Matemáticas 1ºBH.
Curso 2017-2018.
Exámenes

1. Radicales. Logaritmos

Ejercicio 1. Simplificar:

(a) $\sqrt[6]{729a^7b^{12}c^6}$

(b) $\sqrt{4+\sqrt{16x^2+8x^3+x^4}}$

Solución:

(a) $\sqrt[6]{729a^7b^{12}c^6} = \sqrt[6]{3^6\,a^6\,a\,b^{12}\,c^6} = 3ab^2c\sqrt[6]{a}$

(b) $\sqrt{4+\sqrt{16x^2+8x^3+x^4}} = \sqrt{4+\sqrt{(x^2+4x)^2}} = \sqrt{4+4x+x^2} = \sqrt{(x+2)^2} = x+2$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular:

(a) $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}$

(b) $3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}$

Solución:

(a) Sacando factores de los radicales:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+5\sqrt{27}-3\sqrt{48}+4\sqrt{3}+\sqrt{243}&\\
&= 2\sqrt{4\cdot 3}-3\sqrt{25\cdot 3}+5\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{16\cdot 3}+4\sqrt{3}+\sqrt{81\cdot 3}\\
&= 4\sqrt{3}-15\sqrt{3}+15\sqrt{3}-12\sqrt{3}+4\sqrt{3}+9\sqrt{3}\\
&= 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(b) Lo mismo que el apartado anterior:

$$\begin{aligned}
3\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}&\\
&= 3\sqrt[3]{64\cdot 2}+2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{8\cdot 2}+3\sqrt[3]{27\cdot 2}\\
&= 12\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}\\
&= 13\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Racionalizar los denominadores:

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$

(b) $\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$

Solución:

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\dfrac{5}{45}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

(b) $\dfrac{2}{3-\sqrt{7}} = \dfrac{2\,(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \dfrac{2\,(3+\sqrt{7})}{9-7} = 3+\sqrt{7}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_{25} \dfrac{1}{5}$ $\qquad$ (b) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt{3}}$

Solución:

(a) Pasando a la base 5:

$$\log_{25} \frac{1}{5} = \frac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 25} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(b) Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente:

$$\log_3 \frac{9}{\sqrt{3}} = \log_3 9 - \log_3 \sqrt{3} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{2}\right)$ $\qquad$ (b) $\log_4 \dfrac{8}{\sqrt[5]{16}}$

Solución:

(a) Aplicando las propiedades del logaritmo del producto y de la raíz:

$$\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{2}\right) = \log_2 \sqrt[3]{16} + \log_2 \sqrt[4]{2} = \frac{1}{3}\,\log_2 16 + \frac{1}{4}\,\log_2 2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$$

(b) Apñicando las propiedades del logaritmo del cociente y de la raíz y pasando a logaritmos en base 2:

$$\log_4 \frac{8}{\sqrt[5]{16}} = \log_4 8 - \log_4 \sqrt[5]{16} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} - \frac{1}{5}\log_4 16 = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, calcular el valor de $\log \sqrt[4]{12{,}5}$.

Solución:

Aplicando las propiedades del logaritmo:

$$\log \sqrt[4]{12{,}5} = \frac{1}{4}\,\log \frac{125}{10} = \frac{1}{4}\,(\log 125 - \log 10) = \frac{1}{4}\,(\log 125 - 1) = \frac{1}{4}\,(3\log 5 - 1)$$

Por otra parte:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$$

Por tanto:

$$\log \sqrt[4]{12{,}5} = \frac{1}{4}\,(3 \cdot 0{,}6990 - 1) = 0{,}27425$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Despejar x en las siguientes igualdades:

(a) $7^{-3x} = 15$ $\qquad$ (b) $\log(x^2 - 1) = 2$

Solución:

(a) El exponente se despeja como logaritmo en la misma base:

$$7^{-3x} = 15 \quad \Longrightarrow \quad -3x = \log_7 15\ ; \qquad x = -\frac{1}{3}\log_7 15$$

(b) El argumento del logaritmo se despeja como potencia de la misma base:

$$\log(x^2 - 1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 1 = 10^2\ ; \qquad x = \pm\sqrt{101}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$\log(65 - x^3) = 3\log(5 - x)$$

Solución:

Escribimos la ecuación como:

$$\log(65 - x^3) = \log(5 - x)^3 \quad \Longrightarrow \quad 65 - x^3 = (5 - x)^3$$

Desarrollando el cubo:

$$65 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$$
$$15x^2 - 75x + 60 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x = 1\,, \quad x = 4$$

Ambas soluciones son válidas.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Resolver la ecuación:

$$\frac{35}{3^x} = 3^x - 2$$

Solución:

Quitando denominadores:

$$\frac{35}{3^x} = 3^x - 2\ ; \qquad 35 = 3^{2x} - 2\cdot 3^x\ ; \qquad 3^{2x} - 2\cdot 3^x - 35 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta:

$$3^x = -5 \quad \text{(no válida)}$$
$$3^x = 7 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 7$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \log_x 25 = \log_y 4 \\ xy = 10000 \end{cases}$$

Solución:

Escribimos la primera ecuación en la base 10:

$$\frac{\log 25}{\log x}=\frac{\log 4}{\log y}\ ; \qquad \log 4\log x=\log 25\log y$$

Con la sustitución $y=\frac{10000}{x}$ resulta:

$$\log 4\log x=\log 25\log\frac{10000}{x}$$
$$\log 4\log x=\log 25\,(\log 10000-\log x)$$
$$\log 4\log x=4\log 25-\log 25\log x$$
$$\log x\,(\log 4+\log 25)=4\log 25$$
$$\log x\log 100=4\log 25$$
$$2\log x=4\log 25$$
$$\log x=2\log 25=\log 25^2$$

y, de aquí, $x=625$, $y=16$.

♠♠♠♠

2. Polinomios.Ecuaciones.

Ejercicio 1. Determinar m con la condición de que el polinomio x^3+5x^2+mx-8, sea divisible por $x+4$.

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x+4$, $x=-4$ debe ser una raíz del polinomio. Entonces:

$$(-4)^3+5\,(-4)^2-4m-8=0 \quad\Longrightarrow\quad m=2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En la ecuación $4x^2+bx+25=0$, hallar b con la condición de que las dos raíces sean iguales.

Solución:

Si las dos soluciones son iguales el discriminante de la ecuación debe ser cero:

$$b^2-4\cdot 25\cdot 4=b^2-400=0$$

y obtenemos dos soluciones $b=-20$ y $b=20$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. En la ecuación $9x^2-18(m-1)x-8m+24=0$, hallar el valor que ha de tener m para que una solución sea doble que la otra.

Solución:

Sean las soluciones x y $2x$. Por las relaciones de Cardano:

$$\begin{cases}3x=\frac{18(m-1)}{9}\\ 2x^2=\frac{-8m+24}{9}\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}x=\frac{2m-2}{3}\\ x^2=\frac{-4m+12}{9}\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \frac{(2m-2)^2}{9}=\frac{-4m+12}{9}$$

Operando se obtiene la ecuación

$$4m^2-4m-8=0\ ; \qquad m^2-m-2=0 \quad\Longrightarrow\quad m=-1 \quad m=2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Solución:

Es una ecuación bicuadrada. Despejamos x^2 con la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$$

$x^2 = -1$ es imposible por lo que resultan dos soluciones $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver

$$\sqrt{3x+7} - 1 = 2x - 3$$

Solución:

Despejando la raíz y elevando los dos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{3x+7} = 2x - 2 \; ; \qquad 3x + 7 = (2x-2)^2 \; ; \qquad 3x + 7 = 4x^2 - 8x + 4 \; ; \qquad 4x^2 - 11x - 3 = 0$$

Las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{1}{4}$. Ésta última no es válida porque al sustituir en la ecuación el primer miembro es positivo y el segundo negativo.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver

$$6x^3 - 19x^2 + 11x + 6 = 0$$

Solución:

Descomponemos el polinomio en factores. Claramente $x = 2$ es una raíz del polinomio, de forma que $x - 2$ debe ser un factor:

$$6x^3 - 19x^2 + 11x + 6 = (x-2)(6x^2 - 7x - 3)$$

Podemos escribir la ecuación como:

$$(x-2)(6x^2 - 7x - 3) = 0$$

e, igualando a cero cada uno de los factores:

$$x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 3 \cdot 6}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

Las soluciones son $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_3 = -\frac{1}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{y} = 1 \\ y + \dfrac{1}{x} = 6 \end{cases}$$

Solución:

Quitando denominadores obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} xy+2=y \\ xy+1=6x \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones resulta $y-6x=1$ o bien $y=6x+1$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x(6x+1)+2=6x+1\ ;\qquad 6x^2-5x+1=0\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12}$$

y obtenemos las soluciones $\left(\frac{1}{2},4\right)$ y $\left(\frac{1}{3},3\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la inecuación

$$x^4+2x^3-3x^2-8x-4\geq 0$$

Solución:

Factorizando el polinomio

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-3x^2-8x-4 &= (x-2)(x^3+4x^2+5x+2) \\ &= (x-2)(x+1)(x^2+3x+2) \\ &= (x-2)(x+1)^2(x+2) \end{aligned}$$

Las raíces son $x=-2$, $x=-1$ (doble) y $x=2$. El signo del polinomio está representado en el siguiente esquema:

$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
	-2		-1		2	

La solución es $x\in(-\infty,-2\,]\cup\{-1\}\cup[\,2,\infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Resolver la inecuación

$$\frac{x^2-x-6}{1-x^2}\leq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son -2 y 3. Las raíces del denominador son -1 y 1. Todas ellas son raíces simples. El esquema de signos es el siguiente:

$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
	-2		-1		1		3	

La solución de la inecuación es $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[3,\infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Para números positivos, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases}$$

que tiene como solución $(1000, 100)$. Como ambos números son positivos, la solución es válida.

♠♠♠♠

3. Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular el área de un pentágono regular de 40 cm de lado.

Solución:

La apotema es:

$$a = \frac{20}{\operatorname{tg} 36^{\text{o}}} \simeq 27{,}5$$

y el área, si p es el perímetro:

$$S = \frac{1}{2}\, pa \simeq 2750 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Resolver el triángulo $a = 157$ cm, $B = 65^{\text{o}}$, $C = 39^{\text{o}}$. Las longitudes deben expresarse con tres cifras significativas y los ángulos aproximados a los grados.

Solución:

Calculamos el ángulo A:

$$A = 180^{\text{o}} - 65^{\text{o}} - 39^{\text{o}} = 76^{\text{o}}$$

Entonces por el teorema del seno:

$$\frac{157}{\operatorname{sen} 76^{\text{o}}} = \frac{b}{\operatorname{sen} 65^{\text{o}}} \quad \Longrightarrow \quad b = 147 \text{ cm}$$

$$\frac{157}{\operatorname{sen} 76^{\text{o}}} = \frac{c}{\operatorname{sen} 39^{\text{o}}} \quad \Longrightarrow \quad c = 102 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el área de un segmento circular en un círculo de radio 35 cm y la longitud del arco es 83 cm.

Solución:

Calculamos en primer lugar el ángulo:

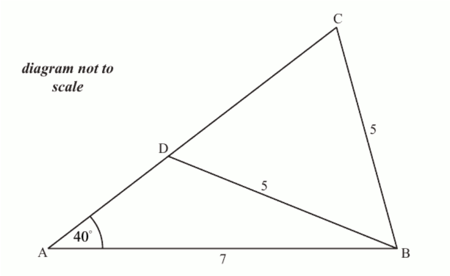
$$\varphi = \frac{l}{r} = \frac{83}{35} \simeq 2{,}37$$

El área del segmento es:

$$S = \frac{1}{2}\,r^2\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1030 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Dado el triángulo ABC, con las longitudes que se muestran en el diagrama, calcular la longitud del segmento CD.



Solución:

El ángulo C es agudo porque es uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles. Lo podemos calcular por el teorema del seno:

$$\frac{5}{\operatorname{sen}40^{\circ}} = \frac{7}{\operatorname{sen}C} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen}C = \frac{7\operatorname{sen}40^{\circ}}{5}$$

Por otra parte en el triángulo isósceles:

$$\frac{1}{2}CD = 5\cos C\ ; \qquad CD = 10\cos C \simeq 4{,}36$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver la ecuación

$$3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0\ ; \qquad -180^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3\cos 2x - 7\cos x - 2 = 0\\
&3(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 7\cos x - 2 = 0\\
&3\cos^2 x - 3(1-\cos^2 x) - 7\cos x - 2 = 0\\
&6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0\\
&\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{12} = \frac{7\pm 13}{12}
\end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones para $\cos x$:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{5}{3} &&\Longrightarrow \quad \text{no hay solución}\\
\cos x &= -\frac{1}{2} &&\Longrightarrow \quad x = -120^{\circ},\ x = 120^{\circ}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver la ecuación:

$$3\sec^2 x + 1 = 8\operatorname{tg} x\ ; \qquad 0^{\text{o}} \leq x \leq 360^{\text{o}}$$

Solución:

$$3\sec^2 x + 1 = 8\operatorname{tg} x$$
$$3(1+\operatorname{tg}^2 x) + 1 = 8\operatorname{tg} x$$
$$3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 4 = 0$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8\pm 4}{6}$$

Tenemos dos soluciones para $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 63^{\text{o}},\ x = 243^{\text{o}}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = 34^{\text{o}},\ x = 214^{\text{o}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Demostrar la identidad:

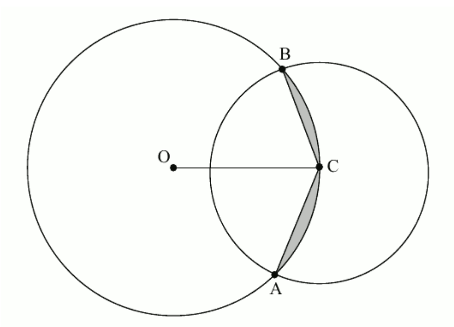
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) \\
&= \cos 2\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha \\
&= (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. El punto O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) $\widehat{BOC}$;

(b) el área de la región sombreada.

Solución:

(a) Llamemos $\varphi = \widehat{BOC}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{1{,}5}{4} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 2\operatorname{arsen}\frac{1{,}5}{4} \simeq 0{,}769$$

(b) La región sombreada está formada por dos segmentos circulares de amplitud φ sobre un círculo de 4 cm de radio. El área será igual a

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\,r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1{,}18$$

♠♠♠♠

4. Examen de la primera evaluación

Ejercicio 1. Despejar x en las siguientes igualdades:

(a) $7^{-3x} = 15$ (b) $\log(x^2-1) = 2$

Solución:

(a) Despejamos el exponente como logaritmo de la misma base:

$$-3x = \log_7 15\ ; \qquad x = -\frac{1}{3}\log_7 15$$

(b) El argumento del logaritmo se despeja como potencia de la misma base:

$$x^2 - 1 = 10^2\ ; \qquad x = \pm\sqrt{101}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Cuando se divide $2x^3+kx^2+6x+32$ y $x^4-6x^2-k^2x+9$ entre $x+1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k.

Solución:

Según el teorema del resto, el valor numérico para $x=-1$ debe ser el mismo para ambos polinomios:

$$2\cdot(-1)^3 + k(-1)^2 + 6\cdot(-1) + 32 = (-1)^4 - 6\cdot(-1)^2 - k^2(-1) + 9$$
$$-2 + k - 6 + 32 = 1 - 6 + k^2 + 9$$
$$k^2 - k - 20 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $k=-4$ y $k=5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Resolver la ecuación

$$\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$$
$$\log_2 x - \log_2 5 = \log_2 4 + \log_2 3$$
$$\log_2\frac{x}{5} = \log_2 12$$
$$\frac{x}{5} = 12\ ; \qquad x = 60$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Resolver la ecuación:

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$$

Solución:

Quitamos denominadores, aplicamos las propiedades de las potencias y despejamos 3^x:

$$3^x \cdot 3^{x-1} + 1 = 4 \cdot 3^{x-1}$$
$$3^{2x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$$
$$\frac{3^{2x}}{3} - \frac{4 \cdot 3^x}{3} + 1 = 0$$
$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Hemos obtenido una ecuación de segundo grado con la incógnita 3^x. Las soluciones son:

$$3^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 1 = 0$$
$$3^x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 3 = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{9x^2 + 2x - 3} = 2 - 3x$$

Solución:

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$9x^2 + 2x - 3 = 4 + 9x^2 - 12x$$
$$14x = 7$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Puede comprobarse que la solución es válida.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las soluciones de la ecuación:

$$2 \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = 0$$

tales que $0^{\text{o}} \leq x < 360^{\text{o}}$.

Solución:

Sacamos factor común $\operatorname{tg} x$:

$$tgx(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$$

y obtenemos las soluciones:

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0^{\text{o}}, \quad x = 180^{\text{o}}$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 30^{\text{o}}, \quad x = 150^{\text{o}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Los lados de un triángulo miden $a = 465$ cm, $b = 264$ cm y $c = 520$ cm. Calcular la longitud de la altura correspondiente al lado c.

Solución:

Calculamos uno de los ángulos A o B:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Entonces:

$$h = b \operatorname{sen} A \simeq 236 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la inecuación:

$$\frac{(x-1)^2(x+5)}{4-x^2} \geq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son $x = 1$ (doble) y $x = -5$. Las raíces del denominador son $x = -2$ y $x = 2$. El esquema de signos es el siguiente:

$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$
	-5		-2		1		2	

La solución es $x \in (-\infty, -5] \cup (-2, 2)$

♠♠♠♠

5. Trigonometría

Ejercicio 1.

(a) Escribir cuatro fórmulas del área del triángulo.

(b) Escribir las fórmulas del seno, coseno y tangente de la diferencia de ángulos.

Solución:

Si a, b, c son los lados, h es la altura correspondiente al lado b, r el radio de la circunferencia inscrita y p el semiperímetro:

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

Las formulas para la diferencia de ángulos son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Resolver la ecuación:

$$2\cos x + \sec x = 3\ ; \qquad -\pi < x \leq \pi$$

Dar el resultado exacto en radianes.

Solución:

Puesto que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$:

$$\begin{aligned}
&2\cos x + \sec x = 3\\
&2\cos x + \frac{1}{\cos x} = 3\\
&2\cos^2 x + 1 = 3\cos x\\
&2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene $\cos x = 1$ y $\cos x = \frac{1}{2}$. La solución general de la ecuación es:

$$\begin{aligned}
&x = 0 \pm 2k\pi\\
&x = \frac{\pi}{3} \pm 2k\pi\\
&x = \frac{5\pi}{3} \pm 2k\pi
\end{aligned}$$

Las soluciones que cumplen la condición $-\pi < x \leq \pi$ son $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Demostrar la identidad:

$$\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$$

Solución:

Aplicando la fórmula de la suma y del ángulo doble:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x + x)\\
&= \operatorname{sen} 2x\cos x + \cos 2x\operatorname{sen} x\\
&= 2\operatorname{sen} x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x\\
&= 2\operatorname{sen} x\cos^2 x + (1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x\\
&= 2\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x\\
&= 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. En el triángulo ABC el lado a mide 86 cm y el ángulo $A = 47^{\circ}$. Si el lado b mide 59 cm, ¿cuánto mide el ángulo C? Dar la solución aproximando a los grados.

Solución:

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{86}{\operatorname{sen} 47^{\circ}} = \frac{59}{\operatorname{sen} B} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen} B = \frac{59\operatorname{sen} 47^{\circ}}{86}$$

Obtenemos dos soluciones $B \simeq 30^{\circ}$ y $B' \simeq 150^{\circ}$. Puesto que $b < a$ debe ser $B < A$. Solo es válida la solución $B \simeq 30^{\circ}$. Entonces:

$$C \simeq 180^{\circ} - 47^{\circ} - 30^{\circ} \simeq 103^{\circ}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Suponiendo que $3\,\mathrm{tg}^2\alpha - \dfrac{14}{\cos\alpha} + 18 = 0$, calcular los posibles valores de $\sec\alpha$.

Solución:

Podemos escribir la ecuación como:

$$3(\sec^2\alpha - 1) - 14\sec\alpha + 18 = 0\ ; \qquad 3\sec^2\alpha - 14\sec\alpha + 15 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

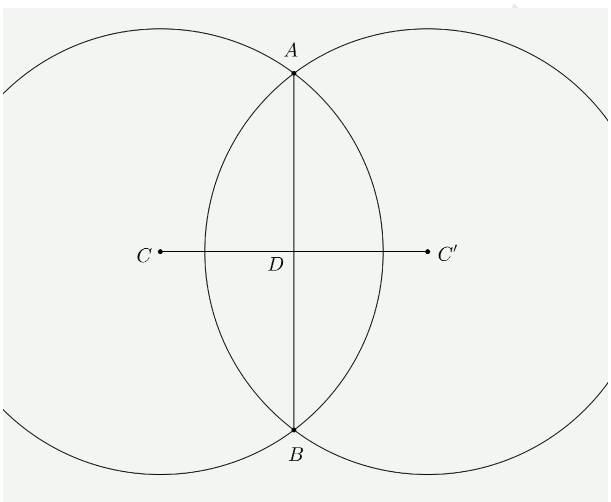
$$\sec\alpha = \frac{14 \pm \sqrt{196-180}}{6} = \frac{14\pm 4}{6}$$

Los valores posibles son $\sec\alpha = 3$ y $\sec\alpha = \frac{5}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Los centros de dos circunferencias de 10 cm de radio se encuentran separados por una distancia de 12 cm. Si las circunferencias se cortan en los puntos A y B, calcular la distancia entre A y B. Dar el resultado con tres cifras significativas.

Solución:



Puesto que $CD = 6$ cm y $CA = 10$ cm, por el teorema de Pitágoras $AD = 8$ cm y $AB = 16$ cm.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la ecuación:

$$2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x = 3\ ; \qquad 0 \leq x < 360^{\circ}$$

Dar el resultado aproximando a los grados.

Solución:

Primer método:

Sustituyendo $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$:

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{sen} x + 3\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = 3\\
&\left(3\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\right)^2 = (3-2\operatorname{sen} x)^2\\
&9\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) = 9 + 4\operatorname{sen}^2 x - 12\operatorname{sen} x\\
&13\operatorname{sen}^2 x - 12\operatorname{sen} x = 0\\
&\operatorname{sen} x(13\operatorname{sen} x - 12) = 0
\end{aligned}$$

Para $\operatorname{sen} x = 0$ obtenemos $x = 0^{\text{o}}$ y $x = 180^{\text{o}}$. Para $\operatorname{sen} x = \frac{12}{13}$ obtenemos $x = 67^{\text{o}}$ y 113^{o}.

Puesto que hemos elevado al cuadrado, debemos comprobar las soluciones. Son válidas $x = 0^{\text{o}}$ y $x = 67^{\text{o}}$.

Segundo método:

Transformamos el segundo miembro:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen} x + 3\cos x &= A\operatorname{sen}(x+\varphi =\\
&= A\operatorname{sen} x\cos\varphi + A\cos x\operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{matrix} 2 = A\cos\varphi \\ 3 = A\operatorname{sen}\varphi \end{matrix} \implies \begin{matrix} A = \sqrt{13} \\ \varphi \simeq 56^{\text{o}} \end{matrix}$$

La ecuación queda:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{13}\operatorname{sen}(x+56^{\text{o}}) = 3\\
&\operatorname{sen}(x+56^{\text{o}}) = \frac{3}{\sqrt{13}}
\end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones:

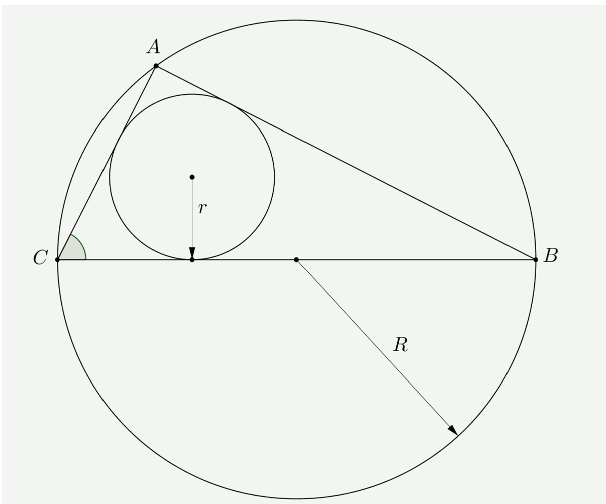
$$\begin{aligned}
x + 56^{\text{o}} &= 56^{\text{o}} &&\implies && x = 0^{\text{o}}\\
x + 56^{\text{o}} &= 180 - 56^{\text{o}} &&\implies && x = 68^{\text{o}}
\end{aligned}$$

La diferencia entre un procedimiento y otro se debe a errores de redondeo.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. En un triángulo rectángulo $b = 43$ cm y $C = 63^{\text{o}}$. Calcular los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo. Dar el resultado con tres cifras significativas.

Solución:



El radio de la circunferencia circunscrita puede obtenerse a partir del teorema del seno. Puesto que $B = 90^{\text{o}} - 63^{\text{o}} = 27^{\text{o}}$:

$$2R = \frac{43}{\operatorname{sen} 27^{\text{o}}} \implies R \simeq 47{,}4 \text{ cm}$$

En el caso de un triángulo rectángulo este número es la mitad de la hipotenusa.

Para calcular el radio de la circunferencia inscrita, debemos calcular los lados del triángulo:

$$c = 43\,\mathrm{tg}\,63^{\mathrm{o}}$$
$$a = \frac{43}{\cos 63^{\mathrm{o}}}$$

Entonces, el área del triángulo es, por una parte, la mitad del producto de los catetos, y por otra el semiperímetro por el radio:

$$\frac{1}{2}\,bc = pr \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{bc}{2p}$$

Con la calculadora obtenemos $r \simeq 16{,}3$ cm.

♠♠♠♠

6. Números complejos

Ejercicio 1. Calcular:

$$\frac{(2-i)^2(1+3i)}{3+2i}$$

Solución:

$$\frac{(2-i)^2(1+3i)}{3+2i} = \frac{(4-1-4i)(1+3i)}{3+2i} = \frac{(3-4i)(1+3i)}{3+2i} = \frac{15+5i}{3+2i}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$= \frac{(15+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{55-15i}{13} = \frac{55}{13} - \frac{15}{13}\,i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Sin obtener la forma polar, calcular las raíces cuadradas de $-12+5i$.

Solución:

Buscamos un número complejo $x+yi$ que, elevado al cuadrado, sea igual a $-12+5i$:

$$-12+5i = (x+yi)^2 = x^2-y^2+2xyi$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-12 \\ 2xy=5 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$y=\frac{5}{2x} \quad\Longrightarrow\quad x^2-\frac{25}{4x^2}=-12\,; \qquad 4x^4+48x^2-25=0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada se obtiene:

$$x^2=\frac{-48\pm 52}{8}=\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Las raíces son $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}i$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}i$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Aplicar la fórmula de Newton para calcular $(2-3i)^4$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2-3i)^4 &= 2^4-4\cdot 2^3\cdot 3i+6\cdot 2^2\cdot(3i)^2-4\cdot 2\cdot(3i)^3+(3i)^4\\ &= 16-96i+216i^2-216i^3+81i^4\\ &= 16-96i-216+216i+81\\ &= -119+120i\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular en forma polar las raíces quintas de $-i$.

Solución:

Puesto que $-i = 1_{270^{\text{o}}}$, las raíces tienen de módulo 1 y de argumento $\frac{270^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{5}$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Así obtenemos que las raíces son:

$$1_{54^{\text{o}}},\ 1_{126^{\text{o}}},\ 1_{198^{\text{o}}},\ 1_{270},\ 1_{342^{\text{o}}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el área del triángulo que tiene como vértices los afijos de las raíces cúbicas de $3 + 4i$.

Solución:

El módulo del complejo es 5. Entonces, las raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{5}$ y el lado del triángulo es $\sqrt[3]{5}\sqrt{3}$ y el área:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt[3]{25}\cdot 3\sqrt{3}}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular las raíces cuartas de -16 y expresar el resultado en forma binómica.

Solución:

En forma polar:

$$-16 = 16_{180^{\text{o}}}$$

Las raíces cuartas son:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2_{45^{\text{o}}} = 2\,(\cos 45^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 45^{\text{o}}) = \sqrt{2} + \sqrt{2\,i} \\
z_2 &= 2_{135^{\text{o}}} = 2\,(\cos 135^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 135^{\text{o}}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2\,i} \\
z_1 &= 2_{225^{\text{o}}} = 2\,(\cos 225^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 225^{\text{o}}) = -\sqrt{2} - \sqrt{2\,i} \\
z_1 &= 2_{315^{\text{o}}} = 2\,(\cos 315^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 315^{\text{o}}) = \sqrt{2} - \sqrt{2\,i}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Expresar en forma polar:

(a) $\sqrt{3} - i$ (b) $-2 + 2i$

Solución:

(a) $\sqrt{3} - i = 2_{330^{\text{o}}}$
(b) $-2 + 2i = (2\sqrt{2})_{135^{\text{o}}}$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Expresar en forma binómica:

(a) 5_{240^o} (b) 3_{315^o}

Solución:

(a) $5_{240^o} = 5\,(\cos 240^o + i \operatorname{sen} 240^o) = 5\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,i$

(b) $3_{315^o} = 3\,(\cos 315^o + i \operatorname{sen} 315^o) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Obtener a partir de la fórmula de Moivre una expresión para $\operatorname{sen} 3\varphi$.

Solución:

Según la fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi &= (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i \operatorname{sen}\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \imath^3 \operatorname{sen}^3\varphi \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + i\left(3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi\right) \end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias se obtiene:

$$\operatorname{sen} 3\varphi = 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Calcular el punto que se obtiene al girar el afijo del complejo $z = 1 + 2i$ en torno al origen un ángulo de 150^o.

Solución:

El punto se obtiene multiplicando por el complejo de módulo 1 y argumento 150^o:

$$z' = (1+2i)(\cos 150^o + i \operatorname{sen} 150^o) = (1+2i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$$

El punto es $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$

♠♠♠♠

7. Geometría analítica

Ejercicio 1. Calcular y sabiendo que los puntos $A(2,3)$, $B(3,5)$ y $C(7,y)$ están sobre la misma recta.

Solución:

Calculamos las pendientes de AB y BC:

$$m_{AB} = \frac{2}{1} = 2\ ; \qquad m_{BC} = \frac{y-5}{4}$$

Si están sobre la misma recta, las dos pendientes deben ser iguales:

$$\frac{y-5}{4} = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 13$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el área del triángulo de vértices $A(-2,4)$, $B(5,-3)$ y $C(1,6)$.

Solución:

– Tomamos como base el lado AB:

$$AB = \sqrt{(5+2)^2 + (-3-4)^2} = 7\sqrt{2}$$

– Para calcular la altura, calculamos primero la ecuación de la recta AB:

$$y - 4 = -1(x+2)\ ; \qquad x + y - 2 = 0$$

La altura es la distancia desde C a esta recta:

$$h = \frac{1+6-2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

– El área del triángulo es igual a:

$$S = \frac{1}{2}\,7\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{35}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el punto de la recta $x + 2y - 3 = 0$ que se encuentra a la misma distancia de los puntos $P(3,-2)$ y $Q(4,4)$.

Solución:

Si el punto que buscamos está a la misma distancia de los dos puntos se encuentra en su mediatriz:

$$\begin{aligned}
&(x-3)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2\\
&-6x + 9 + 4y + 4 = -8x + 16 - 8y + 16\\
&2x + 12y - 19 = 0
\end{aligned}$$

Puesto que también se encuentra en la recta $x + 2y - 3 = 0$, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 12y - 19 = 0\\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

resolvemos por sustitución:

$$2(3-2y) + 12y - 19 = 0\ ; \qquad 8y - 13 = 0\ ; \qquad y = \frac{13}{8}$$

El punto que buscamos es $\left(-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(3,-2)$ y forman con la recta $x-3y+1=0$ un ángulo cuya tangente es igual a 2.

Solución:

Sea m la pendiente de la rectas que buscamos. Puesto que la recta que nos dan tiene pendiente $\frac{1}{3}$:

$$\left|\frac{m-\frac{1}{3}}{1+\frac{m}{3}}\right|=2\ ;\qquad \left|\frac{3m-1}{3+m}\right|=2$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{3m-1}{3+m}=2 \quad\Longrightarrow\quad m=7$$

$$\frac{3m-1}{3+m}=-2 \quad\Longrightarrow\quad m=-1$$

Las rectas que nos piden son:

$$y+2=7\,(x+3)$$

$$y+2=-\,(x+3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Determinar el punto simétrico del $(3,2)$ respecto a la recta $2x+y=3$.

Solución:

– Calculamos la perpendicular a la recta dada por el punto:

$$y-2=\frac{1}{2}\,(x-3)\ ;\qquad x-2y+1=0$$

– La intersección de las dos rectas es el punto:

$$\begin{cases}2x+y=3\\ x-2y+1=0\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad 2(2y-1)+y=3 \quad\Longrightarrow\quad y=1$$

El punto de intersección es $P(1,1)$.

– El punto obtenido es punto medio entre el punto dado y su simétrico:

$$1=\frac{3+x'}{2}\ ;\qquad 1=\frac{2+y'}{2}$$

El simétrico es $(-1,0)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Dada la recta $12x-5y+1=0$ calcular las paralelas que distan de ellas 7 unidades.

Solución:

Una paralela a esta recta tiene por ecuación:

$$12x-5y+D=0$$

La distancia entre las rectas debe ser igual a 5:

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{144+25}}=7\ ;\qquad \frac{|D-1|}{13}=7\ ;\qquad D-1=\pm 91$$

Las soluciones son $D=92$ y $D=-90$. La es ecuaciones de las paralelas son $12x-5y+92=0$ y $12x-5y-90=0$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular el circuncentro del triángulo de vértices $A(-1,-1)$, $B(6,2)$ y $C(4,-3)$.

Solución:

– Calculamos la mediatriz de AB:

$$\begin{aligned}&(x+1)^2+(y+1)^2=(x-6)^2+(y-2)^2\\&2x+1+2y+1=-12x+36-4y+4\\&14x+6y-38=0\\&7x+3y-19=0\end{aligned}$$

– La mediatriz de BC:

$$\begin{aligned}&(x-6)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y+3)^2\\&2x+1+2y+1=-8x+16+6y+9\\&10x-4y-23=0\end{aligned}$$

– El circuncentro es el punto de intersección de las dos mediatrices:

$$\begin{cases}7x+3y-19=0\\10x-4y-23=0\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$.

♠♠♠♠

8. Números complejos. Geometría analítica

Ejercicio 1. Una de las raíces cúbicas de z es $1-2i$. Calcular las otras dos raíces.

Solución:

Basta girar la raíz $z_1 = 1-2i$, 120^o y 240^o en torno al origen:

$$z_2 = (1-2i)(\cos 120^o + i \operatorname{sen} 120^o) = (1-2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$z_3 = (1-2i)(\cos 240^o + i \operatorname{sen} 240^o) = (1-2i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular en $(1-i)^6$. Dar el resultado en forma binómica.

Solución:

$$(1-i)^6 = \left(\sqrt{2}_{-45^o}\right)^6 = 8_{-270^o} = 8_{90^o} = 8i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Hallar dos números complejos, cuya suma sea $1+4i$ y cuyo cociente sea i.

Solución:

Sean z y w los complejos que buscamos. Entonces:

$$\begin{cases} w + z = 1 + 4i \\ \frac{w}{z} = i \end{cases} \quad ; \qquad w = iz \; ; \qquad iz + z = 1 + 4i \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1+4i}{1+i}$$

Operando:

$$z = \frac{1+4i}{1+i} = \frac{(1+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+4i-4i^2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

y, sustituyendo:

$$w = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Sean los complejos $z = x + yi$ y $\bar{z} = x - yi$. Entonces:

$$x + yi + x - yi = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 4$$

Si la suma de los módulos es 10, como el módulo de un complejo y el de su conjugado son iguales, resulta que el módulo de z es igual a 5:

$$\sqrt{16 + y^2} = 5 \; ; \qquad 16 + y^2 = 25 \; ; \qquad y^2 = 9$$

Los complejos son $4+3i$ y $4-3i$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Los puntos $A(1,-2)$ y $B(5,4)$ son los extremos de la base de un triángulo isósceles. Calcular el tercer vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta $y = 5x+3$.

Solución:

El tercer vértice se encuentra en la mediatriz de AB:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$
$$-2x + 1 + 4y + 4 = -10x + 25 - 8y + 16$$
$$8x + 12y - 36 = 0$$
$$2x + 3y - 9 = 0$$

Las coordenadas del vértice son la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ y = 5x + 3 \end{cases}$$

La solución es el punto $C(0,3)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el punto simétrico de $P(-2,0)$ respecto de la recta $2x+3y-9=0$.

Solución:

– La recta que nos dan tiene pendiente $-\frac{2}{3}$. La perpendicular por P es:

$$y = \frac{3}{2}(x+2) \ ; \qquad 3x - 2y + 6 = 0$$

– La intersección de la recta dada y la perpendicular por P la obtenemos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ 3x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $Q(0,3)$.

– El punto Q es punto medio entre P y su simétrico P'. Este punto resulta ser $P'(2,6)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular el ortocentro del triángulo de vértices $A(-3,4)$, $B(1,1)$ y $C(6,1)$.

Solución:

– El lado BC tiene pendiente $m_{BC} = 0$. Se trata de una recta horizontal. La altura correspondiente a este lado será vertical y, puesto que pasa por $A(-3,4)$ es:

$$x = -3$$

– El lado AC tiene pendiente $m_{AC} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$. La altura correspondiente a este lado tiene pendiente 3 y, puesto que pasa por $B(1,1)$, su ecuación es:

$$y - 1 = 3(x-1) \ ; \qquad 3x - y - 2 = 0$$

– El ortocentro es el punto de corte de las dos alturas:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

El ortocentro es el punto $H(-3,-11)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular el punto o puntos de la recta $x - 3y - 9 = 0$ que distan $\sqrt{10}$ unidades de $P(2,1)$.

Solución:

Los puntos que buscamos deben estar en la circunferencia de centro $P(2,1)$ y radio $\sqrt{10}$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Los puntos también están sobre la recta que nos dan, deben ser la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases} \quad ; \quad (3y+9-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \ ; \quad (3y+7)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Resolvemos esta ecuación:

$$9y^2 + 42y + 49 + y^2 - 2y + 1 - 10 = 0$$
$$10y^2 + 40y + 40 = 0$$
$$y^2 + 4y + 4 = 0$$
$$y = -2$$

Hemos obtenido una sola solución, esto quiere decir que la recta y la circunferencia son tangentes. Para $y = -2$, $x = 3$. El único punto de la recta que se encuentra a esa distancia es $Q(3,-2)$.

♠♠♠♠

9. Funciones. Límites

Ejercicio 1. Calcular el dominio de definición de la función

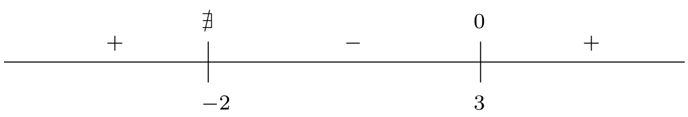
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$$

Solución:

El dominio es la solución de la inecuación

$$\frac{x-3}{x+2} \geq 0$$

El signo de esta fracción está dado en el siguiente esquema:



dominio $= (-\infty, -2) \cup [3, \infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular la función inversa de

$$f(x) = 2e^{1-x}$$

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 2e^{1-y}$$

$$e^{1-y} = \frac{x}{2}$$

$$1 - y = \ln\frac{x}{2}$$

$$y = f^{-1}(x) = 1 - \ln\frac{x}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la recta $-2x + y + 7 = 0$.

(b) Representar gráficamente la parábola y la recta

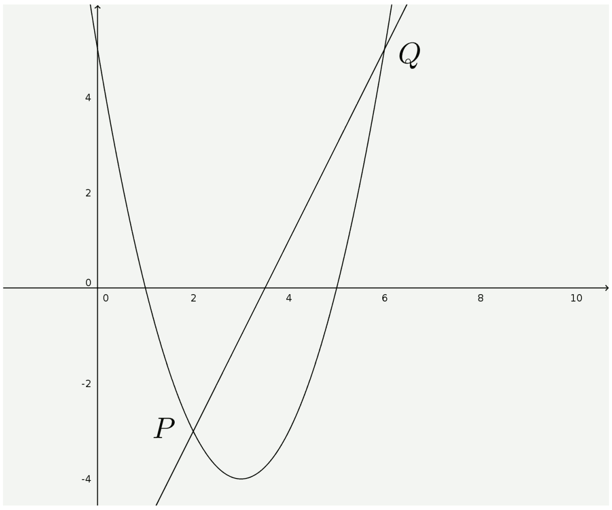
Solución:

(a) Los puntos de intersección son la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos $P(2, -3)$ y $Q(6, 5)$.

(b) La intersección de la parábola con el eje de ordenadas es $(0, 5)$ y con el eje de abscisas $(1, 0)$ y $(5, 0)$. El vértice de la parábola es el punto $(3, -4)$.



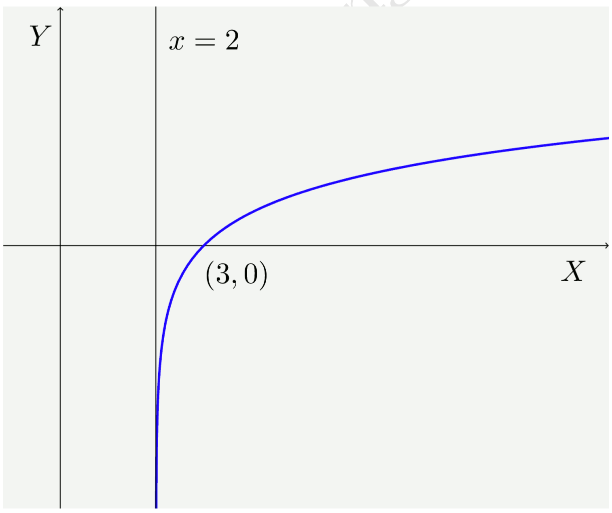
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Representar gráficamente la función:

$$f(x) = \ln(x-2)$$

indicando claramente su asíntota y los puntos de intersección con los ejes.

Solución:



♠♠♠♠

Ejercicio 5. Definir función continua y poner ejemplos de discontinuidad evitable y salto infinito.

Solución:

La función f es continua en x_0 si, en ese punto, el límite de la función es igual al valor de la función.

Se presenta una discontinuidad evitable si en un punto existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función. Por ejemplo, existe el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

pero no existe la función en $x = 0$. En ese punto hay una discontinuidad evitable.

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$. En $x = 0$ hay un salto infinito porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Escribir el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

(a) $y = e^x$ $\quad(b)$ $y = \cos x$ $\quad(c)$ $y = \operatorname{artg} x$ $\quad(d)$ $y = \ln x$ $\quad(e)$ $y = \frac{1}{x}$

Solución:

(a) Dominio $= \mathbb{R}$, Recorrido $= \mathbb{R}^+$
(b) Dominio $= \mathbb{R}$, Recorrido $= [-1, 1]$
(c) Dominio $= \mathbb{R}$, Recorrido $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
(d) Dominio $= \mathbb{R}^+$, Recorrido $= \mathbb{R}$
(e) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$, Recorrido $= \mathbb{R} - \{0\}$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - x^2}{x^3}$ $\qquad (b)$ $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}$

Solución:

(a) El límite es infinito porque el infinito de orden superior está en el numerador.
(b) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x(x-1)} = \infty$$

Si queremos determinar el signo del infinito estudiamos el signo de la función

$$y = \frac{x-3}{x(x-1)}$$

a la izquierda y derecha de $x = 1$:

	0		1		3	
$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-3}{x(x-1)} = +\infty \;; \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x-3}{x(x-1)} = -\infty$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

Solución:

(a) Utilizando la aproximación $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{x^2}{2}}=6$$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Utilizando la aproximación del logaritmo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{2x-1}{2x+1}-1\right)\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2}{2x+1}\cdot\frac{x}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

♠♠♠♠

10. Continuidad. Derivadas (I)

Ejercicio 1. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

y, a partir de ese resultado, demostrar que si $u\to 1$ y $v\to\infty$

$$\lim u^v=\lim e^{(u-1)v}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

Esto quiere decir que cuando $x\to 0$, $\ln(1+x)\sim x$.

Llamando $1+x=u$ o $x=u-1$, cuando $x\to 0$, $u\to 1$ y la equivalencia anterior la podemos escribir

$$\ln u\sim u-1\;;\qquad (u\to 1)$$

Entonces, si $u\to 1$ y $v\to\infty$:

$$\lim u^v=\lim e^{v\ln u}=\lim e^{(u-1)v}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (1 punto) Derivar las siguientes funciones:

(a) $y=2\operatorname{sen}^3 x-3\cos x$

(b) $y=(2x^2-3x+1)^3$

(c) $y=x^2\operatorname{artg}x$

(d) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Solución:

(a) $y'=2\cdot 3\operatorname{sen}^2 x\cos x+3\operatorname{sen}x$

(b) $y'=3(2x^2-3x+1)^2(4x-3)$

(c) $y'=2x\cdot\operatorname{artg}x+x^2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

(d) $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (1 punto) Derivar y simplificar:

(a) $y=3\ln\frac{1}{x}$

(b) $y=\dfrac{2x-1}{(x+3)^2}$

(c) $y=\operatorname{tg}(\pi-2x)$

(d) $y=2e^{3\ln x}$

Solución:

(a) Hay que tener en cuenta que

$$y=3\ln\frac{1}{x}=3\left(\ln 1-\ln x\right))-3\ln x$$

La derivada es

$$y'=-\frac{3}{x}$$

(b) Derivamos el cociente y simplificamos:

$$y' = \frac{2(x+3)^2 - 2(x+3)(2x-1)}{(x+3)^4} = \frac{2(x+3) - 2(2x-1)}{(x+3)^3} = \frac{-2x+8}{(x+3)^3}$$

(c) Teniendo en cuenta que

$$y = \operatorname{tg}(\pi - 2x) = -\operatorname{tg} 2x$$

la derivada es

$$y' = -\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = -\frac{2}{\cos^2 2x}$$

(d) Podemos simplificar la función:

$$y = 2e^{3\ln x} = 2e^{\ln x^3} = 2x^3$$

La derivada es $y' = 6x^2$.

♠♠♠♠

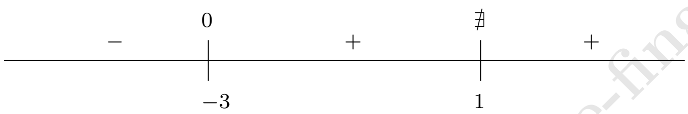
Ejercicio 4. Calcular el dominio de definición de la función

$$f(x) = \ln \frac{x+3}{(x-1)^2}$$

Solución: El dominio es la solución dela inecuación:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} > 0$$

Estudiamos el signo de la función, hay que tener en cuenta que 1 es raíz doble del denominador:



El dominio es el conjunto $(-3, 1) \cup (1, \infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a partir de la definición.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ $\qquad (b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x}$

$(c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{e^x-1}$ $\qquad (d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+3}{x^3}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando las equivalencias $\operatorname{sen} x \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

(b) Es una indeterminación 1^∞. Aplicando $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+3-x+1}{x-1}2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8x}{x}} = e^8$$

(c) Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando $\operatorname{tg} x \sim x$ y $e^x-1 \sim x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

(d) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como e^x es un infinito de orden superior a x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+3}{x^3} = \infty$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (1,5 puntos) Calcular las asíntotas de las funciones:

$(a)\ y = \dfrac{3x-1}{x^2-6x+8}$ $\qquad (b)\ y = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$

Solución:

(a) Las asíntotas verticales son $x=2$ y $x=4$ porque:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-1}{x^2-6x+8} = \infty$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x-1}{x^2-6x+8} = \infty$$

La asíntota horizontal es $y=0$ porque:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2-6x+8} = 0$$

(b) La asíntota vertical es $x=2$ porque:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x+1}{x-2} = \infty$$

No hay asíntota horizontal porque:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x-2} = \infty$$

Veamos si hay asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x(x-2)} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-3x+1}{x-2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1-2x^2+4x}{x-2} = 1$$

La asíntota oblicua es $y = 2x+1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$$

e indicar cuál es el tipo de discontinuidad,

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -3$ y $x = 3$ que anulan el denominador.

El punto $x = -3$ es una discontinuidad evitable porque

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}$$

El punto $x = 3$ es una discontinuidad de salto infinito porque

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x^2-9} = \infty$$

♠♠♠♠

11. Continuidad. Derivadas (II)

Ejercicio 1. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

y, a partir de ese resultado, demostrar que si $u \to 1$ y $v \to \infty$

$$\lim u^v = \lim e^{(u-1)v}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

Esto quiere decir que cuando $x \to 0$, $\ln(1+x) \sim x$.

Llamando $1+x = u$ o $x = u-1$, cuando $x \to 0$, $u \to 1$ y la equivalencia anterior la podemos escribir

$$\ln u \sim u - 1 \,; \qquad (u \to 1)$$

Entonces, si $u \to 1$ y $v \to \infty$:

$$\lim u^v = \lim e^{v \ln u} = \lim e^{(u-1)v}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular el dominio de definición de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-4}}$$

Solución:

El dominio es la solución de la inecuación:

$$\frac{x+1}{x^2-4} \geq 0$$

El signo del primer miembro está dado en el siguiente esquema:

	$\nexists$		0		$\nexists$	
$-$		$+$		$-$		$+$
	-2		-1		2	

El dominio de la función es el conjunto $(-2,-1] \cup (2,\infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa π. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

– Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = \pi^2 \operatorname{sen} \pi = 0$$

El punto de tangencia es $(\pi, 0)$.

– La derivada de la función es:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$$

de modo que la pendiente de la recta tangente es:

$$m = 2\pi \operatorname{sen} \pi + \pi^2 \cos \pi = -2\pi^2$$

– La ecuación de la tangente es:

$$y - 0 = -2\pi^2(x - \pi)$$

y la de la normal:

$$y - 0 = \frac{1}{2\pi^2}\,(x - \pi)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular la función inversa de $f(x) = e^{2x} - 1$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = e^{2y} - 1 \;; \qquad e^{2y} = x + 1 \;; \qquad 2y = \ln(x+1) \;; \qquad y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular la derivada de $f(x) = \cos x$ a partir de la definición.

Solución:

Sea $f(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\,\frac{x+h+x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x+h-x}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\,\frac{2x+h}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\frac{h}{2}}{h}\,\mathrm{sen}\,\frac{2x}{2} \\
&= -\,\mathrm{sen}\,x
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Derivar y simplificar:

(a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}\,x}}$ $\qquad$ (b) $y = \dfrac{x+1}{(2x-1)^2}$

Solución:

(a) Podemos escribir la función como:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}\,x}} = \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{sen}\,x) - \frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{sen}\,x)$$

La derivada es:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2}\,\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x)+\cos x(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2\cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

(b) Derivando y simplificando:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1\cdot(2x-1)^2 - 2(2x-1)\cdot 2\cdot(x+1)}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{2x-1-4(x+1)}{(2x-1)^3} \\ &= \frac{-2x-5}{(2x-1)^3} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Derivar las siguientes funciones:

(a) $y = 5\cos^2 x \operatorname{sen} x$

(b) $y = e^{\sqrt{x}}$

(c) $y = (3x-1)^4$

(d) $y = 1 + 2\operatorname{tg}^3 x$

Solución:

(a) $y' = 5\left(2\cos x(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x + \cos x\cos^2 x\right) = -10\cos x\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^3 x$

(b) $y' = e^{\sqrt{x}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(c) $y' = 4(3x-1)^3\cdot 3$

(d) $y' = 2\cdot 3\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular las asíntotas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4x-5}$

(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

Solución:

(a) $x=-1$ es asíntota vertical de la función porque:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x^2-4x-5} = \infty$$

$x=5$ es asíntota vertical de la función porque:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x+3}{x^2-4x-5} = \infty$$

$y=0$ es asíntota horizontal de la función porque:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x+3}{x^2-4x-5} = 0$$

(b) $x = 1$ es asíntota vertical de la función porque:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{x-1} = \infty$$

$y = 0$ es asíntota horizontal de la función en $-\infty$ porque:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$$

Sin embargo, no es asíntota en $+\infty$ porque:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x-1} = \infty$$

♠♠♠♠

12. Examen global

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $2^{x-1}+\dfrac{1}{2^{x-3}}=6$

(b) $\begin{cases}\log x^2+\log y^2=2\\ x^2-y^2=15\end{cases}$

Solución

(a) Podemos escribir la ecuación como:

$$\frac{2^x}{2}+\frac{1}{\frac{2^x}{2^3}}=6\ ;\qquad \frac{2^x}{2}+\frac{8}{2^x}-6=0\ ;\qquad 2^{2x}-12\cdot 2^x+16=0$$

Entonces:

$$2^x=\frac{12\pm\sqrt{80}}{2}=6\pm 2\sqrt{5}$$

Las soluciones son:

$$x=\log_2(6-2\sqrt{5})\simeq 0{,}612$$
$$x=\log_2(6+2\sqrt{5})\simeq 3{,}39$$

(b) El sistema es equivalente:

$$\begin{cases}x^2y^2=100\\ x^2-y^2=15\end{cases}$$

Por sustitución:

$$x^2(x^2-15)=100\ ;\qquad x^4-15x^2-100=0$$

Las soluciones para x^2 son $x^2=20$ y $x^2=-5$ (no válida).
Las soluciones son $(2\sqrt{5},\sqrt{5}$, $(2\sqrt{5},-\sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5},-\sqrt{5})$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar el valor que ha de tomar m para que el polinomio x^5-4x^2-x+m sea divisible por $x+3$.

Solución

Si es divisible por $x+3$, su valor numérico para $x=-3$ debe ser cero:

$$(-3)^5-4\cdot(-3)^2-(-3)+m=0\ ;\qquad -243-36+3+m=0\ ;\qquad m=276$$

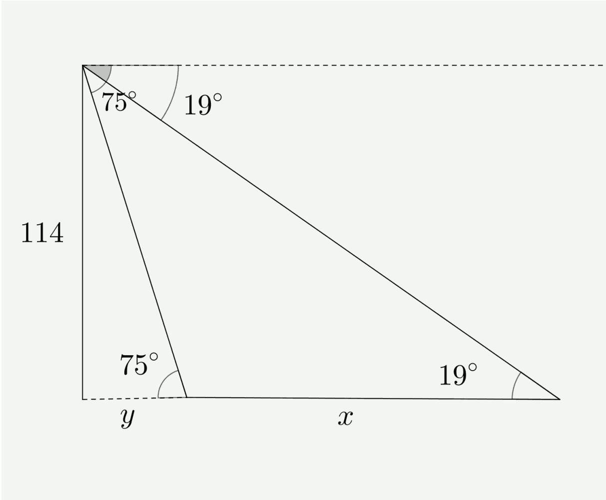
♠♠♠♠

Ejercicio 3. Desde la parte más alta de un edificio de 114 m de altura se ven las orillas de un río bajo ángulos de 75º y 19º respectivamente. Calcular la anchura del río.

Solución

De la figura (ver página siguiente) se deduce que:

$$y=\frac{114}{\operatorname{tg}75^{\circ}}$$
$$x+y=\frac{114}{\operatorname{tg}19^{\circ}}$$
$$x=\frac{114}{\operatorname{tg}19^{\circ}}-\frac{114}{\operatorname{tg}75^{\circ}}\simeq 301\text{ m}$$



♠♠♠♠

Ejercicio 4. Demostrar la identidad:

$$2\,\text{sen}\,2\alpha\,(1-2\,\text{sen}^2\,\alpha)=\text{sen}\,4\alpha$$

Solución

Desarrollamos el primer miembro:

$$\begin{aligned}2\,\text{sen}\,2\alpha\,(1-2\,\text{sen}^2\,\alpha)&=2\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,(1-2\,\text{sen}^2\,\alpha)\\&=4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha-8\,\text{sen}^3\,\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

Y el segundo miembro:

$$\begin{aligned}\text{sen}\,4\alpha&=\text{sen}(2\alpha+2\alpha)\\&=2\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha\\&=2\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha)\\&=4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,(1-2\,\text{sen}^2\,\alpha)\\&=4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha-8\,\text{sen}^3\,\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

Como hemos obtenido lo mismo al desarrollar los dos miembros de la igualdad:

$$2\,\text{sen}\,2\alpha\,(1-2\,\text{sen}^2\,\alpha)=\text{sen}\,4\alpha$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular $m\in\mathbb{R}$ para que el número complejo $z=3-mi$ tenga el mismo módulo que $w=2\sqrt{5}+\sqrt{5}i$.

Solución

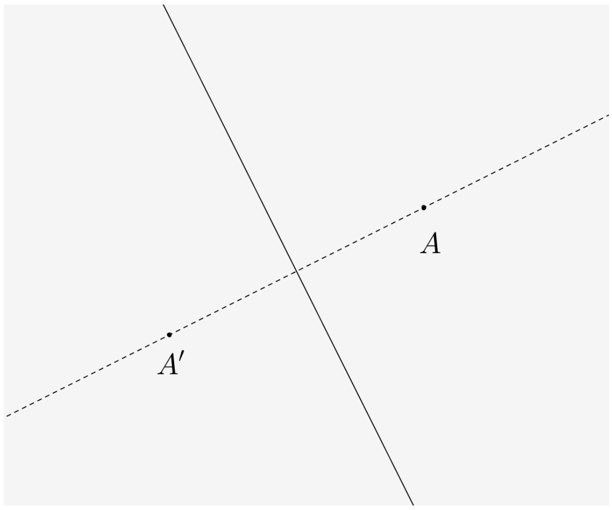
Si los módulos son iguales:

$$9+m^2=25\ ;\qquad m^2=16\ ;\qquad m=-4,\ m=4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Determinar el punto simétrico del $A(3,2)$ respecto a la recta $2x+y=3$.

Solución



La recta que nos dan tiene pendiente -2. La perpendicular por el punto a la recta es

$$y-2=\frac{1}{2}(x-3)\ ; \qquad x-2y+2=0$$

La intersección de las dos rectas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto $P(1,1)$. Este punto es punto medio de A y A':

$$\frac{3+x'}{2}=1\ ; \qquad \frac{2+y'}{2}=1$$

El punto simétrico es $A'(-1,0)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}$$

se pide:

(a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

(b) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de f.

(c) Representar la función.

Solución

(a) El dominio es el conjunto de los números reales salvo los valores que anulan el denominador, o sea, $\mathbb{R}-\{-1,-4\}$.
Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=-4$ ya que:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)=\infty$$

La asíntota horizontal es $y=1$ puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)=1$$

(*b*) Reescribimos la función como:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} = \frac{x+4+x(x+1)}{(x+1)(x+4)} = \frac{x^2+2x+4}{x^2+5x+4}$$

La derivada es:

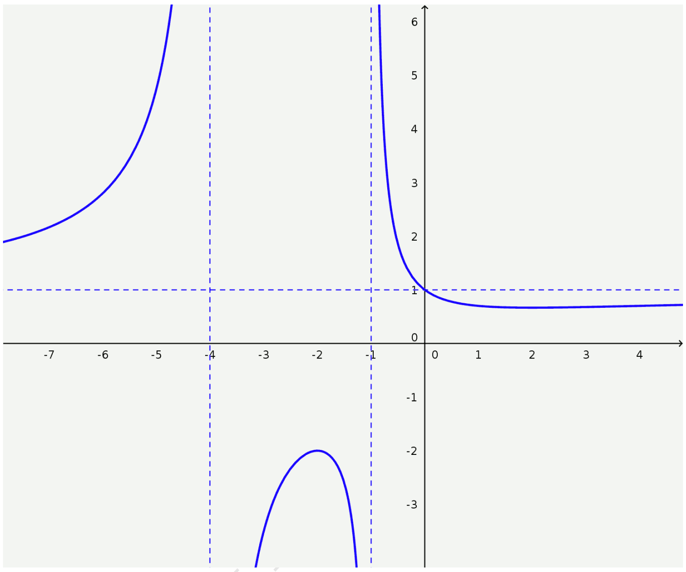
$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+5x+4)-(2x+5)(x^2+2x+4)}{(x^2+5x+4)^2} = \frac{3x^2-12}{(x^2+5x+4)^2}$$

La derivada se anula en $x=-2$ y $x=2$. El signo de la derivada está dado por:

	-4		-2		-1		2	
$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Hay un máximo en $x=-2$ y un mínimo en $x=2$.

(*c*)



♠♠♠♠