Matemáticas B. Cuarto ESO.
Curso 2011-2012. Exámenes

1. Raíces y logaritmos

Ejercicio 1A. *Define logaritmo en base a de un número N y demuestra la propiedad del logaritmo de un cociente.*

Solución:

Sea a un número positivo, se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

El logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{ll} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

Ejercicio 2A.

1. *Comparar $\sqrt[3]{103}$ y $\sqrt{22}$ reduciéndolos a índice común.*
2. *Expresar como una raíz y simplificar:*

   a) $\sqrt[12]{x^9}$

   b) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

   c) $\sqrt{2\sqrt[3]{a}}$

   d) $\sqrt[3]{4\sqrt{a^2}}$

Solución:

1. ◇ $\sqrt[3]{103} = \sqrt[6]{103^2} = \sqrt[6]{10609}$

   ◇ $\sqrt{22} = \sqrt[6]{22^3} = \sqrt[6]{10648}$

   Por consiguiente es mayor $\sqrt{22}$.

2. ◇ $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$

   ◇ $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \sqrt[3]{a^{12}} = a^4$

   ◇ $\sqrt{2\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{8a}} = \sqrt[6]{8a}$

   ◇ $\sqrt[3]{4\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{4a}$

Ejercicio 3A. *Racionalizar los denominadores y simplificar la fracción en:*

1. $\dfrac{12}{\sqrt{45}}$
2. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Solución:

◇ $\dfrac{12}{\sqrt{45}} = \dfrac{12}{3\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

◇ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \dfrac{5+3-2\sqrt{15}}{5-3} = \dfrac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$

Ejercicio 4A. *Calcular los siguientes logaritmos:*

1. $\log_{25} \dfrac{1}{125}$
2. $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
3. $\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right)$
4. $\log_8 \dfrac{4}{\sqrt[5]{16}}$

Solución:

- ⋄ $\log_{25} \dfrac{1}{125} = \log_{25} 1 - \log_{25} 125 = 0 - \dfrac{\log_5 125}{\log_5 25} = -\dfrac{3}{2}$
- ⋄ $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$
- ⋄ $\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right) = \log_2 \sqrt[3]{16} + \log_2 \sqrt[4]{8} = \dfrac{1}{3}\log_2 16 + \dfrac{1}{4}\log_2 8 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{25}{12}$
- ⋄ $\log_8 \dfrac{4}{\sqrt[5]{16}} \log_8 4 - \dfrac{1}{5}\log_8 16 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} - \dfrac{1}{5}\dfrac{\log_2 16}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

Ejercicio 5A. *Sabiendo que* $\log 2 = 0{,}3010$ *calcular:*

1. $\log \sqrt{8}$
2. $\log 125$

Solución:

- ⋄ $\log \sqrt{8} = \dfrac{1}{2}\log 8 = \dfrac{1}{2}\log 2^3 = \dfrac{3}{2}\log 2 = \dfrac{3 \times 0{,}3010}{2} = 0{,}451$
- ⋄ $\log 125 = \log 5^3 = \log \left(\dfrac{10}{2}\right)^3 = \log 10^3 - \log 2^3 = 3 - 3\log 2 = 3 - 3 \times 0{,}3010 = -0{,}452$

Ejercicio 6A.

1. *Simplificar expresando como un solo logaritmo:*

$$5\log 10 + \frac{1}{3}\log 27 - \log 2$$

2. *Aplicar logaritmos decimales a la expresión*

$$A = \frac{10x^2\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{z}}$$

Solución:

- ⋄ $5\log 10 + \dfrac{1}{3}\log 27 - \log 2 = \log \dfrac{10^5\sqrt[3]{27}}{2} = \log \dfrac{10^5 \cdot 3}{2} = \log 150000$
- ⋄ $\log A = \log\left(10x^2\sqrt[3]{y^2}\right) - \log \sqrt[4]{z} = 1 + 2\log x + \dfrac{2}{3}\log y - \dfrac{1}{4}\log z$

Ejercicio 7A. *En las siguientes igualdades, despejar x:*

1. $7^{-3x} = 15$
2. $3^{-5x^2} = 1$

Solución:

- ⋄ $7^{-3x} = 15 \quad\Longrightarrow\quad -3x = \log_7 15 \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{1}{3}\log_7 15$

$\diamond$ $3^{-5x^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad -5x^2 = \log_3 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0$

Ejercicio 1B. *Define logaritmo en base a de un número N y demuestra la propiedad del cambio de base.*

Solución:

Sea a un número positivo, se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base a en esta última igualdad:

$$\begin{aligned} &\log_a b^x = \log_a N \Longrightarrow x \log_a b = \log_a N \\ &\qquad \Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \end{aligned}$$

Ejercicio 2B.

1. *Expresar como un solo radical y simplifica extrayendo factores:*

$$\sqrt[3]{3a^2}\ \sqrt[4]{9a^3}\ \sqrt[6]{81a^3}$$

2. *Expresar como una raíz y simplificar:*

a) $\sqrt[8]{x^6}$	*c*) $\sqrt{3\sqrt{a^3}}$
b) $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5$	*d*) $\sqrt[3]{2\sqrt{a}}$

Solución:

- $\diamond$ $\sqrt[3]{3a^2}\ \sqrt[4]{9a^3}\ \sqrt[6]{81a^3} = \sqrt[12]{3^4a^8}\ \sqrt[12]{3^6a^9}\ \sqrt[12]{3^8a^6} = \sqrt[12]{3^{18}a^{23}} = 31\ \sqrt[12]{3^6a^{11}}$
- $\diamond$ $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[4]{x^3}$
- $\diamond$ $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = \sqrt[3]{a^{15}}$
- $\diamond$ $\sqrt{3\sqrt{a^3}} = \sqrt{\sqrt{9a^3}} = \sqrt[4]{9a^3}$
- $\diamond$ $\sqrt[3]{2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{4a}} = \sqrt[6]{4a}$

Ejercicio 3B. *Racionalizar los denominadores y simplificar la fracción en:*

1. $\dfrac{10}{\sqrt{8}}$

2. $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

Solución:

- ⋄ $\dfrac{10}{\sqrt{8}} = \dfrac{10}{2\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
- ⋄ $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \dfrac{7+5-2\sqrt{35}}{7-5} = \dfrac{12-2\sqrt{35}}{2} = 6-\sqrt{35}$

Ejercicio 4B. *Calcular los siguientes logaritmos:*

1. $\log_9 \dfrac{1}{27}$

2. $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

3. $\log_3 \left(\sqrt[3]{81}\,\sqrt[4]{27}\right)$

4. $\log_{27} \dfrac{9}{\sqrt[5]{81}}$

Solución:

- ⋄ $\log_9 \dfrac{1}{27} = \log_9 1 - \log_9 27 = 0 - \dfrac{\log_3 27}{\log_2 9} = -\dfrac{3}{2}$
- ⋄ $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \log_5 1 - \log_5 \sqrt[3]{5} = -\dfrac{1}{3}$
- ⋄ $\log_3 \left(\sqrt[3]{81}\,\sqrt[4]{27}\right) = \dfrac{1}{3}\log_3 81 + \dfrac{1}{4}\log_3 27 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{25}{12}$
- ⋄ $\log_{27} \dfrac{9}{\sqrt[5]{81}} \log_{27} 9 - \log_{27} \sqrt[5]{81} = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 27} - \dfrac{1}{5}\dfrac{\log_3 81}{\log_3 27} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{3}\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

Ejercicio 5B. *Sabiendo que* $\log 2 = 0{,}3010$ *calcular:*

1. $\log \sqrt[3]{4}$

2. $\log \frac{1}{125}$

Solución:

- ⋄ $\log \sqrt[3]{4} = \dfrac{1}{3}\log 4 = \dfrac{1}{3}\log 2^2 = \dfrac{2}{3}\log 2 = \dfrac{2\times 0{,}3010}{3} = 0{,}201$
- ⋄ $\log \frac{1}{125} = -\log 125 = -\log \frac{1000}{8} = -\log 1000 + \log 8 = -3 + 3\log 2 = 3\times 0{,}3010 - 3 = -2,939$

Ejercicio 6B.

1. *Simplificar expresando como un solo logaritmo:*

$$3\log 100 - \frac{1}{3}\log 27 + 2\log 3$$

2. *Aplicar logaritmos decimales a la expresión*

$$A = \frac{x^2\sqrt[3]{10y^2}}{\sqrt[3]{z}}$$

Solución:

- $\diamond$ $3\log 100 - \dfrac{1}{3}\log 27 + 2\log 3 = \log \dfrac{100^3 \cdot 3^2}{\sqrt[3]{27}} = \log 3000000$
- $\diamond$ $\log A = 2\log x + \frac{1}{3}\log 10 + \frac{2}{3}\log y - \frac{1}{3}\log z = 2\log x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log y - \frac{1}{3}\log z$

Ejercicio 7B. *En las siguientes igualdades, despejar x:*

1. $7^{1-3x} = 15$
2. $3^{x^2+1} = 2$

Solución:

- $\diamond$ $7^{1-3x} = 15 \quad \Longrightarrow \quad 1 - 3x = \log_7 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1-\log_7 15}{3}$
- $\diamond$ $3^{x^2+1} = 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 1 = \log_3 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{\log_3 2 - 1}$ (no existe esta raíz)

---

2. Segundo examen de raíces y logaritmos

Ejercicio 1. *Logaritmo de un producto. Cambio de base. Enunciar las propiedades y demostrarlas.*

Solución:

Ver examen anterior.

Ejercicio 2. *Calcula los siguientes logaritmos:*

1. $\log_5 \sqrt{\frac{1}{125}}$
2. $\log_4 \sqrt[3]{32}$
3. $\log_3 \left(81\sqrt[4]{27}\right)$
4. $\log_6 \frac{-1}{\sqrt{216}}$

Solución:

- $\log_5 \sqrt{\dfrac{1}{125}} = \dfrac{1}{2}\left(\log_5 1 - \log_5 125\right) = -\dfrac{3}{2}$
- $\log_4 \sqrt[3]{32} = \dfrac{1}{3}\log_4 32 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{6}$
- $\log_3 \left(81\sqrt[4]{27}\right) = \log_3 81 + \dfrac{1}{4}\log_3 27 = 4 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{19}{4}$
- $\log_6 \frac{-1}{\sqrt{216}}$ no existe

Ejercicio 3. *Racionalizar y simplificar:*

$$\frac{3+\frac{\sqrt{3}}{3}}{3-\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{\sqrt{27}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{3+\frac{\sqrt{3}}{3}}{3-\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{\sqrt{27}} &= \frac{9+\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{(9+\sqrt{3})(9+\sqrt{3})}{(9-\sqrt{3})(9+\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} \\
&= \frac{81+3+18\sqrt{3}}{81-3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{84+18\sqrt{3}}{78} - \frac{\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{14+3\sqrt{3}}{13} - \frac{\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{126+27\sqrt{3}-13\sqrt{3}}{117} \\
&= \frac{126+14\sqrt{3}}{117}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Sabiendo que* $\log 2 = 0{,}3010$, *calcular:*

1. $\log \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\log \sqrt{5}$

Solución:

- $\diamond$ $\log \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\log 2 - \log 2 = \dfrac{0{,}3010}{2} - 0{,}3010 = -0{,}1505$
- $\diamond$ $\log \sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\log 5 = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{10}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - \log 2) = \dfrac{1 - 0{,}3010}{2} = 0{,}3495$

Ejercicio 5.

1. *Despejar* x *en la ecuación* $5^{2-4x} = 10$
2. *Expresar como un solo radical y simplificar*

$$\frac{\sqrt[3]{12x^2}\,\sqrt[6]{36x^8}}{\sqrt[4]{2x}}$$

Solución:

- $\diamond$ $5^{2-4x} = 10 \quad \Longrightarrow \quad 2 - 4x = \log_5 10 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{2 - \log_5 10}{4}$
- $\diamond$ Reduciendo a índice común resulta:

$$\frac{\sqrt[3]{12x^2}\,\sqrt[6]{36x^8}}{\sqrt[4]{2x}} = \frac{\sqrt[12]{12^4x^8}\,\sqrt[12]{36^2x^{16}}}{\sqrt[12]{2^3x^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^83^4x^8\cdot 2^43^4x^{16}}{2^3x^3}} = \sqrt[12]{2^93^8x^{21}} = x\,\sqrt[12]{2^93^8x^9}$$

---

3. Polinomios

Ejercicio 1. *Calcular:*

1. $(2x-5y)^2$
2. $\left(3x^3+\sqrt{x}\right)^2$
3. $(x+y-2z)^2$
4. $(2x^2+1)(2x^2-1)$

Solución:

- ◇ $(2x-5y)^2 = 4x^2-20xy+25y^2$
- ◇ $\left(3x^3+\sqrt{x}\right)^2 = 9x^6+6x^3\sqrt{x}+x$
- ◇ $(x+y-2z)^2 = x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz$
- ◇ $(2x^2+1)(2x^2-1) = 4x^4-1$

Ejercicio 2. *Efectuar la siguiente división de polinomios:*

$$20x^4-18x^3+35x^2-12x-7 \ : \ 4x^2-2x+7$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
20x^4 & -\ 18x^3 & +\ 35x^2 & -\ 12x & -\ 7 & 4x^2-2x+7 \\ \cline{6-6}
-20x^4 & +\ 10x^3 & -\ 35x^2 & & & 5x^2-2x-1 \\ \hline
 & -\ 8x^3 & & -\ 12x & & \\
 & +\ 8x^3 & -\ 4x^2 & +\ 14x & & \\ \hline
 & & -\ 4x^2 & +\ 2x & -\ 7 & \\
 & & +\ 4x^2 & -\ 2x & +\ 7 & \\ \hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Ejercicio 3. *Factorizar el polinomio* $6x^3+11x^2-24x-9$

Solución:

Ensayamos con los divisores de 9 para encontrar raíces enteras:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 11 & -24 & -9 \\
1 & & 6 & 17 & -7 \\ \hline
 & 6 & 17 & -7 & -16
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 11 & -24 & -9 \\
-1 & & -6 & -5 & 29 \\ \hline
 & 6 & 5 & -29 & 20
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 11 & -24 & -9 \\
3 & & 18 & 87 & 189 \\ \hline
 & 6 & 29 & 63 & 180
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 11 & -24 & -9 \\
-3 & & -18 & 21 & 9 \\ \hline
 & 6 & -7 & -3 & 0
\end{array}$$

Así pues, -3 es una raíz y tenemos una primera factorización:

$$6x^3+11x^2-24x-9 = (x+3)(6x^2-7x-3)$$

Para factorizar el polinomio de segundo grado, calculamos sus raíces:

$$6x^2-7x-3=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{7\pm\sqrt{49+4\cdot 6\cdot 3}}{12}=\frac{7\pm 11}{12}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3}\end{cases}$$

Por consiguiente:

$$6x^3+11x^2-24x-9=(x+3)(6x^2-7x-3)=(x+3)\cdot 6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(x+3)\,(2x-3)\,(3x+1)$$

Ejercicio 4. *Factorizar los polinomios de segundo grado*

1. $15x^2-13x+2$
2. $4x^2-1$

Solución:

- ◇ Calculamos las raíces del polinomio:

$$15x^2-13x+2=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{13\pm\sqrt{169-4\cdot 15\cdot 2}}{30}=\frac{13\pm 7}{30}=\begin{cases}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{5}\end{cases}$$

con lo que:

$$15x^2-13x+2=15\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=(3x-2)(5x-1)$$

- ◇ No es preciso calcular las raíces pues se trata de una diferencia de cuadrados:

$$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$$

Ejercicio 5. *Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es* 3 *y que tiene por raíces* $r_1=1$ *(doble),* $r_2=-2$ *y* $r_3=4$*. Desarróllalo.*

Solución:

El polinomio será

$$3\,(x-1)^2\,(x+2)(x-4)=3x^4-12x^3-9x^2+42x-24$$

Ejercicio 6. *Enuncia y demuestra el teorema del factor.*

Solución:

Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x-r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x)=(x-r)Q(x)$$

Demostración:

- ◇ Sea r raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r)=0$.
- ◇ Si se divide $P(x)$ por $x-r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x)=(x-r)Q(x)+R$$

- ◇ Para $x=r$:

$$P(r)=(r-r)Q(r)+R \quad\Longrightarrow\quad R=P(r)=0$$

y por consiguiente $P(x)=(x-r)Q(x)$.

---

4. Examen de la primera evaluación

Ejercicio 1. *Simplificar:*

- $2\sqrt{27}+5\sqrt{12}-15\sqrt{3}$
- $5\sqrt[3]{54}-10\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{16}$

Solución:

- $2\sqrt{27}+5\sqrt{12}-15\sqrt{3}=2\sqrt{9\cdot 3}+5\sqrt{4\cdot 3}-15\sqrt{3}=6\sqrt{3}+10\sqrt{3}-15\sqrt{3}=\sqrt{3}$
- $5\sqrt[3]{54}-10\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{16}=5\sqrt[3]{27\cdot 2}-10\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{8\cdot 2}=15\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$

Ejercicio 2. *Calcular razonadamente los siguientes logaritmos:*

- $\log_7\sqrt[3]{49}$
- $\log_2\frac{1}{32}$
- $\log_{10} 0{,}01$
- $\log_5 25^3$

Solución:

- $\log_7\sqrt[3]{49}=\frac{1}{3}\log_7 49=\frac{2}{3}$
- $\log_2\frac{1}{32}=\log_2-\log_2 32=0-5=-5$
- $\log_{10} 0{,}01=\log_{10}\frac{1}{100}=-2$
- $\log_5 25^3=3\log_5 25=3\cdot 2=6$

Ejercicio 3. *Convierte las expresiones algebraicas en logarítmicas y las logarítmicas en algebraicas:*

- $\ln A=\dfrac{3\ln a+\ln b}{2}$
- $B=\left(\dfrac{k^2}{10}\right)^3$

Solución:

$$\begin{aligned}
\ln A=\frac{3\ln a+\ln b}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 2\ln A=3\ln a+\ln b\\
&\Longrightarrow \quad \ln A^2=\ln(a^3b)\\
&\Longrightarrow \quad A^2=a^3b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B=\left(\frac{k^2}{10}\right)^3 \quad \Longrightarrow \quad \log B&=\log\left(\frac{k^2}{10}\right)^3\\
&=3\log\frac{k^2}{10}\\
&=3\left(\log k^2-\log 10\right)\\
&=6\log k-3
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Sin efectuar la división del polinomio $P(x)=3x^4+2x^2-ax+5$ entre el binomio $Q(x)=x+2$, calcula el valor de a para que el resto sea 1.*

Solución:

Por el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x=-2$ debe ser 1. Entonces:

$$3\cdot(-2)^4+2\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+5=1 \quad\Longrightarrow\quad 48+8+2a+5-1=0 \quad\Longrightarrow\quad 60+2a=0 \quad\Longrightarrow\quad a=-30$$

Ejercicio 5. *Desarrolla las siguientes expresiones.*

1. $(2x + y)(2x - y) + y(3x + y)$
2. $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$

Solución:

- $(2x + y)(2x - y) + y(3x + y) = 4x^2 - y^2 - 3xy + y^2 = 4x^2 - 3xy$
- $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 - 12x + 9) = 24x$

Ejercicio 6. *Factoriza los siguientes polinomios.*

- $P(x) = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$
- $Q(x) = 2x^4 - 2x$

Solución:

- En primer lugar sacamos factor común:

  $$P(x) = 3x(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

  Buscamos raíces enteras del polinomio de tercer grado:

  $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

  y tenemos una nueva factorización:

  $$P(x) = 3x(x - 1)(x^2 - x - 2)$$

  Las raíces del polinomio de segundo grado son $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ así que finalmente:

  $$P(x) = 3x(x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

- Sacando factor común:

  $$Q(x) = 2x^4 - 2x = 2x(x^3 - 1)$$

  Dividiendo por $x - 1$:

  $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

  Con lo que obtenemos:

  $$Q(x) = 2x(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

  No se puede seguir factorizando porque el polinomio de segundo grado es primo.

Ejercicio 7. *Resolver las siguientes ecuaciones:*

- $\dfrac{4(x+1)}{8} + \dfrac{x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{x+4}{2}$
- $2x^4 - 40x^2 + 128 = 0$

Solución:

Resolvemos la primera ecuación:

$$\frac{4(x+1)}{8}+\frac{x(x+1)}{2}=\frac{3}{8}+\frac{x+4}{2}$$
$$\frac{8\cdot 4(x+1)}{8}+\frac{8\cdot x(x+1)}{2}=\frac{8\cdot 3}{8}+\frac{8\cdot(x+4)}{2}$$
$$4(x+1)+4x(x+1)=3+4(x+4)$$
$$\cancel{4x}+4+4x^2+4x=3+\cancel{4x}+16$$
$$4x^2+4x-15=0$$
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{8}=\frac{-4\pm 16}{8}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

y la segunda:

$$2x^4-40x^2+128=0$$
$$x^4-20x^2+64=0$$
$$x^2=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{2}=\frac{20\pm 12}{2}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x^2=16\\ x^2=4\end{cases}$$

La ecuación tiene como soluciones $x_1=-4$, $x_2=4$, $x_3=-2$ y $x_4=2$.

5. Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 1. *Resolver las ecuaciones:*

- $\diamond\ \dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x-2)}{4}=\dfrac{x(3x-1)}{8}$
- $\diamond\ \dfrac{4(x+1)}{8}-\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{3}{8}-\dfrac{x(x+1)}{2}$

Solución:

La primera ecuación:

$$\begin{aligned}
&\frac{x(x-3)}{2}+\frac{x(x-2)}{4}=\frac{x(3x-1)}{8}\\
&\frac{8x(x-3)}{2}+\frac{8x(x-2)}{4}=\frac{8x(3x-1)}{8}\\
&4x(x-3)+2x(x-2)=x(3x-1)\\
&4x^2-12x+2x^2-4x=3x^2-x\\
&3x^2-15x=0\\
&3x(x-5)=0 \quad\Longrightarrow\quad x_1=0,\quad x_2=5
\end{aligned}$$

La segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
&\frac{4(x+1)}{8}-\frac{x+4}{2}=\frac{3}{8}-\frac{x(x+1)}{2}\\
&\frac{8\cdot 4(x+1)}{8}-\frac{8(x+4)}{2}=\frac{8\cdot 3}{8}-\frac{8x(x+1)}{2}\\
&4(x+1)-4(x+4)=3-4x(x+1)\\
&\cancel{4x}+4-\cancel{4x}-16=3-4x^2-4x\\
&4x^2+4x-15=0\\
&x=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{8}=\frac{-4\pm 16}{8} \quad\Longrightarrow\quad x_1=-\frac{5}{2}\,,\quad x_2=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Resolver:*

- $\diamond\ \sqrt{2x+8}+\sqrt{x}=2$
- $\diamond\ \ln x^3-\ln x=\ln(2x+15)$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+8}+\sqrt{x}=2\\
&\sqrt{2x+8}=2-\sqrt{x}\\
&(\sqrt{2x+8})^2=(2-\sqrt{x})^2\\
&2x+8=4-4\sqrt{x}+x\\
&x+4=-4\sqrt{x}\\
&(x+4)^2=(-4\sqrt{x})^2\\
&x^2+8x+16=16x\\
&x^2-8x+16=0 \quad\Longrightarrow\quad x=4 \qquad \text{(Se comprueba que la solución no es válida).}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ln x^3-\ln x=\ln(2x+15)\\
&\ln\frac{x^3}{x}=\ln(2x+15)\\
&x^2=2x+15\\
&x^2-2x-15=0 \quad\Longrightarrow\quad x_1=-3 \quad x_2=5 \qquad (x=-3 \text{ no es una solución válida}).
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Resolver*

- ◇ $2x^4 - 40x^2 + 128 = 0$
- ◇ $4^{x-2} + 4^{x-1} + 4^x = 42$

Solución:

$$2x^4 - 40x^2 + 128 = 0$$
$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$
$$x2 = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -4\ ,\ x_2 = 4 \\ x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -2\ ,\ x_4 = 2 \end{cases}$$

$$4^{x-2} + 4^{x-1} + 4^x = 42$$
$$\frac{4^x}{16} + \frac{4^x}{4} + 4^x = 42$$
$$4^x + 4 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 42 \cdot 16$$
$$21 \cdot 4^x = 42 \cdot 16$$
$$4^x = \frac{42 \cdot 16}{21} = 32 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_4 32 = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 4. *Resolver las siguientes inecuaciones:*

- ◇ $3x + \dfrac{2(x-5)}{3} > \dfrac{x+3}{6} - 3(x-5)$
- ◇ $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

Solución:

$$3x + \frac{2(x-5)}{3} > \frac{x+3}{6} - 3(x-5)$$
$$18x + 4(x-5) > x + 3 - 18(x-5)$$
$$18x + 4x - 20 > x + 3 - 18x + 90$$
$$22x + 17x > 93 + 20$$
$$39x > 113$$
$$x > \frac{113}{39} \qquad \text{o bien } x \in \left(\frac{113}{39}, \infty\right)$$

Para resolver $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ calculamos las raíces del polinomio que resultan ser $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. El signo del polinomio para los distintos valores de x es:

+	0	−	0	+
	3		4	

Así pues, la solución de la inecuación es $x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$.

Ejercicio 5. *Resolver las inecuaciones:*

- ◇ $\dfrac{x+1}{x-3} < 0$
- ◇ $\dfrac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+4} \geq 0$

Solución:

◇ La raíz del numerador es $x=-1$ y la raíz del denominador es $x=3$. El signo de la fracción es:

	-1		3	
$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

La solución es $x \in (-1, 3)$.

◇ Las raíces del numerador son $x=-1$ y $x=2$. Las raíces del denominador son $x=-1$ y $x=2$ (doble). Puesto que el numerador y el denominador tienen raíces comunes, podemos simplificar la fracción:

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+4} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} \qquad (x \neq -1)$$

El signo de la fracción es:

	-1		2	
$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

La solución es $x \in (2, \infty)$.

6. Trigonometría

Ejercicio 1. *Calcular los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos mide* 46 *y* 37 *cm.*

Solución:

Puesto que conocemos los catetos, los ángulos se calculan mediante la tangente:

$$\operatorname{tg} B = \frac{46}{37} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg}\frac{46}{37} = 51^{\circ}11'19''$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{37}{46} \quad \Longrightarrow \quad C = \operatorname{artg}\frac{37}{46} = 38^{\circ}48'41''$$

Ejercicio 2. *Resolver el triángulo* $B = 106^{o}$, $a = 186$ *cm,* $c = 79$ *cm.*

Solución:

Puesto que conocemos dos lados y el ángulo comprendido, lo resolveremos por el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 186^2 + 79^2 - 2\cdot 186\cdot 79\cos 106^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad b = 221{,}22 \text{ cm}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Longrightarrow \quad A = 53^{\circ}55'23''$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \Longrightarrow \quad C = 20^{\circ}04'37''$$

Ejercicio 3. *Resolver el triángulo* $a = 46$ *cm,* $b = 37$ *cm,* $A = 94^{o}$.

Solución:

Conocemos un lado y el ángulo opuesto. Resolveremos por el teorema del seno:

$$\frac{46}{\operatorname{sen} 94^{\circ}} = \frac{37}{\operatorname{sen} B} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} B = \frac{37\operatorname{sen} 94^{\circ}}{46} \quad \Longrightarrow \quad B = 53^{\circ}21'32''$$

Hemos tenido en cuenta que el ángulo B no puede ser obtuso puesto que ya hay un ángulo obtuso (A) en el triángulo. Una vez calculado (B) el ángulo C se obtiene de:

$$C = 180^{\circ} - A - B = 32^{\circ}38'28''$$

y el lado c de:

$$\frac{46}{\operatorname{sen} 94^{\circ}} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{46\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} 94^{\circ}} = 24{,}87 \text{ cm}$$

Ejercicio 4. *Resolver un triángulo del que se conocen* $a = 24$ *m,* $B = 55^{o}$ *y* $C = 68^{o}$.

Solución:

Calculamos el ángulo A:

$$A = 180^{\circ} - 55 - 68 = 57^{\circ}$$

Ahora, por el teorema del seno:

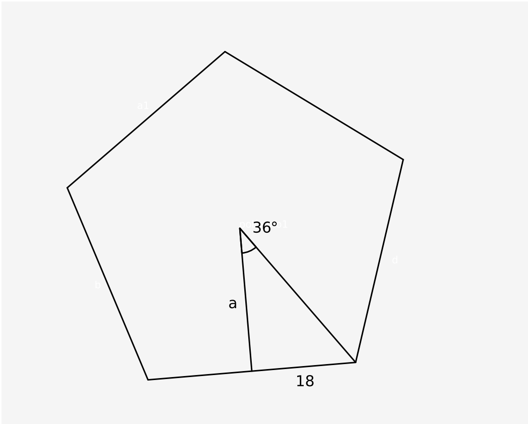
$$\frac{24}{\operatorname{sen} 57^{\circ}} = \frac{b}{\operatorname{sen} 55^{\circ}} = \frac{c}{\operatorname{sen} 68^{\circ}}$$

de donde:

$$b = \frac{24\operatorname{sen} 55^{\circ}}{\operatorname{sen} 57^{\circ}} = 23{,}44 \text{ m}; \qquad c = \frac{24\operatorname{sen} 68^{\circ}}{\operatorname{sen} 57^{\circ}} = 26{,}53 \text{ m}$$

Ejercicio 5. *Calcular el área de un pentágono regular de 36 cm de lado.*

Solución:



Hay que calcular la apotema:

$$a = \frac{18}{\operatorname{tg} 36^o}$$

El perímetro del pentágono es $36 \times 5 = 180$ cm. El área es:

$$S = \frac{180 \cdot a}{2} = 2229{,}74 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 6. *Calcular el área de un triángulo de lados $a = 31$ cm, $b = 42$ cm y $c = 21$ cm.*

Solución:

Calculamos un ángulo por el teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{31^2 + 42^2 - 21^2}{2 \cdot 31 \cdot 42} \quad \Longrightarrow \quad C = 28^o 42' 15''$$

Entonces, el área es:

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = 312{,}67 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 7. *Calcular el área y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados $a = 312$ cm, $b = 426$ cm y $c = 216$ cm.*

Solución:

Puesto que:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Debemos calcular uno de los ángulos del triángulo:

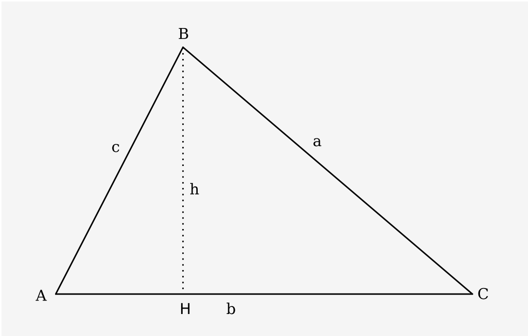
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{426^2 + 216^2 - 312^2}{2 \cdot 426 \cdot 216} \quad \Longrightarrow \quad A = 44^o 42' 35''$$

Por consiguiente:

$$2R = \frac{312}{\operatorname{sen} 44^o 42' 35''} \quad \Longrightarrow \quad R = 221{,}74 \text{ cm}$$

Ejercicio 8. *En el triángulo de lados $a = 312$ cm, $b = 426$ cm y $c = 216$ cm, calcular la altura correspondiente al vértice B.*

Solución:



Podemos calcular la altura como $h = c \operatorname{sen} A$. Puesto que los datos son los mismos que los del problema anterior, ya tenemos calculado el ángulo A. Entonces

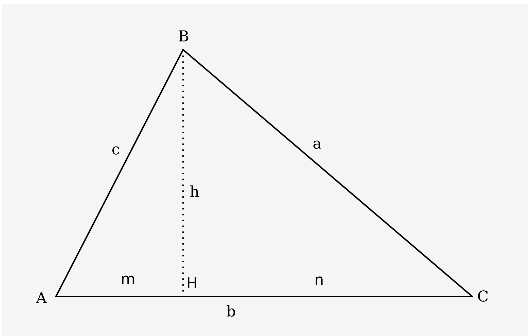
$$h = 216 \operatorname{sen} 44^{\circ}42'35'' = 151{,}96 \text{ cm}$$

Ejercicio 9. *Teorema del coseno. Enunciado y demostración.*

Solución:

En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido.

Demostración:



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BHC (ver figura) resulta:

$$\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + n^2 && \text{puesto que } n = b - m\text{:} \\
&= h^2 + (b-m)^2 \\
&= h^2 + b^2 + m^2 - 2bm && \text{y como } h^2 + m^2 = c^2\text{:} \\
&= b^2 + c^2 - 2bm && \text{puesto que } m = c\cos A\text{:} \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}$$

---

7. Segundo examen de trigonometría

Ejercicio 1. *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide* 56 cm *y uno de los catetos* 35 cm.

Solución:

$$\operatorname{sen} B = \frac{35}{56} \quad \Longrightarrow \quad B = 38^{\circ}40'56''$$

$$\cos C = \frac{35}{56} \quad \Longrightarrow \quad C = 51^{\circ}19'4''$$

Ejercicio 2. *En un triángulo* $b = 34$ cm, $c = 76$ cm *y* $A = 59^{o}46'$. *Calcular el lado* a *y el área del triángulo.*

Solución: Calculamos el lado a por el teorema del coseno:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} = 65,80 \text{ cm}$$

El área es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = 1116{,}26 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 3. *En el triángulo de lados* $a = 17$ cm, $b = 31$ cm *y* $c = 40$ cm, *calcular el ángulo* C *y la altura correspondiente al vértice* A.

Solución:

El ángulo C se calcula por el teorema del coseno:

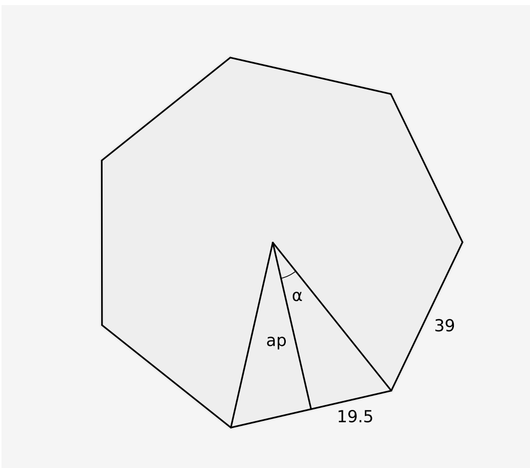
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \Longrightarrow \quad C = 109^{\circ}23'40''$$

La altura correspondiente al vértice A es, o bien $b \operatorname{sen} C$ o bien $c \operatorname{sen} B$ (ver en los apuntes el teorema del seno). Entonces:

$$h = b \operatorname{sen} C = 29{,}24 \text{ cm}$$

Ejercicio 4. *Calcular el área de un heptágono regular de* 39 cm *de lado.*

Solución:



De la figura se deduce que el ángulo α mide:

$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{14}$$

y la apotema ap:

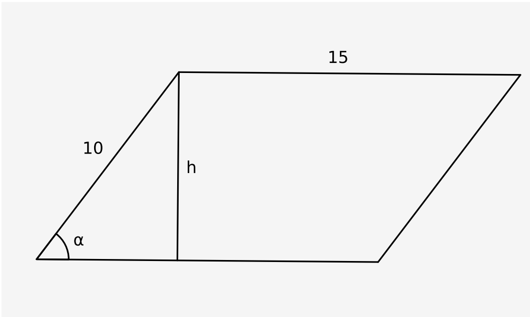
$$ap = \frac{39/2}{\operatorname{tg} \frac{360^{\circ}}{14}} \simeq 40{,}49 \text{ cm}$$

El área es el perímetro por la apotema dividido entre 2:

$$S = \frac{7 \cdot 39 \cdot ap}{2} = 5527{,}18 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 5. *Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden* 10 *y* 15 cm*, respectivamente, si uno de sus ángulos mide* 35^o*.*

Solución:



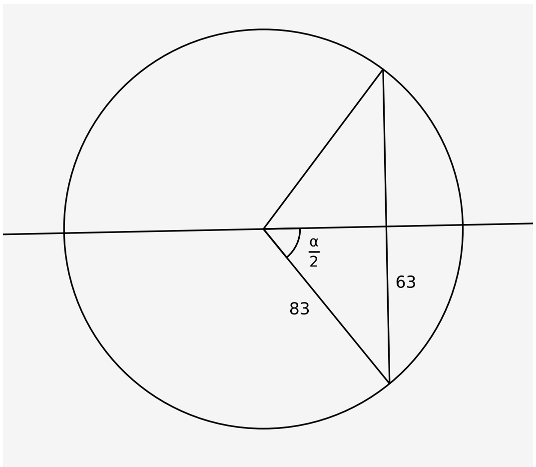
El área del paralelogramo es igual a la base por la altura. La base mide 15 cm, y la altura:

$$h = 10 \operatorname{sen} 35^{\circ}$$

Con estos datos el área es 86,04 cm^2.

Ejercicio 6. *En una circunferencia de radio* 87 cm *una cuerda mide* 126 cm*. Calcular el área del segmento circular limitado por esa cuerda.*

Solución:



El ángulo α mide

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{63}{87}\qquad\Longrightarrow\qquad\alpha\simeq 92{,}79^{\text{o}}$$

El área del segmento es:

$$S=\frac{1}{2}r^2(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)$$

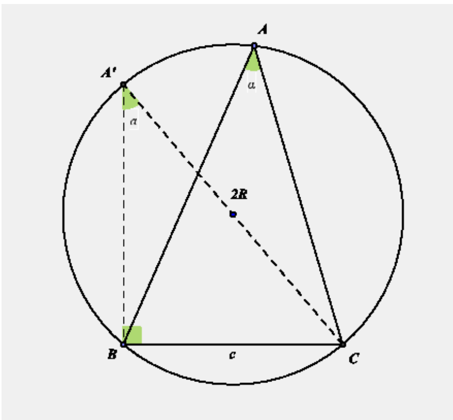
donde φ es el ángulo en radianes. Sustituyendo se obtiene $S=2349{,}25\ \text{cm}^2$.

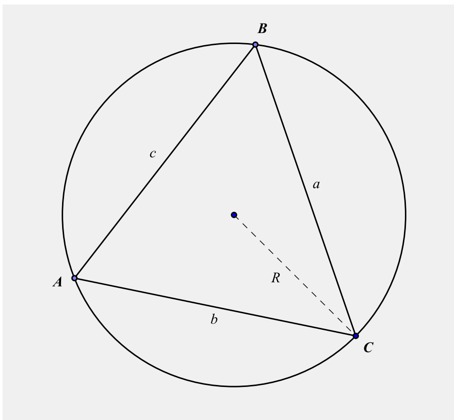
Ejercicio 7. *Seno del ángulo inscrito. Teorema del seno.*

Solución:

Teorema 1 (Teorema del seno) *Las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$





Puede demostrarse el teorema del seno a partir de la siguiente propiedad de los ángulos inscritos: el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la longitud de la cuerda dividida por el diámetro.

En efecto, al ángulo inscrito en el punto A (ver figura) le corresponde una cuerda BC de longitud l. Por un extremo de esa cuerda trazamos el diámetro BA' y el segmento $A'C$. El ángulo A' es igual que A por estar inscritos en el mismo arco. Además el triángulo $A'BC$ es rectángulo. De aquí:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{l}{2r}$$

Consideremos ahora un triángulo cualquiera ABC (ver la misma figura). Dibujemos la circunferencia circunscrita al triángulo y supongamos que R es el radio de esa circunferencia. Por la propiedad anterior:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}A&=\frac{a}{2R}\\ \operatorname{sen}B&=\frac{b}{2R}\\ \operatorname{sen}C&=\frac{c}{2R}\end{aligned}\right.\qquad\Longrightarrow\qquad 2R=\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Para poder aplicar el teorema del seno se necesita conocer al menos un ángulo y el lado opuesto.

---

8. Sucesiones

Ejercicio 1. *Límite de una sucesión. Límite infinito.*

Solución:

Diremos que la sucesión a_n tiene por límite l y escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

cuando cualquier entorno de centro l y radio ε (por pequeño que sea) contenga un número infinito de términos de la sucesión y fuera queden un número finito de ellos (figura 1).

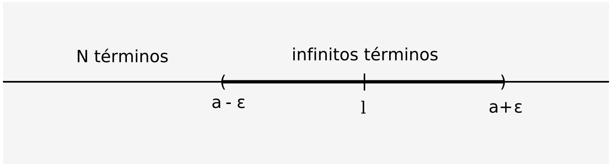


Figura 1: Límite de una sucesión

También puede decirse que, dado cualquier número ε, se cumple que, a partir de un término a_N todos los siguientes cumplen que $|a_n - l| < \varepsilon$.

Cuando los términos de la sucesión se hacen muy grandes, es decir, cuando dado cualquier número M, los términos de la sucesión acaban siendo mayores que M, se dice que la sucesión tiende a **infinito** o que el límite de la sucesión es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

De forma más precisa, diremos que el límite de la sucesión a_n es infinito, si dado cualquier número M (tan grande como queramos) hay infinitos términos de la sucesión mayores que M y un número finito de ellos que son menores que M (figura 2).

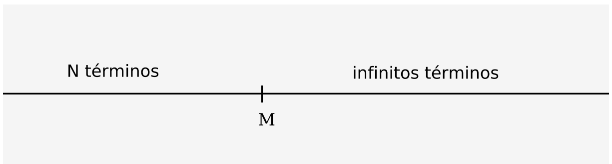


Figura 2: Límite infinito

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3n - n^2)$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n - 5}$

Solución:

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3n - n^2) = \lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3} = \infty$

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2+n}{n+1}\right)$

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{3n^2}\right)^{-n}$

◇ Es una indeterminación $\infty-\infty$. Hacemos la resta:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2+n}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)-(n^2+n)(n-1)}{n^2-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-n^3+n}{n^2-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{3n^2}\right)^{-n} = 0^{-\infty} = \frac{1}{0^\infty} = \frac{1}{0} = \infty$

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites:

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+3}{5n-1}\right)^{2n}$

Solución:

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\infty} = 0$

◇ Haciendo la división se obtiene de cociente 1 y de resto 4.

$$\begin{array}{rrr|l} & 5n & +\ 3 & 5n-1 \\ \cline{4-4} - & 5n & +\ 1 & 1 \\ \cline{1-3} & & 4 & \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+3}{5n-1}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{5n-1}\right)^{2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{5n}\right)^{2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n}{4}}\right)^{\frac{5n}{4}\frac{4}{5}2}\\ &= e^{\frac{8}{5}}\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

◇ Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n+1}\right)^{4n+3}$

◇ Explica a partir de la definición por qué la sucesión $a_n=(-1)^n$ no tiene límite.

Solución:

- $\diamond$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2n+1}\right)^{4n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2n}\right)^{4n} = e^{-6}$

- $\diamond$ El límite no puede ser ni $+1$ ni -1 porque cualquier entorno de estos números de radio menor que 1, deja fuera un número infinito de términos de la sucesión.

9. Funciones

Ejercicio 1. *Calcular el dominio de definición de la función* $y = \dfrac{x^3 - 7x + 2}{x^2 - 4}$.

Solución:

Esta función existe para todos los valores de la variable, excepto para los que anulan el denominador:

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

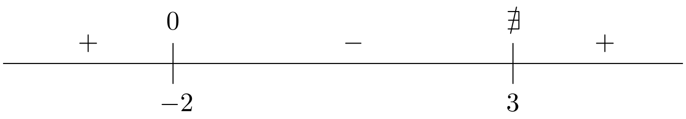
Ejercicio 2. *Calcular el dominio de definición de la función* $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$.

Solución:

Puesto que no existe la raíz cuadrada de números negativos, el radicando debe ser positivo o cero. El dominio de la función es la solución de la inecuación:

$$\frac{x+2}{x-3} \geq 0$$

La raíz del numerador es $x = -2$ y la del denominador es $x = 3$. El signo de la fracción se expresa en el siguiente esquema:



de modo que el dominio es:

$$\text{Dominio} = (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$$

Ejercicio 3. *Representar gráficamente* $y = e^x$ *e* $y = 1 + e^{x-3}$.

Solución:

La gráfica de la segunda función se obtiene desplazando la gráfica de la primera 3 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba:

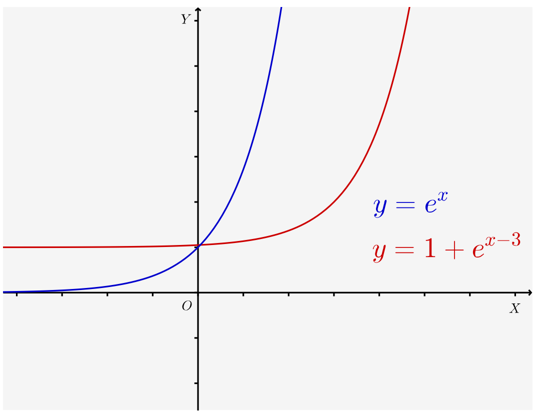


Figura 3: Ejercicio 3

Ejercicio 4. *Representar gráficamente la función* $y = 4 + 3x - x^2$.

Solución:

Se trata de una función cuadrática y, por consiguiente, su gráfica es una parábola.

Calculamos su vértice:

$$x_0 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}\ ; \qquad y_0 = 4 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

La intersección con el eje OY es:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, 4)$$

y las intersecciones con el eje OX:

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A_1(-1, 0)\ , \quad A_2(4, 0)$$

Con estos datos, la gráfica es la siguiente:

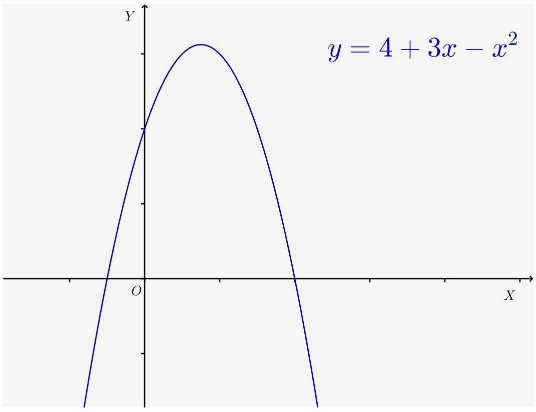


Figura 4: Ejercicio 4

Ejercicio 5. *Representar gráficamente* $y = \dfrac{x+5}{1-x}$.

Solución:

Se trata de una función de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una hipérbola. Calculamos las asíntotas. La asíntota vertical es la recta $x = 1$ (valor que anula el denominador) y su asíntota horizontal $y = -1$ (límite cuando x tiende a infinito).

Las intersecciones con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+5}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, 5)$$

y con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+5}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, -5)$$

La gráfica se muestra en la figura 5.

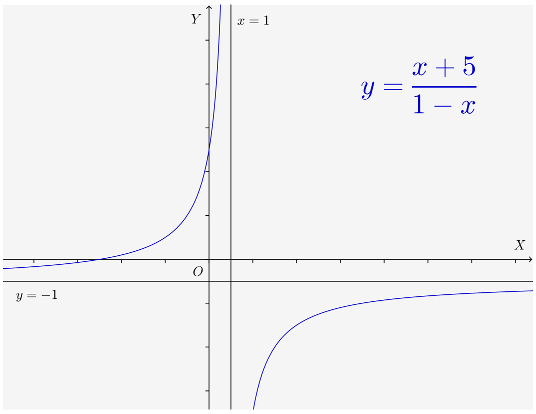


Figura 5: Ejercicio 5

Ejercicio 6. *Calcular lo siguientes límites:*

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4}$.

Solución:

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^3} = 0$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+1}{x+2} = \dfrac{9}{4}$

Ejercicio 7. *Calcular lo siguientes límites:*

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2+2}{x+3}\right)$.

Solución:

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{3x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{2x} = e^{-2}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2+2}{x+3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(x+3)-(x^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2}{x^2} = 4$

Ejercicio 8. *Estudiar si la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

Solución:

Calculamos los límites laterales para ver si coinciden o no:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} x = -1\\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} 1-x^2 = 0\\
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} 1-x^2 = -3\\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} -3 = -3
\end{aligned}$$

La función es discontinua en $x=-1$ y continua en $x=2$.

Ejercicio 9. *Distintos tipos de discontinuidad de una función. Definirlos y poner un ejemplo de cada tipo.*

Solución:

- Discontinuidad evitable. Existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función. Por ejemplo:

  $$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

  en $x=0$.

- Salto finito. Existen los límites laterales pero no coinciden. Por ejemplo, la función del ejercicio 8 en $x=-1$.

- Infinito. El límite de la función es infinito. Por ejemplo la función del ejercicio 5 en $x=1$.

Ejercicio 10. *Dibujar la gráfica de una función que tenga exactamente una asíntota horizontal, un máximo y dos puntos de inflexión.*

Solución:

Por ejemplo:

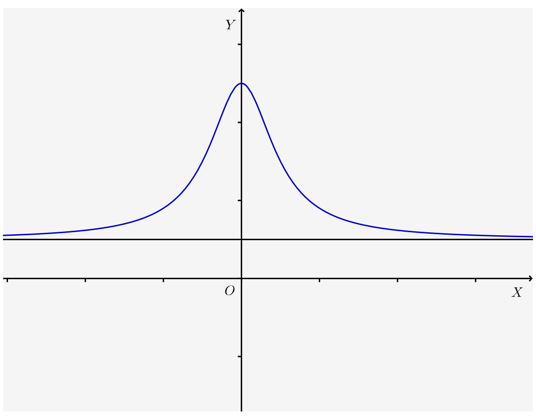


Figura 6: Ejercicio 10

---

10. Estadística

Ejercicio. *En una encuesta sobre tráfico se ha preguntado a* 1000 *conductores sobre el número de multas recibidas. Se dispone de la siguiente información:*

Nº de conductores		280	150	200	110	80
Nº de multas	0	1	2	3	4	5

Hacer la tabla de frecuencias con los datos necesarios para calcular:

- ⋄ *La mediana.*
- ⋄ *Los cuartiles y el rango intercuartílico.*
- ⋄ *La moda.*
- ⋄ *La media.*
- ⋄ *La desviación típica.*

Solución:

Construimos la tabla con las frecuencias, frecuencias acumuladas, productos de las frecuencias por los datos y productos de las frecuencias por los cuadrados de los datos. Se calcula la frecuencia que falta teniendo en cuenta que la suma de las frecuencias ha de ser igual a 1000.

x_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	180	180	0	0
1	280	460	280	280
2	150	610	300	600
3	200	810	600	1800
4	110	920	440	1760
5	80	1000	400	2000
Total	1000		2020	6440

Con estos datos tenemos:

- ⋄ La mediana es $Q_2 = 2$.
- ⋄ El primer cuartil es $Q_1 = 1$ y el tercer cuartil es $Q_3 = 3$. El rango intercuartílico es $Q_3 - Q_1 = 2$.
- ⋄ La moda es 1.
- ⋄ La media es:

$$\bar{x} = \frac{2020}{1000} = 2{,}020$$

- ⋄ La varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{6440}{1000} - \bar{x}^2 = 2,3596$$

y la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{2,3596} = 1,5361$$

11. Combinatoria y estadística

Ejercicio 1. *Una variable estadística toma los valores que aparecen en la siguiente tabla con sus frecuencias correspondientes:*

Valor	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	200	180	230	140	80	120	50

Hacer la tabla de frecuencias acumuladas, sumas y sumas de cuadrados para:

- ⋄ *Calcular la mediana y los cuartiles.*
- ⋄ *Calcular la media y la desviación típica.*

Solución:

x_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	200	200	0	0
1	180	380	180	180
2	230	610	460	920
3	140	750	420	1280
4	80	830	320	1280
5	120	950	600	3000
6	50	1000	300	1800
Total	1000		2280	8440

A partir de estos datos tenemos:

- ⋄ Puesto que hay 1000 datos, el primer cuartil es el valor intermedio entre el que ocupa el lugar 250 y 251, la mediana entre el 500 y 501 y el tercero entre el 750 y 751. A partir de la tabla de frecuencias acumuladas resulta que:

$$Q_1 = 1 \qquad Q_2 = 2\ ; \qquad Q_3 = 3{,}5$$

- ⋄ La media es:

$$\bar{x} = \frac{2280}{1000} = 2{,}28$$

La varianza es

$$\sigma^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{8440}{1000} - 2{,}28^2 = 3{,}2416$$

de modo que la desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{3{,}2416} = 1{,}8004$$

Ejercicio 2. *Escribe el desarrollo de* $(2-x)^6$.

Solución:

Podemos obtener los coeficientes a partir del triángulo de Tartaglia:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
(2-x)^6 &= 2^6 - 6\cdot 2^5 x + 15\cdot 2^4 x^2 - 20\cdot 2^3 x^3 + 15\cdot 2^2 x^4 - 6\cdot 2x^5 + x^6 \\
&= 64 - 192x + 240x^2 - 160x^3 + 60x^4 - 12x^5 + x^6
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3. *Calcula el coeficiente de* x^9 *en* $(x+3)^{14}$.

Solución:

El término del binomio de Newton que buscamos es:

$$\binom{14}{5} x^9 \cdot 3^5 = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3^5 x^9 = 486486x^9$$

Ejercicio 4. *¿De cuántas maneras pueden repartirse simultáneamente 4 cartas de una baraja de 40 cartas? ¿Cuántas no contienen ases?*

Solución:

- ◇ Hay 40 cartas y hay que formar grupos de 4. Son por tanto:

$$C_{40,4} = 4\cdot\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 91390$$

- ◇ Si los grupos no tienen ases, sólo hay 36 cartas para elegir:

$$C_{36,4} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 58905$$

Ejercicio 5. *¿De cuántas maneras pueden agruparse 5 cartas de una baraja de modo que haya un solo as? ¿Y dos ases?*

Solución:

- ◇ El as puede elegirse de 4 maneras y las otras cuatro cartas de $C_{36,4}$:

$$4\cdot C_{36,4} = 4\cdot\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 235620$$

- ◇ Si hay dos ases, pueden elegirse de $C_{4,2}$ maneras. Hay $C_{36,3}$ modos de elegir las otras tres cartas. Entonces:

$$C_{4,2}\cdot C_{36,3} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{36\cdot 35\cdot 34}{3\cdot 2\cdot 1} = 42840$$

Ejercicio 6. *¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra* ROGERFEDERER*?*

Solución:

Son permutaciones con repetición de las 12 letras. Hay dos letras repetidas 4 veces:

$$PR_{12,4,4} = \frac{12!}{4!\,4!} = 831600$$

Ejercicio 7. *Un examen consta de 12 preguntas de las que hay que contestar a 8 de ellas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden escogerse las preguntas? ¿De cuántas si las tres primeras son obligatorias?*

Solución:

- ◇ Hay que elegir 8 preguntas de 12 sin que importe el orden:

  $$C_{12,8} = C_{12,4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

- ◇ Si las tres primeras son obligatorias, hay que escoger 5 de las 9 restantes:

  $$C_{9,5} = C_{9,4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Ejercicio 8. *Se lanza una moneda 8 veces y se van anotando los resultados. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse? ¿En cuántos de ellos hay exactamente 3 caras?*

Solución:

- ◇ Hay dos elementos (cara y cruz) y (repitiéndolos) se deben formar agrupaciones ordenadas de 8 elementos. Son, por consiguiente, variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 8 en 8:

  $$VR_{2,8} = 2^8 = 256$$

- ◇ En este caso hay 3 caras y 5 cruces. Podemos pensarlo de dos maneras: como permutaciones con repetición de 8 elementos en los que hay 3 y 5 repetidos:

  $$PR_{8,3,5} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

  También puede pensarse que, entre las 8 posiciones de la agrupación hay que escoger 3 para las caras. Esto puede hacerse de $C_{8,3} = 56$ maneras.

Ejercicio 9. *¿Cuántos números de tres cifras podemos formar con las cifras impares? ¿Cuántos son múltiplos de tres?*

Solución:

- ◇ La cantidad de números es:

  $$VR_{5,3} = 5^3 = 125$$

- ◇ Con las cifras impares, pueden formarse las siguientes combinaciones con repetición:

  $$\begin{array}{llllllllll} \{111\}, & \{113\}, & \{115\}, & \{117\}, & \{119\}, & \{133\}, & \{135\}, & \{137\}, & \{139\}, & \{155\}, \\ \{157\}, & \{159\}, & \{177\}, & \{179\}, & \{199\}, & \{333\}, & \{335\}, & \{337\}, & \{339\}, & \{355\}, \\ \{357\}, & \{359\}, & \{377\}, & \{379\}, & \{399\}, & \{555\}, & \{557\}, & \{559\}, & \{577\}, & \{579\}, \\ \{599\}, & \{777\}, & \{779\}, & \{799\}, & \{999\} & & & & & \end{array}$$

Las que tienen como suma un múltiplo de 3 son las siguientes:

$$\{111\}, \quad \{117\}, \quad \{135\}, \quad \{159\}, \quad \{177\}, \quad \{333\}, \quad \{339\},$$
$$\{357\}, \quad \{399\}, \quad \{555\}, \quad \{579\}, \quad \{777\}, \quad \{999\}$$

A partir de cada combinación con tres números distintos, pueden formarse 6 números, si hay dos números distintos pueden formarse 3 y si los tres son iguales sólo puede formarse uno. Por consiguiente, el número de múltiplos de 3 es:

$$4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 41$$

12. Estadística, combinatoria y probabilidad

Ejercicio 1. *Tiramos un moneda 7 veces. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse? ¿En cuántos de ellos hay exactamente dos caras?*

Solución:

Son las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 7 en 7:

$$VR_{2,7} = 2^7 = 128$$

Los que tienen dos caras podemos obtenerlos de dos maneras equivalentes: si hay 2 caras hay 5 cruces y los podemos calcular como las permutaciones con repetición de 7 elementos en los que hay dos (las caras) y 5 (las cruces) repetidos:

$$PR_{7,2,5} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21$$

También lo podemos calcular como combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2, es decir, pensando en el número de modos en que podemos elegir las 2 posiciones en que se encuentran las caras entre las 7 posibles:

$$C_{7,2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Ejercicio 2. *Se reparten 5 cartas de una baraja española. Calcular la probabilidad de que no haya figuras.*

Solución:

Las 5 cartas pueden repartirse de $\binom{40}{5}$ maneras diferentes. Los casos favorables son los $\binom{28}{5}$ modos en que pueden repartirse las 28 cartas que no son figuras. La probabilidad es:

$$p = \frac{\binom{28}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} = 0{,}1494$$

Ejercicio 3. *Una urna contiene 6 bolas rojas y 3 azules. Si se extraen 2 bolas al azar y sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?*

Solución:

Por la regla del producto, la probabilidad de extraer 2 bolas rojas es:

$$p(R_1R_2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{72}$$

y la de extraer 2 bolas azules:

$$p(A_1A_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72}$$

Puesto que son sucesos incompatibles, para calcular la probabilidad de extraer dos bolas del mismo color, sumamos las dos probabilidades anteriores:

$$p(R_1R_2 \cup A_1A_2) = \frac{30}{72} + \frac{6}{72} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 4. *Desarrollar la potencia* $(1-3x)^5$.

Solución:

$$\begin{aligned}(1-3x)^5 &= 1^5 - 5 \cdot 1^4 \cdot (3x) + 10 \cdot 1^3 \cdot (3x)^2 - 10 \cdot 1^2 \cdot (3x)^3 + 5 \cdot 1 \cdot (3x)^4 - (3x)^5 \\ &= 1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5\end{aligned}$$

Ejercicio 5. *La probabilidad de que un jugador enceste un tiro libre es del* 60 %. *Calcular la probabilidad de que enceste alguno de tres lanzamientos.*

Solución:

La probabilidad de no encestar ninguno de los 3 lanzamientos es:

$$p(\text{“no encesta ninguno”}) = \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{8}{125}$$

La probabilidad de que enceste algún lanzamiento será:

$$p(\text{“encesta alguno”}) = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}$$

Ejercicio 6. *Calcular la probabilidad de obtener suma 10 en el lanzamiento de tres dados.*

Solución:

En total el numero de resultados posibles es 216. Los que suman 10 están formados por los siguientes números:

$$\{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{2,2,6\}, \{2,3,5\}, \{2,4,4\}, \{3,3,4\}$$

A partir de las combinaciones en las que hay tres números diferentes pueden formarse 6 resultados. Por ejemplo, a partir de la primera:

$$\{1,3,6\} \longrightarrow 136, 163, 316, 361, 613, 631$$

A partir de las combinaciones con dos números iguales se pueden formar 3 resultados. Por ejemplo:

$$\{2,2,6\} \longrightarrow 226, 262, 622$$

En total tenemos entonces $6+6+3+6+3+3 = 27$ resultados favorables. La probabilidad que nos piden es:

$$p = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

Ejercicio 7. *Se reparten 4 cartas de una baraja española. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellas sean bastos.*

Solución:

Las cuatro cartas pueden repartirse de $\binom{40}{4}$ maneras.

Si dos de las cartas son bastos, pueden elegirse de $\binom{10}{2}$ maneras y las dos que no son bastos de $\binom{30}{2}$ maneras. En total, el número de casos favorables es $\binom{10}{2} \cdot \binom{30}{2}$. La probabilidad que nos piden es:

$$p = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{4}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2} \cdot \frac{30\cdot 29}{2}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = 0{,}2142$$

Ejercicio 8. *Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras diferentes pueden formarse? ¿Cuántos de ellos son pares?*

Solución:

Pueden formarse:

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

De ellos hay una quinta parte, es decir, 12 que terminan en 2 y otros 12 que terminan en 4. En total hay entre ellos 24 números pares.

Ejercicio 9. *Si* $p(A) = \frac{3}{4}$, $p(B) = \frac{1}{5}$ *y* $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$, *calcular* $p(A \cap B)$ *y* $p(A|B)$.

Solución:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

La probabilidad de A condicionada a B es:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

Notemos que $p(A|B) = p(A)$, es decir, los sucesos A y B son independientes.

Ejercicio 10. *Una variable estadística toma los siguientes valores*

$$3, 5, 2, 4, 3, 6, 5, 7, 7, 1, 2, 5, 3, 6, 1, 2, 2, 5, 4, 1$$

Calcular la media y la desviación típica.

Solución:

Construyamos la tabla de frecuencias:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	3	3	3
2	4	8	16
3	3	9	27
4	2	8	32
5	4	20	100
6	2	12	72
7	2	14	98
total	20	74	348

La media es:

$$\bar{x} = \frac{74}{20} = 3{,}7$$

y la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{348}{20} - 3{,}7^2 = 3{,}71$$

La desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{3{,}71} = 1{,}93$$
