Matemáticas I. Curso 2010-2011. Exámenes

1. Logaritmos y radicales

Ejercicio 1. *Racionalizar los denominadores:*

◇ $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$ ◇ $\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}$ ◇ $\dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$ ◇ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9\cdot 5}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4-\sqrt{7}} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{16-7} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{16-7} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{9} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7})} = \frac{7\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{8-7} = 7\sqrt{16}+7\sqrt{14} = 28+7\sqrt{14}$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{5+3-2\sqrt{15}}{5-3} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes logaritmos:*

◇ $\log_{25}\dfrac{1}{125}$ ◇ $\log_3\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ◇ $\log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right)$ ◇ $\log_8\dfrac{4}{\sqrt[5]{16}}$

Solución:

$$\log_{25}\frac{1}{125} = \log_{25}1 - \log_{25}125 = 0 - \frac{\log_5 25}{\log_5 125} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_3\frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 1 - \log_3\sqrt{3} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right) = \log_2\sqrt[3]{16} + \log_2\sqrt[4]{8} = \frac{1}{3}\log_2 16 + \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{4}{3}+\frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\log_8\frac{4}{\sqrt[5]{16}} = \log_8 4 - \frac{1}{5}\cdot\log_8 16 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} - \frac{1}{5}\cdot\frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Ejercicio 3. *Simplificar expresando como un solo logaritmo:*

- $\diamond$ $2\log_a 7 - 2\log_a a + 2\log_a 3$
- $\diamond$ $5\log_a a + \frac{1}{3}\log_a 27 + \log_a 2$
- $\diamond$ $\log_a 5 + \frac{1}{2}\log_a 16 - \log_a 2$
- $\diamond$ $\frac{1}{4}\log_a 81 + 3\log_a \frac{1}{4} - 2\log_a \frac{3}{4}$

Solución:

$$2\log_a 7 - 2\log_a a + 2\log_a 3 = \log_a \frac{7^2\cdot 3^2}{a^2} = \log_a \frac{441}{a^2}$$

$$\log_a 5 + \frac{1}{2}\log_a 16 - \log_a 2 = \log_a \frac{5\sqrt{16}}{2} = \log_a 10$$

$$5\log_a a + \frac{1}{3}\log_a 27 + \log_a 2 = \log_a\left(a^5\sqrt[3]{27}\cdot 2\right) = \log_a(6a^5)$$

$$\frac{1}{4}\log_a 81 + 3\log_a \frac{1}{4} - 2\log_a \frac{3}{4} = \log_a \frac{\sqrt[4]{81}\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \log_a \frac{3\cdot 4^2}{3^2\cdot 4^3} = \log_a \frac{1}{12}$$

Ejercicio 4. *En las siguientes igualdades, despejar x y obtener un valor aproximado con tres cifras decimales:*

- $\diamond$ $7^{-3x} = 15$
- $\diamond$ $3^{-5x^2} = 1$

Solución:

- $\diamond$ $7^{-3x} = 15 \quad\Longrightarrow\quad -3x = \log_7 15 \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{1}{3}\log_7 15 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\ln 15}{\ln 7} \simeq -0{,}464$
- $\diamond$ $3^{-5x^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad -5x^2 = \log_3 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0$

Ejercicio 5. *Resolver las ecuaciones:*

- $\diamond$ $\log(x+3) - \log(3x-2) = \log 7$
- $\diamond$ $\dfrac{35}{3^x} = 3^x - 2$

Solución:

- $\diamond$ $\log(x+3) - \log(3x-2) = \log 7 \quad\Longrightarrow\quad \log\dfrac{x+3}{3x-2} = \log 7 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{x+3}{3x-2} = 7$

  Resolviendo esta ecuación:

  $x+3 = 7\cdot(3x-2) \quad\Longrightarrow\quad x+3 = 21x-14 \quad\Longrightarrow\quad x = \dfrac{17}{20}$

- $\diamond$ $\dfrac{35}{3^x} = 3^x - 2 \quad\Longrightarrow\quad 35 = 3^{2x} - 2\cdot 3^x \quad\Longrightarrow\quad 3^{2x} - 2\cdot 3^x - 35 = 0$

  Ésta es una ecuación de segundo grado en 3^x. Despejando:

$$3^x = \frac{2\pm\sqrt{4+140}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 3^x = 7 \quad\Longrightarrow\quad x = \log_3 7 \\ 3^x = -5 \qquad \text{no tiene solución} \end{cases}$$

---

2. Examen de polinomios

Ejercicio 1. *Resolver la ecuación:*

$$x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$$

Solución:

Para resolver la ecuación es preciso factorizar el polinomio. Buscamos raíces enteras entre los divisores de 2. Así encontramos que:

	1	2	0	–1	–2
–2		–2	0	0	2
	1	0	0	–1	0

Entoncess, podemos escribir la ecuación como

$$(x + 2)(x^3 - 1) = 0$$

que tiene como soluciones:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2 \\ x^3 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Factorizar el polinomio* $4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$

Solución:

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 3. Así encontramos:

	4	8	–11	3
–3		-12	12	-3
	4	-4	1	0

Entonces:

$$4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = (x + 3) \cdot (4x^2 - 4x + 1)$$

Para factorizar el polinomio de segundo grado calculamos sus raíces:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}$$

El polinomio tiene una única raíz (doble). La factorización es:

$$4x^3 + 8x^2 - 11x + 3 = (x + 3) \cdot (4x^2 - 4x + 1) = (x + 3) \cdot 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (x + 3) \cdot (2x - 1)^2$$

Ejercicio 3. *El polinomio* $x^3 + ax^2 + bx - 5$ *da de resto* 11 *cuando se divide por* $x - 2$ *y resto* 1 *si se divide por* $x + 3$*. Calcular* a *y* b*.*

Solución:

Llamemos $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$. Según el teorema del resto, si al dividir por $x - 2$ da de resto 11, el valor numérico del polinomio para $x = 2$ es igual a 11:

$$p(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5 = 8 + 4a + 2b - 5 = 11 \quad \Longrightarrow \quad 4a + 2b = 8$$

Por la misma razón el valor numérico del polinomio para $x = -3$ debe ser 1:

$$p(-3) = (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) - 5 = -27 + 9a - 3b - 5 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 9a - 3b = 33$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 4a + 2b = 8 \\ 9a - 3b = 33 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a - b = 11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Raíz de un polinomio. Propiedad de las raíces enteras de los polinomios con coeficientes enteros.*

Solución:

Ver teoría.

Ejercicio 5. *Teoremas del factor y del resto.*

Solución:

Ver teoría.

---

3. Examen de Trigonometría

Ejercicio 1. *Sabiendo que* $\operatorname{tg} x = -2$ *y que* x *es un ángulo del segundo cuadrante, calcular exactamente* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$*. Obtener con ayuda de la calculadora el ángulo* x*.*

Solución:

Puesto que:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

Sustituyendo y tomando la raíz negativa puesto que el ángulo se encuenta en el segundo cuadrante:

$$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

y puesto que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} x = \cos x \operatorname{tg} x$$

resulta que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot (-2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Para calcular el ángulo x obtenemos mediante la calculadora artg 2 $= 63^{\circ}26'6''$ y, puesto que el ángulo está en el segundo cuadrante:

$$x = 180^{\circ} - 63^{\circ}26'6'' = 116^{\circ}33'54''$$

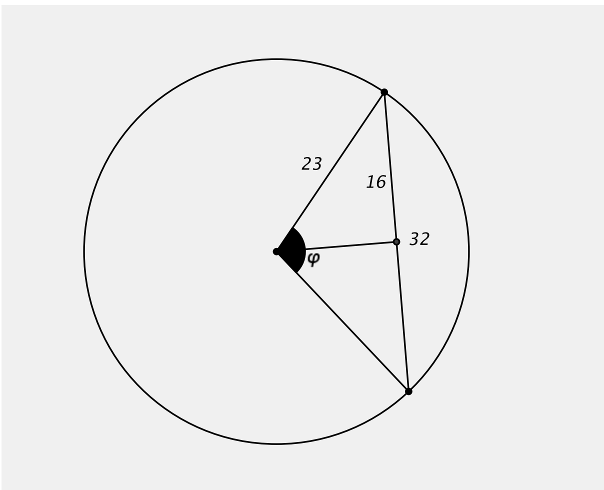
Ejercicio 2. *En una circunferencia de radio* 23 *cm, calcular el área del segmento circular limitado por una cuerda de* 32 *cm.*

Solución:

El área de un segmento circular puede obtenerse como la diferencia del área del sector y el área del triángulo. Esto conduce a la fórmula:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$

donde φ es el ángulo en radianes.



De la figura se deduce que:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{16}{23}\qquad\Longrightarrow\qquad\varphi=1{,}5387$$

y sustituyendo en la fórmula se obtiene que el área es $S=142{,}61$ cm.

Ejercicio 3. *Resolver la ecuación* $\cos 2x=1+4\operatorname{sen}x$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ resulta:

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x-1=0$$

Sustituyendo ahora $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}&1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x-1=0\\&-2\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x=0\\&\operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x+4)=0\end{aligned}$$

De aquí obtenemos $\operatorname{sen}x=0$ y $\operatorname{sen}x=-2$. La segunda igualdad no conduce a ninguna solución pues el seno de un ángulo está comprendido entre -1 y 1. La primera nos da las soluciones $x=0^{\circ}\pm360^{\circ}K$ y $x=180^{\circ}\pm360^{\circ}K$.

Ejercicio 4. *Resolver* $2\operatorname{sen}x+3\cos x=3$.

Solución:

Podemos sustituir $\cos x$ por $\sqrt{1-\operatorname{sen}x}$ o mejor considerar el sistema:

$$\begin{aligned}&2\operatorname{sen}x+3\cos x=3\\&\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1\end{aligned}$$

Despejamos $\cos x$ de la primera ecuación:

$$\cos x=\frac{3-2\operatorname{sen}x}{3}$$

Sustituimos en la segunda ecuación y resulta:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x+\frac{(3-2\operatorname{sen}x)^2}{9}&=3\\\operatorname{sen}^2 x+\frac{9+4\operatorname{sen}^2 x-12\operatorname{sen}x}{9}&=1\\9\operatorname{sen}^2 x+9+4\operatorname{sen}^2 x-12\operatorname{sen}x&=9\\13\operatorname{sen}^2 x-12\operatorname{sen}x&=0\\\operatorname{sen}x(13\operatorname{sen}x-12)&=0\end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones para $\operatorname{sen}x$:

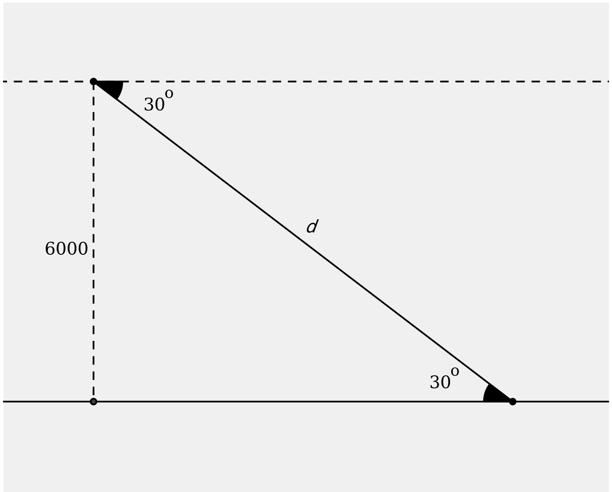
- $\diamond$ $\operatorname{sen}x=0\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=0^{\circ}\pm360^{\circ}K\\x=180^{\circ}\pm360^{\circ}K\end{cases}$

- $\diamond$ $\operatorname{sen}x=\dfrac{12}{13}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=67^{\circ}22'48''\pm360^{\circ}K\\x=112^{\circ}37'12''\pm360^{\circ}K\end{cases}$

Al haber transformado la ecuación de primer grado en una de segundo grado, es posible que hayamos obtenido soluciones no válidas de la ecuación original. Por ello debemos comprobar las soluciones. Así, encontramos que 0° y $67^{\circ}22'48''$ son soluciones válidas y que 180° y $112^{\circ}37'12''$ no lo son.

Ejercicio 5. *Desde la altura de* 6000 *m, el piloto de un avión observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de* 30°. *Calcular la distancia entre el avión y el foco.*

Solución:



De la figura se deduce que:

$$6000 = d \operatorname{sen} 30^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{6000}{\operatorname{sen} 30^{\circ}} = 12000$$

La distancia es de 12000 m.

Ejercicio 6. *Resolver un triángulo del que se conocen* $a = 24\text{m}$, $B = 55^{\circ}15'$ *y* $C = 68^{\circ}42'$.

Solución:

Calculamos el tercer ángulo:

$$A = 180^{\circ} - 55^{o}15' - 68^{o}42' = 56^{\circ}3'$$

Los lados los calculamos por el teorema del seno:

$$\frac{24}{\operatorname{sen} 56^{\circ}3'} = \frac{b}{\operatorname{sen} 55^{\circ}15'} = \frac{c}{\operatorname{sen} 68^{\circ}42'}$$

Así calculamos

$$b = \frac{24 \operatorname{sen} 55^{\circ}15'}{\operatorname{sen} 56^{\circ}3'} = 23,77; \qquad c = \frac{24 \operatorname{sen} 68^{\circ}42'}{\operatorname{sen} 56^{\circ}3'} = 26{,}96$$

Los lados miden $23,77$ m y 26,96 m.

---

4. Examen de números complejos

Ejercicio 1. *Marcar como* V *(verdadera) o* F *(falsa) cada una de las afirmaciones siguientes:*

1. La parte imaginaria de un número real es cero.
2. El conjugado de z tiene la misma parte real que z.
3. El producto de un complejo por su conjugado es un número imaginario puro.
4. El producto de un complejo por su conjugado es igual al módulo del complejo.
5. El inverso de i es $-i$.
6. Los números imaginarios puros tienen como argumento $\pi/2$.
7. El módulo de i es 1.
8. El argumento de un número real negativo es π.
9. La potencia 18 de i es -1.
10. La potencia 37 de i es $-i$.
11. La raíz cuadrada de $3-4i$ tiene de módulo 5.
12. Todas las raíces cúbicas de un complejo tienen el mismo módulo.
13. Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus partes reales e imaginarias.
14. Para multiplicar dos complejos se multiplican sus módulos y sus argumentos.
15. Sea $z' = zi$. El módulo de z' es igual al módulo de z.
16. Sea $z' = zi$. Los argumentos de z' y z difieren en $\pi/2$.
17. El argumento de $-3i$ es $\pi/2$.
18. Si elevamos un complejo al cuadrado, su argumento se multiplica por 2.
19. Los argumentos de las raíces sextas de un complejo difieren en un múltiplo de $\pi/3$.
20. Una raíz cúbica de -8 tiene de argumento $\pi/6$.

Solución:

Son verdaderas las afirmaciones 1, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18 y 19.

Ejercicio 2. *Calcular:*

$$\frac{(5-2i)^2(3-4i)}{2-5i}$$

Solución:

En primer lugar, calculamos el cuadrado:

$$\frac{(5-2i)^2(3-4i)}{2-5i} = \frac{(25-4-20i)(3-4i)}{2-5i} = \frac{(21-20i)(3-4i)}{2-5i}$$

Calculamos e producto del numerador

$$\frac{(21-20i)(3-4i)}{2-5i} = \frac{63-84i-60i+80i^2}{2-5i} = \frac{-17-144i}{2-5i}$$

Para calcular el cociente, muultiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{-17-144i}{2-5i}=\frac{(-17-144i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{686-373i}{29}=\frac{686}{29}-\frac{373}{29}i$$

Ejercicio 3. *Calcular* $(1-\sqrt{3}i)^{10}$ *y expresar el resultado en forma binómica.*

Solución:

En primer lugar pasamos el complejo a la forma trigonométrica. El módulo vale:

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$$

y el argumento:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\quad(\varphi\in\text{IV cuadrante})\quad\Longrightarrow\quad\varphi=300^{\text{o}}$$

Entonces:

$$[2(\cos 300^{\text{o}}+i\operatorname{sen}300^{\text{o}})]^{10}=2^{10}(\cos 3000^{\text{o}}+i\operatorname{sen}3000^{\text{o}})=2^{10}(\cos 120^{\text{o}}+i\operatorname{sen}120^{\text{o}})$$

donde hemos sustituido el argumento de 300^{o} por el argumento equivalente de 120^{o}. Para calcular la forma binómica sustituimos el seno y el coseno de 120^{o} por su valor:

$$2^{10}(\cos 120^{\text{o}}+i\operatorname{sen}120^{\text{o}})=1024\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-512+512\sqrt{3}i$$

Ejercicio 4. *Calcular en forma binómica la raíz cuadrada de* $16-30i$*.*

Solución:

Podemos pasar a la forma polar para calcular la raíz y después pasar a la forma binómica, pero podemos también calcular la raíz directamente en la forma binómica. Supongamos que la raíz es $x+yi$. Entonces:

$$\sqrt{16-30i}=x+yi\quad\Longrightarrow\quad 16-30i=(x+yi)^2$$

Desarrololando el cuadrado e igualando partes reales e imaginarias obtenemos:

$$\begin{cases}x^2-y^2=16\\2xy=-30\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=16\\xy=-15\end{cases}$$

Despejando y de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera resulta:

$$y=\frac{-15}{x};\qquad x^2-\frac{225}{x^2}=16$$

Quitando denominadores y resolviendo la ecuación:

$$x^4-16x^2-225=0\quad\Longrightarrow\quad x^2=\frac{16\pm\sqrt{256+900}}{2}=\frac{16\pm 34}{2}$$

Las solución con el signo menos no es válida (x^2 debe ser positivo) de forma que obtenemos $x^2=25$ y $x_1=-5$ y $x_2=5$. Las soluciones son:

$$x_1=-5\quad\Longrightarrow\quad y_1=\frac{-15}{-5}=3$$
$$x_2=5\quad\Longrightarrow\quad y_2=\frac{-15}{5}=-3$$

y las raíces son por tanto, $-5+3i$ y $5-3i$.

Ejercicio 5. *Calcular las raíces cúbicas de i.*

Solución:

El número i tiene de módulo 1 y como argumentos $90^{\text{o}} + 360^{\text{o}}k$ con k entero. Las raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{90^{\text{o}} + 360^{\text{o}}k}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{90^{\text{o}} + 360^{\text{o}}k}{3}\right); \qquad k = 0, 1, 2$$

Sustituyendo los valores de k obtenemos:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 30^{\text{o}} + i\,\text{sen}\,30^{\text{o}} \\ z_2 &= \cos 150^{\text{o}} + i\,\text{sen}\,150^{\text{o}} \\ z_3 &= \cos 270^{\text{o}} + i\,\text{sen}\,270^{\text{o}} \end{aligned}$$

Aunque no lo pide el problema, podemos expresar las tres raíces en forma binómica:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_3 &= -i \end{aligned}$$

---

5. Segundo examen de complejos

Ejercicio 1. *Calcular el número real k de forma que*

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea:

- *Un número real.*
- *Un número imaginario puro.*

Solución:

Calculamos el cociente:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}=\frac{9-4-12i}{1+ki}=\frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2}=\frac{5-12k+i(-5k-12)}{1+k^2}=\frac{5-12k}{1+k^2}+\frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

- Si es un número real, la parte imaginaria debe ser cero:

$$\frac{-5k-12}{1+k^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-\frac{12}{5}$$

- Si es un número imaginario puro, la parte real sebe ser cero:

$$\frac{5-12k}{1+k^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{5}{12}$$

Ejercicio 2. *Dados los números complejos $z=1-3i$, $w=-3+2i$, $t=-2i$ calcula*

$$\frac{2z-3t}{w}$$

Solución:

Sustituimos:

$$\frac{2z-3t}{w}=\frac{2\cdot(1-3i)-3\cdot(-2i)}{-3+2i}=\frac{2-6i+6i}{-3+2i}=\frac{2\cdot(-3-2i)}{9+4}=-\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$$

Ejercicio 3. *Calcular las raíces cuadradas del número complejo $-45-28i$.*

Solución:

Llamando $x+yi$ a la raíz debe cumplirse que $(x+yi)^2=-45-28i$. Igualando partes reales e imaginarias resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-45 \\ 2xy=28 \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y=\frac{-14}{x}; \qquad x^2-\frac{196}{x^2}=-45; \qquad x^4+45x^2-196=0$$

Despejando x^2:

$$x^2=\frac{-45\pm\sqrt{45^5+4\cdot 196}}{2}=\frac{-45+53}{2}=4 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

Para $x=-2$, $y=7$, y para $x=2$, $y=-7$. Las dos raíces son, por tanto, $-2+7i$ y $2-7i$.

Ejercicio 4. *Escribe los siguientes números complejos en forma polar:*

- ◇ -4
- ◇ $2i$
- ◇ $-\frac{3}{4}i$
- ◇ $-2+2\sqrt{3}i$

Solución:

Para los tres primeros números la solución es inmediata:

- ◇ $-4 = 4_\pi$
- ◇ $2i = 2_{\pi/2}$
- ◇ $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{3\pi/2}$
- ◇ El cuarto complejo tiene como módulo y argumento:

$$r=\sqrt{4+12}=4; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad \overset{\varphi\in II}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 120^{\text{o}}$$

  Por consiguiente $-2+2\sqrt{3}i = 4_{2\pi/3}$.

Ejercicio 5. *Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:*

- ◇ $1_{\pi/2}$
- ◇ $5_{270^{\text{o}}}$
- ◇ $1_{150^{\text{o}}}$
- ◇ $4_{300^{\text{o}}}$

Solución:

- ◇ $1_{\pi/2} = i$
- ◇ $5_{270^{\text{o}}} = -5i$
- ◇ $1_{150^{\text{o}}} = 1\cdot(\cos 150^{\text{o}} + i\operatorname{sen} 150^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- ◇ $4_{300^{\text{o}}} = 4\cdot\cos 300^{\text{o}} + i\operatorname{sen} 300^{\text{o}}) = 4\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2-2\sqrt{3}i$

Ejercicio 6. *Calcular en forma polar las raíces quintas de* $1-i$.

Solución:

El módulo y argumento de $1-i$ son:

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1 \quad \overset{\varphi\in IV}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 315^{\text{o}}$$

Asi que $1-i = (\sqrt{2})_{315^{\text{o}}}$. La primera raíz la obtenemos haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 5 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{63^{\text{o}}}$$

Las restantes raíces las calculamos sumando $\frac{360^o}{5} = 72^o$ a la anterior:

$$z_2 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{135^o}\ ; \quad z_3 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{207^o}\ ; \quad z_4 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{279^o}\ ; \quad z_5 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{351^o}$$

Ejercicio 7. *Calcular en forma binómica las raíces sextas de* -1.

Solución:

El número -1 en forma polar es 1_{180^o}. Como en el caso anterior, la primera raíz sexta se obtiene haciendo la raíz sexta del módulo y dividiendo por 6 el argumento. Las restantes raíces se calculan sumando $\frac{360^o}{6} = 60^o$ al argumento se la raíz anterior:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos 30^o + i \operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= \cos 90^o + i \operatorname{sen} 90^o = i \\
z_3 &= \cos 150^o + i \operatorname{sen} 150^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= \cos 210^o + i \operatorname{sen} 210^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= \cos 270^o + i \operatorname{sen} 270^o = -i \\
z_6 &= \cos 330^o + i \operatorname{sen} 330^o = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Calcula en forma binómica* $(-1 - i\sqrt{3})^6$.

Solución:

En primer lugar escribimos el complejo en forma polar:

$$r = \sqrt{1+3} = 2 : \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \quad \overset{\varphi \in III}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 240^o$$

Por consiguiente:

$$(-1 - i\sqrt{3})^6 = \left[(2)_{240^o}\right]^6 = 64_{1440^o}$$

Dividiendo el argumento por 360^o encontramos el argumento equivalente 0^o. Tenemos, por tanto:

$$64_{1440^o} = 64_{0^o} = 64$$

Ejercicio 9. *Calcula una expresión de* $\cos 3\varphi$ *a partir de la fórmula de Moivre.*

Solución:

Para el ángulo triple, la fórmula de Moivre tiene la forma:

$$\cos 3\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3$$

Para calcular $\cos 3\varphi$ debemos calcular la parte real del segundo miembro. La parte real es la que contiene las potencias 0 y 2 de la unidad imaginaria:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi + 3i^2 \cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + i^3 \operatorname{sen}^3\varphi$$

La parte real es

$$\cos^3\varphi + 3i^2\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$$

de modo que:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$$

Ejercicio 10. *El punto $A_1(3,5)$ es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices A_2 y A_3.*

Solución:

Los otros dos vértices los obtendremos girando A_1 ángulos de 120º y 240º alrededor del origen:

$$\begin{aligned}
(3+5i)(\cos 120^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 120^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}i-\frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)i\\
(3+5i)(\cos 240^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 240^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}i+\frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)i
\end{aligned}$$

Los puntos son:

$$A_2\left(-\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right); \qquad A_3\left(-\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)$$

---

6. Geometría

Ejercicio 1.

- ⋄ *Calcular el punto medio del segmento de extremos* $A(5,-1)$ *y* $B(-4,3)$.
- ⋄ *Calcular el punto simétrico de* $A(3,-1)$ *respecto de* $P(6,-3)$.

Solución:

- ⋄ Sea $M(x,y)$ el punto medio. Sus coordenadas son:

$$X=\frac{5+(-4)}{2}=\frac{1}{2};\qquad y=\frac{-1+3}{2}=1$$

El punto medio es $M\left(\frac{1}{2},1\right)$

- ⋄ Sea $A'(x',y')$ el simétrico de A respecto de P. Puesto que P es el punto medio de AA':

$$\begin{aligned}\frac{3+x'}{2}&=6 &&\Longrightarrow && x'=9\\ \frac{-1+y'}{2}&=-3 &&\Longrightarrow && y'=-5\end{aligned}$$

El punto simétrico es $A'(9,-5)$.

Ejercicio 2. *Dados los puntos* $A(k,-1)$, $B(1,1)$ *y* $C(3,2)$, *calcular* k *de forma que los tres puntos estén alineados.*

Solución:

Si los tres puntos están alineados, la pendiente de AB debe ser igual a la pendiente de BC:

$$m_{AB}=m_{BC}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1-(-1)}{1-k}=\frac{2-1}{3-1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{2}{1-k}=\frac{1}{2}$$

y resolviendo esta ecuación resulta $k=-3$.

Ejercicio 3. *Calcular las ecuaciones implícita y segmentaria de la recta que pasa por el punto* $P(2,-2)$ *y cuya pendiente es* -3.

Solución:

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y+2=-3\,(x-2)$$

La ecuación implícita se obtiene pasando todos los sumandos al primer miembro:

$$3x+y-4=0$$

Las intersecciones de esta recta con los ejes de coordenadas son los puntos $A\left(\frac{4}{3},0\right)$ y $B(0,4)$. Por consiguiente, la ecuación segmentaria es:

$$\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{4}=1$$

Ejercicio 4. *Calcular las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por los puntos $A(-1,-2)$ y $B(0,5)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5-(-2)}{0-(-1)} = t$$

así que la ecuación punto -pendiente es:

$$y + 2 = 7\,(x+1)$$

Despejando y se obtiene la ecuación explícita:

$$y = 7x + 5$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos $P(3,2)$ y $Q(-2,4)$, y la recta $r:\ y = 2x-3$ calcula la distancia:*

- ⋄ *Entre P y Q.*
- ⋄ *De P a r.*

Solución:

- ⋄ La distancia entre los puntos P y Q es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

- ⋄ Para calcular la distancia de P a r escribimos en primer lugar, la ecuación de r en forma implícita:

$$r: \quad 2x - y - 3 = 0$$

La distancia de P a $r$es:

$$d(P,r) = \left|\frac{2\cdot 3 - 2 - 3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 6. *Calcular la tangente del ángulo agudo que forman las rectas $r:\ 3x-5y+6=0$ y $s:\ y = -2x+1$.*

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1 = \frac{3}{5}$ y la segunda $m_2 = -2$. La tangente del ángulo agudo que forman es:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{3}{5}-(-2)}{1+\frac{3}{5}\,(-2)}\right| = \left|\frac{\frac{13}{5}}{-\frac{1}{5}}\right| = 13$$

Ejercicio 7. *¿Cuál ha de ser el valor de k para que las rectas $x+3y-2=0$ y $kx+2y+3=0$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?*

Solución:

- ⋄ Para que sean paralelas debe verificarse que:

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{2}{3}$$

- ◇ Para que sean perpendiculares:

$$1 \cdot k + 3 \cdot 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -6$$

Ejercicio 8. *Calcular las ecuaciones de la paralela y la perpendicular a la recta $2x + 5y - 6 = 0$ por el punto $P(-1, 4)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es $m = -\frac{-2}{5}$.

- ◇ La ecuación de la paralela es:

$$y - 4 = -\frac{2}{5}(x + 1)$$

- ◇ Y la ecuación de la perpendicular:

$$y - 4 = \frac{5}{2}(x + 1)$$

Ejercicio 9. *Calcular los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:*

$$r: \ x - y - 2 = 0, \quad s: \ 2x + 3y - 9 = 0, \quad t: \ x = 0$$

Solución:

Basta resolver los tres sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas formados con estas ecuaciones para obtener los tres vértices:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad A(3, 1)$$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad B(0, -2)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad C(0, 3)$$

Ejercicio 10. *Dados los puntos $B(-1, 3)$ y $C(2, -1)$ escribe la condición que deben cumplir las coordenadas del punto $A(x, y)$ para que el triángulo ABC sea rectángulo en A.*

Solución:

Resolveremos el problema por dos procedimientos:

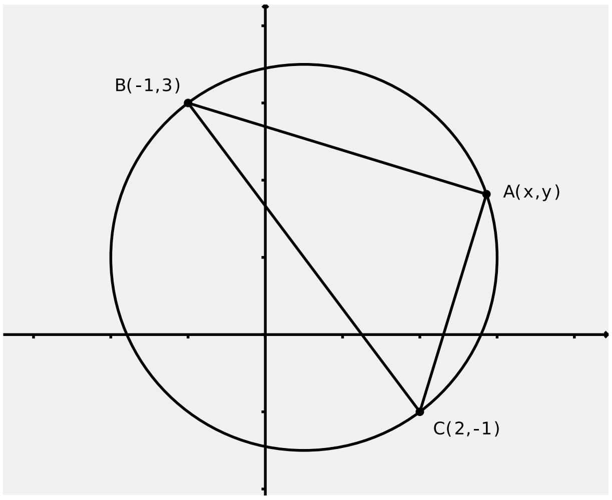
- ◇ Si el triángulo es rectángulo en A los lados AB y AC son los catetos y el lado BC la hipotenusa. Si el punto A tiene de coordenadas x e y, por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
&(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (2 + 1)^2 + (-1 - 3)^2 \\
&x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 25 \\
&2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 10 = 0 \\
&x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0
\end{aligned}$$

◇ Si el triángulo es rectángulo en A, las rectas AB y AC son perpendiculares, sus pendientes deben cumplir la condición de perpendicularidad $1 + m_1 m_2 = 0$:

$$m_{AB} = \frac{y-3}{x+1}; \quad m_{AC} = \frac{y+1}{x-2}$$
$$1 + \frac{y-3}{x+1} \cdot \frac{y+1}{x-2} = 0$$
$$(x+1)(x-2) + (y-3)(y+1) = 0$$
$$x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$$

La condición que hemos obtenido es la ecuación de una circunferencia que tiene como diámetro el segmento BC.



7. Segundo examen de geometría

Ejercicio 1. *Calcular el área del triángulo formado por la recta* $2x-5y+20=0$ *y los ejes de coordenadas.*

Solución:

Calculamos la intersección de la recta con los ejes de coordenadas. La intersección con el eje OX es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-5y+20=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(-10,0)$$

y la intersección con el eje OY:

$$\begin{cases} 2x-5y+20=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(4,0)$$

El área del triángulo es:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4=20$$

Ejercicio 2. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por el punto* $A(3,-1)$ *y por el punto de intersección de las rectas* $2x-y+5=0$ *e* $y=5x+2$.

Solución:

Calculamos el punto de intersección de las dos rectas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ y=5x+2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(1,7)$$

Ahora calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,-1)$ y $B(1,7)$. La pendiente es:

$$m_{AB}=\frac{7-(-1)}{1-3}=-4$$

La ecuación en forma punto-pendiente es:

$$y+1=-4\,(x-3)$$

Despejando y se obtiene la forma explícita:

$$y=-4x+11$$

Ejercicio 3. *Hallar la ecuación de una recta que corta a los ejes en segmentos de longitud igual y que pasa por el punto* $P(6,8)$.

Solución:

- Una manera de resolver el problema es utilizar la forma segmentaria de la recta:

  $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

  donde a y b son respectivamente la abscisa y la ordenada en el origen. Puesto que estos números deben ser iguales en valor absoluto, la ecuación de la recta debe tener la forma

  $$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

Como la recta debe pasar por el punto $P(6,8)$ se verifica:

$$\frac{6}{a}+\frac{8}{a}=1 \quad\Longrightarrow\quad a=14 \quad \text{o bien} \quad \frac{6}{a}-\frac{8}{a}=1 \quad\Longrightarrow\quad a=-2$$

Así pues, las dos soluciones son:

$$\frac{x}{14}+\frac{y}{14}=1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$$

◇ Otra posibilidad es tener en cuenta que las rectas que determinan segmentos de longitud igual son las que tienen pendiente 1 o -1 (las que forman ángulos de 45º o 135º con el eje de abscisas). Las dos rectas son:

$$y-8=1\,(x-6) \qquad \text{y} \qquad y-8=-1\,(x-6)$$

◇ Otra posibilidad es utilizar la forma punto-pendiente de la recta. Puesto que debe pasar por el punto $P(6,8)$, a falta de determinar la pendiente, la ecuación de la recta es:

$$y-8=m\,(x-6)$$

La abscisa en el origen de esta recta es

$$\begin{cases} y-8=m\,(x-6) \\ y=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad a=6-\frac{8}{m}$$

y la ordenada en el origen:

$$\begin{cases} y-8=m\,(x-6) \\ x=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad b=8-6m$$

Estos dos números deben ser iguales en valor absoluto:

$$\left|6-\frac{8}{m}\right|=|8-6m| \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 6-\frac{8}{m}=8-6m \quad\Longrightarrow\quad 6m^2-2m-8=0 \\ 6-\frac{8}{m}=-8+6m \quad\Longrightarrow\quad 6m^2-14m+8=0 \end{cases}$$

La primera ecuación tiene como soluciones $\frac{4}{3}$ y -1. La segunda ecuación se verifica para $\frac{4}{3}$ 1. Así pues tenemos tres soluciones:

$$y-8=-1\,(x-6) \qquad y-8=1\,(x-6) \qquad y-8=\frac{4}{3}\,(x-6)$$

Puede comprobarse que la última solución, que no habíamos encontrado anteriormente, es una recta que pasa por el origen y que, por lo tanto, determina con los ejes segmentos de longitud cero.

Ejercicio 4. *Dados los puntos $A(2,2)$ y $B(5,-2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.*

Solución:

Puesto que el punto P está en el eje de abscisas su ordenada es igual a cero. Sea $P(x,0)$. Entonces:

$$m_{AP}=\frac{0-2}{x-2}=\frac{-2}{x-2}$$
$$m_{BP}=\frac{0-(-2)}{x-5}=\frac{2}{x-5}$$

Estas dos pendientes deben cumplir la condición de perpendicularidad $1+m_1m_2=0$. Por consiguiente

$$1+\frac{-2}{x-2}\cdot\frac{2}{x-5}=0; \qquad (x-2)(x-5)-4=0; \qquad x^2-7x+6=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

Tenemos dos soluciones $P_1(1,0)$ y $P_2(6,0)$.

Ejercicio 5. *Los puntos $A(3,2)$, $B(4,1)$ y $C(-3,5)$ son vértices de un triángulo. Comprobar que la recta que pasa por los puntos medios de AB y AC es paralela al lado BC.*

Solución:

La recta BC tiene de pendiente:

$$m_{BC} = \frac{5-1}{-3-4} = -\frac{4}{7}$$

Los puntos medios de AB y AC son los puntos $M\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $N\left(0, \frac{7}{2}\right)$. La pendiente de la recta MN es:

$$m_{MN} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}}{0 - \frac{7}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{4}{7}$$

Las dos pendientes coinciden. Por tanto las dos rectas son paralelas.

Ejercicio 6. *Calcular la distancia entre las rectas paralelas $x + 2y + 4 = 0$ y $2x + 4y - 1 = 0$.*

Solución:

- Basta obtener un punto de una recta y calcular la distancia a la otra. Por ejemoplo, un punto de la primera recta es $P(0, -2$. Su distancia a la segunda recta es:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) - 1}{\sqrt{4 + 16}} \right| = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

- También pueden escribirse las dos rectas con los mismos coeficientes de x e y:

$$2x + 4y + 8 = 0$$
$$2x + 4y - 1 = 0$$

  y aplicar la fórmula:

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{8 - (-1)}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

Ejercicio 7. *Dadas las rectas $3x + y - 1 = 0$, $2x + ky - 8 = 0$, determinar k para que formen un ángulo de 45°.*

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1 = -3$ y la segunda $m_2 = \frac{-2}{k}$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos rectas:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \quad \Longrightarrow \quad 1 = \left| \frac{-3 + \frac{2}{k}}{1 + \frac{6}{k}} \right| = \left| \frac{2 - 3k}{6 + k} \right|$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{2 - 3k}{6 + k} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 6 + k = 2 - 3k \quad \Longrightarrow \quad k = -1$$
$$\frac{2 - 3k}{6 + k} = -1 \quad \Longrightarrow \quad -6 - k = 2 - 3k \quad \Longrightarrow \quad k = 4$$

Ejercicio 8. *Hallar un punto de la recta $y = x + 3$ equidistante de la recta $3x - 4y + 3 = 0$ y del eje OX.*

Solución:

Los puntos que equidistan de dos rectas se encuentran en sus bisectrices. Las ecuaciones de estas bisectrices son:

$$\left|\frac{3x-4y+3}{\sqrt{9+16}}\right| = |y| \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 3x-4y+3=5y \\ 3x-4y+3=-5y \end{cases}$$

Así pues, las bisectrices son $x - 3y + 1 = 0$, y $3x + y + 3 = 0$.

El punto que buscamos se encuentra en la recta dada $y = x + 3$ y en uno u otra bisectriz. Las soluciones se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ y=x+3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 3x+y+3=0 \\ y=x+3 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos $P(-4,-1)$ y $Q\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

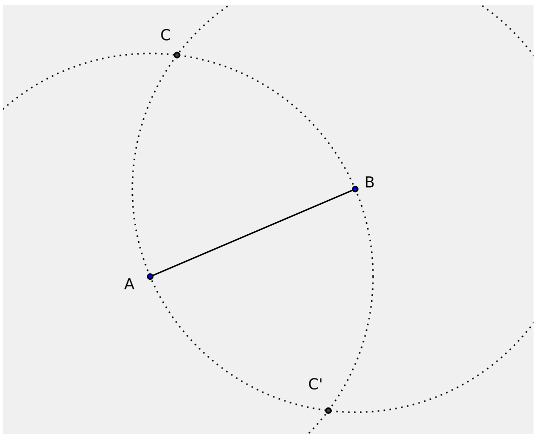
Ejercicio 9. *Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(-3,1)$ y $B(5,2)$. Calcular el tercer vértice.*

Solución:

El lado del triángulo mide

$$l^2 = (5-(-13))^2 + (2-1)^2 = 64+1 = 65$$

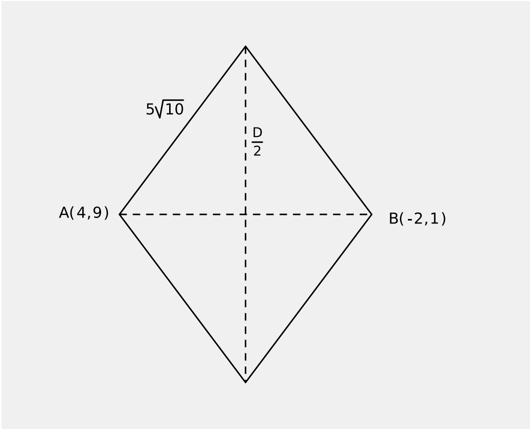
El tercer vértice es la intersección de la circunferencia de centro en A y que pasa por B, con la circunferencia con centro en B y que pasa por A. También podría obtenerse como la intersección de la mediatriz de AB con cualquiera de estas dos circunferencias. Entonces, el tercer vértice es la solución del sistema



$$\begin{cases} (x+3)^2+(y-1)^2=65 \\ (x-5)^2+(y-2)^2=65 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son los puntos

$$C\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{3-8\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \qquad\qquad C'\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{3+8\sqrt{3}}{2}\right)$$



Ejercicio 10. *El lado de un rombo mide* $5\sqrt{10}$ *y dos vértices opuestos son los puntos* $A(4,9)$ *y* $B(-2,1)$*. Calcular el área del rombo.*

Solución:

Una de las diagonales mide:

$$d = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

La otra diagonal puede obtenerse por el teorema de Pitágoras:

$$\frac{D}{2} = \sqrt{250-25} = 15 \quad \Longrightarrow \quad D = 30$$

El área del rombo es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{30 \cdot 10}{2} = 150$$

8. Recuperación de Geometría

Ejercicio 1. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,-2)$ y $B(6,5)$ en las formas punto-pendiente, explícita y segmentaria.*

Solución:

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5-(-2)}{6-3}=\frac{7}{3}$$

de modo que la ecuación de la recta AB es:

$$y+2=\frac{7}{3}\,(x-3)$$

Para calcular la forma explícita de la ecuación se despeja y y se obtiene:

$$y=\frac{7}{3}\,x-9$$

La ordenada en el origen es -9. Para calcular la abscisa en el origen hallamos el punto de intersección de la recta con el eje de abscisas. Este punto se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{7}{3}\,x-9 \\ y=0 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad x=\frac{27}{7}$$

La ecuación en forma segmentaria resulta ser:

$$\frac{x}{\frac{27}{7}}+\frac{y}{-9}=1$$

Ejercicio 2. *Calcular k para que los puntos $A(-1,3)$, $B(2,k)$ y $C(6,-4)$ estén alineados. Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por los tres puntos.*

Solución:

Si los puntos están alineados, la pendiente de la recta AB es igual que la pendiente de la recta AC. Entonces:

$$\begin{aligned} m_{AB}&=\frac{k-3}{2+1}=\frac{k-3}{3} \\ m_{AC}&=\frac{-4-3}{6-(-1)}=-1 \end{aligned} \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{k-3}{3}=-1 \qquad\Longrightarrow\qquad k=0$$

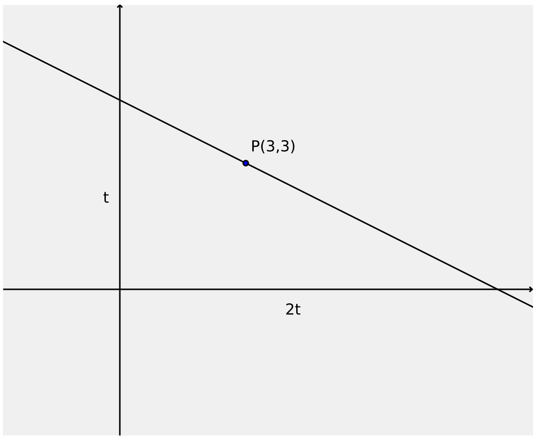
La recta que pasa por los tres puntos tiene pendiente -1. Su ecuación es:

$$y-3=-1\,(x+1) \qquad \text{o bien} \qquad y=-x+2$$

de modo que la ordenada en el origen vale 2.

Ejercicio 3. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,3)$ y corta a los ejes de abscisas y ordenadas en los puntos A y B tales que la longitud de OA es doble que la longitud de OB.*

Solución:



La pendiente de la recta puede ser $\frac{1}{2}$ o $\frac{-1}{2}$. Tenemos dos soluciones

$$y-3=\frac{1}{2}\,(x-3); \qquad y-3=-\frac{1}{2}\,(x-3)$$

También podría ocurrir que la recta pase por el origen puesto que en este caso determina sobre ambos ejes segmentos de longitud cero. La solución en este caso, sería:

$$y=x$$

Ejercicio 4. *Calcular el área del triángulo de vértices $A(-2,5)$, $B(1,-2)$ y $C(7,10)$.*

Solución:

Podemos tomar como base la distancia AB y como altura la distancia de C a la recta AB. La distancia entre los puntos A y B es:

$$d(A,B)=\sqrt{(-2-1)^2+(5-(-2))^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB}=\frac{-2-5}{1-(-2)}=\frac{-7}{3}$$

de forma que la ecuación de esta recta es:

$$y-5=-\frac{7}{3}\,(x+2) \qquad \text{o bien} \qquad 7x+3y-1=0$$

La altura del triángulo es la distancia del vértice C a esta recta:

$$d=\frac{7\cdot 7+3\cdot 10-1}{\sqrt{7^2+3^3}}=\frac{78}{\sqrt{58}}$$

El área del triángulo es:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{58}\cdot\frac{78}{\sqrt{58}}=39$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(5,-2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.*

Solución:

sea $P(x,0)$ el punto que buscamos. Las pendientes de las rectas AP y BP son:

$$m_{AP} = \frac{-3}{x-1}; \qquad m_{BP} = \frac{2}{x-5}$$

Como estas rectas deben ser perpendiculares, debe cumplirse que

$$1 + m_{AP} m_{BP} = 0$$

Sustituyendo

$$1 - \frac{3}{x-1} \cdot \frac{2}{x-5} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{10} \\ x_2 = 3 - \sqrt{10} \end{cases}$$

Ejercicio 6. *Calcular el punto simétrico de $P(2,5)$ respecto de la recta $r : 2x - 3y + 6 = 0$.*

Solución:

Calculamos la perpendicular a la recta r por el punto P. Puesto que la recta r tiene pendiente $\frac{2}{3}$, la perpendicular tendrá pendiente $\frac{3}{2}$. La ecuación de la perpendicular es:

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x-2) \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 2y - 16 = 0$$

La intersección de la recta r con esta perpendicular (el pie de la perpendicular) es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{36}{13}, \quad y = \frac{50}{13}$$

Este punto es el punto medio entre P y su simétrico P'. Las coordenadas de P' las obtenemos de:

$$\frac{36}{13} = \frac{2+x'}{2} \quad \Longrightarrow \quad x' = \frac{46}{13}$$

$$\frac{50}{13} = \frac{5+y'}{2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{35}{13}$$

Ejercicio 7. *Calcular un punto de la recta $x + y - 1 = 0$ equidistante de $A(1,2)$ y de $B(-3,5)$.*

Solución:

Sea P el punto que buscamos. Si equidista de A y B se encontrará en su mediatriz. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y-5)^2 \qquad \text{o bien} \qquad 8x - 6y + 29 = 0$$

Como P debe encontrarse también sobre la recta $y = -x + 1$, será la solución del sistema:

$$\begin{cases} 8x - 6y + 29 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{23}{14}, \quad y = \frac{37}{14}$$

Ejercicio 8. *Calcular el centro de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,2)$, $B(5,3)$ y $C(3,-4)$.*

Solución:

El centro equidista de los tres puntos. Puede calcularse como la intersección de la mediatriz de AB y de AC. La mediatriz de AB tiene por ecuación:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y-3)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 12x + 2y - 29 = 0$$

La mediatriz de AC es:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y+4)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x-3y-5=0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 12x+2y-29=0 \\ 2x-3y-5=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{97}{40}, \quad y=-\frac{1}{20}$$

---

9. Examen de continuidad y límites

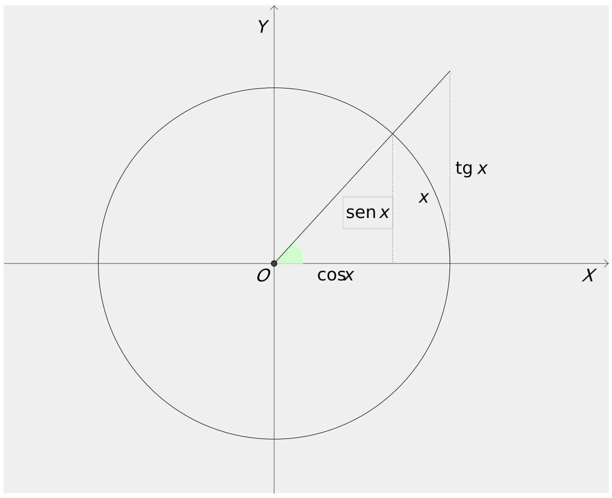
Ejercicio 1. *Define asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*

Solución:

$$\begin{aligned}
x = x_0 \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \\
y = y_0 \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = y_0 \\
y = mx + b \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} [f(x) - (mx+b)] = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Demuestra que cuando x tiende a cero, el límite se* $\operatorname{sen} x$ *entre x es 1.*

Solución:



En la figura se ha representado un ángulo x sobre una circunferencia de radio 1. Si el radio es igual a la unidad, la longitud del arco coincide con la medida del ángulo en radianes. El seno y el coseno del ángulo son iguales a la ordenada y la abscisa del extremo del arco y así se han representado en la figura. También se ha representado un segmento de longitud igual a $\operatorname{tg} x$.

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

y dividiendo por $\operatorname{sen} x$:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Cuando $x \to 0$:

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

y también:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejercicio 3. *Explica qué es un punto de discontinuidad evitable y pon un ejemplo.*

Solución:

En un punto de discontinuidad evitable existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función:

$$x_0 \text{ discontinuidad evitable} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Por ejemplo, $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ porque existe el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

pero no existe la función en ese punto (puesto que se anula el denominador).

Ejercicio 4. *Calcular los puntos de intersección de la parábola* $y = 3x^2 - 2x + 3$ *y la recta* $y = 2x + 2$. *Representa gráficamente la parábola y la recta.*

Solución:

Los puntos de intersección se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Así se obtienen los puntos $A_1(1,4)$ y $A_2\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$.

Con estos dos puntos se puede representar la recta. Para representar la parábola debemos calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes. El vértice es:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$$

La ordenada del vértice se calcula sustituyendo el valor de la abscisa que hemos obtenido en la ecuación de la parábola. En este caso no es necesario puesto que se trata de uno de los puntos de intersección con la recta. Resulta pues

$$V\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$$

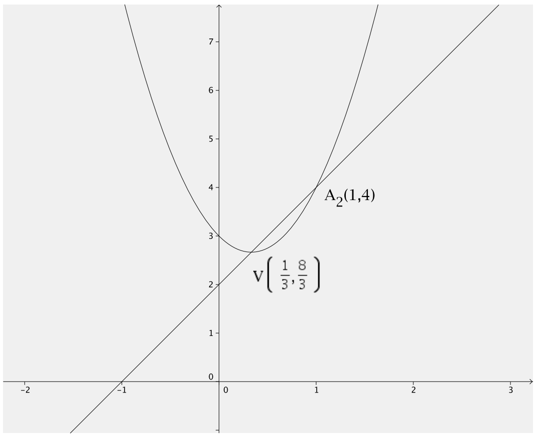
Los puntos de corte con los ejes son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

que no tiene solución y. por consiguiente no hay puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas. La intersección con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0,3)$$

La representación gráfica es:



Ejercicio 5. *Calcular el dominio de definición de la función* $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$.

Solución:

Para que exista la función el radicando debe ser positivo o cero:

$$\text{Dominio } = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0\right\}$$

Para resolver la inecuación calculamos las raíces. Éstas resultan ser $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$. Puesto que el coeficiente de x^2 en el polinomio es negativo, éste será positivo entre las raíces (¿por qué?). El dominio es entonces:

$$\text{Dominio } = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0\right\} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right); \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 4}\right)^x$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{2x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 4}\right)^x = 0^\infty = 0$$

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 1}\right)^{2x}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$

Solución:

El primer límite es una indeterminación del tipo 1^∞. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x-2}{3x+1}-1\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x-2-3x-1}{3x+1}\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{-3}{3x+1}\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x}{3x+1}}\\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

El segundo límite, aplicando las equivalencias $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

Ejercicio 9. *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{2x+1}{x^2-4}$$

Solución:

Las asíntotas verticales se obtienen entre los valores de x que anulan el denominador:

$x=-2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

$x=2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

La asintota horizontal se obtiene calculando el límite de la función cuando x tiende a ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-4}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=0 \quad \text{es asíntota}$$

Puesto que hay una asíntota horizontal no buscamos asíntotas oblicuas.

Ejercicio 10. *Calcular la asíntota de la función*

$$y = \frac{x^3+3}{x^2+1}$$

Solución:

Esta función no tiene asíntotas verticales puesto que el denominador no se hace cero para ningún valor de x. Además, no tiene asíntota horizontal puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+1}=\infty$$

Busquemos entonces la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^3+x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3}{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+3}{x^2+1} = 0$$

Por consiguiente, la asíntota oblicua es $y=x$.

---

10. Segundo examen de limites y continuidad

Ejercicio 1. *Función continua. Casos de discontinuidad. Definición y ejemplos.*

Solución:

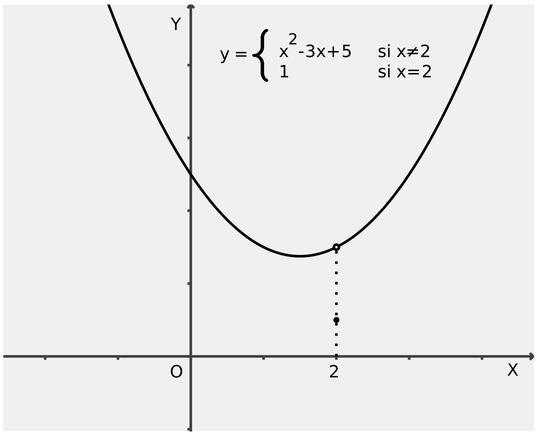
La función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si

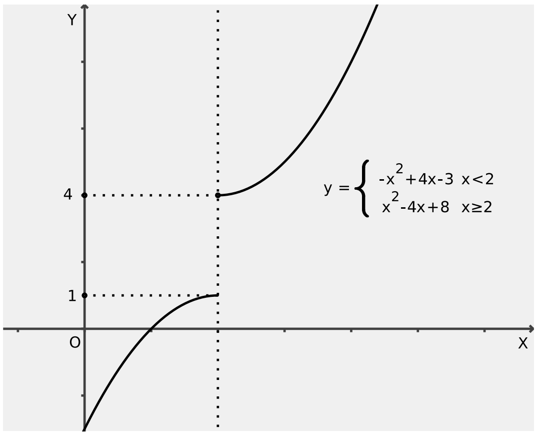
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

es decir, el límite de la función en el punto coincide con el valor de la función en el punto. Para calcular límites de funciones continuas, basta calcular el valor de la función.

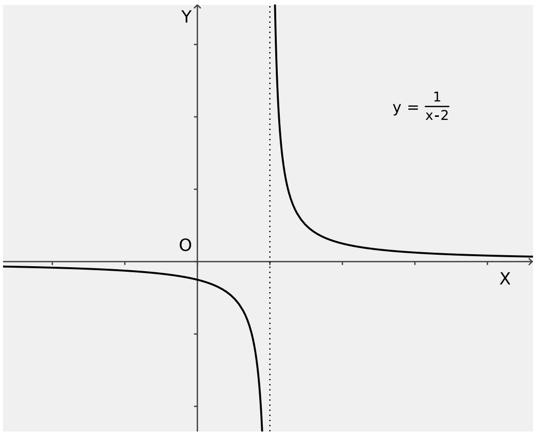
Los puntos en los que la función no es continua se llaman puntos de discontinuidad de la función. Podemos distinguir los siguientes tipos de discontinuidad:

- **Discontinuidad evitable**: existe el límite, pero no coincide con el valor de la función
- **Salto finito**: existen los límites laterales pero no coinciden.





- **Salto infinito**: uno o los dos límites laterales son infinitos.



- **Discontinuidad esencial**: no existe el límite de la función ni es infinito. Por ejemplo la función

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

en el punto $x = 0$. Cuando la variable x se aproxima a este valor oscila entre $+1$ y -1 con una frecuencia que tiende a infinito.

Ejercicio 2. *Definir el numero e como límite. Demostrar que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

A partir de este límite, obtener la fórmula para calcular límites indeterminados del tipo 1^∞*.*

Solución:

El número e se define como el siguiente límite:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

A partir de esta definición:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

en donde se ha aplicado la propiedad del logaritmo de la potencia. La equivalencia entre $\ln(1+x)$ y x cuando x tiende a cero nos sirve para transformar los límites indeterminados del tipo 1^∞:

sea el límite $A = \lim u^v$ donde u tiende a 1 y v tiende a ∞.

$$A = \lim u^v \quad \Longrightarrow \quad \ln A = \lim v \ln u = \lim v \ln[1 + (u-1)]$$

Puesto que $u \to 1$, $u - 1 \to 0$ y $\ln[1 + (u-1)]$ es equivalente a $u - 1$. Entonces:

$$\ln A = \lim v(u-1) \quad \Longrightarrow \quad A = e^{\lim v(u-1)}$$

Ejercicio 3. *Calcular los puntos de intersección de la parábola* $y = 2x^2 - 5x + 1$ *y la recta* $y = -x - 1$*. Representar gráficamente la parábola y la recta.*

Solución:

Las coordenadas de los puntos de intersección son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 1 = -x - 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

Esta ecuación tiene una única solución $x = 1$ a la que corresponde el valor $y = -2$. Así pues el punto de intersección de la parábola y la recta es $(1, -2)$.

Para representar la parábola calculamos su vértice:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{25}{16} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 1 = -\frac{17}{8}$$

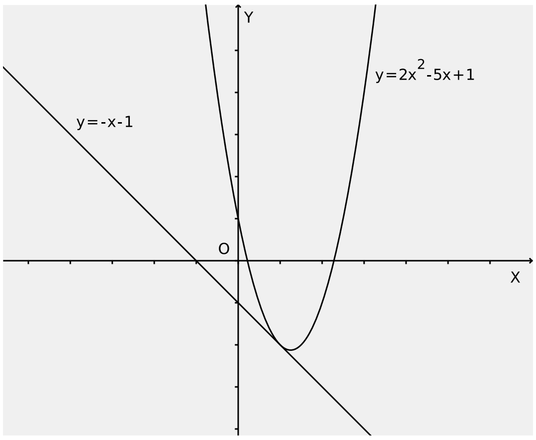
Así pues, el vértice es el punto $V\left(\frac{5}{4}, -\frac{17}{8}\right)$. Las intersecciones con el eje OX son:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

y la intersección con el eje OY:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

Con estos datos, la gráfica de la parábola es:



Ejercicio 4. *Calcular el dominio de las funciones*

1. $y = \sqrt{3 - x^2}$
2. $y = \ln \dfrac{x^2 - 4}{x + 5}$

Solución:

- ◇ El dominio $y = \sqrt{3 - x^2}$ de la función es el conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 3 - x^2 \geq 0\}$$

El polinomio $3 - x^2$ tiene dos raíces, $-\sqrt{3}$ y $+\sqrt{3}$. Es fácil ver que el polinomio es positivo entre las dos raíces. Por consiguiente:

$$D = [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$$

- ◇ El dominio de la función es el conjunto:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad | \quad \frac{x^2 - 4}{x + 5} > 0 \right\}$$

Para resolver la inecuación hay que comparar los signos del numerador y del denominador. Las raíces del numerador son -2 y $+2$. La raíz del denominador es -5. Los signos están reflejados en el siguiente esquema:

	-5		-2		2	
$+$	|	$+$	|	$-$	|	$+$
$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$

La fracción es positiva en los intervalos en que coinciden los signos del numerador y del denominador. Así pues:

$$D = (-5, -2) \cup (2, \infty)$$

Ejercicio 5. *Calcular los siguientes límites:*

- ◇ $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 11x - 2}$
- ◇ $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$

$\diamond$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

$\diamond$ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x$

$\diamond$ $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

$\diamond$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+5}{x^2+1}$

$\diamond$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1}$

$\diamond$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-5x+2}{x^4-1}$

Solución:

$\diamond$ Se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Debemos factorizar los polinomios y simplificar la fracción:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^3+1)}{(x-2)(x^2+6x+1)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x^3+1}{x^2+6x+1} \\ &= \frac{9}{17}\end{aligned}$$

$\diamond$ Lo mismo que el anterior, pero en éste es preciso simplificar dos veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2} &= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^3+2x^2+x+2)}{(x+2)(x^3+2x^2)} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+2x^2} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)x^2} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{x^2+1}{x^2} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$\diamond$ Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

También puede calcularse el límite aplicando la equivalencia $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{1}{2}x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\frac{1}{2}x-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x}{x} = -\frac{1}{2}$$

$\diamond$ Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x = \lim_{x \to \infty} e^{\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\;x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{3x}{x^2-2}} = e^0 = 1$$

- ◇ Es otro límite indeterminado del mismo tipo que el anterior:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{x+2-2x}{2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{2-x}{2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2x}} = e^{\frac{-1}{4}}$$

Los restantes límites son muy sencillos. Basta comparar los grados del numerador y del denominador:

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{x^2+1}=0$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1}=1$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{x^4-1}=0$

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes límites:*

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{1+e^x}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{3^x}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}$

Solución:

- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2}=\dfrac{1}{4}$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}=\infty$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{1+e^x}=0$
- ◇ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{3^x}=0$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3}=0$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}=\infty$
- ◇ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2$

Ejercicio 7. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

- ◇ $y=\dfrac{1}{x^2+1}$
- ◇ $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$

Solución:

- ◇ El denominador de la primera función no se anula para ningún valor de x y, por consiguiente, la función no tiene asíntotas verticales. Puesto que:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

  la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

- ◇ El denominador se anula para $x = 1$ y $x = 2$. Entonces:

  $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical de la función}$$
  $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical de la función}$$

  No hay asíntotas horizontales puesto que:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \infty$$

  Veamos si la curva tiene asíntotas oblicuas:

  $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3-3x^2+2x} = 1$$
  $$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2-3x+2} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x^3+3x^2-2x}{x^2-3x+2} = 3$$

  Por consiguiente, la curva tiene una asíntota oblicua $y = x + 3$.