Matemáticas 4ºESO.
Exámenes

Curso 2018-2019

1. Radicales. Logaritmos

Ejercicio 1. Simplificar:

(a) $\sqrt[5]{128a^{11}b^8c^6}$

(b) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}}}}$

Solución:

(a) $\sqrt[5]{128a^{11}b^8c^6} = \sqrt[5]{32 \cdot 4 \cdot a^{10} \cdot a \cdot b^5 \cdot b^3 \cdot c^5 \cdot c} = 2a^2bc\sqrt[5]{4ab^3c}$

(b) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dfrac{2}{5}}}} = \sqrt[8]{\dfrac{2}{5}}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular:

$$3\sqrt{8} - 2\sqrt{72} + 5\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + \sqrt{98}$$

Solución:

$$\begin{aligned} &3\sqrt{8} - 2\sqrt{72} + 5\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + \sqrt{98} \\ &\quad = 3\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{36 \cdot 2} + 5\sqrt{9 \cdot 2} - 2\sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{49 \cdot 2} \\ &\quad = 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 7\sqrt{2} \\ &\quad = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Racionalizar:

(a) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Solución:

(a) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

(b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1} = 3 - 2\sqrt{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular

(a) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (b) $\left(2 + \dfrac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$ (c) $(125)^{-\frac{2}{3}}$ (d) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

Solución:

(a) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$

(*b*) $\left(2+\frac{7}{81}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{169}{81}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{169}{81}}=\frac{13}{9}$

(*c*) $(125)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{125^2}}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

(*d*) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular:

$$\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}} &= \sqrt[3]{(13+2\sqrt{11})(13-2\sqrt{11})}\\ &= \sqrt[3]{13^2-4\cdot 11}\\ &= \sqrt[3]{169-44}\\ &= 5\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular los siguientes logaritmos:

(*a*) $\log_2 32$ (*b*) $\log_7\frac{1}{49}$ (*c*) $\log_2\sqrt{2}$ (*d*) $\log_5(-5)$

Solución:

(*a*) $\log_2 32=5$

(*b*) $\log_7\frac{1}{49}=\log_7 1-\log_7 49=0-2=-2$

(*c*) $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

(*d*) $\log_5(-5)$ no existe

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los siguientes logaritmos:

(*a*) $\log_2\frac{\sqrt{8}}{16}$ (*b*) $\log_3\frac{1}{27}$ (*c*) $\log_{27}81$ (*d*) $\log_5\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

Solución:

(*a*) $\log_2\frac{\sqrt{8}}{16}=\log_2\sqrt{8}-\log_2 16=\frac{1}{2}\log_2 8-4=\frac{3}{2}-4=-\frac{5}{2}$

(*b*) $\log_3\frac{1}{27}=\log_3 1-\log_3 27=0-3=-3$

(*c*) $\log_{27}81=\log_{27}3^4=4\log_{27}3=4\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

(*d*) $\log_5\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\log_5 1-\log_5\sqrt[3]{5}=0-\frac{1}{3}\log_5 5=-\frac{1}{3}$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Define logaritmo en base a del número N y demuestra la propiedad del logaritmo del producto.

Solución:

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

También puede definirse de la siguiente forma. Sea a un número positivo, se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{ll} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_a(MN) = \log_a\left(a^x a^y\right) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a M + \log_a N$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Comprobar que el número $\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ es entero calculando previamente su cuadrado.

Solución:

Llamemos x al número:

$$x = \sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

y lo elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6+4\sqrt{2}}\sqrt{6-4\sqrt{2}} \\ &= 12 + 2\sqrt{36 - 16\cdot 2} \\ &= 12 + 2\sqrt{4} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Por tanto x es positivo y su cuadrado es 16. Por consiguiente x es entero e igual a 4.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Despejar x en;

(a) $\log_3 x = \dfrac{1}{2}$

(b) $2^{4-x^2} = 1$

Solución:

(a) $\log_3 x = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

(b) $2^{4-x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 4 - x^2 = \log_2 1 = 0\ ; \qquad x^2 = 4\ ; \qquad x = \pm 2$

♠♠♠♠

2. Logaritmos. Polinomios.

Ejercicio 1. Enunciar y demostrar el teorema del factor.

Solución:

Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, este polinomio es divisible por $x-a$.

Al dividir $P(x)$ por $x-a$ obtenemos un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Sustituyendo x por a y teniendo en cuenta que $P(a)=0$ por ser a raíz:

$$0 = P(a) = (a-a)Q(a) + R \quad \Longrightarrow \quad R = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(x) = (x-a)Q(x)$$

y, por consiguiente, $P(x)$ es divisible por $x-a$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Dividir:

$$(6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12) \div (2x^2 + 3x - 2)$$

Solución:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
 6x^4 & - & 5x^3 & - & 39x^2 & - & 4x & + & 12 & 2x^2+3x-2 \\ \cline{10-10}
 -\ 6x^4 & - & 9x^3 & + & 6x^2 & & & & & 3x^2-7x-6 \\ \cline{1-5}
 & - & 14x^3 & - & 33x^2 & - & 4x & & & \\
 & & 14x^3 & + & 21x^2 & - & 14x & & & \\ \cline{3-9}
 & & & - & 12x^2 & - & 18x & + & 12 & \\
 & & & & 12x^2 & + & 18x & - & 12 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Simplificar:

(a) $2x^3 - 3(x+1)(x-1)$

(b) $2x^3 - (2x+1)^2$

Solución:

(a) $2x^3 - 3(x+1)(x-1) = 2x^3 - 3(x^2-1) = 2x^3 - 3x^2 + 3$

(b) $2x^3 - (2x+1)^2 = 2x^3 - (4x^2+4x+4) = 2x^3 - 4x^2 - 4x - 1$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Descomponer en factores

$$6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$$

Solución:

Claramente el polinomio tiene la raíz $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & & -6 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Por consiguiente, tenemos una primera factorización:

$$6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x+1)(6x^2 - x - 2)$$

Las otras dos raíces las obtenemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

Las raíces son $x = \frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Ya podemos escribir el polinomio factorizado:

$$6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x+1)(6x^2 - x - 2) = (x+1)\,6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x+1)(3x-2)(2x+1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Descomponer en factores:

$$6x^4 + 13x^3 + 6x^2 - 3x - 2$$

Solución:

Claramente el polinomio tiene la raíz $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 13 & 6 & -3 & -2 \\ -1 & & -6 & -7 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 7 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Obtenemos una primera factorización:

$$6x^4 + 13x^3 + 6x^2 - 3x - 2 = (x+1)(6x^3 + 7x^2 - x - 2)$$

El nuevo polinomio tiene también la raíz $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -1 & -2 \\ -1 & & -6 & -1 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

de modo que

$$6x^4 + 13x^3 + 6x^2 - 3x - 2 = (x+1)^2(6x^2 + x - 2)$$

Obtenemos ahora las raíces del polinomio de segundo grado:

$$x = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

Las raíces son $x = \frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$.

El resultado es:

$$6x^4 + 13x^3 + 6x^2 - 3x - 2 = (x+1)^2\,6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x+1)^2\,(2x-1)\,(3x+2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Sea el polinomio $x^3 + mx^2 - 2x + 4$, calcular m sabiendo que es divisible por $x + 2$.

Solución:

Si es divisible por $x + 2$ su valor numérico para $x = -2$ es cero:

$$(-2)^3 + m(-2)^2 - 2(-2) + 4 = 0\ ; \qquad -8 + 4m + 4 + 4 = 0\ ; \qquad m = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (b) $\log_3 9\sqrt{3}$

Solución:

(a) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \log_2 1 - \log_2 \sqrt[3]{2} = -\frac{1}{3}\log_2 2 = -\frac{1}{3}$

(b) $\log_3 9\sqrt{3} = \log_3 9 + \log_3 \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_{25} \frac{1}{5}$ (b) $\log_2 \sqrt[3]{64}$

Solución:

(a) $\log_{25} \dfrac{1}{5} = \dfrac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 25} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $\log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3}\log_2 64 = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ calcular $\log 5$ y $\log 0{,}125$.

Solución:

$$\begin{aligned} \log 5 &= \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990 \\ \log 0{,}125 &= \log \frac{125}{1000} = \log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 8 = -\log 2^3 = -3\log 2 = -3\cdot 0{,}3010 = -0{,}9030 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Despejar x en

(a) $2^{x^3+1} = 10$ (b) $\log_2 x^3 = 6$

Solución:

(a) $2^{x^3+1} = 10$; $x^3 + 1 = \ln 10$; $x^3 = \ln 10 - 1$; $x = \sqrt[3]{\ln 10 - 1}$

(b) $\log_2 x^3 = 6$; $x^3 = 2^6$; $x = \sqrt[3]{64} = 4$

♠♠♠♠

3. Ecuaciones

Resolver las siguientes ecuaciones:

Ejercicio 1.

$$3(x-1)-\frac{2x-3}{4}+1+\frac{5}{6}=\frac{4x-1}{3}+x+\frac{1}{12}$$

Solución:

Quitamos denominadores multiplicando los dos miembros por 12:

$36(x-1)-3(2x-3)+12+10=4(4x-1)+12x+1$

$30x-5=28x-3$

$2x=2$

$x=1$

♠♠♠♠

Ejercicio 2.

$$17x^2+4x-21=0$$

Solución:

Se puede resolver mediante la fórmula pero claramente se ve que $x=1$ es una solución. Entonces la otra debe ser $x=-\frac{21}{17}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x+1}$$

Solución:

Quitamos denominadores multiplicando los dos miembros por $6x(x+1)$:

$6(x+1)-x(x+1)=6x$

$6x+6-x^2-x=6x$

$x^2+x-6=0$

Las soluciones son $x=2$ (válida) y $x=-3$ (válida).

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

$$\sqrt{40-x^2}+4=x$$

Solución:

$\sqrt{40-x^2}=x-4$

$40-x^2=x^2-8x+16$

$2x^2-8x-24=0$

$x^2-4x-12=0$

Las soluciones son $x=-2$ (no válida) y $x=6$ (válida).

♠♠♠♠

Ejercicio 5.

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$$

Solución:

Descomponemos en factores. Claramente $x = -1$ es una raíz:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ -1 & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

La ecuación puede escribirse:

$$(x+1)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

Las soluciones son $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6.

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$$

Solución:

Es una ecuación bicuadrada. Despejando x^2:

$$x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{18} = \frac{-5 \pm 13}{18}$$

Así obtenemos $x^2 = -1$ (no válida) y $x^2 = \frac{4}{9}$ y de aquí $x = -\frac{2}{3}$ y $x = \frac{2}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

$$5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$$

Solución:

$$5^3 \cdot 5^x - \frac{5^x}{5^1} - 3120 = 0$$

$$5^4 \cdot 5^x - 5^x - 3120 \cdot 5 = 0$$

$$624 \cdot 5^x = 3120 \cdot 5$$

$$5^x = \frac{3120 \cdot 5}{624} = 25$$

$$x = \log_5 25 = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8.

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$$

Solución:

$$3^x + \frac{3}{3^x} = 4$$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado para la incógnita 3^x se obtiene:

$$3^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 1 = 0$$
$$3^x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 3 = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9.

$$x + \sqrt{7 - 3x} = 1$$

Solución:

$$\sqrt{7-3x} = 1 - x$$
$$7 - 3x = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

Las soluciones son $x = -3$ (válida) y $x = 2$ (no válida).

♠♠♠♠

Ejercicio 10.

$$\log(x^2 + 3x + 2) - \log(x^2 - 1) = \log 2$$

Solución:

$$\log(x^2 + 3x + 2) = \log 2 + \log(x^2 - 1)$$
$$\log(x^2 + 3x + 2) = \log 2(x^2 - 1)$$
$$(x^2 + 3x + 2) = 2(x^2 - 1)$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Las soluciones son $x = 4$ (válida) y $x = -1$ (no válida).

♠♠♠♠

4. Logaritmos. Polinomios. Ecuaciones

Ejercicio . Calcular los siguientes logaritmos:

(a) $\log_2 \sqrt{32}$ (b) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\log_{125} 5$ (d) $\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}}$

Solución:

(a) $\log_2 \sqrt{32} = \frac{1}{2} \log_2 32 = \frac{5}{2}$
(b) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 1 - \frac{1}{2} \log_3 3 = -\frac{1}{2}$
(c) $\log_{125} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 125} = \frac{1}{3}$
(d) $\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}} = \log_2 4 - \log_2 \sqrt{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Racionalizar las fracciones

$(a)\ \frac{5}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $(b)\ \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

Solución:

$(a)\ \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$(b)\ \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2(\sqrt{2}+1)$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Efectuar la siguiente división de polinomios:

$$20x^4 - 18x^3 + 35x^2 - 12x - 7 \ : \ 4x^2 - 2x + 7$$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
20x^4 & -\ 18x^3 & +\ 35x^2 & -\ 12x & -\ 7 & & 4x^2-2x+7 \\ \cline{7-7}
-\ 20x^4 & +\ 10x^3 & -\ 35x^2 & & & & 5x^2-2x-1 \\ \cline{1-4}
 & -\ 8x^3 & +\ 0x^2 & -\ 12x & & & \\
 & 8x^3 & -\ 4x^2 & +\ 14x & & & \\ \cline{2-5}
 & & -\ 4x^2 & +\ 2x & -\ 7 & & \\
 & & 4x^2 & -\ 2x & +\ 7 & & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$$

sea divisible por $x - 2$.

Solución:

Según el teorema del factor, el valor numérico del polinomio para $x = 2$ debe ser igual a cero:

$$2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -8$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Factorizar el siguiente polinomio:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

Solución:

El polinomio tiene una raíz $x = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0
\end{array}$$

lo que nos permite una primera factorización:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

Una segunda raíz es $x = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

y obtenemos:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$

El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces. Es irreducible y, por tanto, no se puede seguir factorizando.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Resolver la ecuación:

$$x + \sqrt{7 - 3x} = 1$$

Solución:

Despejamos la raíz y elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{7-3x} = 1 - x$$
$$7 - 3x = 1 - 2x + x^2$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son $x = -3$ y $x = 2$. Solo la primera es solución de la ecuación irracional.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Resolver la ecuación

$$2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$$

Solución:

Llamando $2^x = u$, la ecuación puede escribirse:

$$\frac{u^2}{32} - \frac{3u}{8} + 1 = 0 \ ; \qquad u^2 - 12u + 32 = 0$$

Las soluciones son:

$$u = 2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 8 = 3$$
$$u = 2^x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2 4 = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Resolver la ecuación

$$\log(5-x) - \log(4-x) = \log 2$$

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$\log\frac{5-x}{4-x} = \log 2 \ ; \qquad \frac{5-x}{4-x} = 2 \ ; \qquad 5 - x = 2(4-x)$$

Resolviendo obtenemos $x = 3$. Esta solución es válida en la ecuación logarítmica.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy = -3 \end{cases}$$

Solución:

despejando y en la primera ecuación:

$$y = 5 - x$$

Sustituyendo en la segunda:

$$x^2 - x(5 - x) = -3 \ ; \qquad 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \ ; & y_1 &= 4 \\ x_2 &= \frac{3}{2} \ ; & y_2 &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Podemos escribir las soluciones como $(1, 4)$ y $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Resolver la inecuación:

$$(1 - x^2)(x - 3)^2 \geq 0$$

Solución:

Las raíces son $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$ (doble). El signo del polinomio es:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ - & | & + & | & - & | & - \\ & -1 & & 1 & & 3 & \end{array}$$

La solución es $x \in [-1, 1] \cup \{3\}$.

♠♠♠♠

5. Trigonometría

Ejercicio 1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden $b = 174$ cm y $c = 213$ cm. Calcular los ángulos B y C aproximando a los grados.

Solución:

$$\operatorname{tg} B = \frac{174}{213} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg} \frac{174}{213} \simeq 39^{\text{o}}$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{213}{174} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{artg} \frac{213}{174} \simeq 51^{\text{o}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. En un triángulo rectángulo, el cateto c mide 47 cm y la hipotenusa $a = 65$ cm. Calcular los ángulos B y C aproximando a los minutos.

Solución:

$$\cos B = \frac{47}{65} \quad \Longrightarrow \quad B = \arccos \frac{47}{65} \simeq 43^{\text{o}}41'$$
$$\operatorname{sen} C = \frac{47}{65} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{arsen} \frac{47}{65} \simeq 46^{\text{o}}19'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 315 cm y el ángulo $B = 63^{\text{o}}$. Calcular los catetos b y c aproximando a la tercera cifra significativa.

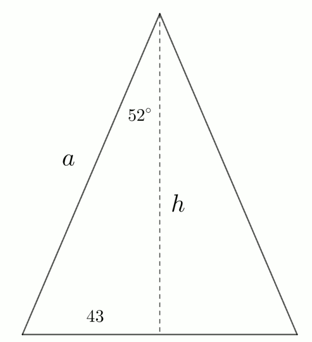
Solución:

$$b = 315 \operatorname{sen} 63^{\text{o}} \simeq 281 \text{ cm}$$
$$c = 315 \cos 63^{\text{o}} \simeq 143 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. En un triángulo isósceles la base mide 86 cm y el ángulo desigual 104^{o}. Calcular los lados iguales y la altura aproximando a la tercera cifra significativa.

Solución:

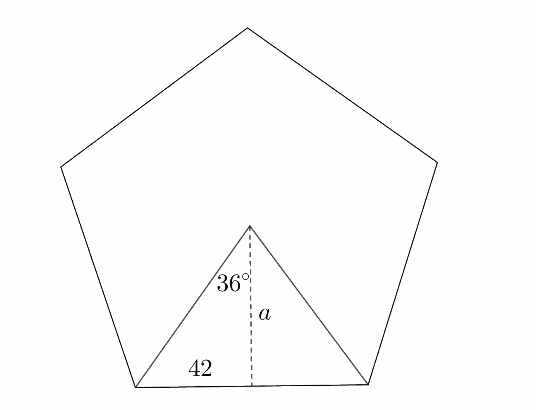


$$a = \frac{43}{\operatorname{sen} 52^{\text{o}}} \simeq 54{,}6 \text{ cm}$$
$$h = 43 \operatorname{cotg} 52^{\text{o}} = \frac{43}{\operatorname{tg} 52} \simeq 33{,}6 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular con tres cifras significativas el área de un pentágono regular de 84 cm de lado.

Solución:



Calcuñlamos primero la apotema:

$$a = 42 \operatorname{cotg} 36^{\text{o}} = \frac{42}{\operatorname{tg} 36^{\text{o}}}$$

y el área:

$$S = \frac{1}{2}\, 5 \cdot 84 \cdot a \simeq 12100 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Un arco de 62° mide 64 cm. Calcular el radio de la circunferencia con tres cifras significativas.

Solución:

$$\varphi = \frac{l}{r} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{l}{\varphi} = \frac{64}{\frac{62\pi}{180}} = \frac{64 \cdot 180}{62\pi} \simeq 59{,}1 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular con tres cifras significativas el área de un sector circular de 56°, sabiendo que el radio mide 67 cm.

Solución:

$$S = \frac{1}{2}\, 67^2 \cdot \frac{56\pi}{180} \simeq 2190 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular el ángulo de un sector circular sabiendo que su superficie es 6540 cm^2 y el radio de la circunferencia mide 75 cm. Expresar el ángulo en grados, minutos y segundos.

Solución:

Despejamos el ángulo:

$$S = \frac{1}{2}\, r^2 \varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{2S}{r^2}$$

Tenemos que expresar el ángulo en grados. Por tanto

$$\varphi = \frac{2 \cdot 6540}{75^2} \cdot \frac{180^{\text{o}}}{\pi} \simeq 133^{\text{o}} 13' 54''$$

♠♠♠♠

6. Trigonometría

Ejercicio 1. Calcular los catetos en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 346 cm y uno de los ángulos 67º.

Solución:

Los catetos se obtienen multiplicando la hipotenusa por el seno y por el coseno del ángulo:

$$b = 346 \operatorname{sen} 67^{\text{o}} \simeq 318 \text{ cm}$$
$$c = 346 \cos 67^{\text{o}} \simeq 135 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 87 cm y la hipotenusa 123 cm.

Solución:

El ángulo opuesto se obtiene mediante el seno:

$$\operatorname{sen} B = \frac{87}{123} \quad \Longrightarrow \quad B = \operatorname{arsen} \frac{87}{123} \simeq 45^{\text{o}} 1'$$

El otro ángulo podemos calcularlo por el coseno o como el complementario del anterior:

$$\cos C = \frac{87}{123} \quad \Longrightarrow \quad C = \operatorname{arcos} \frac{87}{123} \simeq 44^{\text{o}} 59'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular el área de un pentágono regular de 64 cm de lado.

Solución:

Podemos considerar el pentágono compuesto de 5 triángulos isósceles en los que el ángulo desigual mide $\frac{360}{5} = 72^{\text{o}}$.

La altura del triángulo es la apotema del polígono. La calculamos:

$$a = \frac{64}{2} \operatorname{cotg} 36^{\text{o}} = \frac{32}{\operatorname{tg} 36^{\text{o}}}$$

El área del pentágono es:

$$S = \frac{1}{2}\, 5 \cdot 64 \cdot a \simeq 7050 \text{ cm}^2$$

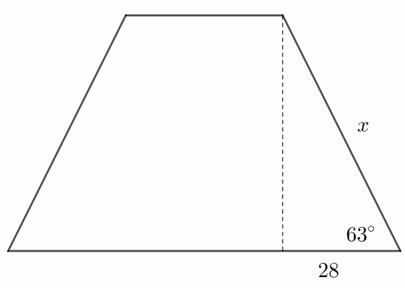
♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los lados iguales de un trapecio isósceles cuyas bases miden 65 y 121 cm y uno de los ángulos 63º.

Solución:

Los lados iguales miden:

$$x = \frac{28}{\cos 63^{\text{o}}} \simeq 61{,}7 \text{ cm}$$



♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden 8, 11 y 14 cm.

Solución:

Cuando se conocen los tres lados, el área del triángulo puede calcularse por la fórmula de Herón. El semiperímetro es:

$$p = \frac{8+11+14}{2} = 16{,}5$$

Entonces:

$$S = \sqrt{16{,}5\,(16{,}5-8)\,(16{,}5-11)\,(16{,}5-14)} \simeq 43{,}9\ \text{cm}^2$$

También puede calcularse un ángulo por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ ; \qquad A = \ \operatorname{arcos} \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

y después calcular el área mediante la fórmula trigonométrica:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = -2$ y x es un ángulo del cuarto cuadrante, calcular $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Solución:

Puesto que $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$:

$$sec^2 x = 1 + (-2)^2 = 5$$

o también:

$$\frac{1}{cos^2 x} = 5\ ; \qquad \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

Como en el cuarto cuadrante el coseno es positivo, debemos tomar la raíz cuadrada positiva:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ; \qquad \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. En un triángulo $a = 34$ cm, $B = 78^\text{o}$ y $C = 46^\text{o}$. Calcular el lado b.

Solución:

El ángulo A mide:

$$A = 180^\text{o} - 78^\text{o} - 46^\text{o} = 56^\text{o}$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}\ ; \qquad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{34 \operatorname{sen} 78^\text{o}}{\operatorname{sen} 56^\text{o}} \simeq 40{,}1\ \text{cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. En otro triángulo $a = 47$ cm, $b = 65$ cm y $c = 41$ cm. Calcular el ángulo B.

Solución:

Por el teorema del coseno:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\ ; \qquad B = \ \operatorname{arcos} \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{47^2+41^2-65^2}{2\cdot 47\cdot 41} \simeq 94^\text{o}59'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Calcular el área de un segmento circular sabiendo que el radio de la circunferencia mide 89 cm y la longitud de la cuerda 110 cm.

Solución:

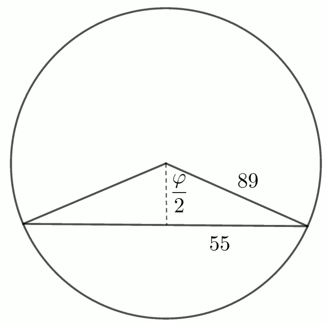
El ángulo es:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{55}{89}\,; \qquad \varphi = 2\ \operatorname{arsen}\frac{55}{89}$$

Entonces:

$$S=\frac{1}{2}\,r^2\varphi-\frac{1}{2}\,r^2\operatorname{sen}\varphi\simeq 1430\ \mathrm{cm}^2$$

♠♠♠♠



Ejercicio 10. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de 36º21′ y 25º17′. Si la distancia entre estos dos puntos es de 36 m, hallar la altura de la torre.

Solución:

De la figura se deduce que:

$$\varphi = 36^{\circ}21' - 25^{\circ}17' = 11^{\circ}4'$$

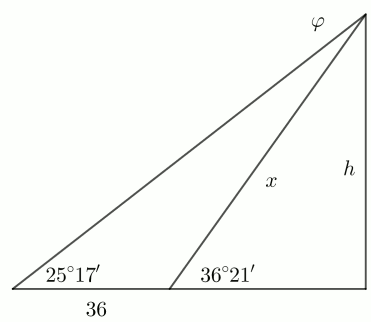
Por el teorema del seno:

$$\frac{36}{\operatorname{sen}11^{\circ}4'}=\frac{x}{\operatorname{sen}25^{\circ}17'}\,; \qquad x\simeq 80{,}1\ \mathrm{m}$$

Y la altura:

$$h = x\operatorname{sen}36^{\circ}21'\simeq 47{,}5\ \mathrm{m}$$

♠♠♠♠



7. Trigonometría. Geometría

Ejercicio 1. Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $A(-1,-2)$ y $(3,-1)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-(-2)}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta en forma punto-pendiente es:

$$y+2 = \frac{1}{4}\,(x+1)$$

y en forma explícita:

$$y = \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{4} - 2 \;; \qquad y = \frac{1}{4}\,x - \frac{7}{4}$$

La ordenada en el origen es $b = -\frac{7}{4}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Conocidos los puntos $A(2,-5)$ y $B(-1,4)$ calcular las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

Solución:

Sea $P(x_1,y_1)$ el primer punto:

$$x_1 = \frac{2\cdot 2+(-1)}{3} = 1$$
$$y_1 = \frac{2\cdot(-5)+4}{3} = -2$$

El primer punto es $P(1,-2)$.

Sea ahora $Q(x_2,y_2)$ el segundo punto:

$$x_2 = \frac{2+2\cdot(-1)}{3} = 0$$
$$y_2 = \frac{-5+2\cdot 4}{3} = 1$$

El segundo punto es $Q(0,1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Sean los puntos $A(-3,1)$, $B(-1,2)$ y $C(1,k)$, calcular el valor de k para que los tres puntos estén alineados.

Solución:

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-3)} = \frac{1}{2}$$

La pendiente de BC es:

$$m_{BC} = \frac{k-2}{1-(-1)} = \frac{k-2}{2}$$

Si los tres puntos están alineados, las dos pendientes deben ser iguales:

$$\frac{1}{2} = \frac{k-2}{2} \;; \qquad 2k-4 = 2 \;; \qquad k = 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular la posición relativa de las rectas $r_1:\ 3x-2y+1=0$, $r_2:\ x-2y+5=0$ y $r_3:\ 2x-4y+1=0$.

Solución:

La segunda y la tercera son paralelas y la primera las corta.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Comprobar que el triángulo de vértices $A(-2,1)$, $B(3,3)$ y $C(1,-2)$ es isósceles.

Solución:

Calculamos las longitudes de los lados:

$$a=d(B,C)=\sqrt{(1-3)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{29}$$
$$b=d(A,C)=\sqrt{(-2-1)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{18}$$
$$c=d(A,B)=\sqrt{(-2-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{29}$$

El triángulo es isósceles puesto que $a=c$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 38 cm.

Solución:

Calculamos el lado del pentágono:

$$\frac{l}{2}=38\operatorname{tg}36^{\text{o}}\ ;\qquad l=2\cdot 38\operatorname{tg}36^{\text{o}}$$

y el perímetro mide:

$$P=5l\simeq 276\text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Si los lados de un triángulo miden $a=43$ cm, $b=61$ cm y $c=54$ cm, ¿cuánto mide el ángulo C?

Solución:

Por el teorema del coseno:

$$\cos C=\frac{43^2+61^2-54^2}{2\cdot 43\cdot 61}\ ;\qquad C=\ \operatorname{arcos}\frac{43^2+61^2-54^2}{2\cdot 43\cdot 61}\simeq 59^{\text{o}}36'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Sabiendo que $\operatorname{sen}x=-\frac{3}{5}$ y que x es un ángulo del cuarto cuadrante, obtener sin calculadora $\cos x$ y $\operatorname{tg}x$.

Solución:

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ y x es del cuarto cuadrante:

$$\cos x=+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

y la tangente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Calcular los ángulos de un trapecio rectángulo cuyas bases mide 48 y 76 cm y su altura 27 cm.

Solución:

En un trapecio rectángulo hay dos ángulos rectos. Los otros dos ángulos son suplementarios. Calculamos uno de ellos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{27}{76 - 48} = \frac{27}{28} \ ; \qquad \varphi \simeq 43^o 58'$$

El otro ángulo es:

$$180^o - \varphi \simeq 136^o 2'$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Calcular el área de un triángulo tal que $A = 56^o$, $B = 85^o$ y el lado $c = 63$ cm.

Solución:

El ángulo C mide:

$$C = 180^o - 56^o - 85^o = 39^o$$

Por el teorema dl seno:

$$\frac{63}{\operatorname{sen} 39^o} = \frac{a}{\operatorname{sen} 56^o} \ ; \qquad a = \frac{63 \operatorname{sen} 56^o}{\operatorname{sen} 39^o}$$

y el área:

$$S = \frac{1}{2}\, ac \operatorname{sen} B \simeq 2600 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

8. Geometría analítica

Ejercicio 1. Escribir la ecuación de la recta $5x + 2y - 10 = 0$ en forma segmentaria.

Solución:

Pasamos el término independiente al segundo miembro y dividiendo por 10:

$$5x + 2y = 10\ ; \qquad \frac{5x}{10} + \frac{2y}{10} = 1\ ; \qquad \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Calcular le ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $A(-2, -2)$ y $B(4, 1)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+2}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En forma punto-pendiente, la recta tiene por ecuación:

$$y + 2 = \frac{1}{2}\,(x + 2)$$

Despejamos y:

$$y = \frac{1}{2}\,x + 1 - 2\ ; \qquad y = \frac{1}{2}\,x - 1$$

La ordenada en el origen es $b = -1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Calcular uno de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales, siendo $A(3, -2)$ y $B(-1, 3)$.

Solución:

Los puntos se obtienen haciendo la media ponderada de las coordenadas de A y B con pesos $2 : 1$ y $1 : 2$. Calculamos el primero de ellos:

$$x = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{3} = \frac{5}{3}\ ; \qquad y = \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3}{3} = -\frac{1}{3}$$

El punto es $P\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular la posición relativa de las rectas $2x - 5y + 11 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y $2x - 3y + 5 = 0$.

Solución:

es evidente que no hay rectas paralelas. Debemos determinar si se cortan en un punto o no. El punto de intersección de las dos primeras rectas es:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 11 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema resulta que el punto de intersección es $P(2, 3)$. Comprobemos si este punto está en la tercera recta:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 5 = 4 - 9 + 5 = 0$$

El punto pertenece también a la tercera recta. Las tres rectas se cortan en un punto.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular la ecuación de la paralela por $P(5,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(-1,-2)$ y $B(1,4)$.

Solución:

La pendiente de la recta que pasa por A y B es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4+2}{1+1} = 3$$

La ecuación de la paralela es:

$$y + 1 = 3\,(x-5)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. En el triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(5,1)$ y $C(4,4)$ calcular la ecuación de la altura correspondiente al vértice C.

Solución:

La pendiente del lado AB es:

$$m = \frac{\Delta y}{\delta x} = \frac{1-3}{5+2} = -\frac{2}{7}$$

Puesto que la altura pasa por $C(4,4)$ la ecuación es:

$$y - 4 = \frac{7}{2}\,(x-4)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular la mediatriz del segmento AB siendo $A(-1,3)$ y $B(4,1)$.

Solución:

– Primer método: El punto medio del segmento AB tiene como coordenadas $P\left(\frac{3}{2},2\right)$. La recta AB tiene pendiente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{4+1} = -\frac{2}{5}$$

La mediatriz tiene pendiente $m' = \frac{5}{2}$ y su ecuación es:

$$y - 2 = \frac{5}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad ; \qquad 2y - 4 = 5x - \frac{15}{2} \; ; \qquad 10x - 4y - 7 = 0$$

– Segundo método: Sea $X(x,y)$ un punto de la mediatriz. Su distancia a A es igual que su distancia a B:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2$$
$$2x + 1 - 6y + 9 = -8x + 16 - 2y + 1$$
$$10x - 4y - 7 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular un punto de la recta $3x - y + 8 = 0$ que se encuentre a la misma distancia de los puntos $A(1,-2)$ y $B(6,3)$.

Solución:

Puesto que se encuentra a la misma distancia de A y B debe estar en la mediatriz de estos dos puntos:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2$$
$$-2x + 1 - 6y + 9 = -8x + 16 - 2y + 1$$
$$10x + 10y - 40 = 0$$
$$x + y - 4 = 0$$

El punto que nos piden es la intersección de la mediatriz con la recta que nos dan:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $P(-1, 5)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Se considera el segmento de extremos $A(-3, 3)$ y $B(5, 1)$. Calcular un punto del segmento AB tal que su distancia a B sea el cuádruple de su distancia a A.

Solución:

Las coordenadas se obtienen haciendo la media ponderada de las coordenadas de A y B con pesos 4 y 1:

$$x = \frac{4 \cdot (-3) + 1 \cdot 5}{5} = -\frac{7}{5}$$
$$y = \frac{4 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{5} = \frac{13}{5}$$

El punto que buscamos es $P\left(-\frac{7}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Calcular la distancia desde el punto $P(2, 4)$ a la recta $3x + 2y - 1 = 0$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$.

- La perpendicular a la recta que nos dan por el punto P tendrá pendiente $m' = \frac{2}{3}$:

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2) \ ; \qquad 3y - 12 = 2x - 4 \ ; \qquad 2x - 3y + 8 = 0$$

- Calculamos la intersección de la recta y la perpendicular:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $Q(-1, 2)$.
- La distancia del punto P a la recta es la distancia entre P y Q:

$$d = \sqrt{(2+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$$

♠♠♠♠

9. Funciones

Ejercicio 1. Representar gráficamente la función

$$y = 4 + 3x - x^2$$

Solución:

El punto de intersección de la parábola con el eje de ordenadas es

$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

que es el punto $B(0, 4)$.

Los puntos de intersección con el eje de abscisas son las soluciones del sistema

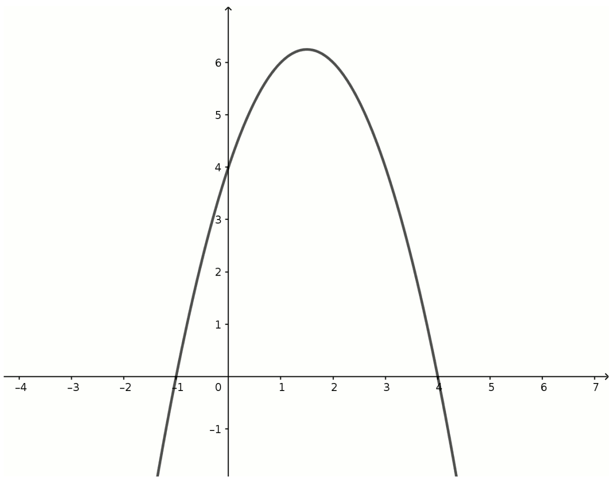
$$\begin{cases} y = 4 + 3x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

que son lao puntos $A_1(-1, 0)$ y $A_2(4, 0)$.

El vértice de la parábola tiene como coordenadas:

$$x_0 = \frac{3}{2}\ ; \qquad y_0 = 4 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

La representación gráfica es la siguiente:



♠♠♠♠

Ejercicio 2. Representar gráficamente

$$y = \frac{x + 2}{1 - x}$$

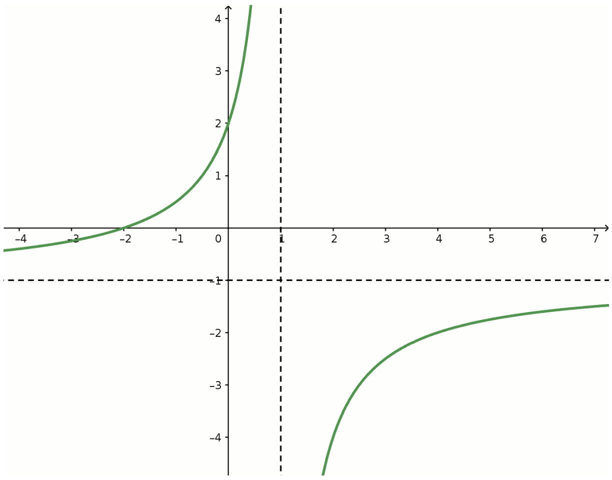
Solución:

Es una función de proporcionalidad inversa.

Las asíntotas son $x = 1$ e $y = -1$.

Los puntos de intersección con los ejes son $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

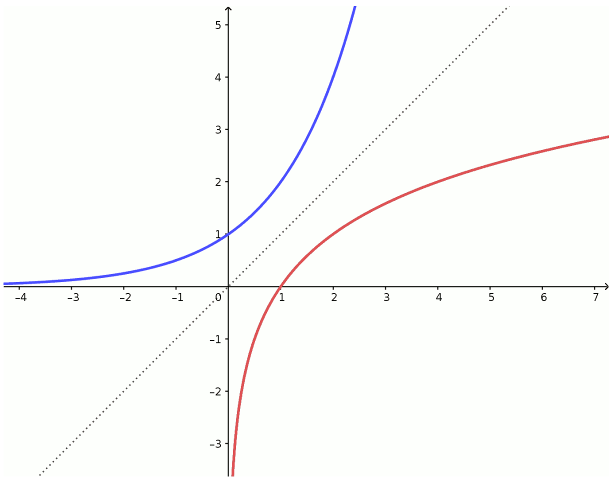
La gráfica es la siguiente:



♠♠♠♠

Ejercicio 3. Representar sobre los mismos ejes las funciones $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$

Solución:



♠♠♠♠

Ejercicio 4. Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la recta $-2x + y + 7 = 0$. Representar gráficamente la parábola y la recta

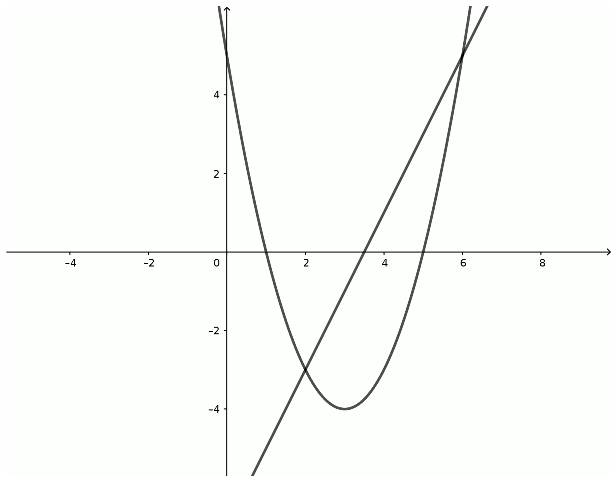
Solución:

Los puntos de intersección de la parábola y la recta son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

que nos da los puntos $P(2, -3)$ y $Q(6, 5)$.

Las intersecciones de la parábola con los ejes son $A_1(1, 0)$, $A_2(5, 0)$ y $B(0, 5)$. El vértice es el punto $V(3, -4)$.



♠♠♠♠

Ejercicio 5. Calcular el dominio de definición de la función

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{1-x^2}}$$

Solución:

El dominio de la función es el conjunto:

$$\mathrm{f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{1-x^2} \geq 0 \right\}$$

La raíf del numerador es $x = -2$ y las raíces del denominador $x = -1$ y $x = 1$. El signo que toma la función para los distintos valores de x se representa en el siguiente esquema:

	0		$\nexists$		$\nexists$	
$+$		$-$		$+$		$-$
	-2		-1		1	

El dominio de la función es $(-\infty, -2] \cup (-1, 1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Calcular el dominio de definición de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}$$

Solución:

El dominio es el conjunto

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$$

Calculamos las raíces del polinomio:

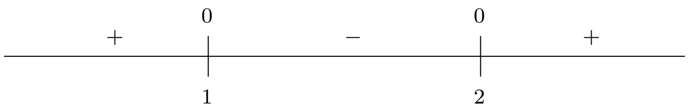
	1	-3	3	-3	2
1		1	-2	1	-2
	1	-2	1	-2	0

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	0

El polinomio se descompone en factores como:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$

Las raíces del polinomio son $x = 1$ y $x = 2$. El signo del polinomio lo podemos representar mediante el siguiente esquema:



El dominio de la función es $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{3-x}{x+2}$$

Solución:

Intercambiamos las variables:

$$x = \frac{3-y}{y+2}$$

Ahora despejamos y:

$$x(y+2) = 3 - y \ ; \qquad xy + y = 3 - 2x \ ; \qquad y(x+1) = 3 - 2x \ ; \qquad y = f^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x+1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \log_2(1 + \sqrt{x})$$

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \log_2(1 + \sqrt{y}) \ ; \qquad 1 + \sqrt{y} = 2^x \ ; \qquad \sqrt{y} = 2^x - 1 \ ; \qquad y = f^{-1}(x) = (2^x - 1)^2$$

♠♠♠♠

10. Combinatoria

Ejercicio 1. Con las cifras 1, 3, 4, 5 y 7:

(a) ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar?
(b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 5?
(c) ¿Cuántos terminan en 43?
(d) Cuántos son múltiplos de 3?

Solución:

(a) En este problema es relevante el orden que ocupan las cifras. Por consiguiente la solución es:

$$V_{5,3} = 120$$

(b) Si los números son múltiplos de 5, deben terminar en esta cifra. Debemos disponer 2 cifras entre las 4 restantes:

$$V_{4,2} = 12$$

(c) Ahora nos falta una cifra que debemos elegir entre 1, 5 y 7. Tenemos 3 posibilidades.

(d) Con las cifras dadas pueden formarse las siguientes combinaciones de 3 elementos:

$$\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,7\},\{1,4,5\},\{1,4,7\},\{1,5,7\},\{3,4,5\},\{3,4,7\},\{3,5,7\},\{4,5,7\}$$

Las que suman un múltiplo de 3 son:

$$\{1,3,5\},\{1,4,7\},\{3,4,5\},\{3,5,7\}$$

Con cada una de ellas pueden formarse $3! = 6$ números. En total $4 \cdot 6 = 24$ números.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Con las letras de la palabra CORTEZA:

(a) ¿Cuántas palabras de 7 letras distintas pueden formarse?
(b) ¿Cuántas empiezan por vocal?
(c) ¿En cuántas las vocales están separadas?
(d) ¿En cuántas las tres vocales aparecen seguidas?

Solución:

(a) En este problema también el orden de las letras es relevante. El número de palabras de 7 letras es:

$$P_7 = 7! = 5040$$

(b) La primera letra puede elegirse de 3 maneras. Para las otras 6 tenemos 6 posibilidades. O sea:

$$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 2160$$

(c) Las consonantes se pueden disponer de 4! maneras. Si las vocales han de estar separadas tenemos 5 posiciones de las que tenemos que elegir 3. Una vez elegidas las posiciones tenemos 3! maneras de disponer las vocales. En total:

$$4! \cdot C_{5,3} \cdot 3! = 1440$$

(d) Podemos elegir de 5 maneras las posiciones de los grupos de 3 vocalesy 3! maneras de ordenarlas:

$$4! \cdot 5 \cdot 3! = 720$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

(a) ¿De cuántas maneras pueden repartirse 5 cartas de una baraja de 40 cartas?
(b) ¿Cúantas de ellas contienen el as de copas?
(c) ¿Cuántas no tienen ninguna carta de espadas?

(*d*) ¿En cuántas las cinco cartas son de bastos?

Solución:

(*a*) Debemos elegir 5 cartas de 40:

$$C_{40,5} = 658008$$

(*b*) Puesto que tenemos el as de copas debemos elegir 4 cartas entre las restantes:

$$C_{39,4} = 82251$$

(*c*) Si no hay espadas tendremos elegir 5 cartas entre 30:

$$C_{30,5} = 142506$$

(*d*) Ahora las debemos elegir entre las 10 cartas de bastos:

$$C_{10,5} = 252$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4.

(*a*) ¿Cuántas palabras de 5 letras diferentes pueden formarse con las letras de la palabra MURCIÉLAGO?

(*b*) ¿Cuántas de ellas empiezan y terminan con vocal?

(*c*) ¿Cuántas no tienen consonantes?

(*d*) ¿Cuántas tienen alguna vocal?

Solución:

(*a*) En este problema es relevante el orden en que se disponen las letras. Debemos tomar 5 letras de 10:

$$V_{10,5} = 30240$$

(*b*) Las vocales primera y última se pueden elegir de $V_{5,2}$ maneras. Las 3 letras intermedias las tendremos que elegir entre las 8 letras restantes:

$$V_{5,2} \cdot V_{8,3} = 6720$$

(*c*) Las formadas solo por vocales son:

$$P_5 = 5! = 120$$

(*d*) Tienen alguna vocal todas (es decir $V_{10,5}$) menos las formadas solo por consonantes (5!). En total:

$$V_{10,5} - P_5 = 30120$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5.

(*a*) Escribir el desarrollo de:

$$(2x-1)^5$$

(*b*) Calcular el coeficiente de x^6 en el desarrollo de

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^9$$

Solución:

(*a*) El desarrollo es:

$$\begin{aligned}(2x-1)^5 &= \binom{5}{0}(2x)^5 - \binom{5}{1}(2x)^4 + \binom{5}{2}(2x)^3 - \binom{5}{3}(2x)^2 + \binom{5}{4}2x - \binom{5}{5} \\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1\end{aligned}$$

(*b*) El término de grado 6 es:

$$\binom{9}{5}(x^2)^5 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^4 = 126 \cdot 16x^6 = 2016x^6$$

El coeficiente de x^6 es 2016.

♠♠♠♠

11. Combinatoria. Probabilidad

Ejercicio 1.

(a) Escribir el desarrollo de:

$$(2x-1)^6$$

(b) Calcular el coeficiente de x^9 en el polinomio $(1-3x)^{15}$.

Solución:

(a) El desarrollo es:

$$\begin{aligned}(2x-1)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6 - \binom{6}{1}(2x)^5 + \binom{6}{2}(2x)^4 - \binom{6}{3}(2x)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2 - \binom{6}{5}2x + \binom{6}{6} \\ &= 64x^6 - 192x^5 + 240x^4 - 160x^3 + 60x^2 - 12x + 1\end{aligned}$$

(b) El término de noveno grado es:

$$\binom{15}{9}(-3x)^9 = -98513415x^9$$

El coeficiente es 98513415.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Se reparten al azar 4 cartas de una baraja de 40 cartas. Calcular la probabilidad de que:

(a) Las cuatro sean figuras (hay 12 figuras en la baraja de 40)

(b) Haya exactamente 2 figuras

Solución:

(a) Las cartas pueden repartirse de $\binom{40}{4}$ maneras. Los casos favorables son $\binom{12}{4}$. La probabilidad es:

$$p = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{40}{4}} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37} = \frac{99}{18278}$$

(b) Las dos figuras pueden elegirse de $\binom{12}{2}$ maneras y las no figuras de $\binom{28}{2}$ maneras. La probabilidad es:

$$p = \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{28}{2}}{\binom{40}{4}} = \frac{\frac{12\cdot 11}{2}\cdot\frac{28\cdot 27}{2}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{12\cdot 11\cdot 28\cdot 27\cdot 6}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37} = \frac{12474}{45695} \simeq 0{,}273$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. En una clase hay 7 chicas y 5 chicos. Se eligen 6 al azar. Calcular la probabilidad de:

(a) Se elijan 3 chicas y 3 chicos

(b) Se elijan 5 chicas y un chico

Solución:

(a) Los chicos pueden elegirse de $\binom{5}{3}$ maneras y las chicas de $\binom{7}{3}$ maneras. Los tres chicos y las tres chicas pueden elegirse:

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 350$$

De 350 maneras.

(b) De forma similar:

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{5}{1} = 120$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Se lanzan 3 dados. Calcular la probabilidad de obtener:

(a) Tres seises

(b) Un 3, un 4 y un 5

Solución:

(a) Por la regla del producto:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

También puede resolverse por la regla de Laplace, dándose cuenta que hay un solo resultado favorable de 216 posibles.

(b) Ahora hay 6 resultados favorables 345, 354, 435, 453, 534 y 543:

$$p = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Se vuelven a lanzar los tres dados:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 números pares?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener números que sumen 6?

Solución:

(a) Por la regla del producto:

$$\mathrm{p}\left(P_1 \cap P_2 \cap P_3\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(b) El número de resultados posibles es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. La suma 6 puede obtenerse como 114, 141, 411, 123, 132, 213, 231, 312, 321 y 222. La probabilidad es:

$$p = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 8:

(a) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes pueden formarse?

(b) ¿Cuántos tienen 2 cifras pares y tres impares?

Solución:

(a) En este problema es relevante el orden en que se disponen las cifras de modo que se trata de un problema de variaciones:

$$V_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

(b) Las dos cifras pares pueden disponerse de $V_{4,2} = 12$ maneras y las tres cifras impares de $V_{3,3} = 6$ maneras. Los lugares que ocupan las dos cifras pares pueden elegirse de $C_{5,2} = 10$ maneras. O sea que

$$10 \cdot 12 \cdot 6 = 720$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. En una caja hay 4 bolas blancas y 5 bolas azules. Se sacan al azar dos bolas simultáneamente:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean azules?

(b) ¿Y de sacar una bola azul y una blanca?

Solución:

(*a*) Podemos resolverlo por la regla del producto:

$$\mathrm{p}\,(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

También puede resolverse por la regla de Laplace. Se pueden elgir dos bolas de $\binom{9}{2}$ maneras y dos bolas azules de $\binom{5}{2}$ maneras. Por tanto:

$$p = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{5\cdot4}{2}}{\frac{9\cdot8}{2}} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

(*b*) Por la regla del producto:

$$\mathrm{p}\,(\text{'una azul y una blanca'}) = \mathrm{p}\,(A_1 \cap B_2) + \mathrm{p}\,(B_1 \cap A_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

O por la regla de Laplace. Una de cada color pueden elegirse de $5 \cdot 4$ maneras de modo que:

$$p = \frac{5 \cdot 4}{\binom{9}{2}} = \frac{20}{\frac{9\cdot8}{2}} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8.

(*a*) Si tenemos 8 libros, ¿de cuántas maneras pueden repartirse en dos lotes, uno de 5 y otro de 3?

(*b*) ¿Y en dos lotes de cuatro libros?

Solución:

(*a*) El primer lote puede elegirse de $\binom{8}{5}$ maneras. Una vez elegido el primero, el segundo puede elegirse de $\binom{3}{3}$ maneras. En total:

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} = 56$$

(*b*) En este caso no puede decirse cuál es el primer lote y cuál es el segundo. Por consiguiente, el número es:

$$\frac{1}{2!} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 35$$

♠♠♠♠