Matemáticas 1º Bachillerato.
Exámenes

Curso 2018-2019

1. Radicales. Logaritmos

Ejercicio 1. Definir logaritmo de un número y demostrar la fórmula del cambio de base.

Solución:

Sea a un número positivo distinto de 1. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

También puede definirse de la siguiente forma. Sea a un número positivo, se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base a en esta última igualdad:

$$\begin{aligned}\log_a b^x = \log_a N &\Longrightarrow x \log_a b = \log_a N\\ &\Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_{81} \sqrt[3]{9}$ (b) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}$ (c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$ (d) $\log_4 \frac{1}{8}$

Solución:

(a) $\log_{81} \sqrt[3]{9} = \dfrac{1}{3} \log_{81} 9 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

(b) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} = \log_2 1 - \log_2 \sqrt{8} = -\frac{1}{2} \log_2 8 = -\frac{3}{2}$

(c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 1 - \log_3 \sqrt{3}} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

(d) $\log_4 \dfrac{1}{8} = \dfrac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 4} = \dfrac{-3}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Simplificar:

(a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243}$

(b) $3\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54}$

Solución:

(a)
$$\begin{aligned}&2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243}\\ &= 2\sqrt{4 \cdot 3} - 3\sqrt{25 \cdot 3} + 5\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{81 \cdot 3}\\ &= 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$(b)\qquad \begin{aligned} &3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}\\ &\qquad =3\sqrt[3]{64\cdot 2}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{8\cdot 2}+3\sqrt[3]{27\cdot 2}\\ &\qquad =12\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}\\ &\qquad =13\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el valor de $\log\sqrt[4]{781{,}25}$ conocido $\log 2 = 0{,}3010$.

Solución:

Teniendo en cuenta que

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0{,}3010=0{,}6990$$

y que $78125 = 5^7$:

$$\begin{aligned}\log\sqrt[4]{781{,}25}&=\frac{1}{4}\log 781{,}25\\ &=\frac{1}{4}\log\frac{78125}{100}\\ &=\frac{1}{4}\left(\log 5^7-\log 100\right)\\ &=\frac{1}{4}(7\log 5-2)\\ &=\frac{1}{4}(7\cdot 0{,}6990-2)\\ &=0{,}7232\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Simplificar

$$\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2x+2\sqrt{x^2-2}}\cdot\sqrt[3]{2x-2\sqrt{x^2-2}}&=\sqrt[3]{(2x+2\sqrt{x^2-2})(2x-2\sqrt{x^2-2})}\\ &=\sqrt[3]{4x^2-4(x^2-2)}\\ &=\sqrt[3]{8}\\ &=2\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Despejar x en:

$(a)\ 3^{x^3-1}=5$ $\qquad$ $(b)\ \log_2(2x-1)=4$

Solución:

(a) Despejamos el exponente:

$$x^3 - 1 = \log_3 5\ ; \qquad x^3 = 1 + \log_3 5\ ; \qquad x = \sqrt[3]{1 + \log_3 5}$$

(b) Por la definición de logaritmo:

$$2x - 1 = 2^4\ ; \qquad 2x = 17\ ; \qquad x = \frac{17}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Racionalizar:

(a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ (b) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Solución:

(a) Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{3} + 1$:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$$

(b) Multiplicamos y dividimos por $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})} \\
&= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} \\
&= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + 2 + 2\sqrt{2} - 3} \\
&= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$2^{2x+4} - 5 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$$

Solución:

Llamando $u = 2^x$ y $u^2 = 2^{2x}$ la ecuación puede escribirse:

$$16u^2 - 10u + 1 = 0$$

ecuación que tiene como soluciones:

$$u = 2^x = \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 \frac{1}{8} = -3$$

$$u = 2^x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

♠♠♠♠

2. Logaritmos. Polinomios

Ejercicio 1. Enunciar y demostrar el teorema del factor.

Solución:

Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, este polinomio es divisible por $x - a$.

Al dividir $P(x)$ por $x - a$ obtenemos un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Sustituyendo x por a y teniendo en cuenta que $P(a) = 0$ por ser a raíz:

$$0 = P(a) = (a - a)Q(a) + R \quad \Longrightarrow \quad R = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(x) = (x - a)Q(x)$$

y, por consiguiente, $P(x)$ es divisible por $x - a$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

(*a*) $\log_3 \sqrt{27}$ (*b*) $\log_{49} 343$ (*c*) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ (*d*) $\log_{25} \frac{1}{5}$

Solución:

(*a*) $\log_3 \sqrt{27} = \dfrac{1}{2} \log_3 27 = \dfrac{3}{2}$

(*b*) $\log_{49} 343 = \dfrac{\log_7 343}{\log_7 49} = \dfrac{3}{2}$

(*c*) $\log_9 \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = \log_9 1 - \log_9 \sqrt[3]{3} = -\dfrac{\log_3 \sqrt[3]{3}}{\log_3 9} = -\dfrac{\frac{1}{3}}{2} = -\dfrac{1}{6}$

(*d*) $\log_{25} \dfrac{1}{5} = -\log_{25} 5 = -\dfrac{\log_5 5}{\log_5 25} = -\dfrac{1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Conocido $\log 5 = 0{,}6990$, hallar $\log 12{,}5$ y $\log 0{,}032$.

Solución:

Si $\log 5 = 0{,}6990$:

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 = 0{,}3010$$

Entonces

$$\log 12,5 = \log \frac{125}{10} = \log 5^3 - \log 10 = 3 \log 5 - 1 = 3 \cdot 0{,}6990 - 1 = 1{,}097$$

Y también:

$$\log 0{,}032 = \log \frac{32}{1000} = \log 32 - \log 1000 = \log 2^5 - 3 = 5 \log 2 - 3 = 5 \cdot 0{,}3010 - 3 = -1{,}495$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación: $2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-3}} = 5$

Solución:

Llamando $2^x = u$:

$$\frac{u}{2} + \frac{1}{\frac{u}{8}} = 5 \ ; \qquad \frac{u}{2} + \frac{8}{u} = 5 \ ; \qquad u^2 - 10u + 16 = 0$$

que tiene como soluciones:

$$u = 2^x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 2 = 1$$
$$u = 2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 8 = 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver la ecuación $3\log x - 2\log \frac{x}{3} = 2\log 3 + \log 2$

Solución:

$$3\log x - 2\log \frac{x}{3} = 2\log 3 + \log 2$$
$$3\log x - 2\left(\log x - \log 3\right) = 2\log 3 + \log 2$$
$$3\log x - 2\log x + 2\log 3 = 2\log 3 + \log 2$$
$$\log x = \log 2$$
$$x = 2$$

La solución es válida.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Determinar m con la condición de que el polinomio $2x^4 + 5x^3 + mx^2 + 4$, sea divisible por $x + 3$.

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x + 3$, su valor numérico para $x = -3$ debe ser cero:

$$2\,(-3)^4 + 5(-3)^3 + m(-3)^2 + 4 = 0\ ; \qquad 162 - 135 + 9m + 4 = 0\ ; \qquad m = -\frac{31}{9}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Encontrar el valor de a sabiendo que al dividir $x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4x + 7$ por $x + 2$, da de resto 7.

Solución:

El valor numérico del polinomio para $x = -2$ debe ser 7:

$$(-2)^4 - 3(-2)^3 + (-2)^2 a - 4(-2) + 7 = 7\ ; \qquad 16 + 24 + 4a + 8 = 0\ ; \qquad a = -12$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Factorizar el polinomio

$$9x^4 - 31x^2 - 14x + 8$$

Solución:

Claramente el polinomio tiene la raíz $x = -1$. Aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 9 & 0 & -31 & -14 & 8 \\ -1 & & -9 & 9 & 22 & -8 \\ \hline & 9 & -9 & -22 & 8 & 0 \end{array}$$

y tenemos una primera descomposición:

$$9x^4 - 31x^2 - 14x + 8 = (x + 1)(9x^3 - 9x^2 - 22x + 8)$$

Probamos ahora si $x = 2$ es raíz:

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & -9 & -22 & 8 \\ 2 & & 18 & 18 & -8 \\ \hline & 9 & 9 & -4 & 0 \end{array}$$

Puesto que $x = 2$ es raíz tenemos entonces:

$$9x^4 - 31x^2 - 14x + 8 = (x+1)(9x^3 - 9x^2 - 22x + 8) = (x+1)(x-2)(9x^2 + 9x - 4)$$

Las últimas raíces las calculamos mediante la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 144}}{18} = \frac{-9 \pm 15}{18}$$

y así obtenemos dos nuevas raíces $x = \frac{1}{3}$ y $x = -\frac{4}{3}$. La descomposición queda finalmente:

$$9x^4 - 31x^2 - 14x + 8 = (x+1)(x-2)\, 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (x+1)(x-2)\,(3x-1)\,(3x+4)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. En la ecuación $9x^2 + bx + 28 = 0$, determinar b con la condición de que la diferencia de las raíces de dicha ecuación sea igual a la unidad.

Solución:

Sean las raíces $r + 1$ y r. Puesto que su producto es $\frac{28}{9}$:

$$r(r+1) = \frac{28}{9}\ ; \qquad 9r^2 + 9r - 28 = 0$$

Entonces

$$r = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 1008}}{18} = \frac{-9 \pm 33}{18}$$

y tenemos dos soluciones para r:

$$r = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$r = -\frac{42}{18} = -\frac{7}{3}$$

Puesto que $-\frac{b}{9}$ es la suma de las raíces, tenemos una solución:

$$-\frac{b}{9} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{11}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad b = -33$$

y otra:

$$-\frac{b}{9} = -\frac{7}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -\frac{11}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad b = 33$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Simplificar la fracción

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6}{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}$$

Solución:

El numerador tiene la raíz $x = 1$ y $x = 3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -6 & 13 & -14 & 6 \\ 1 & & 1 & -5 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 8 & -6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 8 & -6 \\ 3 & & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

El polinomio $x^2 - 2x + 2$ es irreducible.

El denominador tiene la raíz $x = 2$:

	1	-4	6	-4
2		2	-4	4
	1	-2	2	0

Podemos escribir la fracción:

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6}{x^3 - 4x^2 + 6x - 4} = \frac{(x-1)(x-3)(x^2-2x+2)}{(x-2)(x^2-2x+2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$$

♠♠♠♠

3. Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular en radianes el ángulo correspondiente a un arco de 23 cm en una circunferencia de radio 12 cm.

Solución:

$$\varphi = \frac{l}{r} = \frac{23}{12} \simeq 1{,}92$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Un triángulo isósceles los lados iguales mide 56 cm y el ángulo desigual 87°. Calcular la longitud del lado desigual.

Solución:

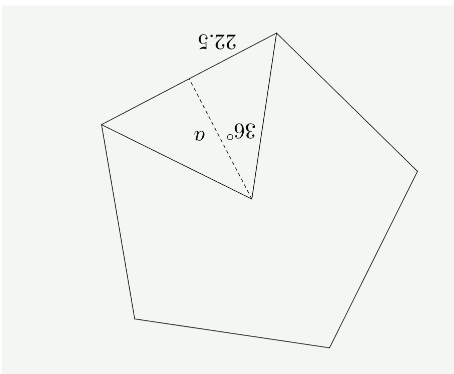
Por el teorema del coseno:

$$l = 56^2 + 56^2 - 2 \cdot 56 \cdot 56 \cdot \cos 87 \simeq 77{,}1 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el área de un pentágono regular de 45 cm de lado.

Solución:



El pentágono puede dividirse en 5 triángulos isósceles en los que el ángulo desigual mide 72° y la base 45 cm. La apotema del pentágono es la altura del triángulo y mide:

$$a = \frac{22{,}5}{\operatorname{tg} 36^{\circ}}$$

El área es igual al perímetro por la apotema dividido entre 2:

$$S = \frac{1}{2}\,5\cdot 45\cdot a = \frac{1}{2}\,5\cdot 45\cdot\frac{22{,}5}{\operatorname{tg}36^{\text{o}}} \simeq 3480\ \text{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. En el triángulo $a = 381$ cm, $b = 290$ cm, $c = 450$ cm, calcular el ángulo C en grados y minutos.

Solución:

Por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{381^2 + 290^2 - 450^2}{2\cdot 381\cdot 290} \quad\Longrightarrow\quad C = \ \arccos\frac{381^2 + 290^2 - 450^2}{2\cdot 381\cdot 290} \simeq 83^{\text{o}}2'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el área del triángulo del problema anterior.

Solución:

El árera es igual a:

$$S = \frac{1}{2}\,ab\operatorname{sen}C \simeq 54800\ \text{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. En un triángulo $A = 46^{\text{o}}$, $a = 18$ cm y $b = 25$ cm. Calcular el ángulo B en grados y minutos.

Solución:

Por el teorema del seno:

$$\frac{18}{\operatorname{sen}46^{\text{o}}} = \frac{25}{\operatorname{sen}B} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen}B = \frac{25\operatorname{sen}46^{\text{o}}}{18}$$

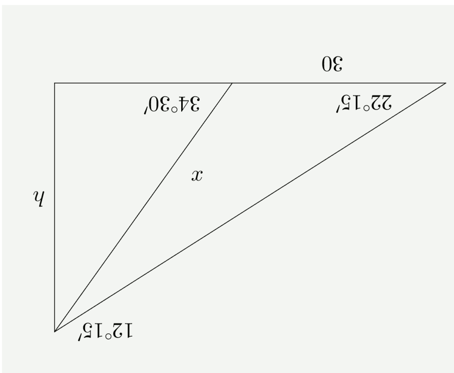
y el ángulo B tiene que ser mayor que el ángulo A puesto que el lado b es mayor que el lado a. Hay entonces dos soluciones:

$$B_1 = 87^{\text{o}}33'\ ; \qquad B_2 = 180^{\text{o}} - B_1 = 92^{\text{o}}27'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de $34^{\text{o}}30'$ y $22^{\text{o}}15'$. Si la distancia entre estos dos puntos es de 30 m, hallar la altura de la torre.

Solución:



De la figura se deduce:

$$\frac{30}{\operatorname{sen} 12^\text{o}15'} = \frac{x}{\operatorname{sen} 22^\text{o}15'} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{30 \operatorname{sen} 22^\text{o}15}{\operatorname{sen} 12^\text{o}15}$$

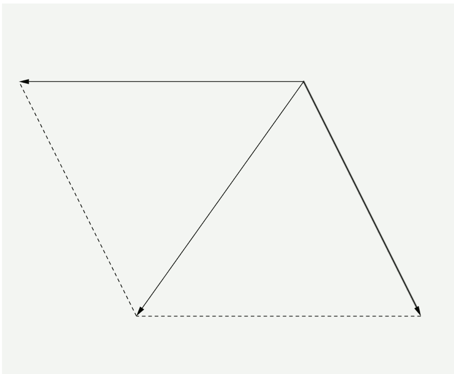
y la altura de la torre es:

$$h = x \operatorname{tg} 34^\text{o}30' \simeq 30{,}3 \text{ m}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular la resultante de dos fuerzas de 120 y 215 kg que forman entre sí un ángulo de $143^\text{o}30'$

Solución:



Por el teorema del coseno:

$$r^2 = 120^2 + 215^2 - 2\cdot 120\cdot 215 \cos(180^\text{o} - 143^\text{o}30') \simeq 138$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. El triángulo ABC tiene un área de 21 cm^2. Los lados b y c tienen una longitud de 11 cm y 6 cm, respectivamente. Hallar los dos posibles valores de la longitud del lado a.

Solución:

Puesto que el área del triángulo es

$$S = \frac{1}{2}\, AB\cdot AC\cdot \operatorname{sen} A \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen} A = \frac{2\cdot 21}{6\cdot 11} = \frac{7}{11}$$

Hay dos ángulo que tienen este valor del seno, uno agudo y otro obtuso, uno con el coseno positivo

$$\cos A = \sqrt{1 - \frac{49}{121}} = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

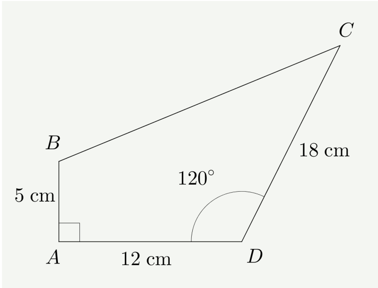
y otro con el coseno negativo $-\frac{6\sqrt{2}}{11}$.

Ahora podemos calcular los dos valores posibles de BC por el teorema del coseno:

$$BC^2 = 6^2 + 11^2 - 2\cdot 6\cdot 11\cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} \quad\Longrightarrow\quad BC \simeq 7{,}43 \text{ cm}$$
$$BC^2 = 6^2 + 11^2 + 2\cdot 6\cdot 11\cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} \quad\Longrightarrow\quad BC \simeq 16{,}1 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$:



Solución:

El área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABD y BDC.

El área del triángulo ABD es:

$$S_1 = \frac{1}{2}\,12 \cdot 5 = 30$$

La hipotenusa de este triángulo mide:

$$BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 5$$

En el triángulo BDC el ángulo D mide:

$$D = 120^{\text{o}} - \text{ artg}\,\frac{5}{12}$$

y el área de este triángulo es:

$$S_2 = \frac{1}{2}\,13 \cdot 18 \cdot \operatorname{sen} D$$

Sumando ambas áreas resulta:

$$S = S_1 + S_2 \simeq 146 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

4. Logaritmos. Polinomios. Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular los siguientes logaritmos:

$(a)\ \log_{25}\frac{1}{125}$ $\qquad(b)\ \log_3\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad(c)\ \log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right)$ $\qquad(d)\ \log_8\frac{4}{\sqrt[5]{16}}$

Solución:

$(a)\ \log_{25}\frac{1}{125} = \frac{\log_5 25}{\log_5 125} = \frac{2}{3}$

$(b)\ \log_3\frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 1 - \log_3\sqrt{3} = 0 - \frac{1}{2}\log_3 3 = -\frac{1}{2}$

$(c)\ \log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{3}\log_2 16 + \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$

$(d)\ \log_8\frac{4}{\sqrt[5]{16}} = \log_8 4 - \frac{1}{5}\log_8 16 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} - \frac{1}{5}\,\frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Factorizar el polinomio $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$

Solución:

Una raíz es $x = -3$:

	4	8	-11	3
-3		-12	12	-3
	4	-4	1	0

Entonces:

$$4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = (x+3)(4x^2 - 4x + 1) = (x+3)(2x-1)^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el valor que deberá tomar m en la ecuación $9x^2 - 18x + m = 0$ para que una de las raíces sea doble que la otra.

Solución:

Por las relaciones de Cardano, la suma de las dos raíces r y $2r$ es:

$$r + 2r = 3r = \frac{18}{9} = 2 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$9 \cdot \frac{4}{9} - 18 \cdot \frac{2}{3} + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4 - 12 + m = 0$$

y, por tanto $m = 8$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el área de un triángulo de lados $a = 31$ cm, $b = 42$ cm y $c = 21$ cm.

Solución:

Calculamos uno de los ángulos por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{42^2 + 21^2 - 31^2}{2 \cdot 42 \cdot 21} \ ; \qquad A \simeq 45^o 9'$$

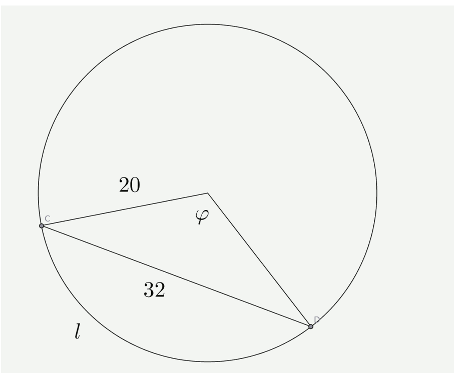
El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A \simeq 313 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. En una circunferencia de radio 20 cm, una cuerda mide 32 cm. Calcular la longitud del arco limitado por la cuerda.

Solución:



Calculamos el ángulo φ:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{16}{20}$$

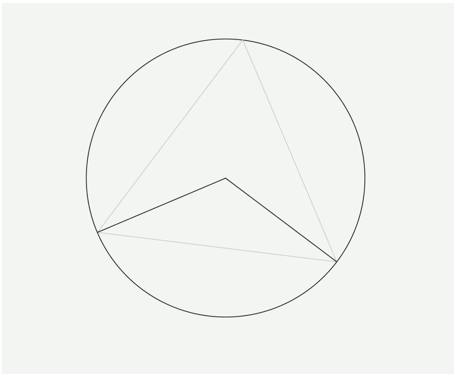
La longitud del arco es igual al radio por el ángulo en radianes:

$$l=20\varphi\simeq 37{,}1\text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de 67 cm de lado.

Solución:



Hay muchas formas de obtenerlo. Por ejemplo por el teorema del seno:

$$\frac{67}{\operatorname{sen}120^{\text{o}}}=\frac{R}{\operatorname{sen}30^{\text{o}}}\quad\Longrightarrow\quad R=\frac{67\operatorname{sen}30}{\operatorname{sen}120}=\frac{67}{\sqrt{3}}\simeq 38{,}7\text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la inecuación

$$\frac{(x-3)^2(x+2)}{1-x^2}\geq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son $x=3$ (doble) y $x=-2$. Las raíces del denominador son $x=-1$ y $x=1$.

Tenemos el siguiente esquema de signos:

	0		$\nexists$		$\nexists$		0	
$+$		$-$		$+$		$-$		$-$
	-2		-1		1		3	

La solución es $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver el sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=3\\ x^2+y^2-2xy=1\end{cases}$$

Solución:

Una manera sencilla de resolver el sistema es la siguiente. La primera ecuación puede escribirse:

$$2x + 3y = 18$$

En cuanto a la segunda ecuación equivale a:

$$(x - y)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x - y = \pm 1$$

Una solución se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

que da $\left(\frac{21}{5}, \frac{16}{5}\right)$. Y la otra:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

de la que se obtiene $(3, 4)$.

♠♠♠♠

5. Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular el área de un pentágono regular de 60 cm de lado.

Solución:

El pentágono puede descomponerse en cinco triángulos isósceles en que la base es el lado y el ángulo desigual es igual a $\frac{360^{\text{o}}}{5} = 72^{\text{o}}$.

La altura de los triángulos es igual a la apotema del polígono:

$$a = \frac{30^{\text{o}}}{\operatorname{tg} 36^{\text{o}}} \simeq 41{,}3 \text{ cm}$$

El área es igual al perímetro por la apotema dividido por dos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot a \simeq 6190 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Obtener el valor exacto de $\cos 75^{\text{o}}$.

Solución:

Por la fórmula del coseno de la suma:

$$\cos 75^{\text{o}} = \cos(45^{\text{o}} + 30^{\text{o}}) = \cos 45^{\text{o}} \cos 30^{\text{o}} - \operatorname{sen} 45^{\text{o}} \operatorname{sen} 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular $\cos 3\alpha$ en función de $\cos \alpha$.

Solución:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el área del triángulo de lados $a = 38$ cm, $b = 16$ cm, $c = 27$ cm.

Calculamos uno de los ángulos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16^2 + 27^2 - 38^2}{2 \cdot 16 \cdot 27} \simeq -0{,}531$$

Entonces:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A \simeq 183 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las soluciones de la ecuación:

$$2 \operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x = 3$$

comprendidas entre $[-\pi, \pi]$

Solución:

$$2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 3$$
$$2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

Tenemos dos soluciones para $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 90^{\text{o}} \pm 360^{\text{o}} k$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 30 \pm 360^{\text{o}} k \qquad \text{o} \qquad x = 150^{\text{o}} \pm 360^{\text{o}} k$$

Las soluciones comprendidas entre -180^{o} y 180^{o} son 30^{o}, 90^{o} y 150^{o}.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (2 puntos) Demostrar la identidad:

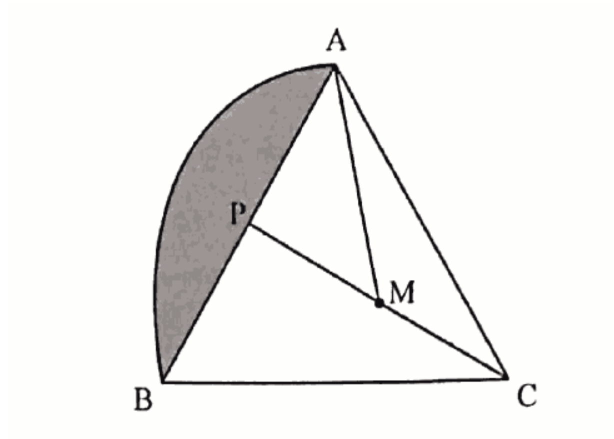
$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Solución:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (2 puntos) Se considera la siguiente figura



Los lados del triángulo equilátero ABC tienen longitudes de 1 m. P es el punto medio de $[AB]$. El arco de circunferencia AB tiene por centro M, el punto medio de $[CP]$.

(a) (I) Hallar AM.
(II) Hallar $A\hat{M}P$ en radianes.

(b) Hallar el área de la región sombreada.

(a) (I) Por ser ABC equilátero de lado 1 m $AP = \frac{1}{2}$ y $PM = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Por el teorema de Pitágoras:

$$AM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \simeq 0{,}661$$

(II) Con los datos anteriores

$$\operatorname{tg} A\hat{M}P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow\quad A\hat{M}P \simeq 0{,}857$$

(b) La fórmula que nos da el área del segmento circular es:

$$S = \frac{1}{2}r^2\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$$

Con los datos anteriores $S \simeq 0{,}158\ \mathrm{m}^2$.

♠♠♠♠

6. Números complejos

Ejercicio 1. Calcular en forma binómica:

$$\frac{1+i}{2-i} + \frac{-3-2i}{1+3i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1+i}{2-i} + \frac{-3-2i}{1+3i} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} \\
&= \frac{2+i+2i+i^2}{4+1} + \frac{-3+9i-2i+6i^2}{1+9} \\
&= \frac{1+3i}{5} + \frac{-9+7i}{10} = \frac{2+6i-9+7i}{10} \\
&= -\frac{7}{10} + \frac{13}{10}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular en forma binómica

$$\frac{(2+i)^2-(1-i)^2}{1-\frac{3}{2}i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{(2+i)^2-(1-i)^2}{1-\frac{3}{2}i} &= \frac{4+4i+i^2-1+2i-i^2}{1-\frac{3}{2}i}\\
&= \frac{3+6i}{1-\frac{3}{2}i} = \frac{6+12i}{2-3i}\\
&= \frac{(6+12i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}\\
&= \frac{12+18i+24i+36i^2}{13}\\
&= \frac{-24+42i}{13} = -\frac{24}{13}+\frac{42}{13}i
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Obtener (sin calculadora) en forma binómica las raíces cuadradas de $21-20i$.

Solución:

Llamamos

$$\sqrt{21-20i} = x+yi \quad\Longrightarrow\quad (x+yi)^2 = 21-20i \;; \quad x^2-y^2+2xyi = 21-20i$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$\begin{cases} x^2-y^2=21\\ 2xy=20 \end{cases}$$

Resolviendo mediante la sustitución $y=-\frac{20}{2x}=-\frac{10}{x}$:

$$x^2-\frac{100}{x^2}=21 \;; \qquad x^4-21x^2-100=0$$

ecuación bicuadrada cuyas soluciones son $x=-5$ y $x=5$. Las raíces son $-5+2i$ y $5-2i$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular en forma binómica $(1-2i)^3$

Solución:

Calculamos en forma binómica:

$$(1-2i)^3 = 1-3\cdot 2i+3\cdot(2i)^2-(2i)^3 = 1-6i-12+8i = -11+2i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular $(1-\sqrt{3})^9$. Expresar el resultado en forma binómica.

Solución:

Escribimos el complejo en forma polar:

$$r=\sqrt{1+3}=2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \;; \quad \varphi = 300^{\circ} \text{ puesto que } \varphi \text{ es del cuarto cuadrante}$$

Entonces:

$$(1-\sqrt{3})^9 = (2_{300})^9 = 512_{2700} = 512_{180^{\text{o}}} = -512$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las raíces cúbicas de $-i$. Expresar el resultado en forma binómica.

Solución:

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^{\text{o}}}}$$

Las raíces tienen módulo 1 y argumentos 90^{o}, 210^{o} y 330^{o}. En forma binómica:

$$z_1 = 1_{90^{\text{o}}} = i$$

$$z_2 = 1_{210^{\text{o}}} = \cos 210^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 210^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = 1_{330^{\text{o}}} = \cos 330^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 330^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular las fórmulas de $\operatorname{sen} 2\varphi$ y $\cos 2\varphi$ a partir de la fórmula de Moivre.

Solución:

Por la fórmula de Moivre:

$$(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 2i\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\operatorname{sen} 2\varphi$$

Igualando partes reales e imaginarias resulta:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi\ ; \qquad \operatorname{sen} 2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$, y el del segundo 5. Hallar estos complejos.

Solución:

Sean los números $w = a + bi$ y $z = c + di$. Puesto que la suma es 6:

$$a + bi + c + di = 6 \quad\Longrightarrow\quad a + c = 6\ ; \quad b + d = 0 \quad\Longrightarrow\quad c = 6 - a\ ; \quad d = -b$$

De modo que $z = 6 - a - bi$. La condición de los módulos nos dice que:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ (6-a)^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos dos soluciones:

$$w = 2 + 3i, \quad z = 4 - 3i \qquad \text{o} \qquad w = 2 - 3i, \quad z = 4 + 3i$$

♠♠♠♠

7. Geometría

Ejercicio 1. Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(-1,5)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

La ecuación en forma punto-pendiente y explícita es:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x-2) \ ; \qquad 3y - 9 = -2x + 4 \ ; \qquad 3y = -2x + 13 \ ; \qquad y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{13}{3}$$

La ordenada en el origen es $\frac{13}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Escribir la ecuación de la recta $3x - 4y + 12 = 0$ en forma segmentaria.

Solución:

$$3x - 4y = -12 \ ; \qquad \frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = 1 \ ; \qquad \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular en forma explícita la perpendicular a la recta $2x - y + 5 = 0$ por el punto $P(7,-3)$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente 2. Por consiguiente, la perpendicular tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. La ecuación de la perpendicular es:

$$y + 3 = -\frac{1}{2}\,(x-7) \ ; \qquad y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{7}{2} - 3 \ ; \qquad y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(1,2)$ y forman con $2x - 3y + 4 = 0$ un ángulo cuya tangente vale 3.

Solución:

La pendiente de la recta que nos dan es $\frac{2}{3}$. Sea m la pendiente de la recta que buscamos. Por la fórmula del ángulo entre dos rectas se cumple que:

$$3 = \left| \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2m}{3}} \right| = \left| \frac{3m-2}{3+2m} \right|$$

Tenemos dos soluciones para la pendiente:

$$\frac{3m-2}{3+2m} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 3m - 2 = 9 + 6m \ ; \qquad m = -\frac{11}{3}$$

$$\frac{3m-2}{3+2m} = -3 \quad \Longrightarrow \quad 3m - 2 = -9 - 6m \ ; \qquad m = -\frac{7}{9}$$

Las rectas son:

$$y - 2 = -\frac{11}{3}\,(x-3) \ ; \qquad y - 2 = -\frac{7}{9}\,(x-3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular las paralelas a la recta $5x - 12y + 3 = 0$ que distan de ella 4 unidades.

Solución:

Las paralelas tienen una ecuación de la forma $5x - 12y + C = 0$. Si la distancia es 4:

$$\frac{|3 - C|}{\sqrt{25 + 144}} = 4 \ ; \qquad |3 - C| = 52$$

Hay dos soluciones:

$$3 - C = 52 \quad \Longrightarrow \quad C = -49$$
$$3 - C = -52 \quad \Longrightarrow \quad C = 55$$

Las rectas son $5x - 12y - 49 = 0$ y $5x - 12y + 55 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el punto de la recta $x - 2y + 1 = 0$ que equidista de $P(3, 1)$ y $Q(2, -5)$.

Solución:

Si equidista de los dos puntos debe estar en su mediatriz:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 5)^2 \ ; \qquad -6x + 9 - 2y + 1 = -4x + 4 + 10y + 25 \ ; \qquad 2x + 12y + 19 = 0$$

Como también se encuentra en la recta $x - 2y + 1 = 0$, el punto que buscamos debe ser la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 12y + 19 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos el punto $P(-\frac{25}{8}, -\frac{17}{16})$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $P(4, 3)$ respecto de la recta $3x + 2y = 5$.

Solución:

– La perpendicular a la reta por el punto es:

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 4) \ ; \qquad 3y - 9 = 2x - 8 \ ; \qquad 2x - 3y + 1 = 0$$

– La intersección de la recta y la perpendicular es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

El punto de intersección es el punto $M(1, 1)$.

– Este punto es punto medio entre $P(4, 3)$ y su simétrico respecto de la recta $P'(x', y')'$:

$$1 = \frac{4 + x'}{2} \ ; \qquad 1 = \frac{3 + y'}{2}$$

El simétrico es $P'(-2, -1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular el circuncentro del triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(2, 6)$ y $C(5, 3)$.

Solución:

– La mediatriz del lado AB es:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 6)^2$$
$$x + y - 3 = 0$$

– La mediatriz de AC es:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2$$
$$4x + y - 6 = 0$$

– La intersección de las dos mediatrices, es decir, la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 4x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

es el circuncentro. Resolviendo el sistema se obtiene el punto $P(1, 2)$.

♠♠♠♠

8. Geometría

Ejercicio 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las $5x - 2y = 8$; $-x + 4y = 2$ y es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

Solución: El punto de intersección de las dos rectas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$$

La solución es el punto $P(2, 1)$.

La recta que buscamos debe ser perpendicular a $y = -x$. Entonces, su pendiente es 1 y su ecuación:

$$y - 1 = 1(x - 2) \ ; \qquad x - y - 1 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $P(-8, 9)$ forman un ángulo de $45°$ con la recta $6x - 5y = 17$.

Solución: La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{6}{5}$. Si m es la pendiente de la recta que forma con ella un ángulo de 45^{o}:

$$\operatorname{tg} 45^{o} = 1 = \left| \frac{m - \frac{6}{5}}{1 + m \cdot \frac{6}{5}} \right| = \left| \frac{5m - 6}{5 + 6m} \right|$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{5m - 6}{5 + 6m} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5m - 6 = 5 + 6m \ ; \qquad m = -11$$

$$\frac{5m - 6}{5 + 6m} = -1 \quad \Longrightarrow \quad 5m - 6 = -5 - 6m \ ; \qquad m = \frac{1}{11}$$

Las dos rectas son:

$$y - 9 = -11\,(x + 8) \ ; \qquad y - 9 = \frac{1}{11}\,(x + 8)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(-2, -3)$.

Solución: La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{-3 - 1}{,2,1} = \frac{4}{3}$$

y suecuación:

$$y - 1 = \frac{4}{3}\,(x - 1) \ ; \qquad 3y - 3 = 4x - 4 \ ; \qquad 4x - 3y - 1 = 0$$

La distancia desde P a esta recta es:

$$d = \frac{4 \cdot 2 - 3(-1) - 1}{\sqrt{16 + 9}} = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de cada una de las paralelas a la $4x - 3y + 4 = 0$ y que distan de ella 1 unidad.

Solución: Las paralelas tienen como ecuación $4x - 3y + C = 0$. Además:

$$\frac{|C - 4|}{\sqrt{16 + 9}} = 1 \ ; \qquad |C - 4| = 5 \ ; \qquad C_1 = 9, \ C_2 = -1$$

Las rectas son $4x - 3y * 9 = 0$ y $4x - 3y - 1 = 0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. En el triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,2)$ y $C(5,8)$ calcular la ecuación de la altura correspondiente al vértice A.

Solución: La pendiente del lado BC es:

$$m_{BC} = \frac{6}{-3} = -2$$

de modo que la pendiente de la altura es $m = \frac{1}{2}$ y su ecuación:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dadas las rectas $x - 2y = 4$ e $y - 2x = 4$ calcular las rectas que pasan por $P(1,1)$ y forman con las anteriores ángulos iguales.

Solución: Las bisectrices de estas rectas son:

$$\frac{x-2y-4}{\sqrt{1+4}} = \pm\frac{y-2x-4}{\sqrt{1+4}} \;; \qquad x-y=0 \;\; x+y+8=0$$

El punto $P(1,1)$ está en la primera de las bisectrices, ésta es , por tanto, una de las rectas que buscamos. La otra es la perpendicular a la bisectriz por P, es decir:

$$y-1 = (-1)(x-1) \;; \qquad x+y-2=0$$

Las soluciones son $x-y=0$ y $x+y-2=0$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(2,8)$ y es tangente a la recta $3x+4y-43=0$ en el punto $A(5,7)$.

Solución:

El centro está en la mediatriz de A y P:

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = (x-2)^2 + (y-8)^2$$
$$3x - y - 3 = 0$$

Por otra parte, el centro debe estar en la perpendicular a la tangente $3x+4y-43=0$ en $A(5,7)$:

$$y-7 = \frac{4}{3}(x-5) \;; \qquad 4x-3y+1=0$$

El centro está en la intersección de esta recta y la mediatriz:

$$\begin{cases} 3x-y-3=0 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases}$$

que es el punto $C(2,3)$.

El radio es la distancia desde C a uno cualquiera de los puntos A o P:

$$r^2 = (2-2)^2 + (3-8)^3 = 25$$

y la ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,-2)$, $B(-2,2)$ y cuyo centro está situado en la recta $8x-4y+9=0$.

Solución: Calculamos la mediatriz de A y B:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2$$
$$6x - 8y + 3 = 0$$

La intersección de esta recta con la que nos dan es el centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} 6x - 8y + 3 = 0 \\ 8x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

El radio de la circunferencia es:

$$r^2 = \left(-\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{4} + 2\right)^2 = \frac{125}{16}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$$

♠♠♠♠

9. Funciones. Límites

Ejercicio 1. Explicar qué quiere decir que una función es continua y los diferentes tipos de discontinuidad que pueden darse.

Solución:

- La función $f(x)$ es continua en x_0 si para ese valor el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x0} f(x) = f(x_0)$$

- La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en x_0 si en ese punto existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función:

$$x_0 \text{ discontinuidad evitable de } f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- La función $f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo salto finito en xx_0 si en ese punto existen los límites laterales pero no coinciden:

$$x_0 \text{ discontinuidad de salto finito de } f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

- En x_0 hay una discontinuidad de tipo salto infinito si en ese punto el límite de la función es infinito:

$$x_0 \text{ discontinuidad de tipo salto infinito de } f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$$

- La función $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en x_0 si en ese punto no existen límites laterales ni son infinitos.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el dominio de definición de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}}$$

Solución:

El dominio es el conjunto de x que cumplen:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} \geq 0$$

Las raíces del numerador son $x = 1$ y $x = 2$. La raíz del denominador es $x = -2$. Todas las raíces son simples. El signo de la fracción responde al siguiente esquema:

	$\nexists$		0		0	
$-$		$+$		$-$		$+$
	-2		1		2	

El dominio es $(-2, 1] \cup [2, \infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular la función inversa de

$$f(x) = 2e^{1-x}$$

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$y = 2e^{1-x}$$
$$x = 2e^{1-y}$$
$$1 - y = \ln\frac{x}{2}$$
$$y = f^{-1}(x) = 1 - \ln\frac{x}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Representar gráficamente la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$.

Solución:

La intersección con el eje de ordenadas es la solución del sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad B(0, -5)$$

Las intersecciones con el eje de abscisas son las soluciones del sistema:

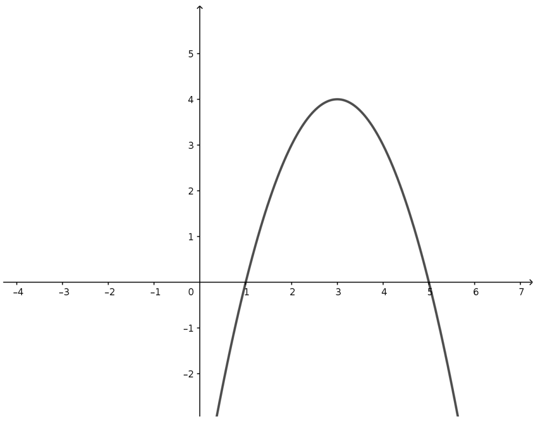
$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad A_1(1, 0), \quad A_2(5, 0)$$

El vértice tiene como abscisa el valor medio entre los dos anteriores, es decir, $x_0 = 3$. La ordenada es

$$y_0 = -9 + 18 - 5 = 4$$

Así, el vértice es el punto $V(3, 4)$.

La gráfica es la siguiente:



♠♠♠♠

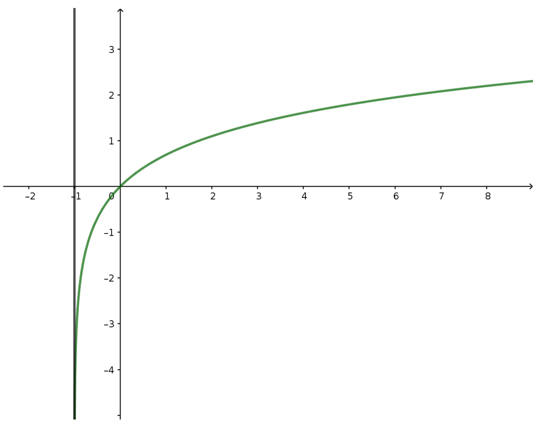
Ejercicio 5. Representar gráficamente la función:

$$f(x) = \ln(x + 1)$$

indicando claramente su asíntota y los puntos de intersección con los ejes.

Solución:

Tiene como gráfica la de la función logaritmo desplazada una unidad hacia la izquierda:



La asíntota es la recta $x = -1$. Corta a los ejes en $(0, 0)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Representar gráficamente:

$$y = \frac{x+2}{1-x}$$

Solución:

La intersección con el eje OY es:

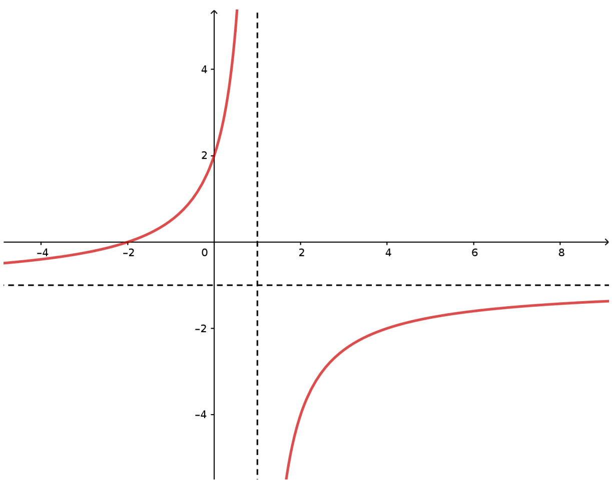
$$\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \implies B(0, 2)$$

La intersección con el eje OX es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \implies A(-2, 0)$$

Las asíntotas son $y = -1$ y $x = 1$.

La gráfica de la función es:



♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - x^2}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}$

Solución:

(a) puesto que e^x es el infinito más grande:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - x^2}{x^3} = \infty$$

(b) Es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Simplificamos la fracción:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x(x-1)} = \infty$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos x}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)$

Solución:

(a) Utilizando la aproximación $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ válida cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

(b) Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-x)(\sqrt{x^2-3x+1}+x)}{(\sqrt{x^2-3x+1}+x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1-x^2}{(\sqrt{x^2-3x+1}+x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{2x} \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

10. Derivadas

Ejercicio 1. Obtener la derivada de la función $f(x) = \ln x$ a partir de la definición.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot (\ln(x+h) - \ln x) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Derivar las siguientes funciones

(a) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(b) $y = 6x^5$

(c) $y = \sqrt[3]{x^2}$

(d) $y = 3e^x$

(e) $y = e^{2x} + 3e^x - 2$

(f) $y = \operatorname{sen}^2 x$

(g) $y = \operatorname{cotg} x$

(h) $y = 3e^{2\cos^2 x}$

(i) $y = \dfrac{\operatorname{artg} x}{x^2}$

(j) $y = (3x^2 - 1)\ln(1 - x)$

Solución:

$$\begin{array}{ll} y = \dfrac{1}{x^2} & y' = -\dfrac{2}{x^3} \\ y = 6x^5 & y' = 30x^4 \\ y = \sqrt[3]{x^2} & y' = \dfrac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} \\ y = 3e^x & y' = 3e^x \\ y = e^{2x} + 3e^x - 2 & y' = e^{2x} \cdot 2 + 3e^x \\ y = \operatorname{sen}^2 x & y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ y = \operatorname{cotg} x & y' = -1 - \operatorname{cotg}^2 x \\ y = 3e^{2\cos^2 x} & y' = 3e^{2\cos^2 x} \cdot 4\cos x(-\operatorname{sen} x) \\ y = \dfrac{\operatorname{artg} x}{x^2} & y' = \dfrac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 - 2x \operatorname{artg} x}{x^4} \\ y = (3x^2 - 1)\ln(1 - x) & y' = 6x \ln(1 - x) + \dfrac{1}{1 - x} \cdot (-1)(3x^2 - 1) \end{array}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

se pide:

(a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

(a) La asíntota verticales es $x = 3$ porque:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \infty$$

No hay asíntota horizontal. Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-3)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

La asíntota es $y = x + 6$.

(b) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = \frac{2^3}{(2-3)^2} = 8$$

Para calcular la pendiente derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-3)^2 - 2(x-3)\cdot x^3}{(x-3)^4} = \frac{3x^2(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3}$$

La pendiente es la derivada para $x = 2$:

$$m = \frac{3\cdot 4(-1) - 2\cdot 8}{(2-3)^3} = 28$$

La asíntota oblicua es $y - 8 = 28(x-2)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$y = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

(a) Calcular las asíntotas.

(b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función,

Solución:

(a) Las asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = 1$ porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-1}{x-x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x-x^2} = \infty$$

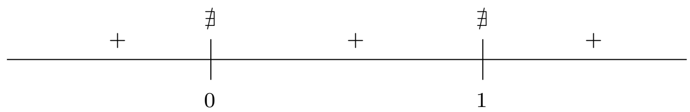
(b) La asíntota horizontal es $y = 0$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x-x^2} = 0$$

(c) La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{2(x-x^2) - (1-2x)(2x-1)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 2x}{(x-x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-x^2)^2}$$

El numerador no tiene raíces y el denominador tiene dos raíces dobles $x = 0$ y $x = 1$. El signo de la derivada es:



La función es creciente para $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

La derivada se anula:

$$1 - 2 \ln x = 0 \ ; \qquad \ln x = \frac{1}{2} \ ; \qquad x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

El signo de la derivada es:

$f'(x)$	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$
x		0		$\sqrt{e}$	

La función es creciente en $\left(0, \sqrt{e}\right)$, hay un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$ y es decreciente en $\left(\sqrt{e}, \infty\right)$.

♠♠♠♠

11. Límites. Derivadas

Ejercicio 1. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determinar si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

(b) Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$.

Solución:

(a) Para que la función sea continua deben coincidir los límites por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-2x}{x+2} = 2$$

La función no es continua en $x = 2$. Tiene una discontinuidad de salto finito.

(b) La ordenada para $x_0 = 3$ es:

$$y_0 = \frac{3\cdot 9 - 2\cdot 3}{3+2} = \frac{21}{5}$$

Para hallar la pendiente derivamos el segundo trozo:

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(x+2)-(3x^2-2x)}{(x+2)^2} \;; \qquad m = f'(3) = \frac{59}{25}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{21}{5} = \frac{59}{25}\,(x-3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Derivar las siguientes funciones:

(a) $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$ (b) $y = \cos^3 2x$ (c) $y = \dfrac{1}{\ln x}$ (d) $\sqrt{1-\cos x}$

Solución:

$$y = x^2 e^{\sqrt{x}} \qquad y' = 2xe^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2$$

$$y = cos^3 2x \qquad y' = 3\cos^2 2x \cdot (-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2$$

$$y = \frac{1}{\ln x} \qquad y' = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$y = \sqrt{1-\cos x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\cos x}} \cdot \operatorname{sen} x$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x^2}\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{1-\cos 2x}\qquad (c)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x^2-25}\qquad (d)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$$

Solución:

(a) El infinito de mayor rango está en el denominador. Por consiguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x^2}=0$$

(b) Con las aproximaciones $e^u-1\sim u$ y $1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}$ válidas cuando $u\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2}{\frac{4x^2}{2}}=-\frac{3}{2}$$

(c) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Se resuelve simplificando la fracción:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{5}{x+5}=\frac{1}{2}$$

(d) Puesto que si $u\to 1$, $u^v=e^{v\ln u}\sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{x-2}{x+1}-1\right)\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(x-2-x-1)\cdot 2x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6x}{x}}=e^{-6}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

(a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

(b) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$, las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

La derivada se anula en $x=0$. El signo de la derivada es:

	0	
$+$	$\vert$	$-$
	0	

La función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,\infty)$. Hay un máximo en $(0,2)$.

(b) Calcuolamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-2x)}{(x^2+1)^4}=\frac{-2(x^2+1)-2\cdot 2x\cdot(-2x)}{(x^2+1)^3}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Los ceros del numerador son $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. El denominador no se anula para ningún valor de x. El signo de la segunda derivada es:

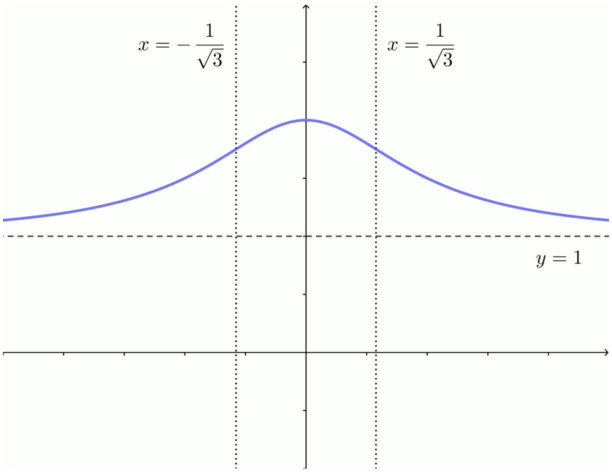
	0		0	
$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$
	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	

Hay dos puntos de inflexión en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

La recta $y=1$ es asíntota horizontal de la función puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=1$$

Con estos datos, la gráfica de la función es:



♠♠♠♠

Ejercicio 5. Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide:

(a) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

(b) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

(a) El dominio de la función es el conjunto de las soluciones de la inecuación $x^2 + 4x - 5 > 0$. Este polinomio se anula para $x = -5$ y $x = 1$. El signo del polinomio es:

$+$	0	$-$	0	$+$
	-5		1	

El dominio es el conjunto $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.
Las rectas $x = -5$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la función porque:

$$\lim_{x \to -5} \ln(x^2 + 4x - 5) = \ln 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \ln(x^2 + 4x - 5) = \ln 0 = -\infty$$

(b) Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5}$$

El numerador se anula para $x = -2$ y el denominador para $x = -5$ y $x = 1$. Hay que tener en cuenta que la función no existe entre -5 y 1. Entonces el signo de la derivada está dado por:

$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$
	-5		-2		1	

La función es decreciente si $x \in (-\infty, -5)$ y creciente si $x \in (1, \infty)$.

♠♠♠♠