Matemáticas 4º ESO.
Exámenes

Curso 2020-2021

1. Logaritmos

Ejercicio 1. Calcular

$(a)\ 3^{-2}$ $(b)\ 8^{\frac{1}{3}}$ $(c)\ 243^{\frac{3}{5}}$ $(d)\ 8^{-\frac{2}{3}}$

Solución:

$(a)\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$(b)\ 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$(c)\ 243^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{243^3} = 3^3 = 27$

$(d)\ 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular

$(a)\ \left(6+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(b)\ \left(1+\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(c)\ \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $(d)\ \left(2+\frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$

Solución:

$(a)\ \left(6+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

$(b)\ \left(1+\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

$(c)\ \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$(d)\ \left(2+\frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{13}{9}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Racionalizar los denominadores:

$(a)\ \frac{3}{\sqrt{7}}$ $(b)\ \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $(c)\ \frac{3}{1+\sqrt{7}}$ $(d)\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

Solución:

$(a)\ \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$(b)\ \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$(c)\ \frac{3}{1+\sqrt{7}} = \frac{3(1-\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})} = \frac{3(1-\sqrt{7})}{1-7} = -\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$(d)\ \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3+1})} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Simplificar:

$$3\sqrt{8}+5\sqrt{72}+8\sqrt{50}-4\sqrt{18}+4\sqrt{2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
3\sqrt{8}+5\sqrt{72}+8\sqrt{50}-4\sqrt{18}+4\sqrt{2}&\\
&=3\sqrt{4\cdot 2}+5\sqrt{36\cdot 2}+8\sqrt{25\cdot 2}-4\sqrt{9\cdot 2}+4\sqrt{2}\\
&=6\sqrt{2}+30\sqrt{2}+40\cdot\sqrt{2}-12\sqrt{2}+4\sqrt{2}\\
&=68\sqrt{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Simplificar:

$$\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}&=\sqrt[3]{\left(13+2\sqrt{11}\right)\left(13-2\sqrt{11}\right)}\\
&=\sqrt[3]{169-44}\\
&=\sqrt[3]{125}\\
&=5
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2 16$ (b) $\log_5 125$ (c) $\log_5 1$ (d) $\log_3 \dfrac{1}{3}$

Solución:

(a) $\log_2 16=4$
(b) $\log_5 125=3$
(c) $\log_5 1=0$
(d) $\log_3 \dfrac{1}{3}=-1$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ (b) $\log_2 \dfrac{1}{8}$ (c) $\log_5(-5)$ (d) $\log_5 \sqrt{5}$

Solución:

(a) $\log_3 \dfrac{1}{27}=\log_3 1-\log_3 27=0-3=-3$
(b) $\log_2 \dfrac{1}{8}=\log_2 1-\log_2 8=0-3=-3$
(c) $\log_5(-5)$ no existe
(d) $\log_5 \sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\log_5 5=\dfrac{1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los siguientes logaritmos:

$(a)\ \log_9 \sqrt{3}$ $\qquad (b)\ \log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad (c)\ \log_9 \sqrt[3]{81}$ $\qquad (d)\ \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$

Solución:

$(a)\ \log_9 \sqrt{3} = \dfrac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_3 3}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

$(b)\ \log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 1 - \log_5 \sqrt{5} = 0 - \dfrac{1}{2}\log_5 5 = -\dfrac{1}{2}$

$(c)\ \log_9 \sqrt[3]{81} = \frac{1}{3}\log_8 81 = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}$

$(d)\ \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} = \frac{\log_2 \sqrt{8}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\log_2 8}{-1} = -\frac{3}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ calcular $\log 0{,}125$.

Solución:

$$\log 0{,}125 = \log \frac{125}{1000} = \log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 8 = 0 - \log 2^3 = -3\log 2 = -3 \cdot 0,3010 = -0{,}9030$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Despejar x en

$(a)\ 3^{2x} = 5$ $\qquad (b)\ \log_2 x = 4$

Solución:

$(a)\ 3^{2x} = 5; \qquad 2x = \log_3 5; \qquad x = \dfrac{\log_3 5}{2}$

$(b)\ \log_2 x = 4; \qquad x = 2^4 = 16$

♠♠♠♠

2. Progresiones. Polinomios (1)

Ejercicio 1. En una progresión aritmética $a_{40} = 59$ y $a_{27} = 33$. calcular la suma de los 50 primeros términos.

Solución:

Puesto que

$$a_{40} = a_{27} + d(40-27)\ ; \qquad 59 = 33 + 13d\ ; \qquad 26 = 13d\ ; \qquad d = 2$$

Entonces:

$$a_1 = a_{27} + 2(1-27)\ ; \qquad a_1 = 33 - 2\cdot 26 = 33 - 52 = -19$$
$$a_{50} = a_{27} + 2(50-27)\ ; \qquad a_{50} = 33 + 2\cdot 23 = 33 + 46 = 79$$

La suma de los 50 primeros términos es:

$$S_{50} = \frac{(-19+79)\cdot 50}{2} = \frac{60\cdot 50}{2} = 1500$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 6.

Solución:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

$$4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} 4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 5) &= 4x^3 - 4x + 12 - 2(-2x^3 + 5x^2 - 6x^2 + 15x) \\ &= 4x^3 - 4x + 12 - 2(-2x^3 - x^2 + 15x) \\ &= 4x^3 - 4x + 12 + 4x^3 + 2x^2 - 30x \\ &= 8x^3 + 2x^2 - 34x + 12 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

(a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$

(b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 3x^3 & + & 2x^2 & + & x & - & 5 & 3x^2 + 2 \\ \cline{8-8} -3x^3 & & & - & 2x & & & x + \frac{2}{3} \\ \hline & & 2x^2 & - & x & - & 5 & \\ & - & 2x^2 & & & - & \frac{4}{3} & \\ \cline{2-7} & & & - & x & - & \frac{19}{3} & \end{array}$$

El cociente de la división es $x + \frac{2}{3}$ y el resto $-x - \frac{19}{3}$

La segunda división puede hacerse por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & & -6 & 12 & -20 & 42 \\ \hline & 3 & -6 & 10 & -21 & 46 \end{array}$$

El cociente es $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$ y el resto es 46.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcula el valor de k para que el polinomio:

(a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

(b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ tenga de resto 6 al dividir por $x + 2$.

Solución:

(a) Si el polinomio es divisible por $x - 2$, 2 es una raíz del polinomio y su valor numérico para $x = 2$ es cero:

$$2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad 8 + 4 - 4 + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -8$$

(*b*) Por el teorema del resto, el valor numérico para $x = -2$ debe ser 6:

$$(-2)^3 - 2(-2)^2 + k(-2) + 4 = 6 \quad\Longrightarrow\quad -8 - 8 - 2k + 4 = 6 \quad\Longrightarrow\quad k = -9$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

(*a*) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

(*b*) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

Solución:

(*a*) Buscamos una raíz entera entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

y tenemos una primera factorización:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x-1)(2x^2 + 7x + 6)$$

Las raíces del polinomio de segundo grado son:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

de modo que:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x-1)(2x^2 + 7x + 6) = (x-1)2(x - \frac{3}{2})(x+2) = (x-1)(2x-3)(x+2)$$

Las raíces de este polinomio son 1, $\frac{3}{2}$ y -2.

(*b*) Como en el caso anterior buscamos una raíz entera entre los divisores de 2:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

y obtenemos:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

Buscamos una raíz del polinomio de tercer grado:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

y tenemos la factorización:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$

y no se puede seguir factorizando porque el polinomio $x^2 + 1$ es primo.
Las raíces de este segundo polinomio son 1 y 2.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la ecuación:

$$\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$$

Solución:

Es una ecuación de primer grado. Quitamos denominadores y resolvemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{x+1}{2}=x-\frac{2x+3}{4}\\
&2(x+1)=4x-(2x+3)\\
&2x+2=2x+3\\
&0x=1
\end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación:

$$\frac{x(x-3)}{2}-\frac{(3x-2)^2}{8}=1-\frac{x(x+2)}{4}$$

Solución:

Es una ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}
&\frac{x(x-3)}{2}-\frac{(3x-2)^2}{8}=1-\frac{x(x+2)}{4}\\
&4x(x-3)-(3x-2)^2=8-2x(x+2)\\
&4x^2-12x-9x^2+12x-4=8-2x^2-4x\\
&-5x^2-4=8-2x^2-4x\\
&-3x^2+4x-12=0\\
&3x^2-4x+12=0
\end{aligned}$$

Esta ecuación tampoco tiene solución porque su discriminante es menor que cero.

♠♠♠♠

3. Progresiones. Polinomios (2)

Ejercicio 1. Efectuar la siguiente división de polinomios:

$$20x^4-18x^3+35x^2-12x-7\ :\ 4x^2-2x+7$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 20x^4 & - & 18x^3 & + & 35x^2 & - & 12x & - & 7 & 4x^2-2x+7\\ \cline{11-11}
- & 20x^4 & + & 10x^3 & - & 35x^2 & & & & & 5x^2-2x-1\\ \cline{1-6}
 & & - & 8x^3 & + & 0x^2 & - & 12x & & & \\
 & & & 8x^3 & - & 4x^2 & + & 14x & & & \\ \cline{3-10}
 & & & & - & 4x^2 & + & 2x & - & 7 & \\
 & & & & & 4x^2 & - & 2x & + & 7 & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & & 0 & & &
\end{array}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Factorizar el polinomio $6x^3+11x^2-24x-9$

Solución:

Buscamos una raíz entre los divisores de 9:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 11 & -24 & -9 \\ -3 & & -18 & 21 & 9 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & 0 \end{array}$$

De esta forma tenemos una primera factorización:

$$6x^3 + 11x^2 - 24x - 9 = (x+3)(6x^2 - 7x - 3)$$

Las otras raíces las podemos calcular por la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

Así obtenemos dos nuevas raíces $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{3}$.

Completamos la factorización:

$$\begin{aligned} 6x^3 + 11x^2 - 24x - 9 &= (x+3)(6x^2 - 7x - 3) \\ &= (x+3)6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &= (x+3)(2x-3)(3x+1) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Factorizar los polinomios de segundo grado

(*a*) $15x^2 - 13x + 2$
(*b*) $4x^2 - 1$

Solución:

(*a*) Las raíces del polinomio son:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{30} = \frac{13 \pm 7}{30} \; ; \qquad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{5}$$

La factorización es:

$$15x^2 - 13x + 2 = 15\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (3x-2)(5x-1)$$

(*b*) Es una diferencia de cuadrados:

$$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Determinar m con la condición de que el polinomio $2x^4 + 5x^3 + mx^2 + 4$, sea divisible por $x + 3$.

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x + 3$, su valor numérico para $x = -3$ debe ser cero:

$$2\,(-3)^4 + 5(-3)^3 + m(-3)^2 + 4 = 0 \; ; \qquad 162 - 135 + 9m + 4 = 0 \; ; \qquad m = -\frac{31}{9}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Encontrar el valor de a sabiendo que al dividir $x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4x + 7$ por $x + 2$, da de resto 7.

Solución:

El valor numérico del polinomio para $x=-2$ debe ser 7:

$$(-2)^4-3(-2)^3+(-2)^2a-4(-2)+7=7\ ;\qquad 16+24+4a+8=0\ ;\qquad a=-12$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver la ecuación:

$$\frac{4(x+1)}{8}-\frac{x+4}{2}=\frac{3}{8}-\frac{x(x+1)}{2}$$

Solución:

Quitamos denominadores multiplicando por 8:

$$\frac{8\cdot 4(x+1)}{8}-\frac{8\cdot(x+4)}{2}=\frac{8\cdot 3}{8}-\frac{8\cdot x(x+1)}{2}\ ;\qquad 4(x+1)-4\cdot(x+4)=3-4x(x+1)$$

Quitamos paréntesis:

$$4x+4-4x-16=3-4x^2-4x$$

Agrupamos términos:

$$4x^2+4x-15=0\ ;\qquad x=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{8}=\frac{-4\pm 16}{8}$$

Las soluciones son $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. La suma de los seis términos de una progresión aritmética es 36. y el producto de los términos extremos, 11. Hallar el primer término y la diferencia.

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{cases}\frac{(a_1+a_6)6}{2}=36\\ a_1\cdot a_6=11\end{cases}$$

De aquí resulta $a_1=1$ y $a_6=11$ (o $a_1=11$ y $a_6=1$). La diferencia es 2 o -2.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 1 y su producto 216.

Solución:

Sean los números $\frac{x}{r}$, x y rx. Entonces:

$$\begin{cases}\frac{x}{r}+x+rx=1\\ \frac{x}{r}\cdot x\cdot rx=216\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\frac{x}{r}+x+rx=1\\ x^3=216\end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta $x=6$. De la primera:

$$\frac{6}{r}+6+6r=1\ ;\qquad \frac{6}{r}+5+6r=0\ ;\qquad 6r^2+5r+6=0$$

La ecuación no tiene solución.

♠♠♠♠

4. Primer trimestre

Ejercicio 1. *Racionalizar los denominadores y calcular:*

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\
&\qquad = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\
&\qquad = \frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} \\
&\qquad = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} - \frac{3(3-\sqrt{6})}{3} - \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \\
&\qquad = 2-\sqrt{2}-(3-\sqrt{6})-(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\
&\qquad = -1
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes logaritmos:*

(a) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}$ (b) $\log_3 \frac{3}{\sqrt{3}}$ (c) $\log_2 8\sqrt{2}$ (d) $\log_4 32$

Solución:

(a) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \log_2 1 - \log_2 \sqrt{8} = -\dfrac{1}{2}\log_2 8 = -\dfrac{3}{2}$

(b) $\log_3 \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

(d) $\log_4 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{5}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. *Obtener el cociente y el resto de:*

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 5) \div (x^2 - x + 3)$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^4 & +\,0x^3 & -\,3x^2 & +\,x & -\,5 & & x^2-x+3 \\ \cline{7-7}
-\,2x^4 & +\,2x^3 & -\,6x^2 & & & & 2x^2+2x-7 \\ \hline
 & 2x^3 & -\,9x^2 & +\,x & & & \\
 & -\,2x^3 & +\,2x^2 & -\,6x & & & \\ \hline
 & & -\,7x^2 & -\,5x & -\,5 & & \\
 & & 7x^2 & -\,7x & +\,21 & & \\ \hline
 & & & -\,12x & +\,16 & &
\end{array}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. *Simplificar la fracción*

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Solución:

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. *Calcular a para que el polinomio $2x^3 - ax^2 + 3x + a$ sea divisible por $x + 1$.*

Solución:

Si el polinomio es divisible por $x + 1$, tiene una raíz $x = -1$. Entonces:

$$2(-1)^3 - a(-1)^2 + 3(-1) + a = 0\ ; \qquad -2 - a - 3 + a = 0\ ; \qquad 0 \cdot a = 5$$

El problema no tiene solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{5-x}{2} - \frac{x+3}{6} = \frac{9-x}{4} - \frac{6x+2}{16}$$

Solución:

$$\frac{48(5-x)}{2} - \frac{48(x+3)}{6} = \frac{48(9-x)}{4} - \frac{48(6x+2)}{16}$$

$$24(5-x) - 8(x+3) = 12(9-x) - 3(6x+2)$$

$$120 - 24x - 8x - 24 = 108 - 12x - 18x - 6$$

$$96 - 32x = 102 - 30x$$

$$-2x = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = -3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{1}{6}$$

Solución:

$$\frac{(2x-1)^2}{4}-\frac{(3x+1)^2}{9}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{36(2x-1)^2}{4}-\frac{36(3x+1)^2}{9}=\frac{36\cdot 1}{6}$$

$$9(2x-1)^2-4(3x+1)^2=6$$

$$9(4x^2-4x+1)-4(9x^2+6x+1)-6=0$$

$$36x^2-36x+9-36x^2-24x-4-6=0$$

$$-60x-1=0\quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{1}{60}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. *Resolver la ecuación:*

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$$

Solución:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$$

$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-1}+1$$

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2$$

$$3x+1=2x-1+1+2\sqrt{2x-1}$$

$$x+1=2\sqrt{2x-1}$$

$$x^2+2x+1=4(2x-1)$$

$$x^2-6x+5=0$$

Las soluciones de la ecuación son $x=1$ y $x=5$. Ambas son válidas.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ xy=2\end{cases}$$

Solución:

Despejamos una incógnita en la segunda ecuación

$$y=\frac{2}{x}$$

y sustituimos en la primera

$$x^2+\frac{4}{x^2}=5\;;\qquad x^4+4=5x^2\;;\qquad x^4-5x^2+4=0$$

Las soluciones de la ecuación bicuadrada son $y^2=1$ e $y^2=4$, o sea, $y=-1$, $y=1$, $y=-2$, $y=2$. Calculamos los correspondientes valores de x y resultan las soluciones:

$$(-2,-1),\quad(2,1),\quad(-1,-2),\quad(1,2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{1-x}{x^2-3x-4} \geq 0$$

Solución:

El numerador tiene una raíz $x = 1$ y el denominador dos raíces $x = -1$ y $x = 4$. Todas las raíces son simples.

El esquema de signos es el siguiente

	$\nexists$		0		$\nexists$	
$+$		$-$		$+$		$-$
	-1		1		4	

La solución de la inecuación es $x \in (-\infty, -1) \cup [1, 4)$.

♠♠♠♠