Matemáticas B. Cuarto ESO.
Curso 2013-2014. Exámenes

1. Radicales y logaritmos

Ejercicio 1. *Simplificar extrayendo factores del radical:*

$$\sqrt[5]{1024a^{10}b^5c^3}$$

Solución:

$$\sqrt[5]{1024a^{10}b^5c^3} = \sqrt[5]{2^{10}a^{10}b^5c^3} = 2^2a^2b\sqrt[5]{c^3} = 4a^2b\sqrt[5]{c^3}$$

Ejercicio 2. *Calcular:*

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{3} + \sqrt{243} \\ &= 2\sqrt{4\cdot 3} - 3\sqrt{25\cdot 3} + 5\sqrt{9\cdot 3} - 3\sqrt{16\cdot 3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{81\cdot 3} \\ &= 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Racionalizar:*

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3+2+2\sqrt{6}}{3-2} = 5+2\sqrt{6}$$

Ejercicio 4. *Racionalizar y simplificar:*

$$7\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{60}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 7\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{15} + 2\sqrt{60} &= \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{15} + 2\cdot 2\sqrt{15} \\ &= \frac{7\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{15} + 4\sqrt{15} \\ &= \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{3} - 3 + 4\right)\sqrt{15} \\ &= \frac{46}{15}\sqrt{15} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Calcular:*

$$\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}} &= \sqrt[3]{(13+2\sqrt{11})(13-2\sqrt{11})}\\ &= \sqrt[3]{169-44}\\ &= \sqrt[3]{125}\\ &= 5\end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes logaritmos:*

a) $\log_2 64$ *b*) $\log_7 343$ *c*) $\log_2 \sqrt{2}$ *d*) $\log_5(-5)$

Solución:

a) $\log_2 64 = 6$

b) $\log_7 343 = 3$

c) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

d) $\log_5(-5)$ (no existe)

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes logaritmos:*

a) $\log_2 \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ *b*) $\log_3 \dfrac{1}{81}$

Solución:

$$\log_2\frac{\sqrt{2}}{4} = \log_2\sqrt{2} - \log_2 4 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\log_3\frac{1}{81} = \log_3 1 - \log_3 81 = 0 - 4 = -4$$

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes logaritmos:*

a) $\log_{16} 8$

b) $\log_{25} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Solución:

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{3}{4}$$

$$\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_5 25} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

Ejercicio 9. *Conocido* $\log 5 = 0{,}6990$*, hallar* $\log 2$ *y* $\log 12{,}5$*.*

Solución:

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 = 0{,}3010$$

$$\begin{aligned}\log 12{,}5 &= \log \frac{25}{2} = \log 25 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = 2\log 5 - \log 2 \\ &= 2 \cdot 0{,}6990 - 0{,}3010 = 1{,}0970\end{aligned}$$

Ejercicio 10. *Definir logaritmo de un número y demostrar la propiedad del logaritmo del producto.*

Solución:

Ver apuntes de teoría.

---

2. Polinomios y ecuaciones

Ejercicio 1. *Dividir:*

$$(6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12) \div (2x^2 + 3x - 2)$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -\ 5x^3 & -\ 39x^2 & -\ 4x & +\ 12 & 2x^2 + 3x - 2 \\ \cline{6-6}
-\ 6x^4 & -\ 9x^3 & +\ 6x^2 & & & 3x^2 - 7x - 6 \\ \cline{1-3}
 & -\ 14x^3 & -\ 33x^2 & -\ 4x & & \\
 & 14x^3 & +\ 21x^2 & -\ 14x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 12x^2 & -\ 18x & +\ 12 & \\
 & & 12x^2 & +\ 18x & -\ 12 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Ejercicio 2. *Hallar el valor que ha de tomar m para que el polinomio $x^5 - 4x^2 - x + m$ sea divisible por $x + 1$.*

Solución:

Si es divisible por $x + 1$, $x = 1$ es una raíz del polinomio. por consiguiente:

$$(-1)^5 - 4(-1)^2 - (-1) + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 - 4 + 1 + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 4$$

Ejercicio 3. *Determinar el valor de a con la condición de que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3a$ de el resto 10 al dividirlo por $x + 4$.*

Solución:

El valor numérico para $x = -4$ debe ser 10. Entonces:

$$2(-4)^4 + 9(-4)^3 + 2(-4)^2 - 6(-4) + 3a = 10 \quad \Longrightarrow \quad 512 - 576 + 32 + 24 + 3a = 10$$

y de aquí, $a = 6$.

Ejercicio 4. *Descomponer en factores:*

$$6x^3 + 13x^2 - 4$$

Solución:

Buscamos las raíces enteras entre los divisores de 4. Para $x = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 0 & -4 \\ -2 & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Así obtenemos una primera factorización:

$$6x^3 + 13x^2 - 4 = (x + 2)(6x^2 + x - 2)$$

Calculamos ahora las raíces del polinomio de segundo grado:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

Las raíces son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$. Obtenemos la siguiente factorización:

$$6x^3 + 13x^2 - 4 = (x + 2)(6x^2 + x - 2) = (x + 2)6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x + 2)(2x - 1)(3x + 2)$$

Ejercicio 5. *Resolver la ecuación:*

$$3(x - 1) - \frac{2x - 3}{4} + 1 + \frac{5}{6} = \frac{4x - 1}{3} + x + \frac{1}{12}$$

Solución:

Multiplicamos por 12 para quitar denominadores y resulta:

$$36(x-1)-3(2x-3)+12+10=4(4x-1)+12x+1$$

Operando:

$$36x-36-6x+9+12+10=16x-4+12x+1$$
$$30x-5=28x-3$$
$$2x=2$$
$$x=1$$

Ejercicio 6. *Resolver:*

$$\frac{3-x}{1-x^2}-\frac{2+x}{1+x}=\frac{1}{1-x}$$

Solución:

Quitamos denominadores:

$$\frac{(3-x)(1+x)(1-x)}{1-x^2}-\frac{(2+x)(1+x)(1-x)}{1+x}=\frac{(1+x)(1-x)}{1-x}$$

y resulta:

$$3-x-(2+x)(1-x)=1+x$$

Operando:

$$3-x-2+2x-x+x^2=1+x$$
$$x^2-x=0$$

Esto nos da dos soluciones $x=0$ y $x=1$. Esta segunda solución no es válida.

Ejercicio 7. *Resolver:*

$$\sqrt{x^2+x-1}=2-x$$

Solución:

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$x^2+x-1=(2-x)^2$$

Operando:

$$x^2+x-1=4-4x+x^2$$
$$5x=5$$
$$x=1$$

Puede comprobarse que la solución es válida.

Ejercicio 8. *Resolver:*

$$2^{x-1} + 2^{x+2} - 2^{x+1} = 40$$

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$\frac{2^x}{2} + 4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 40$$

Quitamos denominadores:

$$2^x + 8 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 80 \quad \Longrightarrow \quad 5 \cdot 2^x = 80 \quad \Longrightarrow \quad 2^x = 16 \quad \Longrightarrow \quad x = 4$$

---

3. Polinomios y ecuaciones

Ejercicio 1. *Efectuar la división:*

$$(2x^4 + 11x^3 + x^2 - 41x + 15) \div (2x^2 + 7x - 3)$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 2x^4 & +\ 11x^3 & +\ x^2 & -\ 41x & +\ 15 & 2x^2 + 7x - 3 \\ \cline{7-7}
- & 2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & & & x^2 + 2x - 5 \\ \cline{1-4}
 & & 4x^3 & +\ 4x^2 & -\ 41x & & \\
 & - & 4x^3 & -\ 14x^2 & +\ 6x & & \\ \cline{3-6}
 & & & -\ 10x^2 & -\ 35x & +\ 15 & \\
 & & & 10x^2 & +\ 35x & -\ 15 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Ejercicio 2. *Hallar el valor que ha de tomar m para que el polinomio $x^5 - 4x^2 - x + m$ sea divisible por $x + 1$.*

Solución:

Según el teorema del factor, el polinomio debe ser cero para $x = -1$:

$$(-1)^5 - 4(-1)^2 - (-1) + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 - 4 + 1 + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 4$$

Ejercicio 3. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{2-4x}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2}$$

Solución:

$$\frac{10(x-4)}{5} - 10 \cdot 4(-2x+1) - \frac{10(2-4x)}{10} = 10 \cdot 2(x-3) + \frac{10(5x+6)}{2}$$

$$2(x-4) - 40(-2x+1) - (2-4x) = 20(x-3) + 5(5x+6)$$

$$2x - 8 + 80x - 40 - 2 + 4x = 20x - 60 + 25x + 30$$

$$86x - 50 = 45x - 30$$

$$86x - 45x = 50 - 30$$

$$41x = 20$$

$$x = \frac{20}{41}$$

Ejercicio 4. *Resolver:*

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$$

Solución:

Se trata de una ecuación bicuadrada:

$$x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{18} = \frac{-5 \pm 13}{18}$$

Obtenemos dos soluciones para x^2:

$$x^2 = \frac{4}{9} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = -1 \qquad \text{no hay solución para } x$$

Por consiguiente hay dos soluciones $x = -\frac{2}{3}$ y $x = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 5. *Resolver:*

$$2x - \sqrt{2x+3} = x + 6$$

Solución:

$$2x - \sqrt{2x+3} = x + 6$$

$$x - 6 = \sqrt{2x+3}$$

$$(x-6)^2 = (\sqrt{2x+3})^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = 2x + 3$$

$$x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 11$$

Solamente es válida la segunda solución $x = 11$.

Ejercicio 6. *Resolver:*

$$2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$$

Solución:

$$2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$$

$$\frac{2^{2x}}{2^5} - \frac{3 \cdot 2^x}{2^3} + 1 = 0$$

$$2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$

$$2^x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2}$$

De aquí obtenemos:

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 8 = 3$$

$$2^x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 4 = 2$$

Ejercicio 7. *Resolver:*

$$2\log(2x) - 1 = \log x$$

Solución:

$$2\log(2x) - 1 = \log x$$

$$\log(4x^2) - \log 10 = \log x$$

$$\log(4x^2) = \log x + \log 10$$

$$\log(4x^2) = 10x$$

$$4x^2 - 10x = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

Solamente es válida la segunda solución $x = \frac{5}{2}$

Ejercicio 8. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 - 2xy = 20 \end{cases}$$

Solución:

De la primera ecuación resulta:

$$x = 2 + 2y = 2(1 + y)$$

Sustituyendo en la segunda:

$$4(1+y)^2 - 2 \cdot 2(1+y)y = 20$$

$$(1+y)^2 - (1+y)y = 5$$

$$1 + 2y + y^2 - y - y^2 = 5$$

$$y = 4 \qquad\qquad \text{y sustituyendo}$$

$$x = 10$$

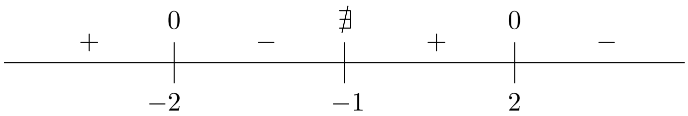
La solución del sistema es $(10, 4)$.

Ejercicio 9. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{4-x^2}{x+1} \geq 0$$

Solución:

Las raíz del numerador son -2 y 2. El denominador tiene una única raíz -1. El signo de la fracción está dado por el siguiente esquema:



La solución de la inecuación es:

$$x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 2]$$

Ejercicio 10. *En la ecuación $x^2 - 16x + c = 0$, determinar el intervalo en que ha de variar c para que no tenga solución.*

Solución:

Para que no haya solución, el discriminante debe ser menor que cero:

$$256 - 4c < 0 \quad \Longrightarrow \quad 256 < 4c \quad \Longrightarrow \quad c > 64$$

El parámetro c debe estar en el intervalo $(64, \infty)$.

---

4. Examen de la primera evaluación

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes logaritmos:*

◇ $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$

◇ $\log_5 \frac{1}{625}$

Solución:

◇ $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9} = \log_3 \sqrt{3} - \log_3 9 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

◇ $\log_5 \frac{1}{625} = \log 51 - \log_5 625 = 0 - 4 = -4$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes logaritmos:*

◇ $\log_{27} \sqrt{3}$

◇ $\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}}$

Solución:

◇ $\log_{27} \sqrt{3} = \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 27} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

◇ $\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}}{\log_9} = \frac{\log_3 1 - \log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

Ejercicio 3. *Siendo* $\log 2 = 0{,}3010$*, calcular* $\log 0{,}8$.

Solución:

$$\log 0{,}8 = \log \frac{8}{10} = \log 8 - \log 10 = \log 2^3 - 1 = 3 \log 2 - 1 = 3 \cdot 0{,}3010 - 1 = 0{,}0970$$

Ejercicio 4. *Racionalizar los denominadores:*

◇ $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

◇ $\frac{1}{4\sqrt{7}}$

Solución:

◇ $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$

◇ $\frac{1}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{28}$

Ejercicio 5. *¿Qué valor habrá que dar a n para que el polinomio $x^3 - 6x^2 + 2nx - 1$ sea divisible por $x - 6$?*

Según el teorema del factor, si el polinomio es divisible por $x - 6$, el valor numérico del polinomio para $x = 6$ es igual a cero:

$$6^3 - 6 \cdot 6^2 + 12n - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{1}{12}$$

Ejercicio 6. *Resolver la ecuación:*

$$144x^4 - 25x^2 + 1 = 0$$

Solución:

Se trata de una ecuación bicuadrada:

$$x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 144}}{288} = \frac{25 \pm 7}{288}$$

Obtenemos dos soluciones para x^2:

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{32}{288} = \frac{1}{9} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{18}{288} = \frac{1}{16} \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Resolver:*

$$12x^3 + 49x^2 + 3x - 4 = 0$$

Solución:

Descomponemos en factores el polinomio. Una raíz entera es -4:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & 49 & 3 & -4 \\ -4 & & -48 & -4 & 4 \\ \hline & 12 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

De modo que, factorizando el polinomio, la ecuación queda:

$$(x + 4)(12x^2 + x - 1) = 0$$

Igualando a cero los dos factores, obtenemos las soluciones:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 8. *Resolver:*

$$\log(7x-9)^2 = 2 - \log(3x-4)^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\log(7x-9)^2 = 2 - \log(3x-4)^2\\
&\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = \log 100\\
&(7x-9)^2(3x-4)^2 = 100\\
&[(7x-9)(3x-4)]^2 = 100
\end{aligned}$$

Pueden darse dos casos:

- ⋄ $(7x-9)(3x-4) = 10$. Resolvemos la ecuación:

  $$21x^2 - 55x + 26 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{55 \pm \sqrt{55^2 - 4\cdot 26\cdot 21}}{42} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x_1 = 2\\ x_2 = \frac{13}{21}\end{cases}$$

  Ambas soluciones son válidas.

- ⋄ $(7x-9)(3x-4) = -10$. Esta ecuación no tiene solución.

Ejercicio 9. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x + y = 5\\ (6+x)(7+y) = 80\end{cases}$$

Solución:

Despejando y de la primera ecuación:

$$y = 5 - x$$

y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned}
&(6+x)(7+y) = 80\\
&(6+x)(7+5-x) = 80\\
&(6+x)(12-x) = 80\\
&-x^2 + 6x + 72 - 80 = 0\\
&x^2 - 6x + 8 = 0
\end{aligned}$$

Esta ecuación tiene como soluciones $x_1 = 2$, $x^2 = 4$. Las soluciones correspondientes para la incórnita y son $y_1 = 3$ e $y_2 = 1$. Las soluciones del sistema son $(2,3)$ y $(4,1)$.

Ejercicio 10. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{x^2-1}{2x+6} \geq 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son -1 y 1. La raíz del denominador es -3. Tenemos el siguiente esquema de signos:

	-3		-1		1	
$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, -1] \cup [1, \infty)$$

---

5. Geometría

Ejercicio 1. *Definir bisectriz de un ángulo. Enunciar y demostrar el teorema de la bisectriz en un triángulo.*

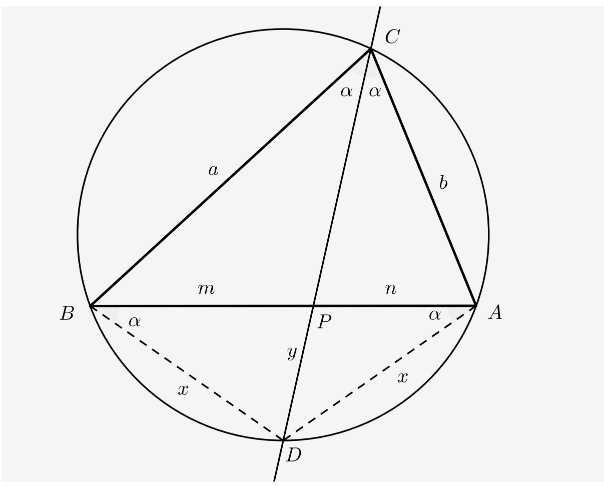
Solución:

Se llama bisectriz de un ángulo a la recta que divide el ángulo en dos ángulos iguales. La bisectriz tiene la propiedad de que todos sus puntos equidistan de los lados del ángulo. Por esta razón, la bisectriz puede definirse también como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas.

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto que se llama incentro del triángulo. Este punto, por la propiedad de la bisectriz, es equidistante de los tres lados del triángulo y es, por tanto, el centro de la circunferencia inscrita.

Teorema de la bisectriz: la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados contiguos. En la figura **??**:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$$



En la figura los ángulos marcados como α son iguales por estar inscritos en arcos iguales. Los triángulos PBC y PAD son semejantes porque tienen los ángulos iguales. De aquí se deduce que:

$$\frac{a}{x} = \frac{m}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{a} = \frac{y}{x}$$

También son semejantes los triángulos PBD y PAC:

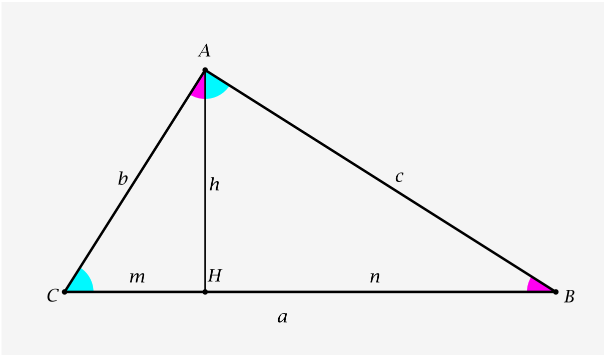
$$\frac{b}{x} = \frac{n}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{b} = \frac{y}{x}$$

y de las dos igualdades se deduce que:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$$

Ejercicio 2. *Teoremas del cateto, de la altura y de Pitágoras en triángulos rectángulos. Enunciado y demostración.*

Solución:



Si en un triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura correspondiente a la hipotenusa (AH) el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos CHA y BHA. Estos dos triángulos son semejantes entre sí y semejantes al triángulo ABC. En la figura **??** se han marcado con colores los ángulos iguales. Estos ángulos son iguales por tener los lados perpendiculares.

De la semejanza de los triángulos se deducen los teoremas que se exponen a continuación:

- Teorema del cateto. De la semejanza de los triángulos CHA y ABC se deduce que:

  $$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \quad \Longrightarrow \quad b^2 = am$$

  y de la semejanza de los triángulos BHA y ABC:

  $$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \quad \Longrightarrow \quad c^2 = an$$

  que puede expresarse así: un cateto al cuadrado es igual a la hipotenusa por su proyección sobre ella (teorema del cateto).

- Teorema de Pitágoras. Como es sabido, el teorema de Pitágoras establece que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. El teorema del cateto permite demostrar el teorema de Pitágoras:

  $$\begin{matrix} b^2 = am \\ c^2 = an \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a^2$$

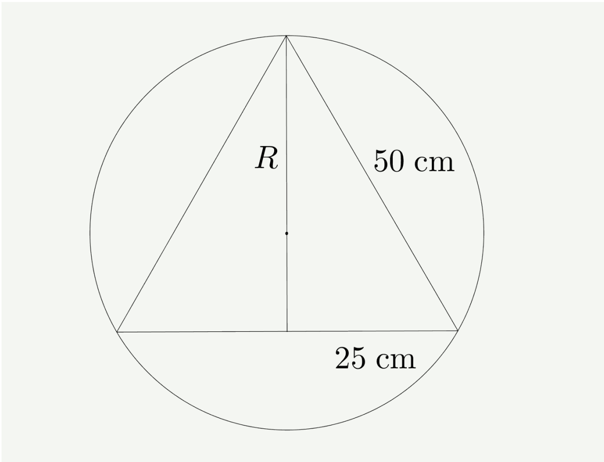
- Teorema de la altura. De la semejanza de los triángulos CHA y BHA deducimos que:

  $$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \Longrightarrow \quad h^2 = mn$$

  El cuadrado de la altura es igual al producto de las longitudes de los segmentos en que divide a la hipotenusa (teorema de la altura).

Ejercicio 3. *Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de* 50 cm *de lado.*

Solución:



La altura del triángulo mide:

$$h = \sqrt{50^2 - 25^2} = 25\sqrt{3} \text{ cm}$$

El radio es igual a $\frac{2}{3}$ de la altura:

$$R = \frac{2}{3} \cdot 25\sqrt{3} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

La longitud de la circunferencia es:

$$l = 2\pi R = 2\pi \frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{100\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Ejercicio 4. *La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide* 150 cm *y la proyección de un cateto sobre ella* 54 cm*. Hallar el área del triángulo.*

Solución:

La otra proyección mide:

$$m = 150 - 54 = 96 \text{ cm}$$

Por el teorema de la altura, la altura relativa a la hipotenusa mide:

$$h = \sqrt{54 \cdot 96} = 72 \text{ cm}$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2}\, 150 \cdot 72 = 5400 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 5. *Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden* 16 *y* 36 cm. *Calcular el área del triángulo.*

Solución:

La altura relativa a la hipotenusa mide:

$$h = \sqrt{16 \cdot 36} = 24 \text{ cm}$$

y la hipotenusa:

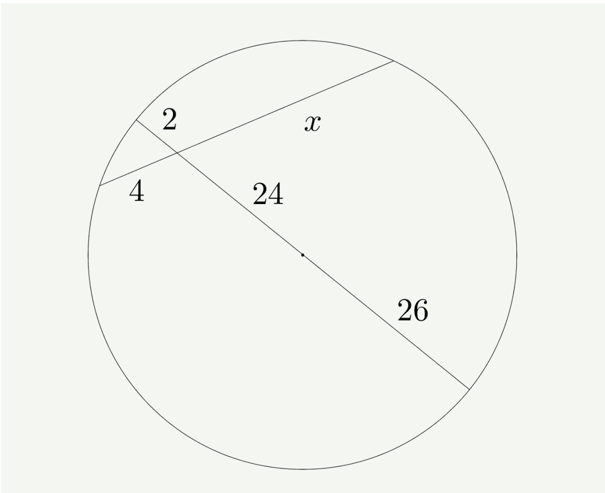
$$a = 16 + 36 = 52 \text{ cm}$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2} 52 \cdot 24 = 624 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 6. *Un punto de un círculo de* 26 cm *de radio se halla situado a* 24 cm *del centro. Por dicho punto trazamos una secante que determina en la circunferencia dos segmentos rectilíneos uno de los cuales mide* 4 cm. *¿Cuánto mide el otro?*

Solución:



Por el teorema de las cuerdas:

$$50 \cdot 2 = 4 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad x = 25 \text{ cm}$$

---

6. Trigonometría

Ejercicio 1. *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo en que uno de los catetos mide* 27 cm *y la hipotenusa* 56 cm*.*

Solución:

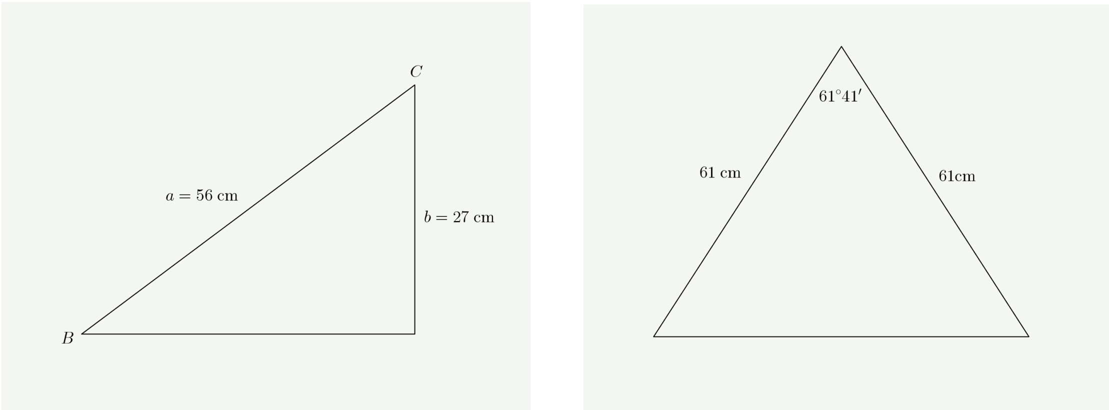


Figura 1: Ejercicios 1 y 3

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} B = \frac{27}{56} \quad &\Longrightarrow \quad B = \operatorname{arsen} \frac{27}{56} = 28^{o}49'32'' \\
\cos B = \frac{27}{56} \quad &\Longrightarrow \quad B = \operatorname{arcos} \frac{27}{56} = 61^{o}10'28''
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2. *Obtener en radianes el ángulo correspondiente a un sector circular de* 654 cm^2 *en un círculo de* 21 cm *de radio.*

Solución:

$$
S = \frac{1}{2} r^2 \varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{2S}{r^2} = \frac{2 \cdot 654}{21^2} = 2{,}97
$$

Ejercicio 3. *Calcular el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden* 61 cm *y el ángulo desigual* $96^{o}41'$*.*

Solución:

Según una fórmula del área, ésta es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido. Por tanto:

$$
S = \frac{1}{2}\, 61^2 \operatorname{sen} 96^{o}41' = 1847{,}86 \text{ cm}^2
$$

Ejercicio 4. *Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en que* $b = 18$ cm *y* $C = 41^o$.

Solución:

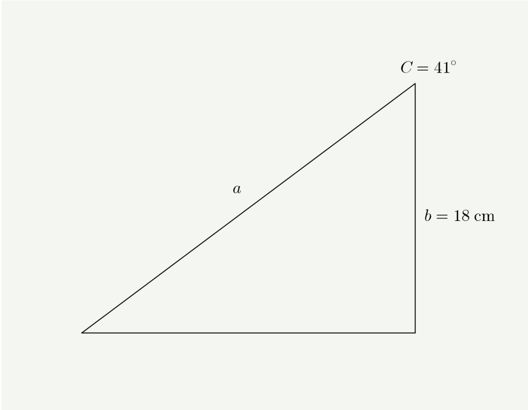


Figura 2: Ejercicio 4

$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{18}{\cos 41^o} = 23{,}85 \text{ cm}$$

Ejercicio 5. *Calcular los ángulos de un triángulo isósceles cuya base mide* 84 *cm y su altura* 50 *cm.*

Solución:

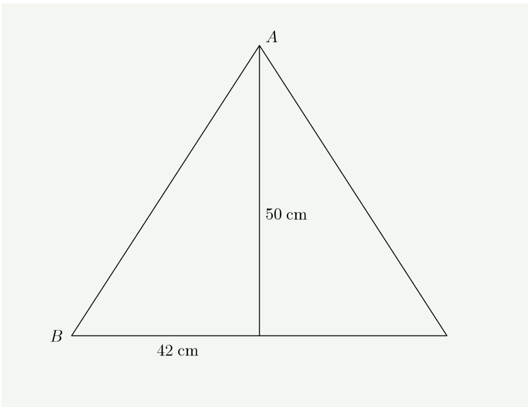


Figura 3: Ejercicio 5

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{42}{50} \quad \Longrightarrow \quad A = 2\operatorname{artg}\frac{42}{50} = 80^o3'38''$$
$$\operatorname{tg} B = \frac{50}{42} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg}\frac{50}{42} = 49^o58'11''$$

Ejercicio 6. *Calcular el área de un segmento circular determinado por una cuerda de* 38 cm *en una circunferencia de* 26 cm *de radio.*

Solución:

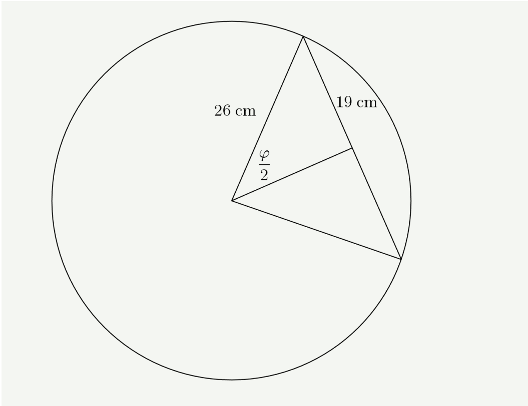


Figura 4: Ejercicio 6

Es preciso calcular primero el ángulo en radianes:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{19}{26}$$

y sustituir este valor de φ en:

$$S=\frac{1}{2}\,r^2(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)$$

El resultado es 216,73 cm^2.

Ejercicio 7. *Calcular la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de* 31 cm *de radio.*

Solución:

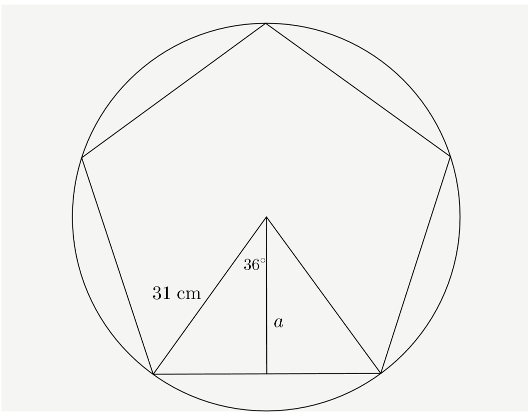


Figura 5: Ejercicio 7

El ángulo desigual del triángulo isósceles es 72$^{\text{o}}$, la mitad de este ángulo es 36$^{\text{o}}$. La apotema mide:

$$a=31\cos 36^{\text{o}}=25{,}08\text{ cm}$$

Ejercicio 8. *En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa, divide a ésta en segmentos de* 12 *y* 27 cm*. Calcular sus ángulos en grados, minutos y segundos.*

Solución:

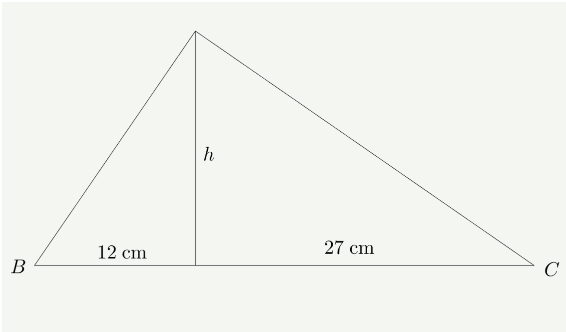


Figura 6: Ejercicio 8

La altura relativa a la hipotenusa mide:

$$h = \sqrt{12 \cdot 27}$$

Los ángulos miden:

$$\operatorname{tg} B = \frac{h}{12} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg} \frac{h}{12} = 33^o 41' 24''$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{h}{27} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg} \frac{h}{12} = 56^o 18' 36''$$

Ejercicio 9. *Calcular el área de un trapecio isósceles cuya base menor es de* 32 cm*; cuyos lados miden* 43 cm *y el ángulo de éstos con la base menor es de* $125^o 28'$

Solución:

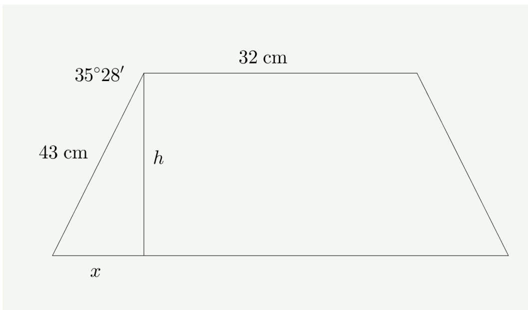


Figura 7: Ejercicio 9

Necesitamos calcular primero la base mayor y la altura:

$$x = 43 \operatorname{sen} 35^o 28'$$

$$h = 43 \cos 35^o 28'$$

Conocidos estos valores, la base mayor es $32 + 2x$ y el área es:

$$S = \frac{(\text{Base mayor} + \text{Base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

sustituyendo los valores obtenidos resulta $S = 1994{,}47\ \text{cm}^2$.

Ejercicio 10. *Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de* $36^o30'$ *y* $23^o15'$*. Si la distancia entre estos dos puntos es de* 35 m *hallar la altura de la torre.*

Solución: De la figura 8 se desprende que:

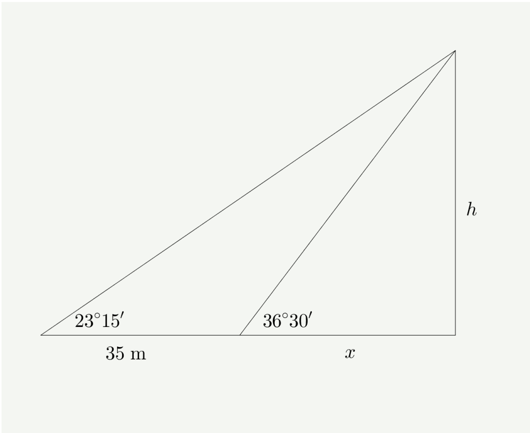


Figura 8: Ejercicio 10

$$\operatorname{tg} 36^o30' = \frac{h}{x}$$
$$\operatorname{tg} 23^o15' = \frac{h}{x+35}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$h = x \operatorname{tg} 36^o30'$$

y sustituyendo en la segunda:

$$\operatorname{tg} 23^o15' = \frac{x \operatorname{tg} 36^o30'}{x+35}$$
$$\operatorname{tg} 23^o15'(x+35) = x \operatorname{tg} 36^o30'$$
$$35 \operatorname{tg} 23^o15' = x \operatorname{tg} 36^o30' - x \operatorname{tg} 23^o15'$$
$$35 \operatorname{tg} 23^o15' = x(\operatorname{tg} 36^o30' - \operatorname{tg} 23^o15')$$
$$x = \frac{35 \operatorname{tg} 23^o15'}{\operatorname{tg} 36^o30' - \operatorname{tg} 23^o15'}$$

Una vez obtenido x, calculamos h sustituyendo en $h = x \operatorname{tg} 36^o30'$. El resultado es $h = 35{,}86$ m.

---

7. Segundo examen de trigonometría

Ejercicio 1. *En una circunferencia, un arco de* 136^o *mide* 84 cm*. Calcular el radio de la circunferencia.*

Solución:

Puesto que $l = r\varphi$, donde φ es el ángulo en radianes:

$$84 = r \cdot \frac{136\pi}{180} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{84 \cdot 180}{136\pi} = 35{,}39 \text{ cm}$$

Ejercicio 2. *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo en el que el cateto* $c = 47$ cm *y la hipotenusa* $a = 62$ cm*.*

Solución:

$$\cos B = \frac{47}{62} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{arcos} \frac{47}{62} = 40^{\text{o}}42'22''$$
$$\operatorname{sen} C = \frac{47}{62} \quad \Longrightarrow \quad C = \operatorname{arsen} \frac{47}{62} = 49^{\text{o}}17'38''$$

Ejercicio 3. *Calcular el área de un octógono regular de* 16 cm *de lado.*

Solución:

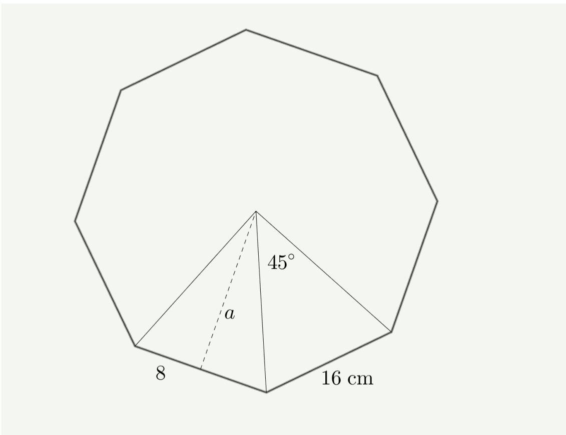


Figura 9: Ejercicio 3

Primero hay que calcular la apotema:

$$a = 8 \operatorname{cotg} 22{,}5^{\text{o}} = \frac{8}{\operatorname{tg} 22{,}5^{\text{o}}} = 19{,}31 \text{ cm}$$

El área es:

$$S = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{16 \cdot 8 \cdot a}{2} = 1236{,}08 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4. *Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden* 30 *y* 40 cm*.*

Solución:

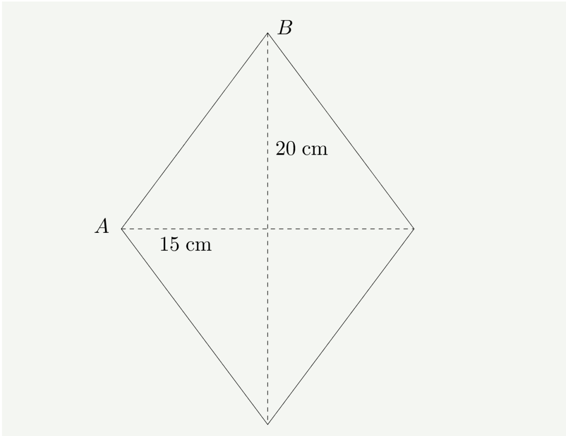


Figura 10: Ejercicio 4

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{20}{15}\quad\Longrightarrow\quad A=2\operatorname{artg}\frac{20}{15}=106^{\text{o}}15'37''$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{15}{20}\quad\Longrightarrow\quad B=2\operatorname{artg}\frac{15}{20}=73^{\text{o}}44'23''$$

Ejercicio 5. *En un círculo de* 64 cm *de radio un sector tiene una superficie de* 4680 cm^2*. Calcular la longitud de la cuerda que une los extremos del arco correspondiente.*

Solución:

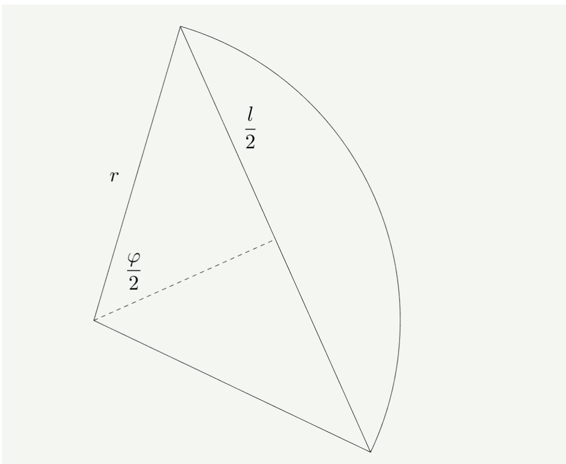


Figura 11: Ejercicio 5

El área de un sector circular es igual a:

$$S=\frac{1}{2}\,r^2\varphi$$

donde φ es el ángulo en radianes. A partir de aquí calculamos:

$$\varphi = \frac{2S}{r^2} = \frac{2 \cdot 4680}{64^2} = 2{,}2852$$

En la figura vemos que:

$$\frac{l}{2} = r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \quad \Longrightarrow \quad l = 116{,}44 \text{ cm}$$

Ejercicio 6. *Calcular el área de un trapecio rectángulo en que las bases miden* 140 *y* 90 cm *y el ángulo agudo* 48^o*.*

Solución:

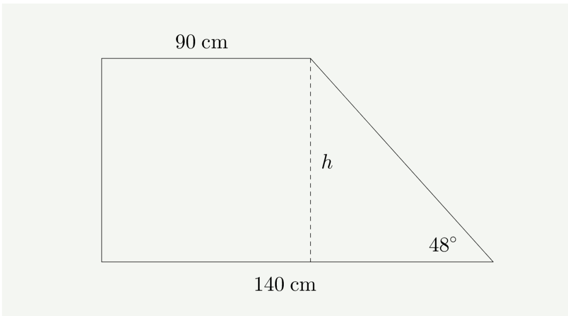


Figura 12: Ejercicio 6

De la figura 12 se deduce que:

$$h = 50 \operatorname{tg} 48^o = 55{,}53 \text{ cm}$$

y el área es:

$$S = \frac{(b_1 + b_2)h}{2} = \frac{(140 + 90)h}{2} = 6386{,}02 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 7. *En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa mide* 39,42 m *y uno de los ángulos del triángulo* 24^o*. Calcular el área.*

Solución:

Puede resolverse de varias maneras. Por ejemplo, podemos calcular los catetos (ver figura 13):

$$b = \frac{39{,}42}{\operatorname{sen} 24^o} = 96{,}92 \text{ cm}$$
$$c = \frac{39{,}42}{\operatorname{sen} 66^o} = 43{,}15 \text{ cm}$$

y el área:

$$S = \frac{1}{2}\, bc = 2091,03 \text{ cm}^2$$

También podría haberse calculado la hipotenusa para multiplicar por la altura, calculando previamente las proyecciones de los catetos sobre ella.

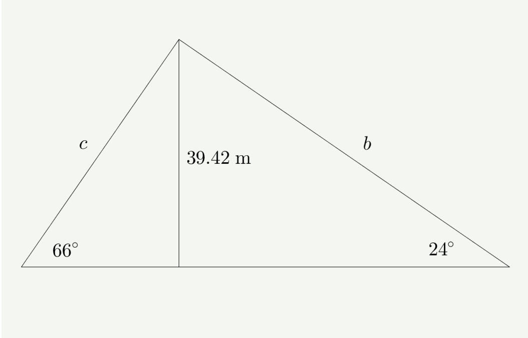


Figura 13: Ejercicio 7

Ejercicio 8. *Los lados de un triángulo miden* 8, 12 *y* 16 cm. *Calcular el ángulo mayor.*

Solución:

El ángulo mayor es el opuesto al lado mayor que mide 16 cm. Por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{8^2+12^2-16^2}{2\cdot 8\cdot 12} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \arccos\frac{8^2+12^2-16^2}{2\cdot 8\cdot 12} = 104^{\circ}28'39''$$

Ejercicio 9. *Calcular los lados de un triángulo isósceles sabiendo que su superficie es* 3161 cm^2 *y su altura* 157 cm.

Solución:

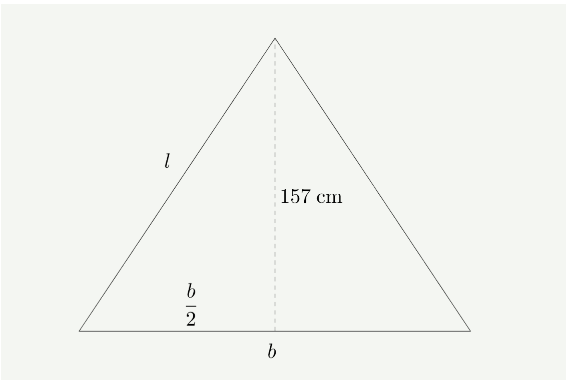


Figura 14: Ejercicio 9

Conociendo el área y la altura puede conocerse la base b (que es el lado desigual):

$$S = \frac{1}{2}\,bh \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{2S}{h} = \frac{2\cdot 3161}{157} = 40{,}27 \text{ cm}$$

Conocida la base, pueden calcularse los lados iguales por el teorema de Pitágoras:

$$l = \sqrt{157^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 158{,}29 \text{ cm}$$

Ejercicio 10. *Seno del ángulo inscrito. Teorema del seno.*

Solución:

Ver teoría.

---

8. Geometría analítica

Ejercicio 1. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por $A(-1,2)$ y $B(3,6)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y - 2 = 1\,(x+1)$$

Despejando y obtenemos la forma explícita:

$$y = x + 3$$

Ejercicio 2. *Escribir la ecuación de la recta $2x+3y=6$ en forma segmentaria.*

Solución:

Hay dos procedimientos:

- ⋄ Transformando la ecuación implícita. Dividiendo los dos miembros por 6:

$$\frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

- ⋄ Calculando las intersecciones con los ejes:

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(3,0) \qquad \begin{cases} 2x+3y=6 \\ x=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B(0,2)$$

La abscisa en el origen es 3 y la ordenada en el origen 2. La ecuación segmentaria es:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Ejercicio 3. *Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por $A(3,2)$ y $B(2,-1)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-2}{2-3} = 3$$

La ecuación de la recta en forma punto pendiente es:

$$y - 2 = 3\,(x-3)$$

despejando obtenemos la forma explícita:

$$y = 3x - 7$$

La ordenada en el origen es $b = -7$.

Ejercicio 4. *Dados los puntos $A(1,4)$, $B(3,3)$ y $C(8,k)$, ¿cuánto tiene que valer k para que los tres puntos estén alineados?*

Solución:

Si los puntos están alineados, las pendientes de AB y BC deben ser iguales:

$$\frac{3-4}{3-1} = \frac{k-3}{5} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} = \frac{k-3}{5} \quad \Longrightarrow \quad k-3 = -\frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 5. *Dadas las rectas $3x - my = 2$ y $nx + 4y = 5$, calcular los coeficientes m y n sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $(2,2)$.*

Solución:

Si las rectas son paralelas:

$$\frac{3}{n} = \frac{-m}{4} \quad \Longrightarrow \quad mn = -12$$

Si la primera recta pasa por $(2,2)$:

$$3\cdot 2 - 2m = 2 \quad \Longrightarrow \quad m = 2$$

y de aquí, $n = -6$.

Ejercicio 6. *Un triángulo isósceles tiene por base el segmento que une los puntos $(1,-2)$ y $(6,3)$. El otro vértice está situado en la recta $3x - y + 8 = 0$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.*

Solución:

Por ser el triángulo isósceles, el tercer vértice está en la mediatriz de los otros dos:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9$$

$$-2x + 1 + 4y + 4 = -12x + 36 - 6y + 9$$

$$10x + 10y - 40 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

Como el tercer vértice debe estar también el la recta $3x - y + 8 = 0$, sus coordenadas son la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

El punto de intersección es $C(-1, 5)$

Ejercicio 7. *Escribir la ecuación de las rectas paralelas a los ejes y a la bisectriz del primer cuadrante por el punto* $P(5, 3)$.

Solución:

Las rectas son:

$$x = 5$$

$$y = 3$$

$$y - 3 = 1\,(x - 5)$$

Ejercicio 8. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta paralela a* $2x - 5y + 7 = 0$ *que pasa por el punto* $P(1, -1)$.

Solución:

Este problema puede resolverse por dos procedimientos:

- ◇ En forma implícita. La ecuación de la paralela tiene la forma:

  $$2x - 5y + C = 0$$

  Si debe pasar por $P(1, -1)$:

  $$2 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -7$$

  La ecuación de la paralela es $2x - 5y - 7 = 0$.

- ◇ En forma punto-pendiente. La pendiente de la recta dada es $m = \frac{2}{5}$. La ecuación de la paralela es:

  $$y + 1 = \frac{2}{5}\,(x - 1)$$

- ◇ Una vez calculada la ecuación de la paralela por cualquiera de los métodos anteriores, se pasa a forma explícita y resulta:

  $$y = \frac{2}{5}\,x - \frac{7}{5}$$

Ejercicio 9. *En el triángulo de vértices* $A(-2, 4)$, $B(6, 5)$ *y* $C(2, -1)$ *calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice* A.

Solución:

La mediana es el segmento desde A al punto medio de BC. Este punto medio tiene de coordenadas $M(4,2)$. La distancia entre A y M es:

$$m_A = \sqrt{(4-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{40}$$

Ejercicio 10. *Calcular las coordenadas de los puntos M y N que dividen al segmento AB en tres partes iguales siendo $A(5,-2)$ y $B(-4,1)$.*

Solución:

Las variaciones de x e y entre A y B son:

$$\Delta x = -4 - 5 = -9\ ; \qquad \Delta y = 1 - (-2) = 3$$

El punto M tiene de coordenadas:

$$x = 5 + \frac{1}{3}\,\Delta x = 5 - \frac{9}{3} = 2; \qquad y = -2 + \frac{1}{3}\,\Delta y = -2 + \frac{3}{3} = -1$$

y el punto N:

$$x = 5 + \frac{2}{3}\,\Delta x = 5 - \frac{18}{3} = -1; \qquad y = -2 + \frac{2}{3}\,\Delta y = -2 + \frac{6}{3} = 0$$

Los puntos son $M(2,-1)$ y $(-1,0)$.

---

9. Segundo examen de Geometría

Ejercicio 1. *Calcular el punto de intersección con el eje de abscisas de la recta que pasa por $A(1,2)$ y $B(3,1)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m_{AB} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta AB es:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}\,(x-1)$$

Pasamos a forma implícita:

$$2y - 4 = -x + 1$$

$$x + 2y - 5 = 0$$

Transformamos para obtener la forma segmentaria:

$$x + 2y = 5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$$

También podríamos haber obtenido la ecuación segmentaria calculando previamente las intersecciones de la recta AB con los ejes de coordenadas.

Ejercicio 2. *Calcular la ecuación de la recta paralela a* $3x - 2y + 5 = 0$ *por el punto* $P(1, 5)$.

Solución:

La ecuación de la recta dada tiene pendiente $\frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la paralela es:

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

Ejercicio 3. *Calcular la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos de intersección de la recta* $3x + 4y - 12 = 0$ *con los ejes de coordenadas.*

Solución:

El punto de intersección de la recta con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

es decir, el punto $A(4, 0)$.

El punto de intersección con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

o sea, el punto $B(0, 3)$.

La distancia entre los dos puntos es:

$$d = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 0)^2} = 5$$

Ejercicio 4. *Dados los puntos* $A(-1, 4)$, $B(3, 2)$ *y* $C(8, k)$, *¿cuánto tiene que valer* k *para que los tres puntos estén alineados?*

Solución:

Los puntos estarán alineados si la pendiente de la recta AB es igual a la pendiente de la recta BC:

$$m_{AB} = \frac{2 - 4}{3 - (-1)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{k - 2}{8 - 3)} = \frac{k - 2}{5}$$

Igualando:

$$\frac{k - 2}{5} = -\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad k - 2 = -\frac{5}{2} \quad\Longrightarrow\quad k = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 5. *Dada la recta $y = 4x - 1$ obtener un vector director y escribir su ecuación en forma continua.*

Solución:

La pendiente es $m = 4$ de forma que un vector director es $\vec{v} = (1, 4)$.

Un punto de la recta es, por ejemplo, $B(0, -1)$. La ecuación continua es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{4}$$

Ejercicio 6. *En el triángulo de vértices $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(3, 7)$, calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice A.*

Solución:

El punto medio del lado BC es $M(4, 3)$. La mediana es el segmento AM. Su longitud es:

$$AM = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

Ejercicio 7. *Dada la recta dada por:*

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

escribir su ecuación en forma explicita.

Solución:

Pasamos a la forma continua:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{2}$$

Despejando y obtenemos la ecuación explícita:

$$y - 5 = \frac{2(x-1)}{-1} \quad \Longrightarrow \quad y - 5 = -2x + 2 \quad \Longrightarrow \quad y = -2x + 7$$

Ejercicio 8. *Calcular las coordenadas del punto de la recta $x - 2y + 4 = 0$ equidistante de los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, -5)$.*

Solución:

Si el punto ha de ser equidistante de A y B debe encontrarse en la mediatriz de AB:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y+5)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25$$

$$2x - 8y - 29 = 0$$

Como, además, el punto pertenece a la recta $x - 2y + 4 = 0$, debe ser la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - 8y - 29 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es $\left(-\frac{45}{2}, -\frac{37}{4}\right)$.

Ejercicio 9. *Escribir la ecuación de la recta:*

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1}$$

en forma segmentaria.

Solución:

Vamos a resolver ahora esta problema calculando las intersecciones con los ejes de coordenadas. La intersección con el eje OX es:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(-7, 0)$$

y la intersección con OY:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, -\frac{7}{3})$$

La ecuación segmentaria de la recta es:

$$\frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{-7} = 1$$

Ejercicio 10. *Calcular los puntos que dividen el segmento $A(-1, 3)$, $B(8, 0)$ en tres partes iguales.*

Solución:

Sean P y Q los puntos:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-1, 3) + \frac{1}{3}(9-3) = (2, 2)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-1, 3) + \frac{2}{3}(9-3) = (5, 1)$$

---

10. Sucesiones y funciones

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim_{n\to\infty}(3n-n^2)$ $\qquad$ $(b)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{3n-5}$

Solución:

$(a)\ \lim_{n\to\infty}(3n-n^2)=\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$

$(b)\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{3n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3}=\infty$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2+n}{n+1}\right)$ $\qquad$ $(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{3n^2}\right)^{-n}$

Solución:

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2+n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)-(n^2+n)(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n^2-1}=1$

$(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{3n^2}\right)^{-n}=0^{-\infty}=\dfrac{1}{0^{\infty}}=\dfrac{1}{0}=\infty$

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{5n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\qquad$ $(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n-1}\right)^{2n}$

Solución:

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{5n+2}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\infty}=0$

$(b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{5n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{5n}\right)^{2n}=e^{\frac{8}{5}}$

Ejercicio 4. *Calcular el dominio de definición de la función* $f(x)=\dfrac{x^3-7x+2}{x^2-4}$.

Solución:

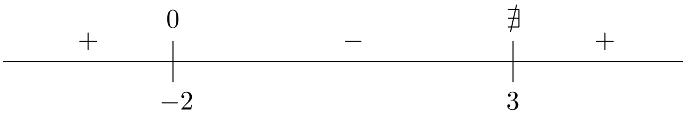
Dominio de $f=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-4\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Ejercicio 5. *Calcular el dominio de definición de la función* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$.

Solución:

$$\text{Dominio de } f = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-3} \geq 0\}$$

Resolvemos la inecuación. La raíz del numerador es $x = -2$ y la raíz del denominador es $x = 3$. El esquema de signos es el siguiente:

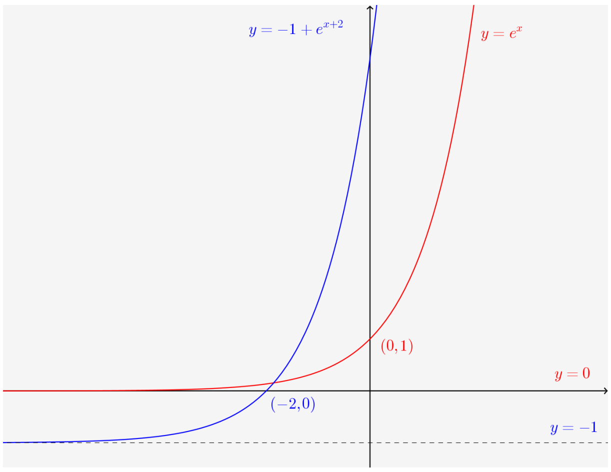


de modo que el dominio es:

$$\text{Dominio de} f = (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$$

Ejercicio 6. *Representar gráficamente* $y = e^x$ e $y = -1 + e^{x+2}$.

Solución:



Ejercicio 7. *Representar gráficamente la función* $y = 4 + 3x - x^2$.

Solución:

Se trata de una función cuadrática y, por consiguiente, su gráfica es una parábola.

Calculamos su vértice:

$$x_0 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}\,; \qquad y_0 = 4 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

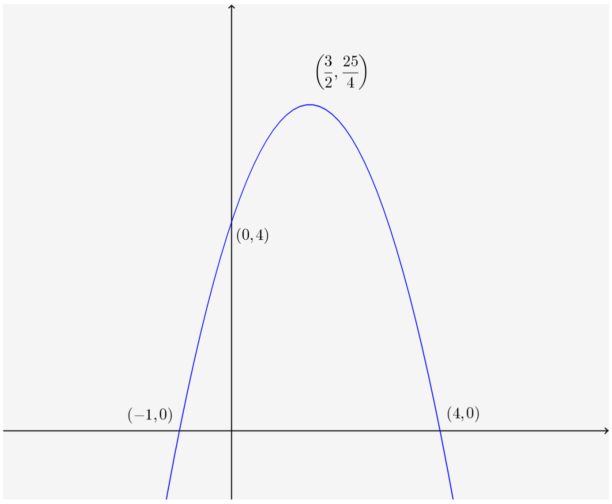
La intersección con el eje OY es:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, 4)$$

y las intersecciones con el eje OX:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \implies A_1(-1, 0)\ , \quad A_2(4, 0)$$

Con estos datos, la gráfica es la siguiente:



Ejercicio 8. *Representar gráficamente* $y = \dfrac{x+5}{1-x}$.

Solución:

Se trata de una función de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una hipérbola. Calculamos las asíntotas. La asíntota vertical es la recta $x = 1$ (valor que anula el denominador) y su asíntota horizontal $y = -1$ (límite cuando x tiende a infinito).

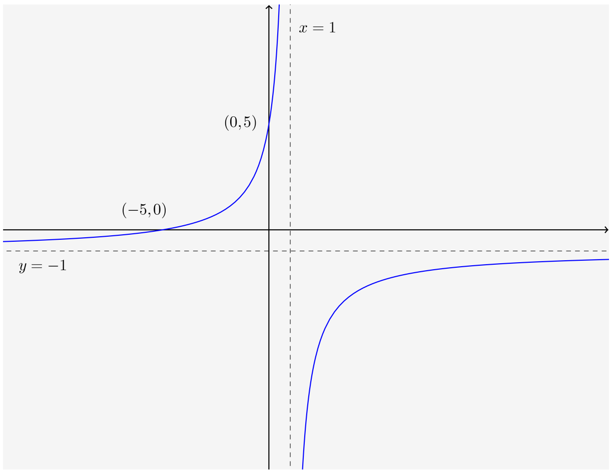
Las intersecciones con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+5}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \implies B(0, 5)$$

y con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+5}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \implies B(0, -5)$$

La gráfica se muestra en la página siguiente.



Ejercicio 9. *Define límite de una sucesión y límite infinito.*

Solución:

Ver teoría

Ejercicio 10. *Funciones cóncavas y convexas. Puntos de inflexión.*

Solución:

Ver teoría

---

11. Límites. Continuidad

Ejercicio 1. *Definir función continua y explicar los distintos tipos de discontinuidad que pueden darse.*

Solución:

Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si el límite de la función coincide con el valor de la función:

$$f \text{ continua en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

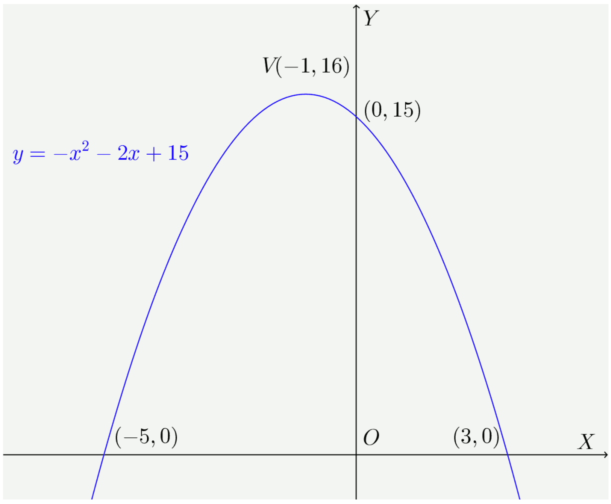
Pueden presentarse los siguientes casos de discontinuidad:

- **Evitable:** existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función.
- **Salto finito:** existen los límites laterales pero no coinciden.
- **Infinito:** el límite de la función es infinito.
- **Esencial:** no existen límites laterales ni son infinitos

---

Ejercicio 2. *Representar gráficamente la función* $y = -x^2 - 2x + 15$.

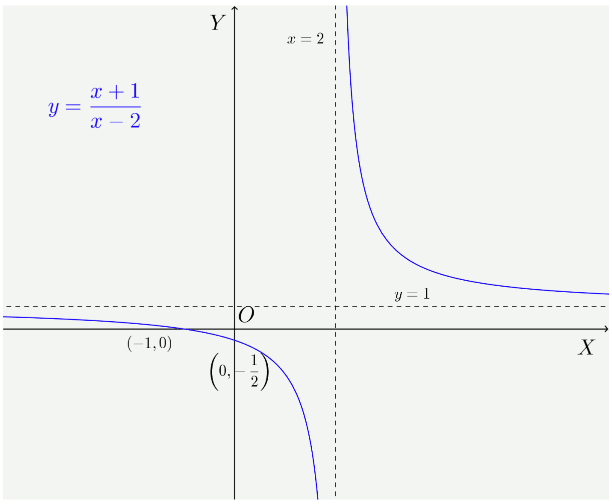
Solución:



Ejercicio 3. *Representar gráficamente la función:*

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

Solución:



Ejercicio 4. *Calcular el dominio de definición de la función* $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Solución:

$$\text{Dominio } = \{x \in \mathbb{R} | 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$$

Ejercicio 5. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-11x-2}{x^4-2x^3+x-2}$

Solución:

- Es una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{-4\cdot\frac{1}{2}}=e^{-2}$$

- Es un límite indeterminado $\frac{\infty}{\infty}$. Puesto que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador el límite es cero:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-11x-2}{x^4-2x^3+x-2}=0$$

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$

Solución:

- Es un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- También es un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Factorizando el numerador y denominador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+1)}{(x-2)(x^2+6x+1)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1}{x^2+6x+1}\\&=\frac{9}{17}\end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Calcular las funciones inversas de:*

(a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ (b) $g(x) = e^{x+1}$

Solución:

- Intercambiando las variables:

$$x = \sqrt{y+1}$$

Despejando:

$$x^2 = y + 1$$
$$y = x^2 - 1$$

La función inversa es:

$$f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

- De la misma forma:

$$x = e^{y+1}$$

Despejando:

$$y + 1 = \ln x$$
$$y = \ln x - 1$$

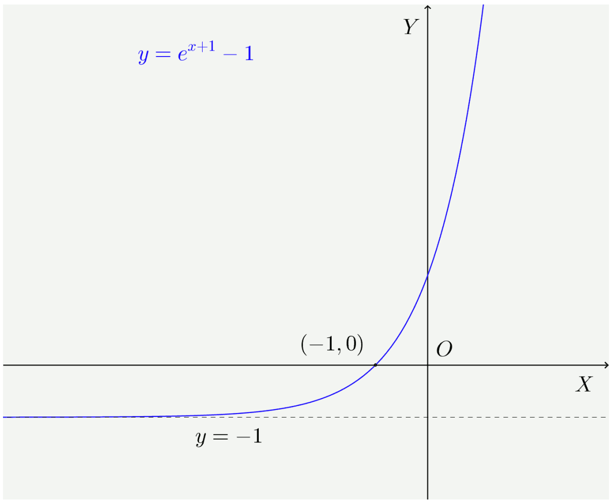
La función inversa es:

$$g^{-1}(x) = \ln x - 1$$

Ejercicio 8. *Representar gráficamente la función:*

$$y = e^{x+1} - 1$$

Solución:



Ejercicio 9. *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{x^2+x-3}{x-1}$$

Solución:

◇ La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función puesto que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-3}{x-1} = \infty$$

◇ No hay asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x-3}{x-1} = \infty$$

◇ Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+x-3}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-3}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-3-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota oblicua es $y = x + 2$.

12. Examen de estadística y combinatoria

Ejercicio 1. *Una variable estadística toma los valores que aparecen en la siguiente tabla de frecuencias:*

Valor	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	200	180	230	140	80	120	50

Calcular:

(a) *La mediana y los cuartiles.*

(b) *La media y la desviación típica.*

Solución:

x_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	200	200	0	0
1	180	380	180	180
2	230	610	460	920
3	140	750	420	1280
4	80	830	320	1280
5	120	950	600	3000
6	50	1000	300	1800
Total	1000		2280	8440

A partir de estos datos tenemos:

(a) Puesto que hay 1000 datos, el primer cuartil es el valor intermedio entre el que ocupa el lugar 250 y 251, la mediana entre el 500 y 501 y el tercero entre el 750 y 751. A partir de la tabla de frecuencias acumuladas resulta que:

$$Q_1 = 1 \qquad Q_2 = 2\ ; \qquad Q_3 = 3{,}5$$

(b) La media es:

$$\bar{x} = \frac{2280}{1000} = 2{,}28$$

La varianza es

$$\sigma^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{8440}{1000} - 2{,}28^2 = 3{,}2416$$

de modo que la desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{3{,}2416} = 1{,}8004$$

Ejercicio 2. *En una clase de 20 alumnos hay que elegir 5 para formar una comisión. ¿De cuántas maneras pueden escogerse?*

Solución:

$$C_{20,5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15504$$

Ejercicio 3. *¿De cuántas maneras pueden elegirse 5 cartas de una baraja española de forma que 2 sean de oros y 3 sean de copas?*

Solución:

Las dos de oros pueden elegirse de $\binom{10}{2}$ maneras y las tres de copas de $\binom{10}{3}$ maneras. En total, por la regla del producto:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{3} = 45 \cdot 120 = 5400$$

Ejercicio 4. *¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra CALAMIDAD?*

Solución:

$$PR_{9,3,2} = \frac{9!}{3!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30240$$

Ejercicio 5. *En un concurso participan 11 personas. ¿De cuántas maneras pueden repartirse tres medallas, de oro, de plata y de bronce?*

Solución:

$$V_{11,3} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

Ejercicio 6. *Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9 se forman todas las permutaciones posibles. ¿Cuántas de ellas son múltiplos de 5?*

Solución:

Puesto que la cifra de las unidades ha de ser 5 hay que permutar las cuatro cifras restantes:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ejercicio 7. *¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 17 lados?*

Solución:

Una diagonal viene determinada por dos de los vértices. Una pareja de vértices pueden elegirse de

$$C_{17,2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136$$

maneras. Pero no todos los segmentos que unen dos vértices son diagonales. Algunas de ellos son lados. El número de diagonales es:

$$136 - 17 = 119$$

Ejercicio 8. *¿De cuántas maneras se pueden repartir 5 cartas de una baraja española de forma que haya al menos un as?*

Solución:

Podemos calcularlo restando el número total de combinaciones menos las que no contienen ningún as:

$$C_{40,5} - C_{36,5} = 658008 - 376992 = 281016$$

Ejercicio 9. *Calcular el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x-3)^{14}$.*

Solución:

El término buscado es:

$$-\binom{14}{7}(2x)^7\, 3^7 = -960740352$$
