ln(x+1)$  trasladando  $y = \ln x$  una unidad hacia la izquierda:



Y después representamos la recíproca  $y = \frac{1}{\ln(x+1)}$ :



## 20. Sucesiones. Funciones (segundo examen).

**Ejercicio 1.** Definir los distintos tipos de discontinuidad que puede presentar una función.

**Solución:**

La función  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable en  $x = x_0$  si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

pero, o bien no existe  $f(x_0)$  o bien el límite es distinto de  $f(x_0)$ .

El punto  $x_0$  es un infinito de la función  $f(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

La función  $f(x)$  tiene un salto finito en  $x_0$  si en ese punto existen los límites laterales pero no coinciden.

La función  $f(x)$  tiene una discontinuidad esencial en  $x_0$  si no existen los límites laterales ni son infinitos.

**Ejercicio 2.** La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.

(a) Halle el primer término y la diferencia común.

(b) Halle el menor valor de  $n$  para el cual la suma de los  $n$  primeros términos es mayor que 600.

**Solución:**

(a) La suma de los 16 primeros términos es:

$$212 = \frac{8 - 4d + 8 + 11d}{2} n ; \quad \frac{212}{8} = 16 + 7d$$

y de aquí  $d = \frac{3}{2}$  y  $a_1 = 2$ .

(b) Debe cumplirse que:

$$\frac{2 + 2 + \frac{3}{2}(n-1)}{2} n > 600 ; \quad 3n^2 + 5n - 2400 > 0$$

Resolviendo la inequación resulta que debe ser  $n > 27,5$  de modo que el número de términos más pequeño que cumple la condición es  $n = 28$ .

**Ejercicio 3.** Calcular los siguientes límites

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{2x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+3}{x+4} \right)^{\frac{2}{x-1}}$

**Solución:**

(a) Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{2x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{2x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{4}$$

(b) Es una indeterminación del tipo  $1^\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+3}{x+4} \right)^{\frac{2}{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\left( \frac{2x+3}{x+4} - 1 \right) \frac{2}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{2x+3-x-4}{x+4} \frac{2}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x-1}{x+4} \frac{2}{x-1}} \\ &= e^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

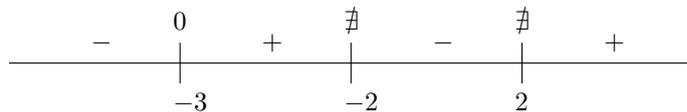

---

**Ejercicio 4.** Calcular el dominio de definición de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-4}}$$

**Solución:**

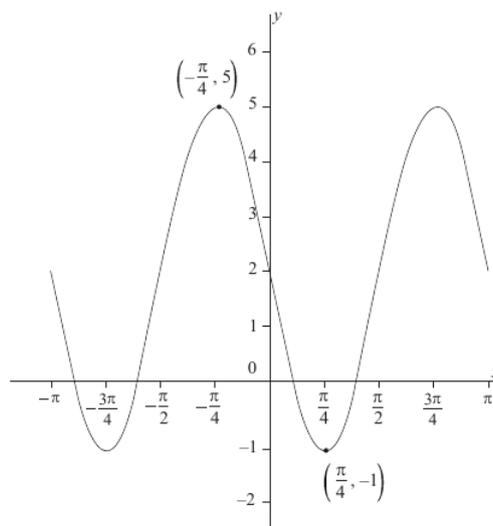
El numerador de la fracción tiene una raíz  $x = -3$  y el denominador tiene raíces  $x = -2$  y  $x = 2$ . El signo de la fracción está dado en el siguiente esquema



El dominio es  $[-3, -2) \cup (2, \infty)$ .

---

**Ejercicio 5.** Una función viene dada por  $f(x) = A \operatorname{sen}(Bx) + C$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , donde  $A, B, C \in \mathbb{Z}$ . En la siguiente figura se representa el gráfico de  $y = f(x)$ .



Halle el valor de  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

**Solución:**

El período es  $\pi$  de modo que  $B = 2$ , la amplitud es 3, pero  $A = -3$  porque se han cambiado los signos de la función ( $3 \sin 2x$  sería positiva entre  $0$  y  $\frac{\pi}{4}$  y negativa entre  $-\frac{\pi}{4}$  y  $0$ ). La onda se ha desplazado dos unidades hacia arriba así que  $C = 2$ .

La función es  $f(x) = -3 \sin(2x) + 2$ .

---

**Ejercicio 6.** *Demostrar que la ecuación*

$$x^3 + x^2 = \cos \pi x - 2$$

*tiene una solución  $c$ . Calcular la parte entera de  $c$ .*

**Solución:**

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x + 2$$

se hace cero para algún valor de  $x$ .

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua para todo } x \\ F(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - \cos(-\pi) + 2 > 0 \\ F(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - \cos(-2\pi) + 2 < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano existe  $c \in (-2, -1)$  tal que  $F(c) = 0$ . El número  $c$  es solución de la ecuación. La parte entera de  $c$  es  $-2$ .

---

**Ejercicio 7.** *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

$$(a) y = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$$

$$(b) y = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3}$$

**Solución:**

(a) Las rectas  $x = -2$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales puesto que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{x^2 - 4} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x^2 - 4} &= \infty \end{aligned}$$

La recta  $y = 0$  es asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 4} = 0$$

(b) Las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$  son asíntotas verticales puesto que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} &= \infty \end{aligned}$$

No hay asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} = \infty$$

Busquemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4x + 3)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = 4$$

La asíntota oblicua es  $y = x + 4$ .

**Ejercicio 8.** Representar gráficamente

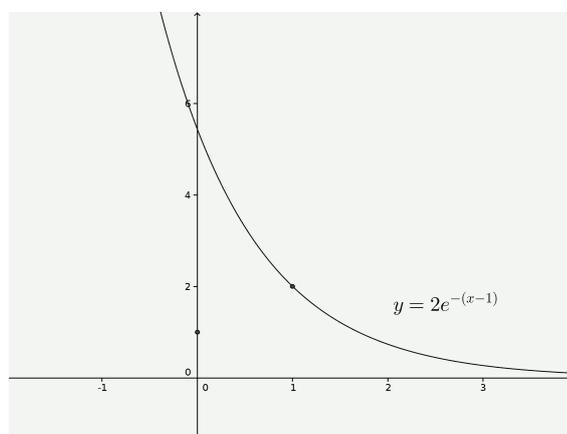
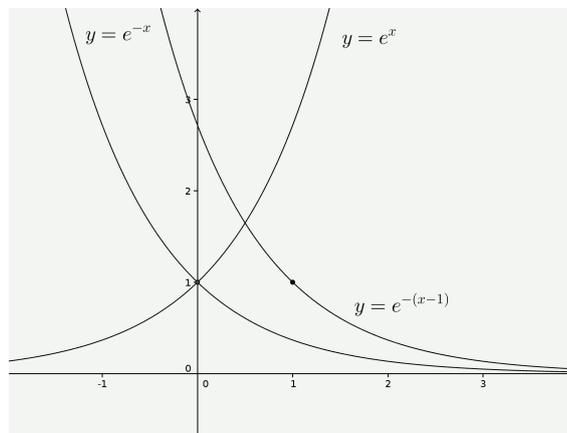
(a)  $y = 2e^{1-x}$

(b)  $y = \frac{1}{\ln(x+2)}$

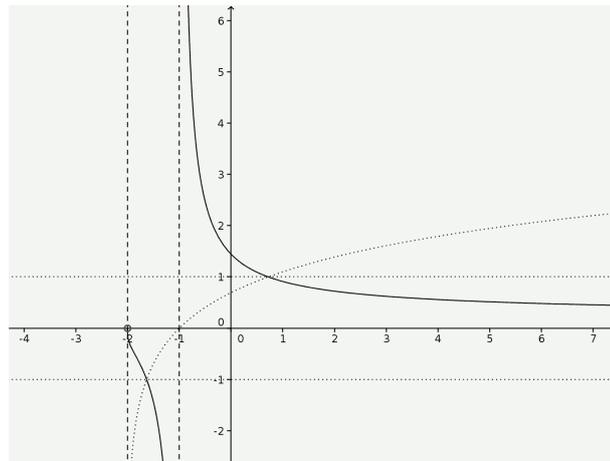
**Solución:**

(a) La curva  $y = 2e^{1-x}$  la obtenemos de  $y = e^x$  mediante las siguientes transformaciones:

- Una simetría respecto a  $OY$ : se obtiene  $y = e^{-x}$
- Una traslación con dirección el eje  $OX$  hacia la derecha: se obtiene  $y = e^{-(x-1)} = e^{1-x}$
- Un cambio de escala en el eje  $OY$  y se obtiene finalmente  $y = 2e^{1-x}$



- (b) La función se obtiene trasladando la gráfica de la función logaritmo dos unidades hacia la izquierda y representando la recíproca:

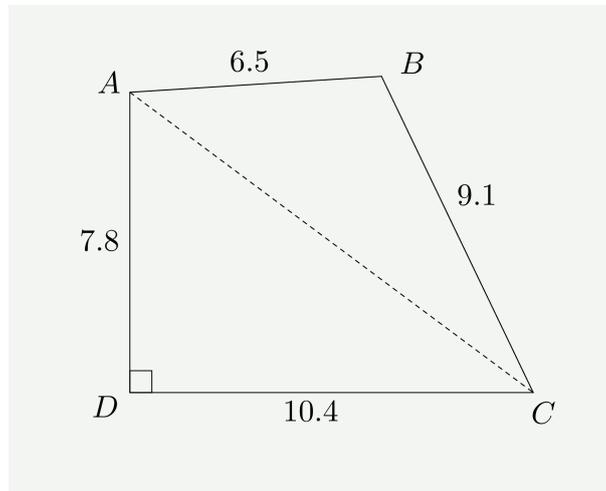


## 21. Examen final

### Ejercicio 1. (7 puntos)

$ABCD$  es un cuadrilátero en el que  $AB = 6,5$ ;  $BC = 9,1$ ;  $CD = 10,4$ ;  $DA = 7,8$  y  $\widehat{CDA} = 90^\circ$ . Halle  $\widehat{ABC}$ , y dé la respuesta aproximando al número de grados más próximo.

#### Solución:



Calculamos  $AC$  por el teorema de Pitágoras y después el ángulo  $\widehat{ABC}$  por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 7,8^2 + 10,4^2$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{6,5^2 + 9,1^2 - AC^2}{2 \cdot 6,5 \cdot 9,1}$$

El ángulo es de  $112^\circ$ .

---

### Ejercicio 2. (7 puntos)

Una variable aleatoria  $X$  sigue una distribución normal de media 3 y varianza igual a  $2^2$ .

- Halle  $p(0 \leq X \leq 2)$ .
- Halle  $p(|X| > 1)$ .
- Sabiendo que  $p(X > c) = 0,44$ , halle el valor de  $c$ .

#### Solución:

Tenemos que  $X \sim N(3, 2)$ . En esta distribución:

- $p(0 \leq X \leq 2) \simeq 0,242$
  - $p(|X| > 1) = 1 - p(-1 < X < 1) \simeq 0,864$
  - $p(X > c) = 0,44 \implies p(X < c) = 0,56$ . Entonces,  $c \simeq 3,30$ .
-

**Ejercicio 3.** (7 puntos)

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 2 \\ \ln x^2 + \ln y^3 = 7 \end{cases}$$

**Solución:**

El sistema equivale a

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = e^2 \\ x^2 y^3 = e^7 \end{cases} \quad ; \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} y = xe^2 \\ x^2 y^3 = e^7 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución resulta  $x = \sqrt[5]{e}$ ,  $y = e^2 \sqrt[5]{e}$ .

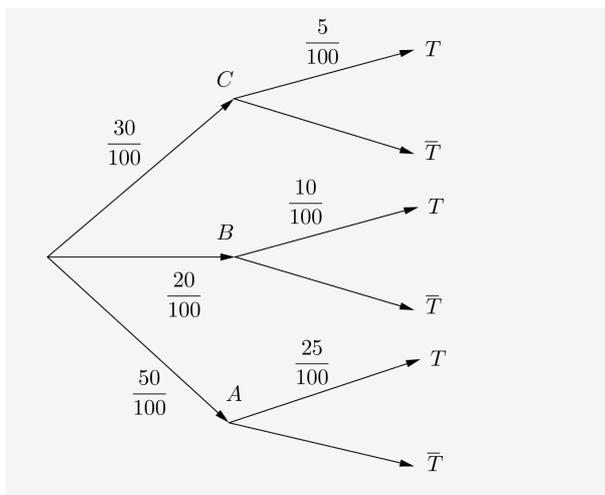
También podría resolverse el sistema escribiéndolo como:

$$\begin{cases} -\ln x + \ln y = 2 \\ 2 \ln x + 3 \ln y = 7 \end{cases}$$


---

**Ejercicio 4.** (7 puntos)

Josie tiene tres formas de ir al colegio. Un 30% de las veces va en coche, un 20% de las veces va en bicicleta y un 50% de las veces va andando. Cuando va en coche, Josie llega tarde el 5% de las veces. Cuando va en bicicleta, llega tarde el 10% de las veces. Cuando va andando, llega tarde el 25% de las veces. Sabiendo que llegó a la hora, halle la probabilidad de que haya ido en bicicleta.

**Solución:**

$$P(B | \bar{T}) = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{30}{100} \cdot \frac{95}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{75}{100}} = \frac{1800}{8400} = \frac{3}{14}$$


---

**Ejercicio 5.** (7 puntos)

La función  $f$  se define mediante

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad -1 < x \leq 1.$$

Halle la función inversa  $f^{-1}$  e indique el dominio y el recorrido de dicha función.

**Solución:**

Intercambiamos las variables:

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}; \quad x^2 = \frac{1-y}{1+y}; \quad (1+y)x^2 = 1-y$$

y despejando

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

El recorrido de esta función es el intervalo  $(-1, 1]$ . El dominio es  $\mathbb{R}$ .

---

**Ejercicio 6.** (10 puntos)

Una empresa fabrica láminas de vidrio rectangulares de 5 metros cuadrados de área. Durante el proceso de fabricación de estas láminas de vidrio aparecen defectos, que se producen a razón de 0,5 por cada 5 metros cuadrados. Se supone que el número de defectos por lámina de vidrio sigue una distribución de Poisson.

(a) Halle la probabilidad de que una lámina de vidrio elegida al azar contenga al menos un defecto.

Las láminas de vidrio que no tienen ningún defecto generan un beneficio de \$5. Las láminas de vidrio que tienen al menos un defecto ocasionan una pérdida de \$3.

(b) Halle el beneficio esperado,  $P$  en dólares, que se obtiene por cada lámina de vidrio.

Esta empresa también fabrica láminas de vidrio más grandes, de 20 metros cuadrados de área. La razón a la que se producen defectos sigue siendo de 0,5 por cada 5 metros cuadrados. Se elige al azar una de estas láminas de vidrio grandes,

(c) Halle la probabilidad de que no contenga ningún defecto.

**Solución:**

(a) Si  $X$  representa el número de defectos de la lámina  $X \sim \text{Po}(0,5)$ :

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) \simeq 0,393$$

(b) El valor esperado de  $P$  es:

$$E(P) = 5p(X = 0) - 3p(X \geq 1) \simeq 1,85\$$$

(c) Sea  $Y$  la variable aleatoria que representa el número de defectos de la lámina. Ahora  $Y \sim \text{Po}(2)$ .

$$p(Y = 0) \simeq 0,135$$


---

**Ejercicio 7.** (10 puntos)

Utilice la inducción matemática para demostrar que  $n(n^2 + 5)$  es divisible entre 6 para  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Solución:**

– La propiedad se cumple para  $n = 1$ .

- Supongamos que se cumple para  $n = k$ :

$$k(k^2 + 5) = \dot{6}$$

y veamos que, en ese caso, también se cumple para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} (k+1)[(k+1)^2 + 5] &= (k+1)(k^2 + 2k + 1 + 5) \\ &= (k+1)(k^2 + 5 + 2k + 1) \\ &= k(k^2 + 5) + k(2k + 1) + k^2 + 2k + 6 \\ &= \dot{6} + 3k^2 + 3k \\ &= \dot{6} + 3k(k+1) \\ &= \dot{6} \end{aligned}$$

Hemos aplicado que  $3k(k+1)$  es múltiplo de 6 porque es múltiplo de 3 y, o bien  $k$ , o bien  $k+1$ , es un número par. Si es múltiplo de 2 y de 3 es múltiplo de 6.

- Por el principio de inducción, la propiedad se cumple para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

### Ejercicio 8. (10 puntos)

Considere el desarrollo de  $(1+x)^n$  en potencias ascendentes de  $x$ , donde  $n \geq 3$ .

- (a) Escriba los cuatro primeros términos del desarrollo.

Los coeficientes de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo son términos consecutivos de una progresión aritmética.

- (b) (i) Muestre que  $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$ .  
(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de  $n$ .

#### Solución:

(a)  $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3.$

- (b) (i) Si están en progresión aritmética, la diferencia entre un término y el anterior es siempre la misma:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{n(n-1)}{2} - n \\ n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) &= 3n(n-1) - 6n \\ n^3 - 9n^2 + 14n &= 0 \end{aligned}$$

- (ii) Resolviendo la ecuación:

$$n^3 - 9n^2 + 14n = 0; \quad n(n^2 - 9n + 14) = 0$$

Las soluciones son  $n = 0$ ,  $n = 2$  y  $n = 7$ . a única que satisface las condiciones del problema es  $n = 7$ .

### Ejercicio 9. (25 puntos)

Sea  $w = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ .

- (a) Verifique que  $w$  es una raíz de la ecuación  $z^7 - 1 = 0$ .  
(b) (i) Desarrolle  $(w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6)$ .  
(ii) A partir de lo anterior deduzca que  $1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6 = 0$ .  
(c) Escriba las raíces de la ecuación  $z^7 - 1 = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$  en función de  $w$  y sitúe estas raíces en un diagrama de Argand.

Considere la ecuación cuadrática  $z^2 + bz + c = 0$ , donde  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Las raíces de esta ecuación son  $\alpha$  y  $\alpha^*$  donde  $\alpha^*$  es el número complejo conjugado de  $\alpha$ .

- (d) (I) Sabiendo que  $\alpha = w + w^2 + w^4$ , muestre que  $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$ .  
 (II) Halle el valor de  $b$  y el valor de  $c$ .
- (e) Utilizando los valores de  $b$  y de  $c$  que ha obtenido en el apartado (d)(II), halle la parte imaginaria de  $\alpha$  en forma de radical irracional.

**Solución:**

(a) En efecto

$$\left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 7 \frac{2\pi}{7} + i \operatorname{sen} 7 \frac{2\pi}{7} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$$

(b) (i)

$$\begin{aligned} (w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6) &= w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7-1 \\ &= w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7-1 \\ &= w^7-1 \end{aligned}$$

(ii) Puesto que  $w$  es una raíz séptima de 1:

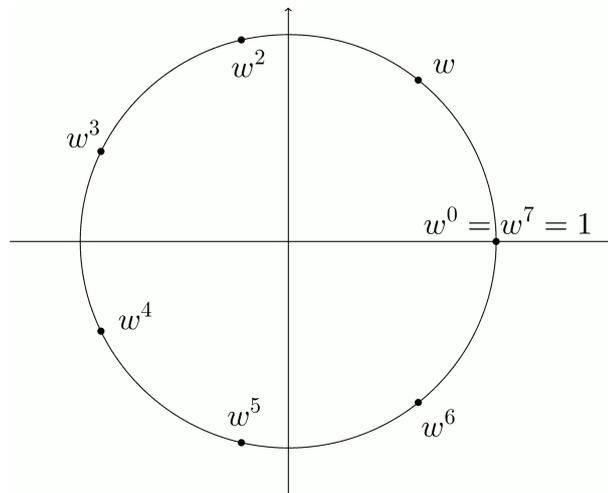
$$w^7 - 1 = 0 \implies$$

$$(w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6) = 0 \implies$$

$$1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6 = 0$$

puesto que  $w-1 \neq 0$

(c) Los afijos de las raíces de la unidad se encuentran sobre la circunferencia de radio 1.



En realidad estas propiedades que estamos demostrando en este problema son propiedades generales de las raíces enésimas de un número complejo:

- La suma de todas las raíces complejas de cualquier número es igual a cero.
- Todas las raíces de 1 pueden expresarse como potencias de una de ellas (en el caso de las raíces de índice primo de cualquiera de ellas). Se dice que forman un grupo cíclico.
- Si  $z$  es una raíz de 1 (o, en general, de cualquier polinomio con coeficientes reales) su conjugado también es raíz.

(d) Esto es así porque  $w$  es el conjugado de  $w^6$ ,  $w^2$  es el conjugado de  $w^5$  y  $w^3$  es el conjugado de  $w^4$ .

(e) El coeficiente  $b$  es la suma de las raíces del polinomio cambiada de signo:

$$b = -(\alpha + \alpha^*) = -(w + w^2 + w^4 + w^6 + w^5 + w^3) = -(-1) = 1$$

El coeficiente  $c$  es igual al producto de las raíces:

$$\begin{aligned} c &= \alpha \cdot \alpha^* = (w + w^2 + w^4)(w^6 + w^5 + w^3) \\ &= w^7 + w^6 + w^4 + w^8 + w^7 + w^5 + w^{10} + w^9 + w^7; \quad w^7 = 1, w^8 = w, \quad w^9 = w^2, w^{10} = w^3 \\ &= 3 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

(f) La ecuación es  $z^2 + z + 2 = 0$ . Sus raíces son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

La parte imaginaria de  $\alpha$  es  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .