# Matemáticas B. Cuarto ESO.
# Curso 2012-2013. Exámenes

# 1. Raíces y logaritmos

**Ejercicio 1.** *Realizar las siguientes operaciones y simplificar:*

- $\diamond$ $\dfrac{16}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$
- $\diamond$ $\dfrac{14}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

**Solución:**

$\diamond$ $\dfrac{16}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{16}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \dfrac{16}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{16}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3\cdot 16}{5} = \dfrac{48}{5}$

$\diamond$ $\dfrac{14}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = \dfrac{14}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}} = \dfrac{14}{1+\frac{3}{4}} = \dfrac{14}{\frac{7}{4}} = \dfrac{14\cdot 4}{7} = 8$

---

**Ejercicio 2.** *Un átomo de hidrógeno pesa* $1{,}66\cdot 10^{-24}$ *g:*

- $\diamond$ *¿Cuántos átomos se necesitan para obtener* 20 *kg de ese gas?*
- $\diamond$ *¿Cuál es la masa de* $2{,}52\cdot 10^{26}$ *átomos?*

**Solución:**

- $\diamond$ Hay que dividir 20000 g entre la masa del átomo:

$$\frac{2\cdot 10^4}{1{,}66\cdot 10^{-24}} = 1{,}20\cdot 10^{28}$$

- $\diamond$ Multiplicamos el número de átomos por la masa de un átomo:

$$2{,}52\cdot 10^{26}\cdot 1{,}66\cdot 10^{-24} = 4{,}18\cdot 10^{2}\text{ g}$$

---

**Ejercicio 3.** *Simplificar:*

- $\diamond$ $\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{8}-\dfrac{1}{4}\sqrt{18}$
- $\diamond$ $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}}}}$

**Solución:**

$\diamond$ $\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{8}-\dfrac{1}{4}\sqrt{18} = \sqrt{2}+\dfrac{3}{2}2\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}3\sqrt{2} = \left(1+3-\dfrac{3}{4}\right)\sqrt{2} = \dfrac{13}{4}\sqrt{2}$

$\diamond$ $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}}}} = \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}} = \sqrt[8]{\dfrac{2}{5}}$

---

**Ejercicio 4.** *Racionaliza:*

- $\diamond$ $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$
- $\diamond$ $\dfrac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

**Solución:**

$\diamond$ $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{10} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

- $\diamond$ $\dfrac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \dfrac{2\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{2}\,(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2$

---

**Ejercicio 5.** *Aplica logaritmos y desarrolla:*

$$P = \sqrt{\frac{5xy^3}{4z^5}}$$

**Solución:**

$$\log P = \frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{2}\log y - \frac{1}{2}\log 4 - \frac{5}{2}\log z$$

**Ejercicio 6.** *Escribir sin logaritmos:*

$$\log A = 2\log 3 - 3\log x + 2\log y - \frac{5}{2}\log z$$

**Solución:**

$$A = \frac{3^2y^2}{x^3\sqrt{z^5}}$$

---

**Ejercicio 7.** *Obtener sin calculadora:*

$\diamond$ $\log_3\sqrt{27}$ $\quad\diamond$ $\log_5\sqrt[3]{25}$ $\quad\diamond$ $\log_2 16$ $\quad\diamond$ $\log_4(-2)$

**Solución:**

- $\diamond$ $\log_3\sqrt{27} = \frac{1}{2}\log_3 27 = \frac{3}{2}$
- $\diamond$ $\log_5\sqrt[3]{25} = \frac{1}{3}\log_5 25 = \frac{2}{3}$
- $\diamond$ $\log_2 16 = 4$
- $\diamond$ $\log_4(-2)$ no existe.

---

**Ejercicio 8.** *Sabiendo que* $\log 2 = 0{,}3010$ *y* $\log 3 = 0{,}4771$ *calcular:*

$\diamond$ $\log 18$ $\quad\diamond$ $\log\sqrt{6}$

**Solución:**

- $\diamond$ $\log 18 = \log(3^2\cdot 2) = \log 3^2 + \log 2 = 2\log 2 + \log 2 = 1{,}2552$
- $\diamond$ $\log\sqrt{6} = \frac{1}{2}\log 6 = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) = 0{,}38905$

---

**Ejercicio 9.** *Define logaritmo en base a del número N y demuestra la propiedad del cambio de base de los logaritmos.*

**Solución:**

Logaritmo en base $a$ del número $N$ es el exponente que hay que poner a $a$ para obtener $N$.

Si conocemos los logaritmos en la base $a$, pueden calcularse los logaritmos en otra base $b$ mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos $x$ a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base $a$ en esta última igualdad:

$$\begin{aligned} &\log_a b^x = \log_a N \Longrightarrow x \log_a b = \log_a N \\ &\qquad \Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \end{aligned}$$

---

**Ejercicio 10.** *Demuestra que el número* $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ *es entero calculando previamente su cuadrado.*

**Solución:**

Calculamos el cuadrado del número:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2 &= 6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}} \\ &= 6+6+2\cdot\sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})} \\ &= 12+2\cdot\sqrt{36-32} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Por consiguiente, como el cuadrado del número es 16, resulta que:

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 4$$

---

## 2. Polinomios

**Ejercicio 1.**

- ◇ *Definir raíz de un polinomio y enunciar el teorema del factor.*
- ◇ *Demostrar el teorema del factor.*

**Solución:**

- ◇ Un número $r$ es **raíz** de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

  $$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(r) = 0$$

  **Teorema del factor**. Si $r$ es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

  $$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x-r)Q(x)$$

- ◇ Demostración:
  Sea $r$ raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r) = 0$.
  Si se divide $P(x)$ por $x - r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto $R$ que cumplen:

  $$P(x) = (x-r)Q(x) + R$$

  Para $x = r$:

  $$P(r) = (r-r)Q(r) + R \quad \Longrightarrow \quad R = P(r) = 0$$

  y por consiguiente $P(x) = (x-r)Q(x)$.

**Ejercicio 2.** *Realiza las siguientes operaciones con polinomios:*

- ⋄ $(2x-3)\cdot(-2x^2+2)+x(-2x^2+x+1)$
- ⋄ $4(x^3-x+3)-2(x^2+3x)\cdot(-2x+5)$

**Solución:**

$$\begin{aligned}(2x-3)\cdot(-2x^2+2)+x(-2x^2+x+1)&=-4x^3+4x+6x^2-6-2x^3+x^2+x\\&=-6x^3+7x^2+5x-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4(x^3-x+3)-2(x^2+3x)\cdot(-2x+5)&=4x^3-4x+12-2(-2x^3+5x^2-6x^2+15x)\\&=4x^3-4x+12-2(-2x^3-x^2+15x)\\&=4x^3-4x+12+4x^3+2x^2-30x\\&=8x^3+2x^2-34x+12\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 3.** *Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:*

- ⋄ $(3x^3+2x^2+x-5):(3x^2+2)$
- ⋄ $(3x^4-2x^2-x+4):(x+2)$

**Solución:**

$$\begin{array}{rrrrrrrl|l}
3x^3 & + & 2x^2 & + & x & - & 5 & & 3x^2+2 \\ \cline{9-9}
-3x^3 & & & - & 2x & & & & x+\frac{2}{3} \\ \cline{1-7}
 & & 2x^2 & - & x & - & 5 & & \\
 & - & 2x^2 & & & - & \frac{4}{3} & & \\ \cline{2-7}
 & & & - & x & - & \frac{19}{3} & &
\end{array}$$

El cociente de la división es $x+\frac{2}{3}$ y el resto $-x-\frac{19}{3}$

La segunda división puede hacerse por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 0 & -2 & -1 & 4 \\
-2 & & -6 & 12 & -20 & 42 \\ \hline
 & 3 & -6 & 10 & -21 & 46
\end{array}$$

El cociente es $3x^3-6x^2+10x-21$ y el resto es 46.

---

**Ejercicio 4.** *Calcula el valor de $k$ para que el polinomio:*

- ⋄ $P(x)=x^3+x^2-2x+k$ *sea divisible por* $x-2$.
- ⋄ $P(x)=x^3-2x^2+kx+4$ *tenga de resto* 6 *al dividir por* $x+2$.

**Solución:**

- ⋄ Si el polinomio es divisible por $x-2$, 2 es una raíz del polinomio y su valor numérico para $x=2$ es cero:

$$2^3+2^2-2\cdot 2+k=0 \quad\Longrightarrow\quad 8+4-4+k=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-8$$

◇ Por el teorema del resto, el valor numérico para $x = -2$ debe ser 6:

$$(-2)^3 - 2(-2)^2 + k(-2) + 4 = 6 \implies -8 - 8 - 2k + 4 = 6 \implies k = -9$$

---

**Ejercicio 5.** *Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces:*

◇ $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

◇ $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

**Solución:**

◇ Buscamos una raíz entera entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

y tenemos una primera factorización:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x-1)(2x^2 + 7x + 6)$$

Las raíces del polinomio de segundo grado son:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \implies x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

de modo que:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x-1)(2x^2 + 7x + 6) = (x-1)2(x - \frac{3}{2})(x+2) = (x-1)(2x-3)(x+2)$$

Las raíces de este polinomio son 1, $\frac{3}{2}$ y $-2$.

◇ Como en el caso anterior buscamos una raíz entera entre los divisores de 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

y obtenemos:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

Buscamos una raíz del polinomio de tercer grado:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

y tenemos la factorización:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$

y no se puede seguir factorizando porque el polinomio $x^2 + 1$ es primo.
Las raíces de este segundo polinomio son 1 y 2.

---

# 3. Ecuaciones e inecuaciones

**Ejercicio 1.** *Resolver las siguientes ecuaciones:*

- $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$
- $\dfrac{x(x-3)}{2} - \dfrac{(3x-2)^2}{8} = 1 - \dfrac{x(x+2)}{4}$

**Solución:**

- es una ecuación de primer grado. Quitamos denominadores y resolvemos:

  $$\begin{aligned}&\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}\\ &2(x+1) = 4x - (2x+3)\\ &2x+2 = 2x+3\\ &0x = 1\end{aligned}$$

  La ecuación no tiene solución.

- Es una ecuación de segundo grado:

  $$\begin{aligned}&\frac{x(x-3)}{2} - \frac{(3x-2)^2}{8} = 1 - \frac{x(x+2)}{4}\\ &4x(x-3) - (3x-2)^2 = 8 - 2x(x+2)\\ &4x^2 - 12x - 9x^2 + 12x - 4 = 8 - 2x^2 - 4x\\ &-5x^2 - 4 = 8 - 2x^2 - 4x\\ &-3x^2 + 4x - 12 = 0\\ &3x^2 - 4x + 12 = 0\end{aligned}$$

  Esta ecuación tampoco tiene solución porque su discriminante es menor que cero.

---

**Ejercicio 2.** *Resolver:*

- $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
- $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

**Solución:**

- Es una ecuación bicuadrada:

  $$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

  $$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

  de donde $x^2 = -4$ y $x^2 = 1$. No hay solución para la primera, de modo que las soluciones son las raíces cuadradas de 1, es decir, $x_1 = -1$ y $x = 1$.

- Resolvemos por sustitución. De la primera ecuación resulta:

  $$y = 2 - 2x$$

  Sustituyendo en la segunda:

  $$\begin{aligned}&2x(2-2x) = 1\\ &4x^2 - 4x + 1 = 0\end{aligned}$$

  que da como solución única $x = \frac{1}{2}$. El valor correspondiente de $y$ es $y = 1$.

**Ejercicio 3.** *Resolver:*

- $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = 0$
- $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

**Solución:**

- Buscamos raíces enteras entre los divisores de 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 8 & -11 & 3 \\ -3 & & -12 & 12 & -3 \\ \hline & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

  Ya podemos factorizar el polinomio. La ecuación queda:

$$(x + 3)(4x^2 - 4x + 1) = 0$$

  Igualando a cero ambos factores obtenemos $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$.

- Despejamos la raíz y elevamos al cuadrado:

$$x + \sqrt{7 - 3x} = 1$$
$$\sqrt{7 - 3x} = 1 - x$$
$$7 - 3x = 1 - 2x + x^2$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

  que tiene como soluciones $x = -3$ y $x = 2$. Comprobando en la ecuación original, resulta que la segunda de estas dos soluciones no es válida.

---

**Ejercicio 4.** *Resolver las ecuaciones:*

- $\log(x + 3) - \log(3x - 2) = \log 7$
- $\dfrac{35}{3^x} = 3^x - 2$

**Solución:**

- Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log(x + 3) - \log(3x - 2) = \log 7$$
$$\log \frac{x + 3}{3x - 2} = \log 7$$
$$\frac{x + 3}{3x - 2} = 7$$
$$x + 3 = 7(3x - 2)$$
$$20x = 17 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{17}{20}$$

- Quitamos denominadores y despejamos por la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$\frac{35}{3^x} = 3^x - 2$$
$$35 = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x$$
$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 35 = 0$$
$$3^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 14}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2}$$

y obtenemos como soluciones:

$$\begin{array}{lll} 3^x = 7 & \Longrightarrow & x = \log_3 7 \\ 3^x = -5 & \Longrightarrow & x = \log_3(-5) \text{ (no existe)} \end{array}$$

---

**Ejercicio 5.** *Resolver las inecuaciones:*

- ◇ $x^4 + 2x^3 - x - 2 < 0$
- ◇ $\dfrac{1-x^2}{x+3} \geq 0$

**Solución:**

- ◇ En primer lugar vamos a factorizar el polinomio. Las posibles raíces enteras son los divisores de 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

y tenemos una primera factorización:

$$(x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) < 0$$

Seguimos buscando raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & & -2 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

con lo cual resulta:

$$(x-1)(x+2)(x^2 + x + 1) < 0$$

El polinomio de segundo grado no tiene raíces porque su discriminante es negativo. Las únicas raíces del polinomio son 1 y $-2$.

El signo del polinomio está dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + \\ & -2 & & 1 & \end{array}$$

La solución de la inecuación es $x \in (-2, 1)$.

- ◇ Sea ahora la inecuación:

$$\frac{1-x^2}{x+3} \geq 0$$

Las raíces del numerador son $-1$ y 1. La raíz del denominador es $-3$. El signo de la fracción según los valores de $x$ es:

$$\begin{array}{ccccccc} & \nexists & & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + & | & - \\ & -3 & & -1 & & 1 & \end{array}$$

La solución de la inecuación es $x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 1]$.

---

# 4. Examen de la primera evaluación

**Ejercicio 1.**

- *Simplificar* $3\sqrt{128}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98}$
- *Racionalizar* $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

**Solución:**

- Sacando factores de los radicales:

$$\begin{aligned}3\sqrt{128}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98} &= 3\sqrt{64\cdot 2}-5\sqrt{25\cdot 2}+3\sqrt{49\cdot 2}\\ &= 3\cdot 8\sqrt{2}-5\cdot 5\sqrt{2}+3\cdot 7\sqrt{2}\\ &= 24\sqrt{2}-25\sqrt{2}+21\sqrt{2}\\ &= 20\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

---

**Ejercicio 2.**

- *Define logaritmo en base $a$ de un número $N$.*
- *Calcular los siguientes logaritmos:*
  - $\log_3 \frac{9}{\sqrt[3]{81}}$
  - $\log_8 \frac{1}{2}$

**Solución:**

- Se llama logaritmo en base $a$ del número $N$ al exponente que hay que poner a $a$ para obtener $N$.
- $\log_3 \frac{9}{\sqrt[3]{81}}=\log_3 9-\log_3\sqrt[3]{81}=\log_3 9-\frac{1}{3}\log_3 81=2-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$
- $\log_8 \frac{1}{2}=\log_8 1-\log_8 2=0-\frac{\log_2 2}{\log_2 8}=-\frac{1}{3}$

---

**Ejercicio 3.** *Simplificar expresando como un solo logaritmo:*

- $2\log 7-2\log 10+2\log 3$
- $\log 5+\frac{1}{2}\log 16-\log 2$

**Solución:**

- $2\log 7-2\log 10+2\log 3=\log 7^2-\log 10^2+\log 3^2=\log\dfrac{7^2\cdot 3^2}{10^2}=\log\dfrac{441}{100}$
- $\log 5+\dfrac{1}{2}\log 16-\log 2=\log 5+\log\sqrt{16}-\log 2=\log 5+\log 4-\log 2=\log\dfrac{5\cdot 4}{2}=\log 10=1$

---

**Ejercicio 4.** *Enuncia y demuestra el teorema del factor.*

**Solución:**

**Teorema del factor**. Si $r$ es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x-r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x)=(x-r)Q(x)$$

Demostración:

- ◇ Sea $r$ raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r)=0$.
- ◇ Si se divide $P(x)$ por $x-r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto $R$ que cumplen:
$$P(x)=(x-r)Q(x)+R$$
- ◇ Para $x=r$:
$$P(r)=(r-r)Q(r)+R \quad \Longrightarrow \quad R=P(r)=0$$
y por consiguiente $P(x)=(x-r)Q(x)$.

---

**Ejercicio 5.** *El polinomio $x^3+ax^2+bx-5$ da de resto 11 cuando se divide por $x-2$ y resto 1 si se divide por $x+3$. Calcular $a$ y $b$.*

**Solución:**

De acuerdo con el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x=2$ es 11 y el valor numérico para $x=-3$ es 1. Entonces:

$$\begin{cases} 8+4a+2b-5=11 \\ -27+9a-3b-5=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4a+2b=8 \\ 9a-3b=33 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ 3a-b=11 \end{cases}$$

Este sistema tiene como solución $a=3$, $b=-2$.

---

**Ejercicio 6.** *Efectuar la siguiente división de polinomios:*

$$20x^4-18x^3+35x^2-12x-7 \;:\; 4x^2-2x+7$$

**Solución:**

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 20x^4 & -\;18x^3 & +\;35x^2 & -\;12x & -\;7 & 4x^2-2x+7 \\ \cline{7-7}
- & 20x^4 & +\;10x^3 & -\;35x^2 & & & 5x^2-2x-1 \\ \cline{1-5}
 & & -\;8x^3 & & -\;12x & & \\
 & & 8x^3 & -\;4x^2 & +\;14x & & \\ \cline{3-6}
 & & & -\;4x^2 & +\;2x & -\;7 & \\
 & & & 4x^2 & -\;2x & +\;7 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

---

**Ejercicio 7.** *Resolver las ecuaciones:*

- ◇ $\log(x+3)-\log(3x-2)=\log 7$
- ◇ $\dfrac{105}{3^{x+1}}=3^x-2$

**Solución:**

- Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log(x+3) - \log(3x-2) = \log 7$$
$$\log\frac{x+3}{3x-2} = \log 7$$
$$\frac{x+3}{3x-2} = 7$$
$$x+3 = 21x - 14$$
$$20x = 17$$
$$x = \frac{17}{20}$$

- Ahora aplicamos las propiedades de las potencias:

$$\frac{105}{3^{x+1}} = 3^x - 2$$
$$\frac{105}{3^x \cdot 3} = 3^x - 2$$
$$\frac{35}{3^x} = 3^x - 2 \qquad \text{Llamando } 3^x = t \text{ y quitando denominadores}$$
$$\frac{35}{t} = t - 2$$
$$35 = t^2 - 2t$$

y de aquí obtenemos $t = 7$ y $t = -5$. Puesto que $t = 3^x$ la solución $t = -5$ no es válida ($x$ sería el logaritmo de $-5$). Para $t = 7$:

$$3^x = 7 \Longrightarrow x = \log_3 7$$

---

**Ejercicio 8.** *Resolver la ecuación:*

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18 = 0$$

**Solución:**

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 18. na de ellas es $x = 2$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & -2 & -3 & -18 \\ 2 & & 2 & 8 & 12 & 18 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

y tenemos una primera factorización:

$$(x-2)(x^3 + 4x^2 + 6x + 9) = 0$$

Buscamos una raíz del segundo factor:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & & -3 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

y la ecuación queda:

$$(x-2)(x+3)(x^2 + x + 3) = 0$$

El último factor tiene discriminante menor que cero y, por consiguiente, no tiene raíces. Las únicas soluciones de la ecuación son $x = 2$ y $x = -3$.

---

**Ejercicio 9.** *Resolver la ecuación* $\sqrt{3x-8} - 4 = \sqrt{x-10}$.

**Solución:**

Elevando al cuadrado:

$$(\sqrt{3x-8} - 4)^2 = (\sqrt{x-10})^2$$
$$3x - 8 + 16 - 8\sqrt{3x-8} = x - 10$$
$$2x + 18 = 8\sqrt{3x-8}$$
$$x + 9 = 4\sqrt{3x-8}$$
$$(x+9)^2 = (4\sqrt{3x-8}^2)$$
$$x^2 + 81 + 18x = 48x - 128$$
$$x^2 - 30x + 209 = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones $x = 11$ y $x = 19$. Puede comprobarse que ambas son soluciones válidas de la ecuación original.

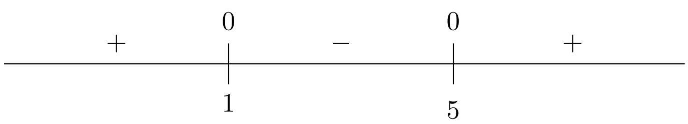
---

**Ejercicio 10.** *Resolver la inecuación:*

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 4} < 0$$

**Solución:**

El numerador tiene raíces $x = 1$ y $x = 5$. El denominador no tiene raíces. El signo de la fracción es:




La solución de la inecuación es $x \in (1, 5)$.

---

# 5. Trigonometría

**Ejercicio 1.** *Calcular los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos mide* 48 *y* 36 *cm.*

**Solución:**

$$\operatorname{tg} B = \frac{36}{48} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg} \frac{36}{48} = 36^{\text{o}}52'12''$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{48}{36} \quad \Longrightarrow \quad C \operatorname{artg} \frac{48}{36} = 53^{\text{o}}52'12''$$

---

**Ejercicio 2.** *Resolver el triángulo* $B = 104^o$*,* $a = 187$ *cm,* $c = 76$ *cm.*

**Solución:**

Puesto que conocemos dos lados y el ángulo comprendido, lo resolveremos por el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 187^2 + 76^2 - 2 \cdot 187 \cdot 76 \cos 104^{\text{o}} \quad \Longrightarrow \quad b = 218{,}22 \text{ cm}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Longrightarrow \quad A = 56^{\text{o}}14'59''$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \Longrightarrow \quad C = 19^{\text{o}}45'1''$$

---

**Ejercicio 3.** *Resolver el triángulo* $a = 47$ *cm,* $b = 36$ *cm,* $A = 95^o$*.*

**Solución:**

Conocemos un lado y el ángulo opuesto. Resolveremos por el teorema del seno:

$$\frac{47}{\operatorname{sen} 95^{\text{o}}} = \frac{36}{\operatorname{sen} B} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} B = \frac{36 \operatorname{sen} 95^{\text{o}}}{47} \quad \Longrightarrow \quad B = 49^{\text{o}}43'59''$$

Hemos tenido en cuenta que el ángulo $B$ no puede ser obtuso puesto que ya hay un ángulo obtuso ($A$) en el triángulo. Una vez calculado ($B$) el ángulo $C$ se obtiene de:

$$C = 180^{\text{o}} - A - B = 35^{\text{o}}16'1''$$

y el lado $c$ de:

$$\frac{47}{\operatorname{sen} 95^{\text{o}}} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{46 \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} 95^{\text{o}}} = 27{,}24 \text{ cm}$$

---

**Ejercicio 4.** *Resolver un triángulo del que se conocen* $a = 37$ *m,* $B = 55^o$ *y* $C = 68^o$*.*

**Solución:**

Calculamos el ángulo $A$:

$$A = 180^{\text{o}} - 55 - 68 = 57^{\text{o}}$$

Ahora, por el teorema del seno:

$$\frac{37}{\operatorname{sen} 57^{\circ}} = \frac{b}{\operatorname{sen} 55^{\circ}} = \frac{c}{\operatorname{sen} 68^{\circ}}$$

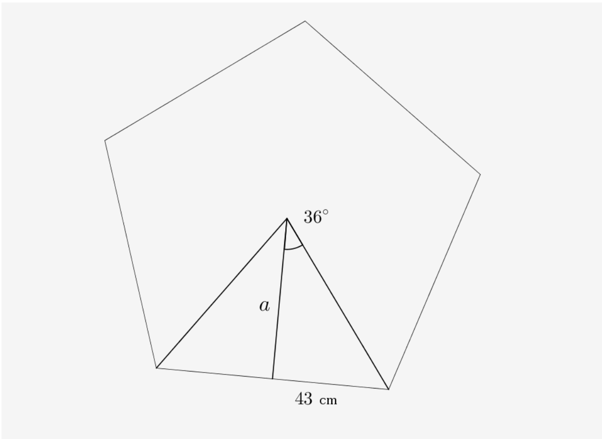
de donde:

$$b = \frac{37 \operatorname{sen} 55^{\circ}}{\operatorname{sen} 57^{\circ}} = 36{,}14 \text{ m}; \qquad c = \frac{37 \operatorname{sen} 68^{\circ}}{\operatorname{sen} 57^{\circ}} = 40{,}90 \text{ m}$$

---

**Ejercicio 5.** *Calcular el área de un pentágono regular de* 86 *cm de lado.*

**Solución:**




Hay que calcular la apotema:

$$a = \frac{43}{\operatorname{tg} 36^{\circ}}$$

El perímetro del pentágono es $86 \times 5 = 430$ cm. El área es:

$$S = \frac{430 \cdot a}{2} = 12724{,}65 \text{ cm}^2$$

---

**Ejercicio 6.** *Calcular el área de un triángulo de lados* $a = 33$ *cm,* $b = 43$ *cm y* $c = 21$ *cm.*

**Solución:**

Calculamos un ángulo por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{33^2 + 43^2 - 21^2}{2 \cdot 33 \cdot 43} \quad \Longrightarrow \quad C = 28^{\circ} 22' 35''$$

Entonces, el área es:

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = 337{,}20 \text{ cm}^2$$

---

**Ejercicio 7.** *Calcular el área y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados* $a = 315$ *cm,* $b = 456$ *cm y* $c = 236$ *cm.*

**Solución:**

Puesto que:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Debemos calcular uno de los ángulos del triángulo:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{456^2 + 236^2 - 315^2}{2 \cdot 456 \cdot 236} \quad \Longrightarrow \quad A = 40^{\circ}11'40''$$

Por consiguiente:

$$2R = \frac{315}{\operatorname{sen} A} \quad \Longrightarrow \quad R = 244{,}04 \text{ cm}$$

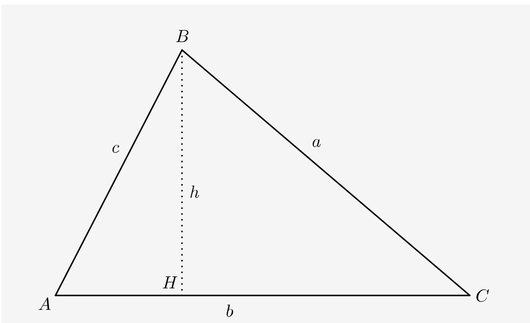
y el área del círculo es:

$$S = \pi r^2 = 187101{,}15 \text{ cm}$$

---

**Ejercicio 8.** *En el triángulo de lados* $a = 312$ *cm,* $b = 426$ *cm y* $c = 216$ *cm, calcular la altura correspondiente al vértice* $B$*.*

**Solución:**




Calculamos el ángulo $A$ como en el problema anterior:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{426^2 + 216^2 - 312^2}{2 \cdot 426 \cdot 216} \quad \Longrightarrow \quad A = 44^{\circ}42'35''$$

La altura mide:

$$h = 216 \operatorname{sen} 44^{\circ}42'35'' = 151{,}96 \text{ cm}$$

---

**Ejercicio 9.** *Teorema del seno. Enunciado y demostración.*

**Solución:**

Ver apuntes de teoría.

# 6. Geometría analítica

**Ejercicio 1.** *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por $A(-3,4)$ y $B(1,-6)$.*

**Solución:**

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6-4}{1-(-3)} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y - 4 = -\frac{5}{2}\,(x+3)$$

Despejamos $y$ para obtener la ecuación explícita:

$$y = -\frac{5}{2}\,x - \frac{15}{2} + 4 \quad\Longrightarrow\quad y = -\frac{5}{2}\,x - \frac{7}{2}$$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por $A(-3,2)$ y $B(2,-1)$.*

**Solución:**

La pendiente de la recta $AB$ es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-2}{2-(-3)} = -\frac{3}{5}$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 2 = -\frac{3}{5}\,(x+3) \quad\Longrightarrow\quad y = -\frac{3}{5}\,x - \frac{1}{5}$$

La ordenada en el origen es el término independiente en la ecuación explicita, o sea que:

$$b = -\frac{1}{5}$$

---

**Ejercicio 3.** *Escribir la ecuación de la recta $3x+5y-15=0$ en forma segmentaria.*

**Solución:**

Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo por 15:

$$3x + 5y = 15 \quad\Longrightarrow\quad \frac{3x}{15} + \frac{5y}{15} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

---

**Ejercicio 4.** *Dados los puntos $A(1,4)$, $B(3,3)$ y $C(8,k)$, ¿cuánto tiene que valer $k$ para que los tres puntos estén alineados?*

**Solución:**

Si están alineados, la pendiente de la recta $AB$ es igual que la de la recta $BC$:

$$-\frac{1}{2} = \frac{k-4}{7} \quad\Longrightarrow\quad k - 4 = -\frac{7}{2} \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{1}{2}$$

También se podía haber calculado la ecuación de la recta $AB$ y obtener $k$ sustituyendo las coordenadas del punto $C$ en lugar de $x$ e $y$ en esa ecuación.

---

**Ejercicio 5.** *Dada la recta* $y = 3x-2$ *obtener un vector director y escribir su ecuación en forma continua.*

**Solución:**

La pendiente se relaciona con el vector director por:

$$m = \frac{v_y}{v_x}$$

Puesto que la pendiente es 3, un vector director es $\vec{v}(1,3)$.

Un punto de la recta es, por ejemplo, $P(0,-2)$. La ecuación en forma continua es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{3}$$

---

**Ejercicio 6.** *Dada la recta dada por:*

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

*escribir su ecuación en forma explicita.*

**Solución:**

Basta eliminar $t$ entre las dos ecuaciones y despejar $y$:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-5}{-1} \quad \Longrightarrow \quad y - 5 = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{3}\,x + \frac{14}{3}$$

---

**Ejercicio 7.** *Escribir la ecuación de las rectas paralelas a los ejes por el punto* $P(5,3)$*.*

**Solución:**

Las rectos paralelas al eje $OX$ tienen una ecuación del tipo $y = y_0$ y las paralelas al eje $OY$ tienen por ecuación $x = x_0$. Como han de pasar por $P(5,3)$, las ecuaciones serán $x = 5$ e $y = 3$.

---

**Ejercicio 8.** *Calcular la ecuación de la recta paralela a* $3x - 4y + 1 = 0$ *que pasa por el punto* $P(1,-1)$*.*

**Solución:**

La ecuaciones de la paralela puede escribirse como:

$$3x - 4y + C = 0$$

Puesto que ha de pasar por $P(1,1)$, las coordenadas de este punto deben cumplir la ecuación:

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -7$$

y la ecuación de la paralela es:

$$3x + 4y - 7 = 0$$

---

**Ejercicio 9.** *En el triángulo de vértices $A(-2, 4)$, $B(6, 5)$ y $C(2, -1)$ calcular la longitud de la mediana correspondiente al vértice $A$.*

**Solución:**

El punto medio del lado $BC$ es $M(4, 2)$. La distancia entre $A$ y $M$ es:

$$d = \sqrt{(4+2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{40}$$

---

**Ejercicio 10.** *Calcular las coordenadas de los puntos $M$ y $N$ que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales siendo $A(5, -2)$ y $B(-4, 1)$.*

**Solución:**

Tenemos que entre $A$ y $B$:

$$\Delta x - 4 - 5 = -9$$
$$\Delta y = 1 - (-2) = 3$$

El primer punto es:

$$x_1 = 5 + \frac{\Delta x}{3} = 5 - 3 = 2\ ; \qquad y_1 = -2 + \frac{\Delta y}{3} = -2 + 1 = -1$$

y el segundo punto:

$$x_2 = 5 + \frac{2\Delta x}{3} = 5 - 6 = -1\ ; \qquad y_2 = -2 + \frac{2\Delta y}{3} = -2 + 2 = 0$$

Los puntos son $P_1(2, -1)$ y $P_2(-1, 0)$.

---

# 7. Trigonometría y Geometría

**Ejercicio 1.** *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide* 56 cm *y uno de los catetos* 35 cm.

**Solución:**

$$\operatorname{sen} B = \frac{35}{56} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{arsen} \frac{35}{56} = 38^{\circ}40'56''$$

$$\cos C = \frac{35}{56} \quad \Longrightarrow \quad C = \operatorname{arcos} \frac{35}{56} = 51^{\circ}19'4''$$

---

**Ejercicio 2.** *En un triángulo $b = 34$ cm, $c = 76$ cm y $A = 59^{o}46'$. Calcular el lado $a$ y el área del triángulo.*

**Solución:**

El lado $a$ puede calcularse por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 34^2 + 76^2 - 2 \cdot 34 \cdot 76 \cos 59^{\circ}46' \quad \Longrightarrow \quad a = 65{,}80 \text{ cm}$$

Una vez calculado el lado $a$, el área podría obtenerse por la fórmula de Herón, o mejor:

$$S = \frac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 76 \operatorname{sen} 59^{\circ}46' = 1116{,}26 \text{ cm}^2$$

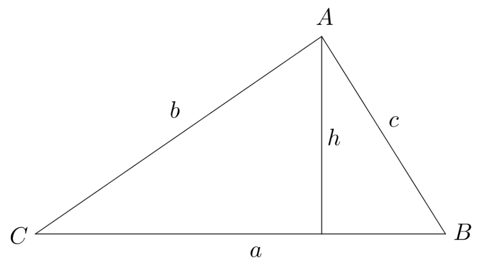
---

**Ejercicio 3.** *En el triángulo de lados $a = 17$ cm, $b = 31$ cm y $c = 40$ cm, calcular el ángulo $C$ y la altura correspondiente al vértice $A$.*

**Solución:**

El ángulo $C$ puede calcularse por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{17^2 + 31^2 - 40^2}{2 \cdot 17 \cdot 31} \quad \Longrightarrow \quad C = 109^{\circ}23'40''$$




La altura es igual a:

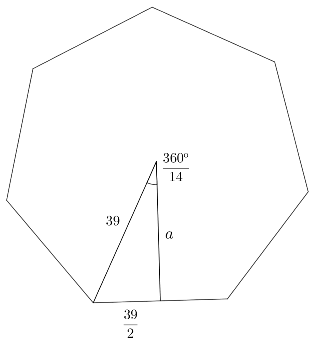
$$h = b \operatorname{sen} C = 31 \operatorname{sen} 109^{\circ}23'40'' = 29{,}24 \,\text{cm}$$

Conocidos los tres lados, La altura correspondiente al vértice $A$ puede obtenerse también de la siguiente expresión que se obtiene fácilmente de la fórmula de Herón:

$$S = \frac{1}{2}\, ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Ejercicio 4.** *Calcular el área de un heptágono regular de* 39 cm *de lado.*

**Solución:**




La apotema del heptágono mide:

$$a = \frac{39}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{360^{\text{o}}}{14}} = 40{,}49 \text{ cm}$$

El área de un polígono regular es el perímetro por la apotema dividido entre 2. Entonces:

$$S = \frac{7 \cdot 39 \cdot a}{2} = 5527{,}18 \text{ cm}$$

---

**Ejercicio 5.** *Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden* 10 *y* 15 cm*, respectivamente, si uno de sus ángulos mide* $35^o$*.*

**Solución:**

El área del paralelogramo es el doble que la del triángulo:

$$S = 10 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen} 35^{\text{o}} = 86{,}04 \text{ cm}^2$$

---

**Ejercicio 6.** *Sean los puntos* $A(4,5)$ *y* $B(-2,-4)$*:*

($a$) *Calcular la ecuación de la recta que pasa por* $A$ *y* $B$ *en forma explícita.*

($b$) *Calcular en forma continua la ecuación de la recta* $AB$*.*

($c$) *Calcular el área del triángulo que forma la recta* $AB$ *con los ejes de coordenadas.*

($d$) *Calcular la ecuación segmentaria de la paralela a* $AB$ *por el punto* $P(1,8)$*.*

($e$) *Calcular un punto del segmento* $AB$ *tal que su distancia a* $A$ *sea doble que su distancia a* $B$*.*

**Solución:**

($a$) La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{-4-5}{-2-4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

La recta en forma punto-pendiente es:

$$y-5=\frac{3}{2}\,(x-4)$$

y en forma explícita:

$$y=\frac{3}{2}\,x-1$$

(*b*) Un vector director es $\vec{u}(2,3)$. la ecuación en forma continua:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-5}{3}$$

(*c*) Calculamos los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}\,x-1 \\ y=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2}{3} \qquad \begin{cases} y=\frac{3}{2}\,x-1 \\ x=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad y=-1$$

El área del triángulo es:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

(*d*) La ecuación de la paralela es:

$$y-8=\frac{3}{2}\,(x-1) \quad\Longrightarrow\quad 2y-16=3x-3$$

o en forma implícita:

$$3x-2y=-13$$

Dividiendo por $-13$ obtenemos la ecuación segmentaria:

$$\frac{x}{-\frac{13}{3}}+\frac{y}{\frac{13}{2}}=1$$

(*e*) Entre los dos puntos $\Delta x=-6$ y $\Delta y=-9$. El punto que se pide es:

$$x=4+\frac{2\,(-6)}{3}=0$$

$$y=5+\frac{2\,(-9)}{3}=-1$$

El punto es $P(0,-1)$.

# 8. Funciones y límites

**Ejercicio 1.** *Calcular el dominio de definición de la función* $y = \ln(x^2 - 4x - 5)$.

**Solución:**

El dominio de la función es la solución de la inecuación:

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

El polinomio tiene como raíces $x = -1$ y $x = 5$. El signo del polinomio está dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + \\ & -1 & & 5 & \end{array}$$

De modo que el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

---

**Ejercicio 2.** *Calcular el dominio de la función:*

$$y = \sqrt{\frac{x}{9 - x^2}}$$

**Solución:**

Puesto que no existe raíz cuadrada de números negativos, el dominio es la solución de la inecuación:

$$\frac{x}{9 - x^2} \geq 0$$

La raíz del numerador es $x = 0$ y las del denominador, $x = -3$ y $x = 3$. El signo de la fracción según los valores de $x$ está dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} & \nexists & & 0 & & \nexists & \\ + & | & - & | & + & | & - \\ & -3 & & 0 & & 3 & \end{array}$$

de forma que el dominio de la función es $(-\infty, -3) \cup [0, 3)$.

---

**Ejercicio 3.** *Representar gráficamente la función* $y = x^2 - 2x - 15$.

**Solución:**

El vértice de la parábola está en el punto:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$
$$y_0 = 1^2 - 2 - 15 = -16$$

es decir, $V(1, -16)$.

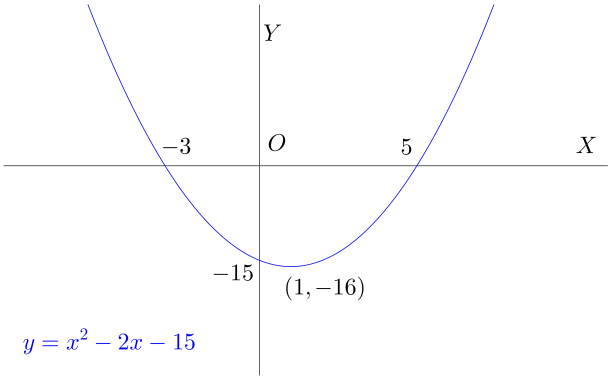
Las intersecciones con el eje de abscisas son:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 15 \\ y = 0 \end{cases} \implies A_1(-3, 0)\,, \quad A_2(5, 0)$$

y la intersección con el eje de ordenadas:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 15 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, -15)$$

Con estos datos, podemos representar la curva:




---

**Ejercicio 4.** *Representar:*

$$y = \frac{2x + 4}{x - 1}$$

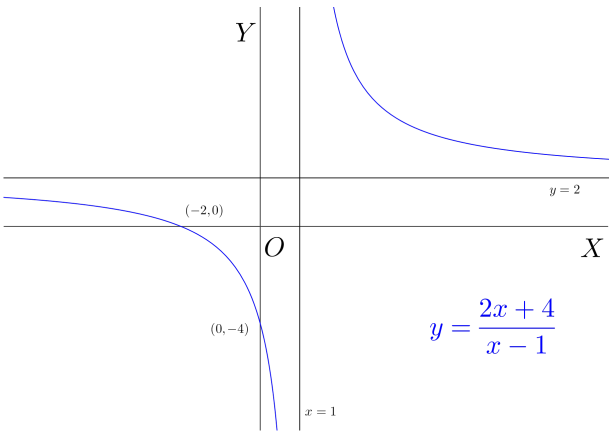
**Solución:**

Las asíntotas de la curva son $x = 1$ e $y = 2$.

Loa puntos de corte con los ejes son:

$$\begin{cases} y = \frac{2x+4}{x-1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(0, -4) \qquad \begin{cases} y = \frac{2x+4}{x-1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(-2, 0)$$

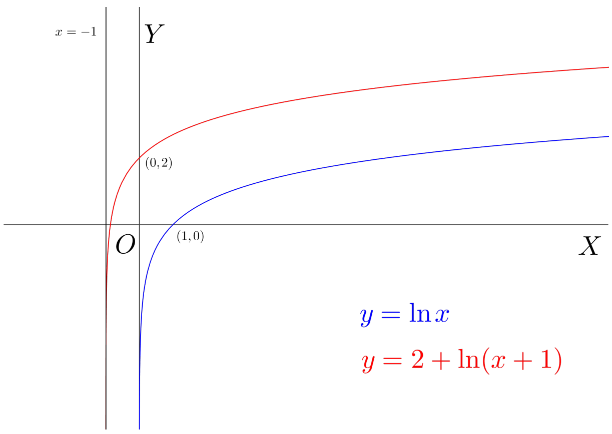
La representación gráfica es:




---

**Ejercicio 5.** *Representar sobre los mismos ejes las funciones* $y = \ln x$ *e* $y = 2 + \ln(x+1)$.

**Solución:**




---

**Ejercicio 6.** *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 3}$$

**Solución:**

Tiene una asíntota vertical $x = -3$ puesto que:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 3} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 3} = \infty$$

Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3x} = 2$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5x + 1 - 2x(x+3)}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-11x}{x} = -11$$

La asíntota oblicua es $y = 2x - 11$.

---

**Ejercicio 7.** *Estudia la continuidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ 16 - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

*en los puntos* $x = -1$ *y* $x = 3$.

**Solución:**

La función $f(x)$ está definida mediante funciones continuas, pero puede presentar discontinuidades de tipo salto en $x=-1$ y en $x=3$. Para estudiar qué sucede en estos puntos calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x+4) = 2$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2+1) = 2$$

La función es continua en $x=-1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2+1) = 10$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (16-x^2) = 7$$

La función es discontinua en $x=3$.

---

**Ejercicio 8.** *Calcular los siguientes límites:*

- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x^2-3}$
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x+3}\right)^{3x-1}$

**Solución:**

- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$
- ◇ $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x+3}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{-6}$

---

**Ejercicio 9.** *Calcular los siguientes límites:*

- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2-4}$
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{2-2x^2}$

**Solución:**

- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-4}{x-2} = \frac{3}{2}$
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{2-2x^2} = \frac{3}{0} = \infty$

---

**Ejercicio 10.** *Explica qué es una función continua y los distintos casos de discontinuidad que pueden producirse.*

**Solución:**

Una función $f(x)$ es continua en $x=x_0$ si el límite de la función en $x_0$ coincide con el valor de la función en $x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en ese punto. Pueden presentarse los siguientes casos:

- ⋄ **Discontinuidad evitable.**

$$f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- ⋄ **Salto finito.** Existen los límites laterales pero son diferentes:

$$f \text{ tiene una discontinuidad de tipo salto en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- ⋄ **Infinitos.** El tercer tipo de discontinuidad son los infinitos de la función, es decir, los puntos $x_0$ tales que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

---

# 9. Segundo examen de funciones y límites

**Ejercicio 1.** *Calcular el dominio de definición de la función* $y = \sqrt{9 - x^2}$.

**Solución:**

El dominio de la función es la solución de la inecuación:

$$9 - x^2 \geq 0$$

El polinomio tiene como raíces $x = -3$ y $x = 3$. El signo del polinomio está dado en el siguiente esquema:

| $x$ | | $-3$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| signo | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

De modo que el dominio de la función es $[-3, 3]$.

---

**Ejercicio 2.** *Calcular el dominio de la función:*

$$y = \ln \frac{x - 1}{x^2 - 8x + 15}$$

**Solución:**

Puesto que no existe el logaritmo de cero o números negativos, el dominio es la solución de la inecuación:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 8x + 15} > 0$$

La raíz del numerador es $x = 1$ y las del denominador, $x = 3$ y $x = 5$. El signo de la fracción según los valores de $x$ está dado por:

| $x$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signo | $-$ | $0$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |

de forma que el dominio de la función es $(1, 3) \cup (5, \infty)$.

---

**Ejercicio 3.** *Representar gráficamente la función* $y = x^2 - 3x - 4$.

**Solución:**

El vértice de la parábola está en el punto:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$y_0 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -\frac{25}{4}$$

es decir, $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

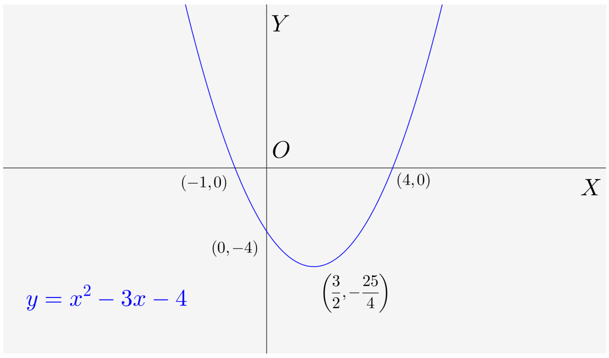
Las intersecciones con el eje de abscisas son:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A_1(-1, 0)\,, \quad A_2(4, 0)$$

y la intersección con el eje de ordenadas:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, -4)$$

Con estos datos, podemos representar la curva:




---

**Ejercicio 4.** *Representar:*

$$y = \frac{x-4}{x+1}$$

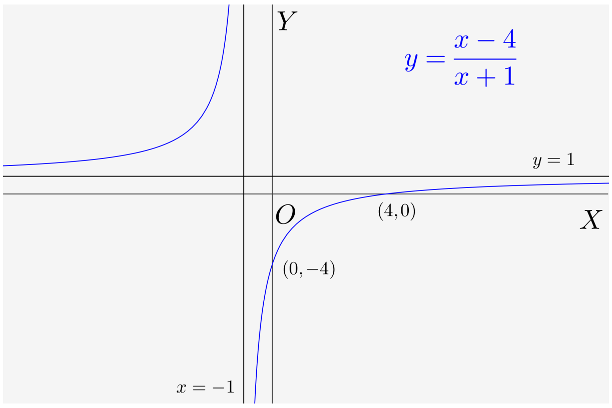
**Solución:**

Las asíntotas de la curva son $x = -1$ e $y = 1$.

Los puntos de corte con los ejes son:

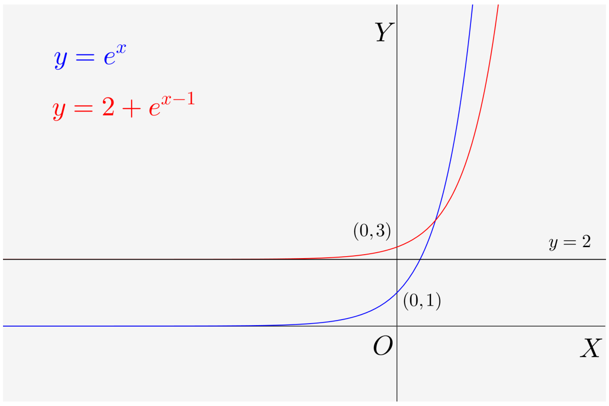
$$\begin{cases} y = \dfrac{x-4}{x+1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(0, -4) \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{x-4}{x+1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(4, 0)$$

La representación gráfica es:



**Ejercicio 5.** *Representar sobre los mismos ejes las funciones $y = e^x$ e $y = 2 + e^{x-1}$.*

**Solución:**




---

**Ejercicio 6.** *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 2}$$

**Solución:**

Tiene una asíntota vertical $x = 2$ puesto que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 2} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 2} = \infty$$

Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 1 - x(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

La asíntota oblicua es $y = x - 3$.

---

**Ejercicio 7.** *Estudia la continuidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

*en los puntos $x = -1$ y $x = 3$.*

**Solución:**

La función $f(x)$ está definida mediante funciones continuas, pero puede presentar discontinuidades de tipo salto en $x = -1$ y en $x = 3$. Para estudiar qué sucede en estos puntos calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x+2) = 0$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2-1) = 0$$

La función es continua en $x = -1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-1) = 8$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (4-x^2) = -5$$

La función es discontinua en $x = 3$.

---

**Ejercicio 8.** *Calcular los siguientes límites:*

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{x^2-2x+1}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{2x}$

**Solución:**

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6$

---

**Ejercicio 9.** *Calcular los siguientes límites:*

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^{x}$

**Solución:**

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x-1} = 2$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{3x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$

---

**Ejercicio 10.** *Explica qué es una función continua y los distintos casos de discontinuidad que pueden producirse.*

**Solución:**

Una función $f(x)$ es continua en $x = x_0$ si el límite de la función en $x_0$ coincide con el valor de la función en $x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en ese punto. Pueden presentarse los siguientes casos:

- **Discontinuidad evitable.**

  $$f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- **Salto finito.** Existen los límites laterales pero son diferentes:

  $$f \text{ tiene una discontinuidad de tipo salto en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- **Infinitos.** El tercer tipo de discontinuidad son los infinitos de la función, es decir, los puntos $x_0$ tales que:

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

# 10. Combinatoria

**Ejercicio 1.** *Un examen consta de 10 preguntas de las que hay que escoger* 8*.*

($a$) *¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas?*

($b$) *¿De cuántas si las dos primeras son obligatorias?*

**Solución:**

($a$) Deben elegirse 8 preguntas de 10 sin importar el orden. Entonces:

$$C_{10,8} = C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

($b$) En este caso hay que elegir 6 de las 8 preguntas no obligatorias:

$$C_{8,6} = C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

---

**Ejercicio 2.** *Con las cifras* 3*,* 4*,* 5*,* 8 *y* 9*:*

($a$) *¿Cuántos números de* 3 *cifras diferentes pueden formarse?*

($b$) *¿Cuántos son mayores de* 500*?*

**Solución:**

($a$) Se deben formar disposiciones ordenadas de 3 elementos:

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

($b$) Serán mayores que 500 los números que empiecen por 5, por 8 o por 9. Tenemos 3 cifras posibles para las centenas, 4 para las decenas y 3 para las unidades:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$$

---

**Ejercicio 3.** *En un juego se reparten simultáneamente* 5 *cartas (de una baraja de* 40*) a un jugador:*

($a$) *¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?*

($b$) *¿De cuántas si sabemos que* 2 *son de oros y* 3 *de copas?*

**Solución:**

($a$) Se deben formar grupos no ordenados de 5 cartas. Por tanto:

$$C_{40,5} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 = 658008$$

($b$) Los oros se pueden tomar de $\binom{10}{2}$ y las copas de $\binom{10}{3}$ maneras:

$$\binom{10}{2}\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 45 \cdot 120 = 5400$$

**Ejercicio 4.** *Con las 27 letras del alfabeto:*

(*a*) *Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?*

(*b*) *¿Cuántas empiezan y terminan con vocal?*

**Solución:**

(*a*) Tenemos que formar disposiciones ordenadas de 4 letras:

$$V_{27,4} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421200$$

(*b*) La vocal inicial se puede elegir de 5 maneras y la última de 4. Una vez puestas estas letras, las dos restantes pueden elegirse de $25 \cdot 24$ modos:

$$5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 24 = 12000$$

---

**Ejercicio 5.** *Tres chicos y tres chicas van al cine.*

(*a*) *¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar los seis asientos de una fila?*

(*b*) *¿De cuántas si los chicos y las chicas deben sentarse alternados?*

**Solución:**

(*a*) El número de maneras en que pueden ocupar los asientos es:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

(*b*) Los chicos pueden colocarse de 3! y las chicas también de 3! maneras. Además, pueden colocarse los chicos en los asientos pares y las chicas en los impares o al revés. El número de posibilidades que tenemos es:

$$2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$$

---

# 11. Combinatoria

**Ejercicio 1.** *La siguiente tabla representa el número de horas semanales que dedican al estudio los* 30 *alumnos de una clase:*

| **Nº de horas** | **Nº de alumnos** |
|---|---|
| $[0,4]$ | 8 |
| $[4,8]$ | 10 |
| $[8,12]$ | 8 |
| $[12,16]$ | 4 |

(*a*) *Calcular la mediana y los cuartiles.*

(*b*) *Calcular la media y la desviación típica.*

**Solución:**

(*a*) Completamos la tabla con las frecuencias acumuladas relativas:

| **Nº de horas** | **Nº de alumnos** | $F_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|
| $[0,4)$ | 8 | 8 | $\frac{8}{30}$ |
| $[4,8)$ | 10 | 18 | $\frac{18}{30}$ |
| $[8,12)$ | 8 | 26 | $\frac{26}{30}$ |
| $[12,16)$ | 4 | 30 | 1 |

El primer valor de la frecuencia acumulada mayor que $\frac{1}{4}$ es $\frac{8}{30}$. El primer cuartil está entonces en el intervalo $[0,4)$. De la misma forma encontramos que la mediana está en el intervalo $[4,8)$ (primer valor de la frecuencia acumulada mayor que $\frac{1}{2}$) y el tercer cuartil en $[8,12)$ (primer valor de la frecuencia acumulada mayor que $\frac{3}{4}$). Calculamos el primer cuartil por:

$$Q_1 = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{H_1 - H_0}\left(\frac{1}{4} - H_0\right) = 0 + \frac{4-0}{\frac{8}{30} - 0}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = 3{,}75$$

y de la misma forma:

$$Q_2 = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{H_1 - H_0}\left(\frac{1}{2} - H_0\right) = 4 + \frac{8-4}{\frac{18}{30} - \frac{8}{30}}\left(\frac{1}{2} - \frac{8}{30}\right) = 6{,}8$$

$$Q_3 = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{H_1 - H_0}\left(\frac{3}{4} - H_0\right) = 8 + \frac{8-4}{\frac{26}{30} - \frac{18}{30}}\left(\frac{3}{4} - \frac{8}{30}\right) = 10{,}25$$

(*b*) Para calcular la media y la desviación típica hacemos la tabla:

| **Nº de horas** | **Nº de alumnos** | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| $[0,4)$ | 8 | 16 | 32 |
| $[4,8)$ | 10 | 60 | 360 |
| $[8,12)$ | 8 | 80 | 800 |
| $[12,16)$ | 4 | 56 | 784 |
| Suma | 30 | 212 | 1976 |

Con estos datos tenemos:

$$\bar{x} = \frac{212}{30} = 7{,}07$$
$$s^2 = \frac{1976}{30} - \left(\frac{212}{30}\right)^2 = 15{,}93$$
$$s = 3{,}99$$

---

**Ejercicio 2.** *Con las letras dela palabra ARBOL:*

($a$) *¿Cuántas palabras de 5 letras distintas pueden formarse?*

($b$) *¿En cuántas de ellas las vocales estén separadas?*

**Solución:**

($a$) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

($b$) Hay $\binom{5}{2} = 10$ posiciones para las vocales. En 6 de ellas están separadas. Para cada una de estas posiciones hay dos posibilidades para las vocales y $3! = 6$ para las consonantes. En total, el número de palabras es:

$$6 \cdot 2 \cdot 6 = 72$$

---

**Ejercicio 3.** *Con las cifras* 1, 3, 5, 7 *y* 9*,*

($a$) *¿Cuántos productos de tres factores distintos se pueden realizar?*

($b$) *¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?*

**Solución:**

($a$) $C_{5,3} = C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

($b$) $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

---

**Ejercicio 4.** *Un equipo de balonmano está formado por 6 jugadores de campo y un portero. Si un entrenador dispone de* 12 *jugadores de campo y* 2 *porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede formar?*

**Solución:**

El portero puede elegirse de 2 maneras y los jugadores de campo de $C_{12,6}$ maneras. En total:

$$2 \cdot C_{12,6} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1848$$

---

**Ejercicio 5.**

($a$) *Desarrollar* $(1 - 2x)^5$.

(*b*) *Calcular el coeficiente de* $x^6$ *en* $(x-2)^{10}$

**Solución:**

(*a*) Los coeficientes del desarrollo son 1, 5, 10, 10, 5, 1. Así:

$$(1-2x)^5 = 1-5\cdot 2x+10(2x)^2-10\cdot(2x)^3+5\cdot(2x)^4-(2x)^5 = 1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$$

(*b*) El término buscado es:

$$\binom{10}{6}x^6\cdot(-2)^4 = 3360x^6$$

---

**Ejercicio 6.** *En un grupo de teatro hay 4 actores y 7 actrices. El director tiene que elegir a 5 de ellos para la próxima representación.*

(*a*) *¿De cuántas maneras podrá hacerlo?*

(*b*) *¿Y si necesita que 2 sean hombres y 3 mujeres?*

**Solución:**

(*a*) $C_{11,5} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 482.$

(*b*) $C_{4,2}\cdot C_{7,3} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 210$

---

**Ejercicio 7.** *Si se colocan en orden alfabético las palabras de* 5 *letras formadas con las letras de la palabra NEPAL, ¿cuál es la que ocupa el lugar* $86^o$*?*

**Solución:**

En total hay $5! = 120$ palabras, 24 que empiezan por A, 24 por E, etc. Es decir, si las ordenamos alfabéticamente::

- De la 1 a la 24 empiezan por A.
- De la 25 a la 48 empiezan por E.
- De la 49 a la 72 empiezan por L.
- De la 73 a la 96 empiezan por N.
- De la 97 a la 120 empiezan por P.

Concluimos que la palabra buscada empieza por N. De estas palabras:

- De la 73 a la 78 empiezan por NA.
- De la 79 a la 84 empiezan por NE.
- De la 85 a la 90 empiezan por NL.
- De la 91 a la 96 empiezan por NP.

La palabra buscada empieza por NL. La que ocupa el lugar 85º es NLAEP y la 86ª será NLAPE.

---

**Ejercicio 8.** *¿De cuántas maneras se pueden repartir* 5 *cartas de una baraja española de forma que haya al menos una carta de oros?*

**Solución:**

Podemos calcularlo como la diferencia entre los modos de repartir 5 cartas cualesquiera y las combinaciones que no tienen oros. Es decir:

$$C_{40,5} - C_{30,5} = 515502$$

---

**Ejercicio 9.** *Con las cifras del 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean múltiplos de 3?*

**Solución:**

Con esas cifras podemos formar 10 combinaciones:

$$\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,2,5\},\ \{1,3,4\},\ \{1,3,5\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,4\},\ \{2,3,5\},\ \{2,4,5\},\ \{3,4,5\}$$

De ellas, se pueden formar múltiplos de 3 con $\{1,2,3\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$ y $\{3,4,5\}$. Con cada una de estas combinaciones de cifras, pueden formarse 6 números. En total $4 \cdot 6 = 24$ números.

---

# 12. Probabilidad

**Ejercicio 1.** *Calcular la probabilidad de obtener exactamente* 4 *caras al lanzar una moneda* 6 *veces.*

**Solución:**

$$p = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular la probabilidad de obtener un trío (tres cartas del mismo número) al repartir* 5 *cartas de una baraja española.*

**Solución:**

Las cartas pueden repartirse de $C_{40,5}$ maneras. Un trío puede formarse de $10C_{4,3}C_{36,2}$ maneras. esto es así porque hay 10 modos de escoger el número. Una vez escogido el número hay $C_{4,3} = 4$ modos de formar el trío. Una vez formado el trío, las otras dos cartas pueden escogerse de $C_{36,2}$ maneras.

La probabilidad pedida es:

$$p = \frac{10\,C_{4,3}C_{36,2}}{C_{40,5}} = \frac{350}{9139}$$

---

**Ejercicio 3.** *Siete personas se sientan al azar en una mesa redonda. Calcular la probabilidad de que dos de ellas $A$ y $B$ se sienten juntas.*

**Solución:**

- ◇ Las personas pueden sentarse en las sillas de 7! maneras diferentes. Hay 7 pares de sillas juntas y para cada una de ellas 2 maneras de sentar a $A$ y $B$. Las otras personas pueden sentarse de 5! formas. Por consiguiente:

$$p = \frac{7 \cdot 2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{3}$$

- ◇ Otra manera de resolver el problema sería la siguiente. La persona $A$ puede sentarse en cualquier sitio. Quedan 6 sillas para $B$ de las cuales 2 son contiguas a $A$. La probabilidad es:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

---

**Ejercicio 4.** *Calcular la probabilidad de obtener 2 bastos y 2 oros al repartir 4 cartas de una baraja española.*

**Solución:**

Los dos bastos pueden elegirse de $C_{10,2}$ maneras lo mismo que los dos oros. La probabilidad es:

$$p = \frac{C_{10,2}C_{10,2}}{C_{40,4}} = \frac{405}{18278}$$

---

**Ejercicio 5.** *Una urna contiene* 3 *bolas azules,* 4 *verdes y* 6 *rojas. Se extraen 2 bolas al azar. Calcular la probabilidad de que una sea verde y la otra azul.*

**Solución:**

Hay $3 \cdot 4 = 12$ maneras de sacar una bola verde y una azul. Entonces:

$$p = \frac{12}{C_{13,2}} = \frac{2}{13}$$

---

**Ejercicio 6.** *Calcular la probabilidad de obtener suma* 11 *en el lanzamiento de tres dados.*

**Solución:**

El espacio muestral consta de 216 posibles resultados. Vamos a ver cuántos de ellos suman 11. Esta suma puede obtenerse mediante las siguientes combinaciones:

$$\{6,4,1\},\ \{6,3,2\},\ \{5,5,1\},\ \{5,4,2\},\ \{5,3,3\},\ \{4,4,3\}$$

Con las combinaciones que contienen 3 números diferentes pueden obtenerse 6 resultados posibles. Por ejemplo, con la primera combinaciones se obtienen los resultados:

$$641,\ 614,\ 461,\ 416,\ 164,\ 146$$

Sin embargo, con las que tienen un número repetido solamente se obtienen 3. Por ejemplo con $\{5,5,1\}$:

$$551,\ 515,\ 155$$

Por consiguiente, tenemos $6+6+3+6+3+3 = 27$ resultados favorables. La probabilidad es:

$$p = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

---

**Ejercicio 7.** *Calcular la probabilidad de que al repartir 4 cartas de una baraja española no haya ningún oro.*

**Solución:**

$$p = \frac{C_{30,4}}{C_{40,4}} = \frac{5481}{18278}$$

---

**Ejercicio 8.** *La probabilidad de que un jugador enceste un tiro libre es del* 60 %*. Calcular la probabilidad de que enceste alguno de tres lanzamientos.*

**Solución:**

La probabilidad de que no enceste ningún tiro es:

$$0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$$

La probabilidad de que enceste alguno es:

$$p = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$$

---

**Ejercicio 9.** *La urna* $\mathcal{U}_1$ *contiene* 4 *bolas azules y* 5 *rojas y la urna* $\mathcal{U}_2$, 2 *azules y* 4 *rojas. Se extrae al azar una bola de* $\mathcal{U}_1$ *y se introduce en* $\mathcal{U}_2$. *Si ahora se extrae una bola de* $\mathcal{U}_2$, *¿cuál es la probabilidad de que sea roja?*

**Solución:**

Sea $A =' sacar\ bola\ azul'$ y $B =' sacar\ bola\ roja'$. Si expresamos la urna mediante un subíndice:

$$\begin{aligned} p(R_2) &= p[(A_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)] \\ &= p(A_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap R_2) \\ &= p(A_1)p(R_2|A_1) + p(R_1)(R_2|R_1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{7} \\ &= \frac{41}{63} \end{aligned}$$

---

**Ejercicio 10.** *Calcular la probabilidad de obtener un trío y una pareja al repartir* 5 *cartas de una baraja española.*

**Solución:**

El tipo de cartas que forman el trío y la pareja (por ejemplo trío de ases y pareja de doses) puede elegirse de $10 \cdot 9 = 90$ formas. Una vez elegido el número de las cartas, éstas se pueden escoger de $C_{4,3}C_{4,2}$ formas diferentes. La probabilidad pedida es:

$$p = \frac{90\, C_{4,3}C_{4,2}}{C_{40,5}} = \frac{30}{9139}$$

---