1. Raíces y logaritmos

1. Racionalizar los denominadores:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$ *b*) $\dfrac{1}{\sqrt{11}-4}$ *c*) $\dfrac{7}{2+\sqrt{7}}$ *d*) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

2. Despejar x en las siguientes igualdades:

   a) $3^{2x}=6$ *b*) $7^{-3x}=15$ *c*) $3^{x^2}=6$ *d*) $3^{-5x^2}=1$

3. Calcular los siguientes logaritmos:

   a) $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *b*) $\log_7 \sqrt{343}$ *c*) $\log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right)$ *d*) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt[5]{81}}$

4. Expresar en función de $\log_a x$, $\log_a y$ y $\log_a z$:

   a) $\log_a \dfrac{xy}{z}$ *b*) $\log_a xy^2z^3$ *c*) $\log_a \sqrt{xy^2z}$ *d*) $\log_a \dfrac{xy}{\sqrt{z^3}}$

5. Define $\log_a N$ y demuestra la fórmula que permite expresar este logaritmo en función de los logaritmos neperianos de a y N (fórmula del cambio de base).

2. Progresiones

1. Progresiones aritméticas. Término general y suma de los términos.
2. La suma de los tres términos de una progresión geométrica es 147 y el término central es 45. Calcular el primer y tercer términos.
3. Calcular la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el séptimo término es 13 y el penúltimo 49.
4. Calcular los siguientes límites de sucesiones:

$$\lim \frac{5}{2n+3}; \qquad \lim \frac{n^2-3n+2}{4n+1}; \qquad \lim 2^{-n}; \qquad \lim \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n}-1}$$

5. Calcular el tercer término de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$ sabiendo que la suma de sus infinitos términos es 12.

---

1. Progresiones geométricas. Término general y suma de los términos.
2. Calcular la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el séptimo término es -5 y el penúltimo 19.
3. La suma de los tres términos de una progresión geométrica es 171 y el término central es 54. Calcular el primer y tercer términos.
4. Calcular el tercer término de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$ sabiendo que la suma de sus infinitos términos es 16.
5. Calcular los siguientes límites de sucesiones:

$$\lim \frac{5}{2n+3}; \qquad \lim \frac{n^2-3n+2}{4n+1}; \qquad \lim 2^{-n}; \qquad \lim \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n}-1}$$

---

3. Ecuaciones

Ejercicio 1. *Teorema del resto. Raíces de un polinomio. Teorema del factor.*

Solución:

Teorema 1 (Teorema del resto). *El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es igual al resto de dividir este polinomio por $x - a$.*

En efecto, cuando se divide el polinomio $P(x)$ por $x - a$ se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - a)C(x) + R$$

y sustituyendo x por a:

$$P(a) = (a - a)C(a) + R = R$$

Definición 1 (Raíz de un polinomio). *El número a es raíz del polinomio $P(x)$ si el valor numérico de este polinomio para $x = a$ es cero.*

Teorema 2 (Teorema del factor). *Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, éste es divisible por $x - a$ o, dicho de otra manera, $x - a$ es un factor de $P(x)$.*

Este teorema es una consecuencia directa del teorema del resto. Al ser a raíz de $P(x)$, $P(a) = R = 0$ por lo que:

$$P(x) = (x - a)C(x)$$

Ejercicio 2. *Resolver:*

$$7x^2 - 21x = 0$$

Solución:

$$7x^2 - 21x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 7x(x - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

Ejercicio 3. *Resolver la ecuación:*

$$x(2x - 1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{15}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&x(2x - 1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{15} && \text{(Quitamos denominadores multiplicando por 15)}\\
&15x(2x - 1) + \frac{15 \cdot 3}{5} = \frac{15 \cdot (3x^2 - x)}{5} + \frac{15}{15} && \text{(Operando)}\\
&30x^2 - 15x + 9 = 9x^2 - 3x + 1\\
&21x^2 - 12x + 8 = 0
\end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución porque su discriminante $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 21 \cdot 8$ es negativo.

Ejercicio 4. *Resolver:*

$$x(x-1)+1=\frac{5}{6}+\frac{x(2x-1)}{3}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&x(x-1)+1=\frac{5}{6}+\frac{x(2x-1)}{3} && \text{(Multiplicamos por 6)}\\
&6x(x-1)+6=\frac{6\cdot 5}{6}+\frac{6x(2x-1)}{3} && \text{(Haciendo operaciones)}\\
&6x^2-6x+6=5+4x^2-2x\\
&2x^2-4x+1=0
\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 2}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}\quad\Longrightarrow\quad x_1=\frac{4+\sqrt{8}}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 5. *Resolver;*

$$3^x+\frac{1}{3^{x+1}}=\frac{28}{9}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3^x+\frac{1}{3^{x+1}}=\frac{28}{9}\\
&3^x+\frac{1}{3^x\cdot 3}=\frac{28}{9} && \text{(Multiplicamos por } 9\cdot 3^x)\\
&9\cdot 3^x3^x+\frac{9\cdot 3^x}{3^x\cdot 3}=\frac{9\cdot 3^x\cdot 28}{9}\\
&9\cdot 3^{2x}+3=3^x\cdot 28\\
&9\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3=0
\end{aligned}$$

Despejamos 3^x con la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$3^x=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\cdot 9\cdot 3}}{2\cdot 9}=\frac{28\pm 26}{18}$$

Que da dos soluciones:

$$\begin{aligned}
&3^x=3 &&\Longrightarrow && x=1\\
&3^x=\frac{1}{9} &&\Longrightarrow && x=-2
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.

1. *¿Qué tiene que ocurrir en una ecuación de segundo grado para que sólo tenga una solución?*
2. *¿Y para que no haya solución?*
3. *¿Y para que tenga dos soluciones?*

Solución:

Para que la ecuación de segundo grado tenga una sola solución, su discriminante debe ser igual a cero. Para que no tenga solución el disciminante sebe ser negativo y para que tenga dos soluciones debe ser positivo.

Ejercicio 7. *Resolver:*

$$\ln(x-1)+\ln(x+6)=\ln(3x+2)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\ln(x-1)+\ln(x+6)=\ln(3x+2) && \text{(Aplicando la propiedad del logaritmo del producto:}\\
&\ln\left[(x-1)(x+6)\right]=\ln(3x+2)\\
&(x-1)(x+6)=3x+2\\
&x^2+2x-8=0
\end{aligned}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones $x_1=-4$ y $x_2=2$. La primera de ellas no es válida porque cuando se sustituye en la ecuación original aparece el logaritmo de un número negativo.

Ejercicio 8. *Resolver:*

$$\frac{1}{4}\,(3x^2-1)(x^2+3)-\frac{1}{3}\,(2x^2+1)(x^2-3)=4x^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\,(3x^2-1)(x^2+3)-\frac{1}{3}\,(2x^2+1)(x^2-3)=4x^2 && \text{(Multiplicamos los dos miembros por 12:)}\\
&\frac{12}{4}\,(3x^2-1)(x^2+3)-\frac{12}{3}\,(2x^2+1)(x^2-3)=12\cdot 4x^2\\
&3\cdot(3x^2-1)(x^2+3)-4\cdot(2x^2+1)(x^2-3)=48x^2\\
&9x^4+24x^2-9-8x^4+20x^2+12-48x^2=0\\
&x^4-4x^2+3=0
\end{aligned}$$

Despejamos x^2 con la fórmula de la ecuación de segundo grado y obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}
&x^2=3 \quad\Longrightarrow\quad x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{3}\\
&x^2=1 \quad\Longrightarrow\quad x_3=-1,\quad x_4=1
\end{aligned}$$

Ejercicio 9. *Resolver*

$$x-\sqrt{7-3x}=1$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&x-\sqrt{7-3x}=1 && \text{(Despejamos la raíz cuadrada:)}\\
&x-1=\sqrt{7-3x} && \text{(Elevamos al cuadrado los dos miembros:)}\\
&(x-1)^2=\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\\
&x^2-2x+1=7-3x\\
&x^2+x-6=0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación resultan las soluciones $x_1 = -3$ y $x = 2$. La primera de ellas no es válida porque sustituyendo en la ecuación resulta:

$$-3 - \sqrt{7 - 3 \cdot (-3)} = -3 - \sqrt{16} = -3 - 4 = -7 \neq 1$$

La segunda sí es válida:

$$2 - \sqrt{7 - 3 \cdot 2} = 2 - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

Ejercicio 10. *Resolver la siguiente ecuación factorizando previamente el polinomio:*

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$$

Solución:

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -7 & -36 & 7 & 6 \\ -2 & & -12 & 38 & -4 & -6 \\ \hline & 6 & -19 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Por el teorema del factor, puesto que $x = -2$ es una raíz podemos factorizar el polinomio y escribir la ecuación como:

$$(x+2)(6x^3 - 19x^2 2x + 3) = 0$$

Buscamos ahora una raíz del polinomio de tercer grado entre los divisores del término independiente 3 y encontramos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -19 & 2 & 3 \\ 3 & & 18 & -3 & -3 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Así pues, obtenemos la ecuación factorizada

$$(x+2)(x-3)(6x^2 - x - 1) = 0$$

Las soluciones se obtienen igualando a cero cada uno de los factores:

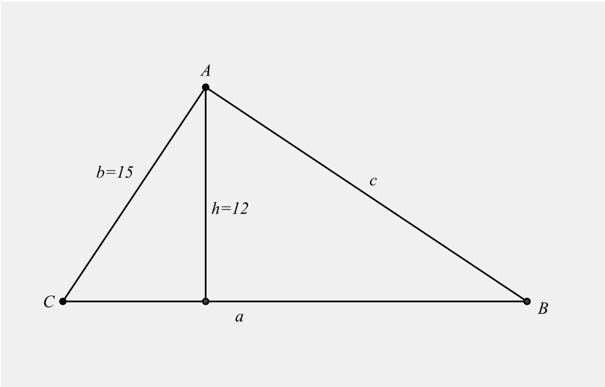
$$\begin{aligned} & x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2 \\ & x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 3 \\ & 6x^2 - x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

---

4. Trigonometría. Triángulos.

Ejercicio 1. *Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC rectángulo en A del que conocemos el cateto $b = 15$ cm y la altura relativa a la hipotenusa $h = 12$ cm.*

Solución:



De la figura se deduce:

$$\operatorname{sen} C = \frac{12}{15} \quad \Longrightarrow \quad C = 53^{\circ}7'48'' \qquad \text{y} \qquad B = 90^{\circ} - C = 36^{\circ}52'12''$$

Conocidos los ángulos calculamos los lados:

$$c = b \operatorname{tg} C = 15 \operatorname{tg} 53^{\circ}7'48'' = 20{,}00 \text{ cm}$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{15}{\operatorname{sen} 36^{\circ}52'12''} = 25{,}00 \text{ cm}$$

Ejercicio 2. *Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con la antena ángulos de 36^{o} y 48^{o}. Los puntos de sujección de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 m. Calcula la altura de la antena.*

Solución:

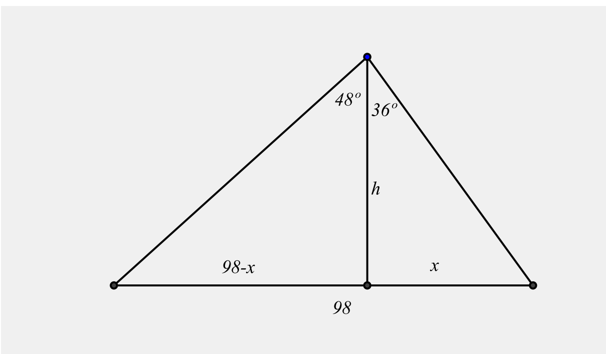
En los triángulos rectángulos de la figura se cumple que:

$$x = h \operatorname{tg} 36^{\circ}$$
$$98 - x = h \operatorname{tg} 48^{\circ}$$

y de aquí:

$$98 - h \operatorname{tg} 36^{\circ} = h \operatorname{tg} 48^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad 98 = h \operatorname{tg} 48 + h \operatorname{tg} 36^{\circ} = h(\operatorname{tg} 48^{\circ} + \operatorname{tg} 36^{\circ})$$

$$h = \frac{98}{\operatorname{tg} 48^{\circ} + \operatorname{tg} 36^{\circ}} = 53{,}34 \text{ m}$$



Ejercicio 3. *Halla el seno y la tangente de α sabiendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y α es un ángulo del cuarto cuadrante.*

Solución:

Por estar el ángulo en el cuarto cuadrante su seno es negativo de forma que:

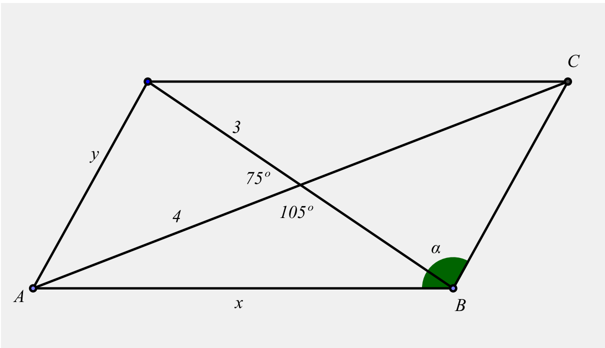
$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{5}{9}} = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$$

y la tangente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 4. *Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 8 cm y forman un ángulo de 75^o. Hallar los lados y los ángulos del paralelogramo.*

Solución:



Los lados se pueden calcular por el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos 105^{\text{o}} &&\Longrightarrow\quad x = 5{,}59\text{ cm}\\ y^2 &= 3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos 75^{\text{o}} &&\Longrightarrow\quad y = 4{,}33\text{ cm}\end{aligned}$$

Los ángulos pueden calcularse también por el teorema del coseno. En el triángulo ABC:

$$\cos\alpha = \frac{5{,}59^2+4{,}33^2-8^2}{2\cdot 5{,}59\cdot 4{,}33} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 106^{\text{o}}45'54''$$

El otro ángulo del paralelogramo es suplementario del anterior:

$$180^{\text{o}}-\alpha = 180^{\text{o}}-106^{\text{o}}45'54'' = 73^{\text{o}}14'6''$$

Ejercicio 5. *Resuelve un triángulo del que se conocen sus lados $a = 57$ cm, $b = 42$ cm y $c = 68$ cm.*

Solución:

Los ángulos se obtienen por el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{42^2+68^2-57^2}{2\cdot 42\cdot 68} &&\Longrightarrow\quad A = 56^{\text{o}}39'51''\\ \cos B &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{57^2+68^2-42^2}{2\cdot 57\cdot 68} &&\Longrightarrow\quad B = 37^{\text{o}}59'45''\\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{57^2+42^2-68^2}{2\cdot 57\cdot 42} &&\Longrightarrow\quad C = 85^{\text{o}}20'24''\end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Obtén con la calculadora:*

1. *Un ángulo del tercer cuadrante cuya tangente vale* 2.
2. *Un ángulo del tercer cuadrante cuyo seno vale* −0,32.

Solución:

Buscamos con la calculadora:

$$\operatorname{artg} 2 = 63^{\text{o}}26'6''$$

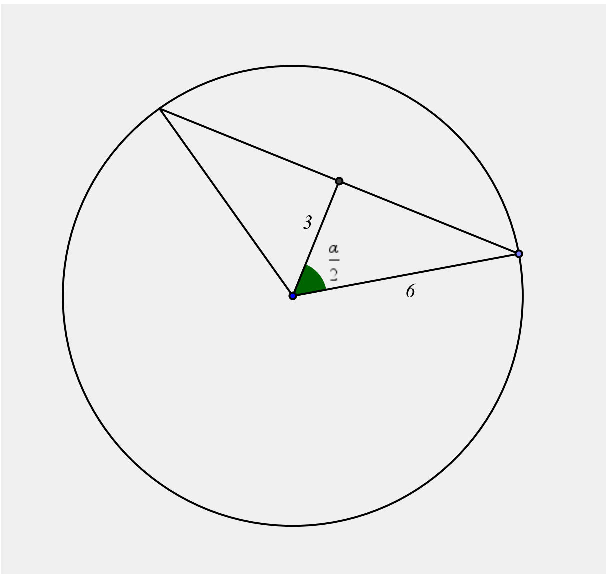
El ángulo del tercer cuadrante que tiene este valor de la tangente es $180^{\text{o}} + 63^{\text{o}}26'6'' = 243^{\text{o}}26'6''$.

Para calcular un ángulo del tercer cuadrante cuyo seno valga $-0{,}32$ procedemos de modo similar. Calculamos

$$\operatorname{arsen} 0{,}32 = 18^{\text{o}}39'47''$$

El ángulo buscado es el del tercer cuadrante que tiene el mismo seno que este salvo el signo, es decir $180^{\text{o}} + 18^{\text{o}}39'47'' = 198^{\text{o}}39'47''$.

Ejercicio 7. *En una circunferencia de radio* 6 *cm se traza una cuerda AB a* 3 *cm del centro. Calcular el ángulo que forman los radios trazados por A y B.*



Solución:

De la figura se deduce:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{6} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\alpha}{2} = 60^{\text{o}} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 120^{\text{o}}$$

Ejercicio 8. *Demuestra el teorema del coseno.*

---

5. Examen de la primera evaluación

1. *Calcula las siguientes sumas:*

   a) $9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$

   b) $5+9+13+\cdots+325$

2. En *una progresión aritmética sabemos que* $d=3$, $a_n=34$ *y* $S_n=133$. *Calcula* n *y* a_1.

3. *Resolver la ecuación:*

   $$\log(x+9)=2+\log x$$

4. *Resolver la ecuación:*

   $$6x^3+7x^2-1=0$$

5. *Sin utilizar la calculadora obtén los siguientes logaritmos:*

   a) $\log_{\sqrt{3}} 3$ *b*) $\log_2 \frac{1}{64}$ *c*) $\log_2 \sqrt{8}$ *d*) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$

6. *a*) *Efectúa y simplifica:* $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

   b) *Racionaliza:* $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$

7. *Resolver el triángulo en el que se conocen* $A=63^o$, $B=95^o$ *y* $c=19$ *cm.*

8. *Calcular un ángulo:*

   a) *Del tercer cuadrante cuyo coseno es* $-0{,}54$.

   b) *Del segundo cuadrante cuyo seno vale* $0{,}44$.

---

6. Trigonometría

1. *Deduce las fórmulas de* $\cos(\alpha+\beta)$ *y* $\cos 2\alpha$.
2. *Con ayuda de la calculadora obtén todos los ángulos* x *tales que*

   $$\cos x = -0{,}27$$

   Expresa el resultado en grados y radianes.
3. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$ y $\cos\alpha < 0$ calcula $\cos(\pi+\alpha)$, $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
4. *Demuestra la identidad*

   $$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

5. *Resolver la ecuación*

   $$\operatorname{sen} 2x \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x$$

---

7. Números complejos

Ejercicio 1 *Dados los números complejos* $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$ *calcula* $\dfrac{2z - 3t}{w}$

Solución:

$$\frac{2z-3t}{w} = \frac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2}{-3+2i}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{2z-3t}{w} = \frac{2(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-6-4i}{9+4} = \frac{-6}{13} - \frac{4}{13}i$$

Ejercicio 2 *Dados los complejos* $2 - ai$ *y* $3 - bi$*, halla* a *y* b *para que su producto sea igual a* $8 - 4i$*.*

Solución:

Multiplicamos los dos complejos:

$$(2-ai)(3-bi) = 6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 6 - ab + (-3a - 2b)i$$

Como este complejo debe ser igual a 8-4i, igualando parte real e imaginaria resulta el sistema:

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -3a - 2b = -4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} ab = -2 \\ 3a + 2b = 4 \end{cases}$$

resolviendo este sistema se obtienen las dos soluciones:

$$a = 2, b = -1 \qquad y \qquad a = -\frac{2}{3}, b = 3$$

Ejercicio 3 *Escribe los siguientes números complejos en forma polar:*

1. -4
2. $2i$
3. $-\frac{3}{4}i$
4. $-2 + 2\sqrt{3}i$

Solución:

Los tres primeros son:

$$\begin{aligned} -4 &= 4_{180^{\text{o}}} \\ 2i &= 2_{90^{\text{o}}} \\ -\frac{3}{4}i &= \left(\frac{3}{4}\right)_{270^{\text{o}}} \end{aligned}$$

Para el cuarto calculamos el módulo y el argumento:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{4+12} = 4 \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 120^{\text{o}} \qquad (\varphi \text{ en el segundo cuadrante}) \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{120^{\text{o}}}$$

Ejercicio 4 *Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:*

1. $1_{\pi/2}$
2. 5_{270^o}
3. 1_{150^o}
4. 4_{100^o}

Solución:

$$\begin{aligned}
&1_{\pi/2} = i\\
&5_{270^o} = -5i\\
&1_{150^o} = 1\cdot(\cos 150^o + i\operatorname{sen}150^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
&4_{100^o} = 4\cdot(\cos 100^o + i\operatorname{sen}100^o) = 4\cos 100^o + 4\operatorname{sen}100^o\cdot i
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 *Calcula*

$$(-1-i\sqrt{3})^6(\sqrt{3}-i)$$

Solución:

Pasamos a forma polar:

$$\begin{aligned}
-1-i\sqrt{3} &= 2_{240^o}\\
\sqrt{3}-i &= 2_{330^o}
\end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned}
(-1-i\sqrt{3})^6(\sqrt{3}-i) &= (2^6)_{6\cdot 240^o}\cdot 2_{330^o}\\
&= (2^6\cdot 2)_{6/240^o+330^o}\\
&= 128_{1770^o} = 128_{330^o}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6 *Calcula*

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$$

Solución:

Efectuamos el cociente y pasamos el resultado a forma polar:

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71{,}57^o}$$

La primera raíz cúbica se obtiene haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 3 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{10}}{5}}\right)_{71{,}57^o/3} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23{,}86^o}$$

Como las otras raíces cúbics tienen el mismo módulo y difieren en el argumento en 120^o serán:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23{,}86^o+120^o} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{143{,}86^o}\\
z_3 &= \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23{,}86^o+240^o} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{263{,}86^o}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7 *El producto de dos números complejos es -8 y el primero es el cuadrado del segundo. Calcúlalos.*

Solución:

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= -8 \\ z_1 &= z_2^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $z_1 = z_2^2$ en la primera ecuación resulta $z_2^3 = -8$. El complejo z_2 es, por consiguiente, cualquiera de las raíces cúbicas de -8. Conocemos una de ellas que es $-2 = 2_{0^o}$. Las otras dos tienen el mismo módulo y difieren en 120º en el argumento. Entonces:

$$\begin{aligned} z_2 = 2_{180^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_1 = z_2^2 = 4_{360^o} = 4_{0^o} \\ z_2 = 2_{300^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_1 = z_2^2 = 4_{600^o} = 4_{240^o} \\ z_2 = 2_{60^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_1 = z_2^2 = 4_{120^o} \end{aligned}$$

Ejercicio 8 *Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?*

Solución:

Los dos complejos son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= -8 \\ \tfrac{z_1^3}{z_2} &= 2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación resulta que $z_2 = \frac{z_1^3}{2}$: Sustituyendo en la primera:

$$z_1 \cdot \frac{z_1^3}{2} = -8 \quad \Longrightarrow \quad z_1^4 = -16 = 16_{180^o}$$

Las soluciones las obtenemos haciendo las raíces cuartas de -16. Una de ellas es:

$$z_1 = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{180^o/4} = 2_{45^o}$$

Sumando 90º obtenemos las demás. Así pues las soluciones son:

$$\begin{aligned} z_1 = 2_{45^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{135^o}}{2} = 4_{135^o} \\ z_1 = 2_{135^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{405^o}}{2} = 4_{45^o} \\ z_1 = 2_{225^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{675^o}}{2} = 4_{315^o} \\ z_1 = 2_{315^o} \quad &\Longrightarrow \quad z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{945^o}}{2} = 4_{225^o} \end{aligned}$$

8. Segundo examen de complejos

Ejercicio 1 *(1,5 pt) Calcular:*

$$\frac{(2-i)^2+(1+i)^2}{1+3i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{(2-i)^2+(1+i)^2}{1+3i} &= \frac{4-4i+i^2+1+2i+i^2}{1+3i}\\ &= \frac{3-2i}{1+3i}\\ &= \frac{(3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}\\ &= \frac{3-9i-2i-6i^2}{1+9}\\ &= -\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i\end{aligned}$$

Ejercicio 2 *(1 pt) ¿Cuánto debe valer x para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?*

Solución:

$$(25-xi)^2 = 625-50xi+x^2i^2 = 625-x^2-50xi$$

Puesto que el número debe ser imaginario puro la parte real debe ser igual a cero:

$$625-x^2=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{625}=\pm 25$$

Ejercicio 3 *(1,5 pt) Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:*

1. $5_{\pi/6}$
2. $2_{135^{\circ}}$
3. $5_{180^{\circ}}$
4. $2_{495^{\circ}}$

Solución:

$$5_{\pi/6} = 5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$2_{135^{\circ}} = 2\left(\cos 135^{\circ}+i\operatorname{sen}135^{\circ}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$5_{180^{\circ}} = -5$$

$$2_{495^{\circ}} = 2_{135^{\circ}} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

Ejercicio 4 *(1,5 pt) Calcular*

$$\frac{8}{(1-i)^5}$$

Solución:

Pasamos numerador y denominador a la forma polar:

$$\begin{aligned} 8 &= 8_{0^o} \\ 1-i &= \left(\sqrt{2}\right)_{315^o} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} [\frac{8}{(1-i)^5} &= \frac{8_{0^o}}{(\sqrt{32})_{5\times 315^o}} \\ &= \frac{8_{0^o}}{(4\sqrt{2})_{1575^o}} \\ &= \frac{8_{0^o}}{(4\sqrt{2})_{135}} \\ &= \left(\sqrt{2}\right)_{-135^o} \\ &= \left(\sqrt{2}\right)_{225^o} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 *(*1,5 *pt) Calcula las raíces cuartas de* $1-\sqrt{3}i$*.*

Solución:

El módulo y argumento de este complejo son:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \quad \overset{\varphi\in IV}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 300^o \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{(2)_{300}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{\frac{300^o+360^o k}{4}}$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 y 3 obtenemos las cuatro raíces cuartas:

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)_{75^o}, \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)_{165^o}, \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)_{255^o}, \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)_{345^o}$$

Ejercicio 6 *(*1 *pt) Sean*

$$z_1 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^4, \qquad z_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3, \qquad z_3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

Calcula $z_1z_2z_3$ *y exprésalo en forma binómica.*

Solución:

Primero expresaremos los tres complejos en forma polar para hacer las potencias y el producto y después pasaremos a la forma binómica:

$$1+i\sqrt{3} = 2_{60^o}, \qquad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{300^o}, \qquad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^o}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
z_1z_2z_3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\
&= \left(2_{60^o}\right)^4 \cdot \left(1_{300^o}\right)^3 \cdot \left(1_{240^o}\right)^3 \\
&= 16_{240^o} \cdot 1_{900^o} \cdot 1_{720^o} \\
&= 16_{1860^o} \\
&= 16_{60^o} \\
&= 16\left(\cos 60^o + i \operatorname{sen} 60^o\right) \\
&= 8+8\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Ejercicio 7 *(1 pt) El número complejo 3_{40^o} es el vértice de un pentágono regular centrado en el origen. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.*

Solución:

Puesto que el pentágono está centrado en el origen, los vértices del pentágono representan complejos del mismo módulo y argumentos que difieren en $360^o/5 = 72^o$.

Los vértices son:

$$3_{40^o}, \quad 3_{112^o}, \quad 3_{184^o}, \quad 3_{256^o}, \quad 3_{328^o}$$

Estos números son raíces quintas de un número complejo que puede obtenerse elevando a 5 uno cualquiera de ellos:

$$\sqrt[5]{z} = 3_{40^o} \quad \Longrightarrow \quad z = \left(3_{40^o}\right)^5 = 243_{200^o}$$

Ejercicio 8 *(1 pt) Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos están en la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 3.*

Solución:

La distancia entre los afijos de dos complejos es igual al módulo de su diferencia:

$$d(z,z') = |z-z'|$$

La circunferencia está formada por los puntos que se encuentran a distancia 3 de $1+i$. Por consiguiente todos los puntos de la circunferencia cumplen que:

$$|z-1-i| = 3$$

---

9. Geometría

Ejercicio 1

1. *Calcular el punto medio del segmento de extremos* $A(5,-1)$ *y* $B(4,2)$*.*
2. *Calcular el punto simétrico de* $A(3,-1)$ *respecto de* $P(6,-3)$*.*

Solución:

1. El punto medio se calcula por:
$$x = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}; \qquad y = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$
2. Sea $A'(x',y')$ el punto simétrico de A respecto a P. Puesto que P es punto medio del segmento AA' resulta:
$$\begin{aligned} 6 &= \frac{3+x'}{2} \quad \Longrightarrow \quad 3+x' = 12 \quad \Longrightarrow \quad x' = 9 \\ -3 &= \frac{-1+y'}{2} \quad \Longrightarrow \quad -1+y' = -6 \quad \Longrightarrow \quad y' = -5 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Calcular la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto* $P(2,-2)$ *y cuya pendiente es* -3*.*

Solución:

Si conocemos un punto $P(2,-2)$ y la pendiente de la recta $m=-3$, la ecuación de la recta en la forma punto pendiente es:

$$y+2 = -3\cdot(x-2)$$

Pasando todos los términos al primer miembro de la igualdad se obtiene la ecuación implícita:

$$3x+y-4=0$$

Ejercicio 3 *Calcular la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos* $A(-1,-2)$ *y* $B(0,5)$*.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5-(-2)}{0-(-1)} = 7$$

El punto B nos da la ordenada en el origen 5. La ecuación explícita es:

$$y = 7x+5$$

Ejercicio 4 *Dados los puntos* $P(3,2)$ *y* $Q(-2,4)$*, y la recta* $r:\ y=2x-3$ *calcula la distancia:*

1. *Entre* P *y* Q*.*
2. *De* P *a* r*.*

Solución:

1. $$d(P,Q)=\sqrt{(-2-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

2. Para calcular la distancia del punto a la recta, primero se escribe la ecuación de la recta en forma implícita:

$$y=2x-3 \quad\Longrightarrow\quad 2x-y-3=0 \quad\Longrightarrow\quad d(P,r)=\left|\frac{2\cdot 3-2-3}{\sqrt{4+1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 5 *Calcular el ángulo que forman las rectas* $r:\ 3x-5y+6=0$ *y* $s:\ y=-2x+1$ *en grados, minutos y segundos.*

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1=\frac{3}{5}$ y la segunda $m_2=-2$. El ángulo agudo entre las dos rectas es:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{\frac{3}{5}-(-2)}{1+\frac{3}{5}\cdot(-2)}\right|=\left|\frac{\frac{13}{5}}{\frac{-1}{5}}\right|=13$$

de donde $\varphi=85^{\circ}36'5''$

Ejercicio 6 *¿Cuál ha de ser el valor de* k *para que las rectas* $x+3y-2=0$ *y* $kx+2y+3=0$ *sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?*

Solución:

Para que sean paralelas debe cumplirse que:

$$\frac{1}{k}=\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{2}{3}$$

y para que sean perpendiculares:

$$1\cdot k+3\cdot 2=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-6$$

Ejercicio 7 *Calcular las ecuaciones de la paralela y la perpendicular a la recta* $2x+5y-6=0$ *por el punto* $P(-1,4)$.

Solución:

La recta dada tiene pendiente $m=-\frac{2}{5}$. La paralela tiene la misma pendiente y la perpendicular la opuesta de la inversa. Así pues las dos rectas son:

$$y-4=-\frac{2}{5}(x+1) \qquad \text{paralela}$$

$$y-4=\frac{5}{2}(x+1) \qquad \text{perpendicular}$$

Ejercicio 8 *Calcular los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas*:
$r:\ x-y-2=0,\quad s:\ 2x+3y-9=0,\quad t:\ x=0$

Solución:

Los vértices se obtienen como intersección de las rectas dadas:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ x=0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array}\right.$$

Así pues los vértices son $A(3,1)$, $B(0,-2)$ y $C(0,3)$.

Para calcular el área podemos aprovechar que los vértices B y C están sobre el eje de ordenadas. Tomamos como base la longitud del lado BC que vale $BC=5$ y como altura la distancia de $A(3,1)$ al eje de ordenadas que vale 3. El área es:

$$S=\frac{1}{2}\,5\cdot 3=\frac{15}{2}$$

Ejercicio 9 *Dados los puntos $A(-1,3)$ y $B(2,-1)$ escribe la condición que deben cumplir las coordenadas del punto $C(x,y)$ para que el triángulo ABC sea rectángulo en C*

Solución:

Sea $C(x,y)$. Si el triángulo es rectángulo en C, AC y BC son perpendiculares, de modo que el producto de las pendientes de estas rectas es -1:

$$\frac{y-3}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-2}=-1 \quad\implies\quad (y-3)(y+1)=-(x+1)(x-2) \quad\implies\quad y^2-2y-2=-x^2+x+2$$

condición que puede escribirse:

$$x^2+y^2-x-2y-4=0$$

Veremos más adelante que esta ecuación representa una circunferencia.

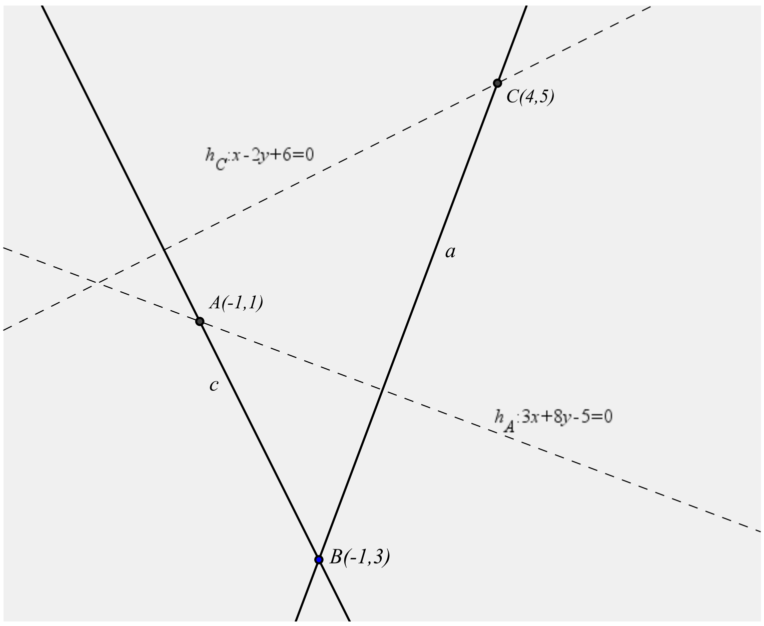


Figura 1: Triángulo conocido un vértice y dos alturas

Ejercicio 10 *Las rectas* $3x + 8y - 5 = 0$ *y* $x - 2y + 6 = 0$ *son dos alturas del triángulo* ABC *de vértice* $B(1, -3)$. *Calcular las coordenadas de los vértices* A *y* C

Solución:

Vemos en primer lugar que el punto B no cumple ninguna de las dos ecuaciones. Éstas son por tanto, las alturas correspondientes a los vértices A y C.

$$h_A :\ 3x + 8y - 5 = 0, \qquad h_C :\ x - 2y + 6 = 0$$

El lado a pasa por el vértice B y es perpendicular a h_A (ver figura 1). Como h_A tiene pendiente $-\frac{3}{8}$ el lado a tiene de ecuación:

$$a :\ y + 3 = \frac{8}{3} \cdot (x - 1) \quad \Longrightarrow \quad 8x - 3y - 17 = 0$$

De la misma forma, el lado c pasa por el vértice B y es perpendicular a h_C. Como h_C tiene pendiente $\frac{1}{2}$ el lado c tiene de ecuación:

$$c :\ y + 3 = -2 \cdot (x - 1) \quad \Longrightarrow \quad 2x + y + 1 = 0$$

Ahora para hallar el vértice A calculamos la intersección del lado c y de la altura h_A

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x + 8y - 5 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(-1, 1)$$

El vértice C lo calculamos como intersección del lado a y de la altura h_C:

$$\begin{cases} 8x - 3y - 17 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad C(4, 5)$$

---

10. Segundo examen de geometría

Ejercicio 1

1. *Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3,-2)$ y $Q(-1,5)$.*
2. *Halla el simétrico del punto $P(3,-2)$ con respecto a $Q(-1,5)$.*

Solución:

El punto medio tiene de coordenadas:

$$x=\frac{3+(-1)}{2}=1,\qquad y=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}$$

Si $P'(x',y')$ es el simétrico de P respecto de Q, éste último punto es el punto medio del segmento PP'. Entonces:

$$\begin{aligned}-1&=\frac{3+x'}{2} &&\Longrightarrow\quad x'=-5\\ 5&=\frac{-2+y'}{2} &&\Longrightarrow\quad y'=12\end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(2,-3)$ y $B(-1,4)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m=\frac{4-(-3)}{-1-2}=-\frac{7}{3}$$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y+3=-\frac{7}{3}(x-2)$$

Para ponerla en forma explícita despejamos y:

$$y=-\frac{7}{3}x+\frac{14}{3}-3\quad\Longrightarrow\quad y=-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$$

Ejercicio 3 *Halla el ángulo que forman las rectas:*

$$r:\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{3},\qquad s:\ \frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-6}$$

Solución:

Calculando las pendientes de ambas rectas se obtiene que ambas son iguales a $-\frac{3}{2}$. Las dos rectas son paralelas y el ángulo que forman es de cero grados.

Ejercicio 4 *Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-2,5)$ y tiene pendiente $-\frac{2}{5}$.*

Solución:

En forma punto-pendiente la ecuación de la recta es:

$$y-5=-\frac{2}{5}(x+2)$$

Quitando denominadores y pasando todos los sumados al primer miembro se obtiene la ecuación implícita:

$$5y - 25 = -2x - 4 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 5y - 21 = 0$$

Ejercicio 5 *Halla el valor de k para que las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $-3x + ky - 1 = 0$ sean* a) *paralelas,* b) *perpendiculares.*

Solución:

Para que sean paralelas debe cumplirse:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-3}{k} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{9}{2}$$

y para que sean perpendiculares:

$$2 \cdot (-3) + (-3) \cdot k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -2$$

Ejercicio 6 *Los puntos $A(3, -5)$, $B(-6, 1)$ y $C(-1, k)$ están alineados. Obtener el valor de k.*

Solución:

Un modo de resolver este problema es aplicar que si los tres puntos están alineados la pendiente de la recta AB es igual que la pendiente de la recta AC:

$$m_{AB} = m_{AC} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1 - (-5)}{-6 - 3} = \frac{k - (-5)}{-1 - 3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{-9} = \frac{k + 5}{-4} \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{7}{3}$$

Otra forma sería calcular la ecuación de la recta AB:

$$y + 5 = -\frac{2}{3}(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad 2x + 3y + 9 = 0$$

Si el punto C está alineado con A y B está contenido en esta recta y, por consiguiente, sus coordenadas cumplen esta ecuación:

$$2 \cdot (-1) + 3k + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{7}{3}$$

Ejercicio 7 *Encuentra el punto de la recta $r: \ 4x - 8y + 7 = 0$ equidistante de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$.*

Solución:

El punto que buscamos es equidistante de A y B y, por tanto, está en la mediatriz de AB que tiene por ecuación:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \qquad \text{simplificando}$$
$$2x + 8y + 5 = 0$$

Como el punto debe estar en la recta r y en la mediatriz que acabamos de calcular, debe ser la intersección de ambas rectas. Sus coordenadas serán la solución del sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 8y + 7 = 0 \\ 2x + 8y + 5 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Ejercicio 8 *La recta $r: \ 2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0, 0)$. Halla las coordenadas del otro extremo.*

Solución:

- ⋄ Perpendicular por O(0,0) a la recta r. Puesto que r tiene pendiente -2 la perpendicular tendrá pendiente $\frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{2}\,x$$

- ⋄ Intersección de la recta r y la perpendicular (pie de la perpendicular P):

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ y = \frac{1}{2}\,x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

- ⋄ Punto simétrico de O respecto de P:

$$\frac{8}{5} = \frac{0+x}{2}; \quad \frac{4}{5} = \frac{0+y}{2}$$

de forma que el punto buscado es $O'(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$.

Otro método (de Lupiani)

Sea $P(a, b)$ el punto buscado. La mediatriz de OP es:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

Haciendo operaciones y simplificando resulta la siguiente ecuación para la mediatriz:

$$2ax + 2by + a^2 + b^2 = 0$$

Como esta mediatriz debe coincidir con la dada, los coeficientes de la ecuación deben ser proporcionales:

$$\frac{2a}{2} = \frac{2b}{1} = \frac{a^2+b^2}{4}$$

Resolviendo este sistema resulta

$$\begin{cases} a = 2b \\ a^2 + b^2 = 8b \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 4b^2 + b^2 = 8b \quad \Longrightarrow \quad 5b^2 - 8b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b(5b-8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{8}{5}$$

La solución $b = 0$ no es válida pues nos da de nuevo el punto $O(0, 0)$. Puesto que $a = 2b$ obtenemos de nuevo el resultado $\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Ejercicio 9 *Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$ dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?*

Solución:

Si el punto P es equidistante de A y B está en la mediatriz de AB que tiene por ecuación:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (x+5)^2 + (y-6)^2 \qquad \text{simplificando:}$$
$$4x - y + 9 = 0$$

Si la distancia de $P(x, y)$ al eje de abscisas es el doble que al eje de ordenadas se verifica que, o bien $y = 2x$ o bien $y = -2x$. Las dos soluciones del problema son:

$$\begin{cases} 4x - y + 9 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P\left(-\frac{9}{2}, 9\right); \qquad \begin{cases} 4x - y + 9 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

Ejercicio 10 *Dada la recta $r:\ 2x - 3y + 5 = 0$, hallar la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.*

Solución:

La recta simétrica tiene el mismo punto de intersección con el eje de abscisas que la recta r y su pendiente es igual pero de signo contrario. La recta r tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y su intersección con el eje de abscisas A es:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+5=0 \\ y=0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad A\left(-\frac{5}{2},0\right)$$

La recta simétrica tiene entonces de ecuación:

$$y-0=-\frac{2}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

---

11. Tercer ejercicio de geometría

Ejercicio 1 *Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos* $P(3,-1)$ *y* $Q(2,-4)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{-4-(-1)}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

así que la ecuacion en forma punto-pendiente es:

$$y+1 = 3\,(x-3)$$

Pasando todos los términos al primer miembro obtenemos la ecuación implícita:

$$3x-y-10=0$$

Ejercicio 2 *Calcula en forma implícita la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(2,-3)$ *y es perpendicular a* $y = \frac{2}{5}\,x+1$.

Solución:

Puesto que la recta dada tiene pendiente $\frac{2}{5}$, la perpendicular tiene de pendiente $-\frac{5}{2}$. La ecuación de la perpendicular en la forma punto-pendiente es:

$$y+3 = -\frac{5}{2}\,(x-2)$$

Quitando denominadores y pasando al primer miembro se obtiene la ecuación implícita:

$$5x+2y-4=0$$

Ejercicio 3 *Calcular el ángulo que forma con el eje de abscisas la mediatriz del segmento de extremos* $A(-1,2)$, $B(-5,7)$.

Solución:

La mediatriz tiene de ecuación:

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = (x+5)^2+(y-7)^2 \quad\Longrightarrow\quad 2x+1-4y+4 = 10x+25-14y+49 \quad\Longrightarrow\quad 8x-10y+69=0$$

Esta recta tiene de pendiente $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. El ángulo con el eje de abscisas es:

$$\operatorname{artg}\,\frac{4}{5} = 38^{o}39'35''$$

Ejercicio 4 *Determina los puntos* P *y* Q *que dividen el segmento de extremos* $A(-2,1)$ *y* $B(5,4)$, *en tres partes iguales.*

Solución:

Los puntos son:

$$x_1 = \frac{2\cdot(-2)+5}{3} = \frac{1}{3}\,; \quad y_1 = \frac{2\cdot 1+4}{3} = 2; \quad P_1\left(\frac{1}{3},2\right)$$

$$x_2 = \frac{-2+2\cdot 5}{3} = \frac{8}{3}\,; \quad y_2 = \frac{1+2\cdot 4}{3} = 3; \quad P_2\left(\frac{8}{3},3\right)$$

Ejercicio 5 *Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por* $P(-1,2)$ *y es paralela a* $3x-y+4=0$.

Solución:

La recta dada tiene pendiente $m=3$. La paralela tendrá también pendiente 3 y, como además pasa por el punto $P(-1,2)$, su ecuación en la forma punto-pendiente es:

$$y-2=3\,(x+1)$$

y en forma implícita:

$$3x-y+5=0$$

Otra forma de resolver este problema es la siguiente: puesto que las rectas deben ser paralelas, os coeficientes A y B de la ecuación implícita deben ser proporcionales. Tomémoslos iguales y calculemos C de modo que la recta contenga al punto dado:

$$P\in 3x-y+C=0 \quad\Longrightarrow\quad 3\cdot(-1)-2+C=0 \quad\Longrightarrow\quad C=5$$

Y, por tanto, la recta buscada es $3x-y+5=0$.

Ejercicio 6 *Calcula el punto de corte con el eje de abscisas de la paralela a* $3x-2y+5=0$ *por el punto* $P(-3,-2)$

Solución:

Procediendo como en el problema anterior se encuentra que la paralela es la misma recta $3x-2y+5=0$. El corte con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad A\left(-\frac{5}{3},0\right)$$

Ejercicio 7 *Calcula* c *para que la distancia entre las rectas* $4x+3y-6=0$ *y* $4x+3y+c=0$ *sea igual a* 3.

Solución:

Tomemos un punto cualquiera de la primera recta, por ejemplo $P(0,2)$. Si la distancia de este punto a la segunda recta es 3:

$$3=\left|\frac{4\cdot 0+3\cdot 2+c}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{|6+c|}{5} \quad\Longrightarrow\quad |6+c|=15$$

ecuación que tiene dos soluciones:

$$\begin{aligned} 6+c=15 \quad&\Longrightarrow\quad c=9 \\ 6+c=-15 \quad&\Longrightarrow\quad c=-21 \end{aligned}$$

En general, puede verse que la distancia entre dos rectas paralelas $Ax+By+C=0$ y $Ax+By+C'=0$ es:

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejercicio 8 *Calcular el ortocentro del triángulo de vértices* $A(2,0)$*,* $B(0,1)$ *y* $C(-3,-2)$*.*

Solución:

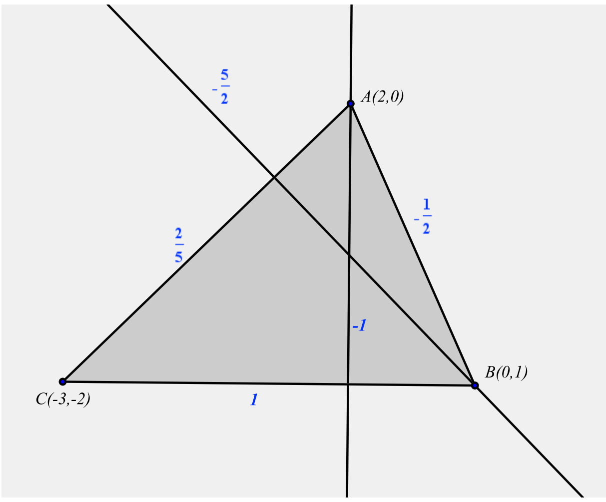


Figura 2: Pendientes de los lados a las alturas

En la figura 2 se han representado las pendientes de los lados del triángulo y de las alturas h_A y h_B. Las ecuaciones de estas alturas son:

$$h_A: \; y = -1\,(x-2)$$
$$h_B: \; y - 1 = -\frac{5}{2}\,x$$

resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones se obtiene el ortocentro $H\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Ejercicio 9 *Halla los puntos del eje de abscisas que equidistan de las rectas* $4x+3y+6=0$ *y* $3x+4y-9=0$*.*

Solución: Los puntos que equidistan de las dos rectas se encuentran en su bisectriz:

$$\frac{4x+3y+6=0}{\sqrt{16+25}} = \pm\frac{3x+4y-9=0}{\sqrt{16+25}} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x-y+15=0 \\ 7x+7y-3=0 \end{array}\right.$$

Los puntos buscados deben estar en el eje de abscisas. Son entonces las intersecciones de las bisectrices con $y=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+15=0 \\ y=0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad A_1(-15,0); \qquad \left\{\begin{array}{l} 7x+7y-3=0 \\ y=0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad A_2\left(\frac{3}{7},0\right)$$

Ejercicio 10 *En el triángulo* ABC *conocemos el vértice* $A(-2,3)$*, la ecuación de la altura que parte de* C*,* $h_C: \; 3x-2y-8=0$ *y la ecuación del lado* BC*;* $y=3x-13$*. Hallar los vértices* B *y* C*.* **Solución:**

El vértice C es la intersección del lado BC y la altura dada:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y-8=0 \\ y=3x-13 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad C(6,5)$$

Para calcular el vértice B calculamos en primer lugar la ecuación del lado AB. Puesto que la altura h_C es perpendicular a AB y tiene de pendiente $\frac{3}{2}$, el lado AB tendrá de pendiente $-\frac{2}{3}$, de forma que su ecuación es (ver figura 3):

$$y-3 = -\frac{2}{3}\,(x+2) \quad \Longrightarrow \quad 2x+3y-5=0$$

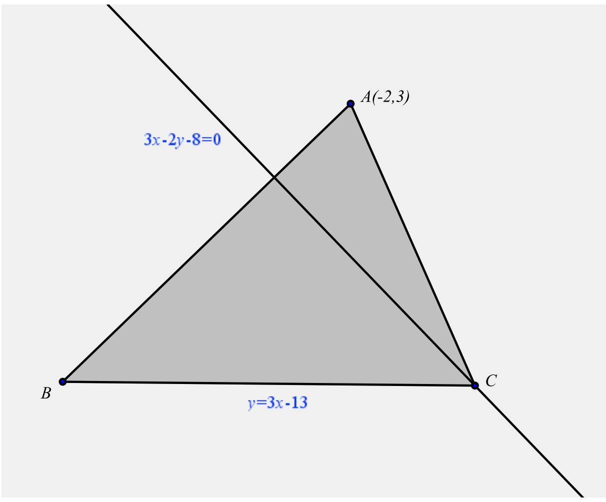


Figura 3: Ejercicio 10

El vértice B es la intersección de los lados AB y BC:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 3x - 13 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad B(4, -1)$$

---

12. Límites. Continuidad

Ejercicio 1 *Define asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*

Solución:

$$\begin{aligned}
x = x_0 \text{ asíntota de } f(x) &\quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \\
y = y_0 \text{ asíntota de } f(x) &\quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \\
y = mx + b \text{ asíntota de } f(x) &\quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Define el número e como límite. A partir de esta definición calcula el límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y aplícalo para resolver las indeterminaciones del tipo 1^∞.

Solución:

El número e se define como el siguiente límite:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

A partir de esta definición:

$$\text{lím}\, x \to 0 \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

en donde se ha aplicado la propiedad del logaritmo de la potencia. La equivalencia entre $\ln(1+x)$ y x cuando x tiende a cero nos sirve para transformar los límites indeterminados del tipo 1^∞:

sea el límite $A = \lim u^v$ donde u tiende a 1 y v tiende a ∞.

$$A = \lim u^v \quad\Longrightarrow\quad \ln A = \lim v \ln u = \lim v \ln[1 + (u-1)]$$

Puesto que $u \to 1$, $u - 1 \to 0$ y $\ln[1 + (u-1)]$ es equivalente a $u - 1$. Entonces:

$$\ln A = \lim v(u-1) \quad\Longrightarrow\quad A = e^{\lim v(u-1)}$$

Ejercicio 3 *Explica qué es un punto de discontinuidad evitable y pon un ejemplo.*

Solución:

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en el punt x_0 si existe el límite de la función cuando x tiende a x_0 pero no coincide con el valor de la función en ese punto, bien porque para x_0 la función no exista o bien porque tome un valor diferente del límite.

Por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$. Para ese valor no existe la función pero existe el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Ejercicio 4 *Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 3x^2 - 2x + 3$ y la recta $y = 2x + 2$. Representa gráficamente la parábola y la recta.*

Solución:

Los puntos de intersección se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Así se obtienen los puntos $A_1(1,4)$ y $A_2\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Con estos dos puntos se puede representar la recta. Para representar la parábola debemos calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes. El vértice es:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$$

La ordenada del vértice se calcula sustituyendo el valor de la abscisa que hemos obtenido en la ecuación de la parábola. En este caso no es necesario puesto que se trata de uno de los puntos de intersección con la recta. Resulta pues

$$V\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

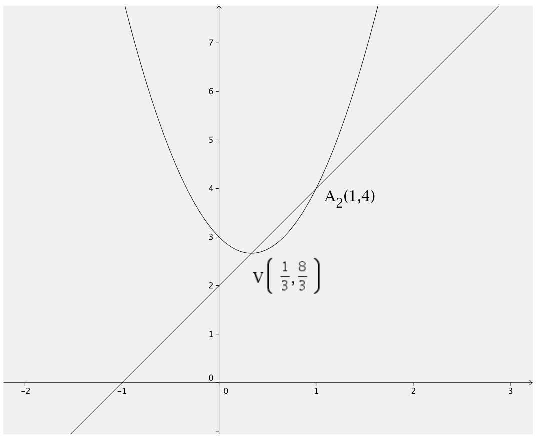
Los puntos de corte con los ejes son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

que no tiene solución y. por consiguiente no hay puntos de inteersección de la parábola con el eje de abscisas. La intersección con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \implies B(0,3)$$

La representación gráfica es:



Ejercicio 5 *Calcular el dominio de definición de la función $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$*

Solución:

Para que exista la función el radicando debe ser positivo o cero:

$$\text{Dominio } = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0\right\}$$

Para resolver la inecuación calculamos las raíces. Éstas resultan ser $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$. Puesto que el coeficiente de x^2 en el polinomio es negativo, éste será positivo entre las raíces (¿por qué?). El dominio es entonces:

$$\text{Dominio } = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0\right\} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Ejercicio 6 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 12}{x^3 + 2x^2 - 2x + 3} \qquad \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3}$$

Solución:

En el primer límite, al sustituir x por 3 resulta que tanto el numerador como el denominador se hacen cero. Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que en el caso de que las funciones sean polinómicas se resuelve simplificando la fracción.

Factorizamos numerador y denominador aplicando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 10 & 12 \\ -3 & & -3 & -6 & -12 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & & -3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Simplificando:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 12}{x^3 + 2x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{13}$$

El segundo límite es una indeterminación del mismo tipo que se resuelve también simplificando la fracción:

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{1}{x + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ejercicio 7 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 1} - x\right); \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\ln x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 1} - x\right) &= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x - 1} - x)(\sqrt{x^2 + 5x - 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x - 1} + x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 5x - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x - 1} + x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\ln x} = \infty$$

porque las funciones potenciales tienden más rápidamente a infinito que las funciones logarítmicas.

Ejercicio 8 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2^x+x^2}$$

Solución:

Para el primer límite aplicamos la transformación que se ha visto para los límites indeterminados del tipo 1^∞:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x-2}{3x+1}-1\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x-2-3x-1}{3x+1}2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x}{3x}} = e^{-2}\end{aligned}$$

En cuanto al segundo límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2^x+x^2}=\infty$$

porque las dos funciones exponenciales son infinitos de orden superior a la función potencial y entre ellas es mayor la de mayor base, es decir e^x.

Ejercicio 9 *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y=\frac{2x+1}{x^2-4}$$

Solución:

Las asíntotas verticales se obtienen entre los valores de x que anulan el denominador:

$x=-2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

$x=2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

La asintota horizontal se obtiene calculando el límite de la función cuando x tiende a ∞

$$\lim x\to\infty\frac{2x+1}{x^2-4}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=0 \text{ es asíntota}$$

Puesto que hay una asíntota horizontal no buscamos asíntotas oblicuas.

Ejercicio 10 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

Solución:

Basta aplicar las equivalencias estudiadas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

090518 nombre:

---

1. (5 puntos)
   a) Define función continua y describe los distintos tipos de discontinuidad que puede tener una función.
   b) Asíntotas. Definición de los distintos tipos
   c) Demuestra que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$
   A partir de este límite, demuestra la equivalencia $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ cuando x tiende a cero.
2. (1 punto) Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ y la recta $y = x - 2$. Calcula sus puntos de intersección.
3. (1 punto) Calcula el dominio de definición de la función $y = \ln(4 - x^2)$
4. (1 punto) Calcula las asíntotas de la curva
   $$y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$
5. (1 punto) Calcula los siguientes límites:
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^4 - 1} \qquad \lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 12}{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}$$
6. (1 punto) Calcula los siguientes límites
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - 4}{x + 1}\right)^{3x}$$

090528 nombre:

Consideremos la función:

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. Calcular su derivada a partir de la definición.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Calcular sus puntos de tangente horizontal.
4. Calcular la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa 1.

---

13. Derivadas

Ejercicio 1 *Calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ a partir de la definición. Calcular la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa 4.*

Solución:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

La ordenada en al punto de abscisa $x_0 = 4$ es $y_0 = \sqrt{4} = 2$.

La pendiente en ese punto es la derivada para $x = 4$:

$$m = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

De modo que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-4)$$

Ejercicio 2 Derivar las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

1. $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 7}$
2. $y = \dfrac{3}{x^2}$
3. $y = \dfrac{4x-1}{(x-3)^2}$
4. $y = \dfrac{e^x}{x \operatorname{sen} x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{3x^2-2x+7} & &\Longrightarrow & y' &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+7}}(6x-2) \\
y &= \frac{3}{x^2} & &\Longrightarrow & y' &= \frac{0-2x\cdot 3}{x^4} \\
y &= \frac{4x-1}{(x-3)^2} & &\Longrightarrow & y' &= \frac{4\cdot(x-3)^2 - 2(x-3)(4x-1)}{(x-3)^4} \\
y &= \frac{e^x}{x\operatorname{sen} x} & &\Longrightarrow & y' &= \frac{e^x\cdot x\operatorname{sen} x - (1\cdot \operatorname{sen} x + x\cos x)e^x}{(x\operatorname{sen} x)^2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3 *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $y = 6x + 10$.*

Solución:

Nos piden las ecuaciones de las tangentes a la curva que tienen pendiente igual a 6. Puesto que la pendiente de la tangente es la derivada, la derivada en los puntos de tangencia debe ser igual a 6:

$$y' = 3x^2 - 3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Las ordenadas de estos puntos se encuentran sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva:

$$x_1 = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad y_1 = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3} = 0$$
$$x_2 = -\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad y_2 = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\,(-\sqrt{3}) = 0$$

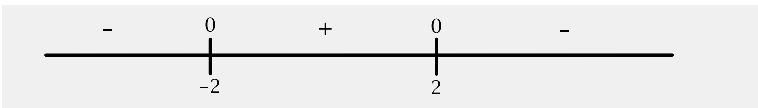
Ya tenemos los puntos de tangencia y la pendiente. Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y - 0 = 6\,(x - \sqrt{3})$$
$$y - 0 = 6\,(x + \sqrt{3})$$

Ejercicio 4 *En la función $y = 12x - x^3$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de tangente horizontal. A partir del dicho estudio decidir si se trata de máximos o mínimos y representar gráficamente la curva.*

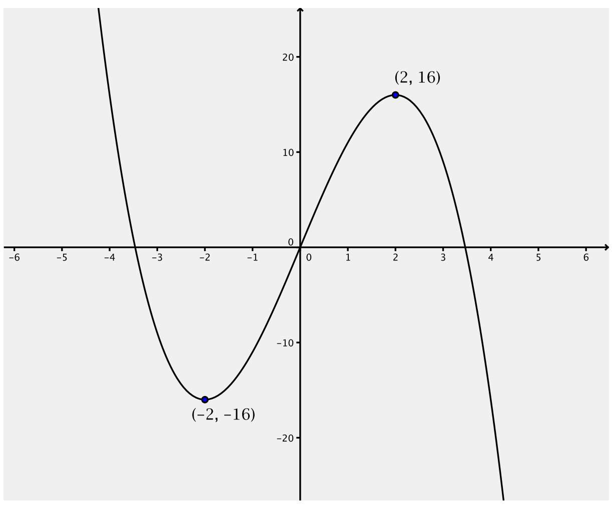
Solución:

Se trata de estudiar el signo de la derivada de la función $y' = 12 - 3x^2$. Los ceros de la derivada (puntos de tangente horizontal) so $x = -2$ y $x = 2$. El signo de la derivada se muestra en el esquema siguiente: Es decir:



$x \in (-\infty, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo en $m(-2, 16)$
$x \in (-2, +2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo en $M(2, 16)$
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	función decreciente

La representación gráfica sería entonces:



Ejercicio 5 *Calcular las asíntotas de la curva*

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Representar la curva a partir de sus asíntotas y simetría.

Solución:

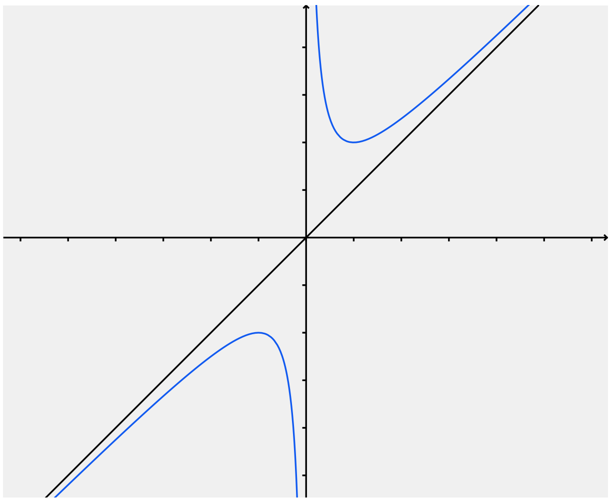
La curva tiene una asíntota vertical $x = 0$. No tiene asíntota horizontal porque el límite cuando x tiene a infinito es infinito. Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = x$.

La función tiene simetría impar puesto que el numerador es par y el denominador impar. Teniendo todo esto en cuenta y que además la curva no corta a los ejes, su representación gráfica es:



Ejercicio 6 *Representa la función*

$$y = \frac{x}{x^2+5x+4}$$

estudiando el crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

Solución:

Comenzamos calculando las asíntotas. Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador. Así se obtiene $x = -1$ y $x = -4$. Como para estos valores de x el numerador no se anula la función se hace infinita, de modo que $x = -1$ y $x = -4$ son las asíntotas verticales.

Por otra parte, $y = 0$ es la asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$

Vamos a estudiar seguidamente el signo de la derivada:

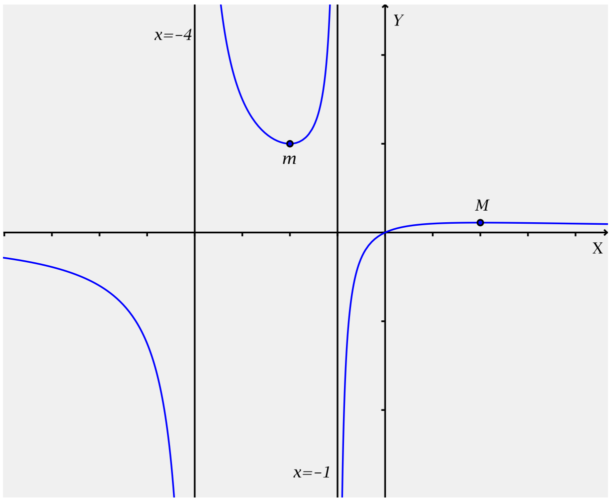
$$y' = \frac{1\cdot(x^2+5x+4) - (2x+5)\cdot x}{(x^2+5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+5x+4)^2}$$

El esquema de signos es:

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función son:

$x \in (-\infty, -4)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -4$	no existe la función	asíntota
$x \in (-4, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo en $m(-2, 1)$
$x \in (-2, -1)$	$y' > 0$	función creciente
$x = -1$	no existe la función	asíntota
$x \in (-1, +2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo en $M(2, \frac{1}{9})$
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	función decreciente

Con estos datos la gráfica sería:



Ejercicio 7 *Se considera la función definida por:*

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - x + a}$$

Determinar las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

Solución:

Sea cual sea el valor de a, la recta $y = 0$ es asíntota (horizontal) de la función.

Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador, es decir, las asíntotas serán

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

De acuerdo con el valor del discriminante $1 - 4a$ puede ocurrir:

$$\begin{aligned} 1 - 4a < 0 &\implies \text{no hay asíntotas verticales} \\ 1 - 4a = 0 &\implies \text{una asíntota vertical} \\ 1 - 4a > 0 &\implies \text{dos asíntotas verticales} \end{aligned}$$

Las rectas así calculadas serán asíntotas si para los valores obtenidos de x se anula el denominador y no se anula el numerador. Un caso especial se presenta para el valor $x = 3$ que anula el numerador. Si además se anula el denominador, es decir, para

$$3^2 - 3 + a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -6$$

la función es

$$y = \frac{x-3}{x^2+x-6} = \frac{x-3}{(x-3)(x+2)}$$

Esta función no tiene una asíntota vertical en $x = 3$ puesto que el límite cuando x tiende a 3 no es infinito. En ese punto el límite es $1/5$ y la función presenta una discontinuidad evitable.

Resumiendo, para $1 - 4a > 0$ hay dos asíntotas verticales

$$x = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, \qquad x = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

salvo para $a = -6$ que solamente hay una ($x = -2$).

14. Segundo examen de derivadas

Ejercicio 1 *Demostrar las reglas de derivación de las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\ln x$.

Solución:

Sea la función $y = \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot 1 - \cos x \cdot h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \cos x}{h} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

En el cálculo de este límite hemos aplicado que cuando h tiende a cero, $\cos h$ tiende a uno y $\operatorname{sen} h$ es equivalente a h.

Sea ahora $y = \ln x$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado la equivalencia

$$\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x}$$

cuando h tiende a cero.

Ejercicio 2 *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *que son paralelas a* $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente es -2. Vamos a calcular el punto de tangencia. Derivamos e igualamos la derivada a -2:

$$y' = \frac{2\,(x-1) - 1 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2$$

Resolvemos la ecuación:

$$-2 = -2\,(x-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x - 1 = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos y resulta:

$$x_1 = 2 \implies y_1 = 4$$
$$x_2 = 0 \implies y_2 = 0$$

Las tangentes son entonces:

$$y - 4 = -2\,(x - 2); \qquad y - 0 = -2\,(x - 0)$$

Ejercicio 3 *Calcular a partir de la definición la derivada de la función* $y = \frac{1}{x}$. *Calcula la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa 1.*

Solución:

Sea $y = \dfrac{1}{x}$:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

En el punto de abscisa $x_0 = 1$ la ordenada vale:

$$y_0 = \frac{1}{1} = 1$$

y la pendiente

$$m = \frac{-1}{1^2} = -1$$

de modo que la recta tangente es:

$$y - 1 = -1\,(x - 1)$$

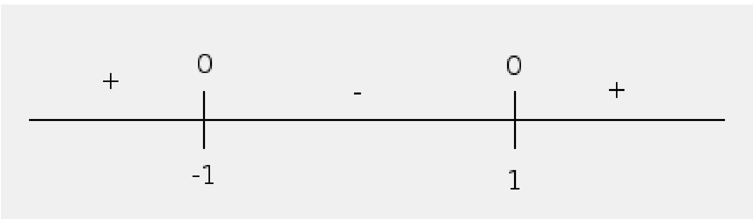
Ejercicio 4 *En la función* $y = x^3 - 3x + 2$, *estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de tangente horizontal. A partir del dicho estudio decidir si se trata de máximos o mínimos y representar gráficamente la curva.*

Solución:

Calculamos la derivada y estudiamos su signo:

$$y' = 3x^2 - 3$$

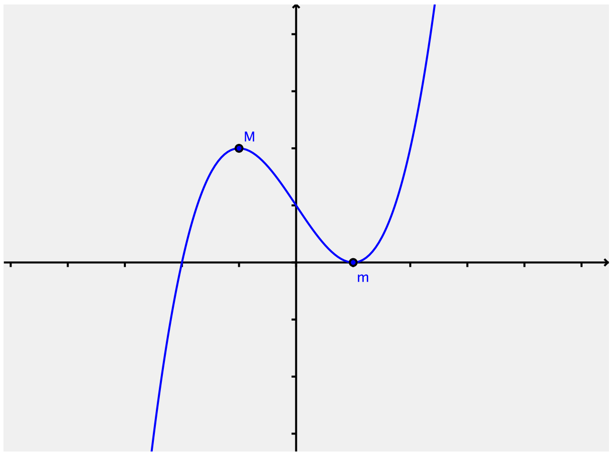
Los ceros de la derivada son -1 y 1. El esquema de signos es:



De forma que:

$x \in (-\infty, -1)$	$y' > 0$	función creciente
$x = -1$	$y' = 0$	máximo en $m(-1, 4)$
$x \in (-1,)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = 1$	$y' = 0$	mínimo en $M(1, 0)$
$x \in (1, \infty)$	$y' > 0$	función creciente

De acuerdo con estos datos la representación gráfica es:



Ejercicio 5 *Derivar las siguientes funciones:*

$$y = e^{3x}\cos x; \qquad y = \frac{x^2}{\ln x}; \qquad y = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} y = e^{3x}\cos x \quad &\Longrightarrow \quad y' = e^{3x}\cdot 3\cdot\cos x + e^{3x}\,(-\operatorname{sen} x) \\ y = \frac{x^2}{\ln x} \quad &\Longrightarrow \quad y' = \frac{2x\ln x - \frac{1}{x}x^2}{(\ln x)^2} \\ y = \operatorname{artg}\frac{1}{x} \quad &\Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Ejercicio 6 *A partir del estudio de las asíntotas y el crecimiento y decrecimiento representa gráficamente la curva:*

$$y = \frac{1+x^2}{4-x^2}$$

Solución:

Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$. Además hay una asíntota horizontal $y = -1$ puesto que:

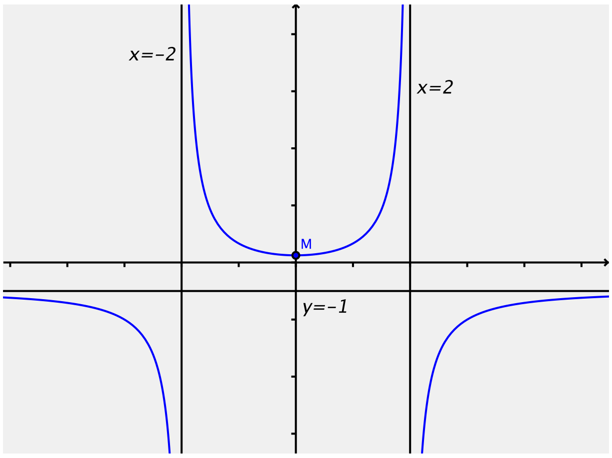
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{4-x^2} = -1$$

Derivamos la función

$$y' = \frac{2x\,(4-x^2) - (-2x)\,(1+x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

La derivada se anula en $x = 0$, es menor que cero (y por consiguiente la función decreciente) para $x < 0$ y mayor que cero (y función creciente) para $x > 0$. E el punto $M(0, \frac{1}{4}$ hay un mínimo.

Con todos estos datos podemos dibujar la siguiente gráfica:



Ejercicio 7 *Se considera la función* $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$*, calcular:*

1. *Dominio de definición de la función e intersecciones con los ejes*
2. *Puntos de tangente horizontal*
3. *Calcular las asíntotas oblicuas en* $+\infty$ *y* $-\infty$ *y comprobar que son diferentes.*
4. *Representar gráficamente la función.*

Solución:

El dominio de definición de la función es:

$$D = \left\{x \in R | x^2 - 4x + 3 >= 0\right\} = \infty, 1) \cup (3, \infty)$$

Para calcular los puntos de tangente horizontal igualamos la derivada a cero:

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

El punto de tengente horizontal estaría entonces en $x = 2$. Pero como este punto no pertenece al dominio de la función concluimos que no hay puntos de tangente horizontal. Por otra parte, como el denominador es siempre positivo, la derivada tiene el signo del numerador y será negativa (función decreciente) para $x < 1$ y positiva (función creciente) para $x > 3$.

Calculemos ahora las asíntotas. En $+\infty$ no presenta ninguna dificultad:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4x+3}-x)\,(\sqrt{x^2-4x+3}+x)}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{2x} \\
&= -2
\end{aligned}$$

De modo que la asíntota oblicua en $+\infty$ es $y = x - 2$.

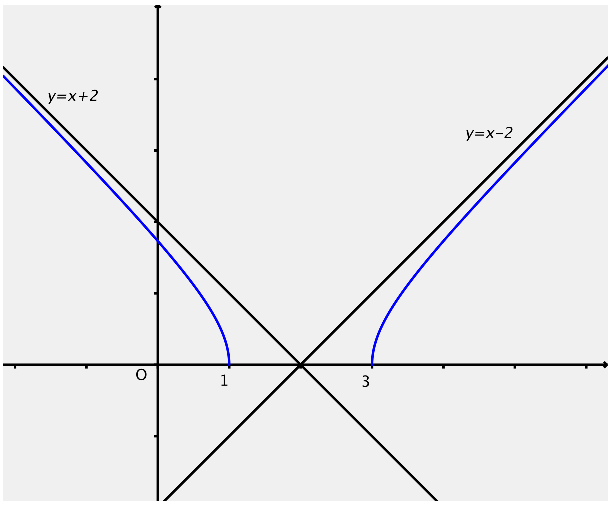
Calculemos ahora la asíntota en $-\infty$. Ahora hay que tener en cuenta que, puesto que la función es la raíz positiva del polinomio, en$-\infty$ la raíz $\sqrt{x^2-4x+3}$ es equivalente a $\sqrt{x^2}$ que es igual a $-x$ puesto que la raíz es positiva y x es negativo. Así pues:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4x+3}+x)\,(\sqrt{x^2-4x+3}-x)}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2}-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{-x-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{-2x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por consiguiente la asíntota oblicua en $-\infty$ es $y = -x + 2$

Teniendo todo esto en cuenta la representación gráfica es la siguiente:


y=x+2
y=x−2
O
1
3