Exámenes
Bachillerato Internacional NS
Problemas de Trigonometría

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

1. (a) Show that

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$$

(b) Hence find the value of $\cot\frac{\pi}{8}$ in the form $a+b\sqrt{2}$, where $a, b \in \mathbb{Z}$.

Solución:

(a)

$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

(b) Por la propiedad anterior:

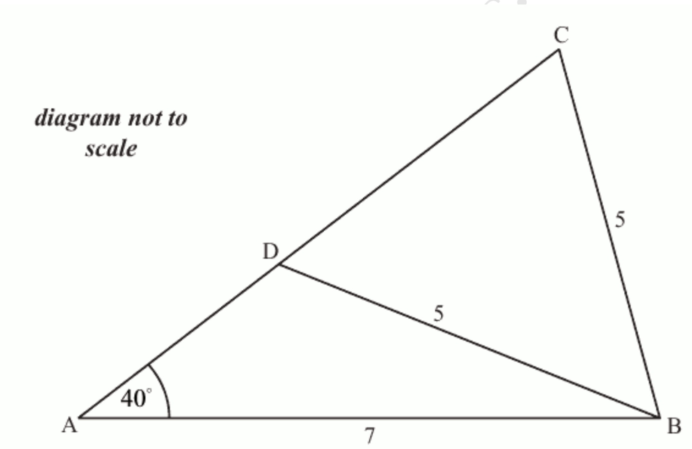
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Entonces:

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

♠♠♠♠

2. Given $\triangle\ ABC$, with lengths shown in the diagram below, find the length of the line segment CD.



Solución:

El ángulo C es agudo porque es uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles. Lo podemos calcular por el teorema del seno:

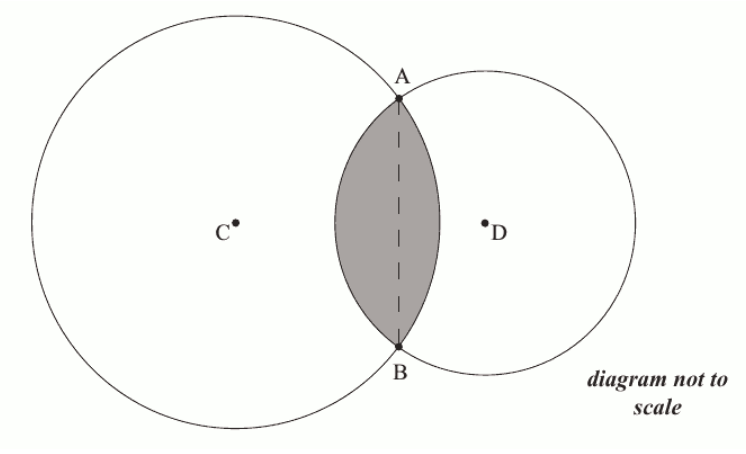
$$\frac{5}{\operatorname{sen} 40^{\text{o}}} = \frac{7}{\operatorname{sen} C} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} C = \frac{7\operatorname{sen} 40^{\text{o}}}{5}$$

Por otra parte en el triángulo isósceles:

$$\frac{1}{2}CD = 5\cos C\ ; \qquad CD = 10\cos C \simeq 4{,}36$$

♠♠♠♠

3. The radius of the circle with centre C is 7 cm and the radius of the circle with centre D is 5 cm. If the length of the chord AB is 9 cm, find the area of the shaded region enclosed by the two arcs AB.



Solución:

El área es la suma de dos segmentos circulares. En el círculo de la izquierda el ángulo correspondiente al segmento es:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{4{,}5}{7}\ ;\qquad \varphi=2\ \operatorname{arsen}\frac{4{,}5}{7}$$

y el área del segmento es

$$S_1=\frac{1}{2}r^2\left(\varphi-\operatorname{sen}\varphi\right)=\frac{1}{2}\,49\left(\varphi-\operatorname{sen}\varphi\right)$$

De la misma manera, en el círculo de la derecha el ángulo es

$$\theta=2\ \operatorname{arsen}\frac{4{,}5}{5}$$

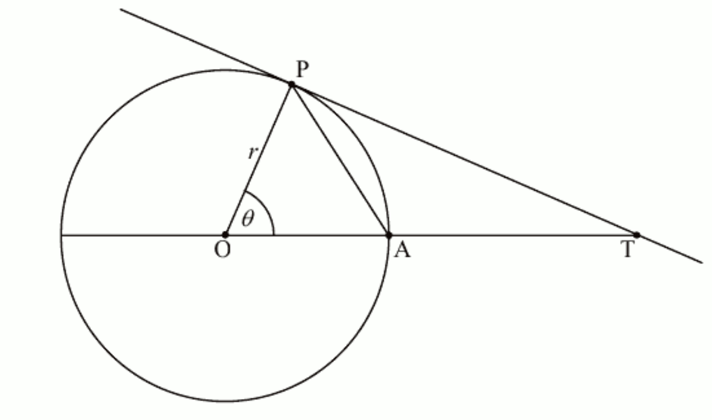
y el área

$$S_2=\frac{1}{2}\,25\left(\theta-\operatorname{sen}\theta\right)$$

El área total es aproximadamente $28{,}3\ \mathrm{cm}^2$.

♠♠♠♠

4. The diagram shows a tangent, (TP), to the circle with centre O and radius r. The size of $\widehat{POA}$ is θ radians.



(a) Find the area of triangle AOP in terms of r and θ.
(b) Find the area of triangle POT in terms of r and θ.
(c) Using your results from part (a) and part (b), show that $\operatorname{sen}\theta<\theta<\operatorname{tg}\theta$.

Solución:

(a) $S = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \theta$.

(b) Es un triángulo rectángulo:

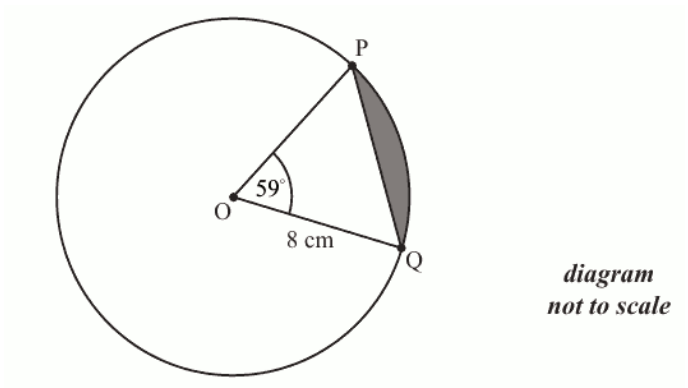
$$S = \frac{1}{2} r \cdot PT = \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \theta$$

(c) Puesto que el área del sector AOP es $\frac{1}{2} r^2 \theta$:

$$\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \theta \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} \theta < \theta < \operatorname{tg} \theta$$

♠♠♠♠

5. The points P and Q lie on a circle, with centre O and radius 8 cm, such that $POQ = 59^{\text{o}}$.



Find the area of the shaded segment of the circle contained between the arc PQ and the chord $[PQ]$.

Solución:

Sea φ el ángulo POQ en radianes. El área del segmento circular es

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi) = \frac{1}{2} 64 \left(\frac{59\pi}{180} - \operatorname{sen} 59^{\text{o}} \right) \simeq 5{,}52 \text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

6. The vertices of an equilateral triangle, with perimeter P and area A , lie on a circle with radius r. Find an expression for $\frac{P}{A}$ in the form $\frac{k}{r}$, where $k \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

Es fácil ver que el lado l del triángulo equilátero es igual a $r\sqrt{3}$. Entonces:

$$\frac{P}{A} = \frac{3l}{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{12}{l\sqrt{3}} = \frac{12}{3r} = \frac{4}{r}$$

♠♠♠♠

7. Let $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

(a) For what values of x does $f(x)$ not exist?

(b) Simplify the expression $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

Solución:

(a) Cuando se anule $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$, es decir $x = k\pi$ o $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Desarrollando el ángulo triple:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\operatorname{sen}(2x+x)}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos(2x+x)}{\cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}{\cos x} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} - \frac{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x}{\cos x} \\
&= 2\cos^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x\right) \\
&= 2\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x \\
&= 2\left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

8. In the triangle ABC, $\widehat{ABC} = 90^{\text{o}}$, $AC = \sqrt{2}$ and $AB = BC + 1$.

(a) Show that $\cos A - \sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

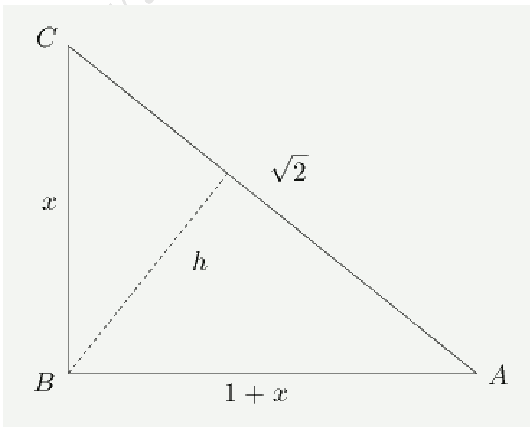
(b) By squaring both sides of the equation in part (a), solve the equation to find the angles in the triangle.

(c) Apply Pythagoras' theorem in the triangle ABC to find BC, and hence show that

$$\sin A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(d) Hence, or otherwise, calculate the length of the perpendicular from B to $[AC]$.

Solución:



(a) $\cos A - \operatorname{sen} A = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A - 2\operatorname{sen} A \cos A = \dfrac{1}{2}$; $\quad 1 - \operatorname{sen} 2A = \dfrac{1}{2}$; $\quad \operatorname{sen} 2A = \dfrac{1}{2}$

y por tanto $2A = 30^{\text{o}}$, $A = 15^{\text{o}}$, $C = 75^{\text{o}}$.

(c) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
&x^2 + (x+1)^2 = 2 \\
&2x^2 + 2x - 1 = 0 \\
&x = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\operatorname{sen} A = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(d) Teniendo en cuenta que $y = (x+1)\operatorname{sen} A$:

$$y = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

♠♠♠♠

9. Compruebe que

$$\frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \sec 2A + \operatorname{tg} 2A$$

Solución:

Multiplicando numerador y denominador por $\cos A + \operatorname{sen} A$ resulta:

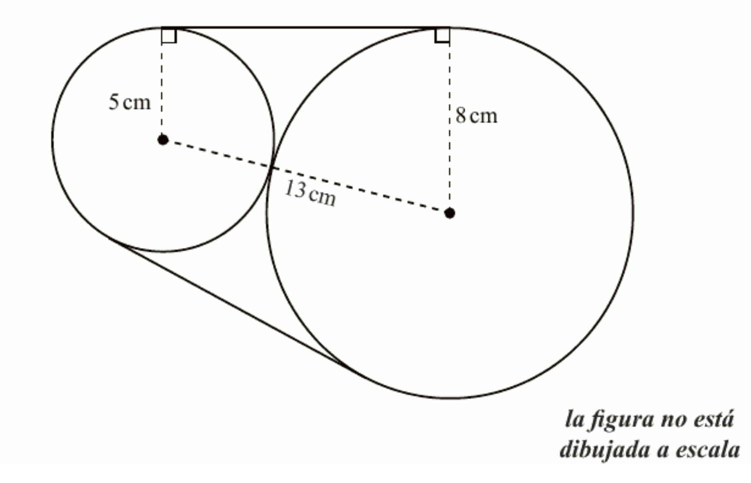
$$\frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \frac{(\cos A + \operatorname{sen} A)^2}{(\cos A - \operatorname{sen} A)(\cos A + \operatorname{sen} A)} = \frac{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A + 2\operatorname{sen} A \cos A}{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}$$

y teniendo en cuenta que $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$, $2\operatorname{sen} A\cos A = \operatorname{sen} 2A$ y $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \cos 2A$:

$$= \frac{1+\operatorname{sen} 2A}{\cos 2A} = \frac{1}{\cos 2A} + \frac{\operatorname{sen} 2A}{\cos 2A} = \sec 2A + \operatorname{tg} 2A$$

♠♠♠♠

10. Dos discos, uno de 8 cm de radio y otro de 5 cm de radio, se colocan de tal forma que se estén tocando. Se ata un trozo de cuerda alrededor de los dos discos, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



Calcule la longitud de cuerda que se necesita para rodear los discos.

Solución:

Calculamos en primer lugar la longitud del segmento de tangente. Puede calcularse por el teorema de Pitágoras:

$$T = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

El ángulo que forma la línea de los centros con el radio del círculo mayor es

$$\cos\varphi = \frac{3}{13} \quad\Longrightarrow\quad \varphi \simeq 1{,}34$$

y el que forma con el radio del círculo pequeño es $\pi - \varphi$.

La longitud de la cuerda debe ser igual a dos vece el segmento de tangente más la longitud de un arco de $2\pi - 2\varphi$ en el disco grande y un arco de $2\pi - 2(\pi - \varphi) = 2\varphi$ en el disco pequeño. En total

$$l = 2 \cdot 4\sqrt{10} + 8(2\pi - 2\varphi) + 5 \cdot 2\varphi \simeq 67{,}5 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

11. (*a*) (I) Express $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ in the form $a\cos x - b\sin x$ where $a, b \in \mathbb{R}$.
    (II) Hence solve $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1; \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$.
    (*b*) Let $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.
    (I) Show that $x = 1$ is a zero of p.
    (II) Hence find all the solutions of $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
    (III) Express $\sin 2\theta \cos\theta + \sin^2\theta$ in terms of $\sin\theta$.
    (IV) Hence solve $\sin 2\theta + \sin^2\theta = 1$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solución:

(*a*) (I) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}\cos x - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$

(II) Dividiendo los dos miembros de la ecuación por 2:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{3}\ ; \qquad \frac{\pi}{6} + x = \frac{5\pi}{3}$$

las soluciones son $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

(*b*) (I) $p(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$.

(II) Si $x = 1$ es una raíz del polinomio, $x - 1$ es un factor y podemos escribir

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(2x^2 + x - 1)$$

Igualando a cero ambos factores obtenemos las soluciones $x = 1$, $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$.

(III) Sustituyendo $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos^\theta + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= 2\operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= -2\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

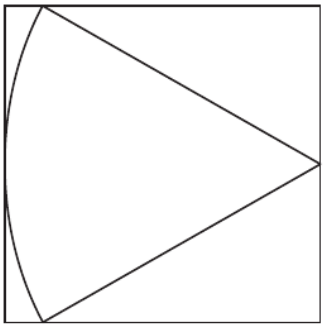
(IV) Podemos escribir la ecuación:

$$2\operatorname{sen}^3\theta - \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$$

cuyas soluciones son según hemos visto $\operatorname{sen}\theta = -1$, $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$.
Las soluciones para el ángulo son $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

♠♠♠♠

12. A rectangle is drawn around a sector of a circle as shown. If the angle of the sector is 1 radian and the area of the sector is 7 cm^2, find the dimensions of the rectangle, giving your answers to the nearest millimetre.



Solución:

La base del rectángulo es igual al radio. Puesto que el área del sector es 700 mm^2

$$\frac{1}{2}\,r^2\varphi = \frac{1}{2}\,r^2 = 700 \qquad \Longrightarrow \qquad r = \sqrt{1400} = 10\sqrt{14} \simeq 37 \text{ mm}$$

La altura del rectángulo es igual a la longitud de la cuerda correspondiente al arco del dibujo. Llamando l a esta longitud:

$$\frac{l}{2} = r\,\mathrm{sen}\,0{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad l = 2\cdot 10\sqrt{14}\,\mathrm{sen}\,0{,}5 \simeq 36 \text{ mm}$$

♠♠♠♠

13. (a) Given that:

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{1}{p}\right)$$

where $p \in \mathbb{Z}$, find p.

(b) Hence find the value of

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

Solución:

(a) Aplicando

$$\operatorname{artg} x + \operatorname{artg} y = \operatorname{artg}\frac{x+y}{1-xy}$$

resulta

$$\operatorname{artg}\frac{1}{5} + \operatorname{artg}\frac{1}{8} = \operatorname{artg}\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}} = \operatorname{artg}\frac{\frac{13}{40}}{\frac{39}{40}} = \operatorname{artg}\frac{1}{3}$$

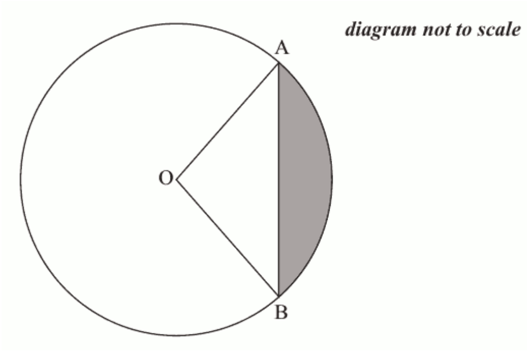
Por consiguiente $p = 3$.

(b) Aplicando el resultado anterior:

$$\operatorname{artg}\frac{1}{2} + \operatorname{artg}\frac{1}{5} + \operatorname{artg}\frac{1}{8} = \operatorname{artg}\frac{1}{2} + \operatorname{artg}\frac{1}{3} = \operatorname{artg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

♠♠♠♠

14. A circle of radius 4 cm, centre O, is cut by a chord $[AB]$ of length 6 cm.



(a) Find $\widehat{AOB}$, expressing your answer in radians correct to four significant figures.
(b) Determine the area of the shaded region.

Solución:

(a) Llamemos φ al ángulo:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{3}{4}\quad\Longrightarrow\quad\varphi=2\operatorname{arsen}\frac{3}{4}\simeq 1{,}696$$

(b) El área del segmento está dada por

$$S=\frac{1}{2}r^2\left(\varphi-\operatorname{sen}\varphi\right)\simeq 5{,}63\text{ cm}^2$$

♠♠♠♠

15. (a) Solve the equation $3\cos^2 x-8\cos x+4=0$, where $0\leq x\leq 180^{\text{o}}$, expressing your answer(s) to the nearest degree.
(b) Find the exact values of $\sec x$ satisfying the equation $3\sec^4 x-8\sec^2 x+4=0$.

Solución:

(a) Despejando como en una ecuación de segundo grado:

$$\cos x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=\frac{4\pm 2}{3}$$

La solución mayor que 1 no es válida. Entonces $\cos x=\frac{2}{3}$ y $x\simeq 48^{\text{o}}$.

(b) Resolviendo como en el apartado anterior:

$$\sec^2 x=\frac{4\pm 2}{3}$$

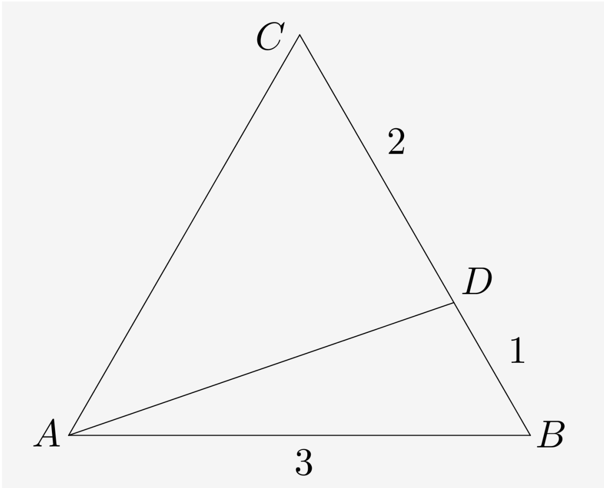
y encontramos $\sec^2 x=2$ y $\sec^2 x=\frac{2}{3}$. Ahora, teniendo en cuenta que la secante es mayor o igual que 1 o menor o igual que -1:

$$\sec x=-\sqrt{2}\,;\quad\sec x=\sqrt{2}$$

♠♠♠♠

16. The triangle ABC is equilateral of side 3 cm. The point D lies on $[BC]$ such that $BD=1$ cm. Find $\cos\widehat{DAC}$

Solución:



Calculamos la longitud de AD por el teorema del coseno:

$$AD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^{o} = 7 \quad \Longrightarrow \quad AD = \sqrt{7}\text{ cm}$$

Ahora calculamos $\widehat{DAC}$ de nuevo por el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{DAC} = \frac{9+7-4}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

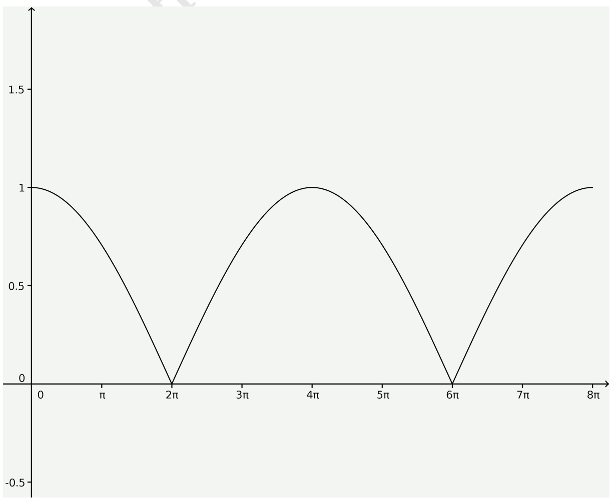
♠♠♠♠

17. (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \left|\cos \dfrac{x}{4}\right|$ para $0 \leq x \leq 8\pi$.

    (b) Resuelva $\left|\cos \dfrac{x}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$ para $0 \leq x \leq 8\pi$.

Solución:

(a)



(b) La ecuación es equivalente a:

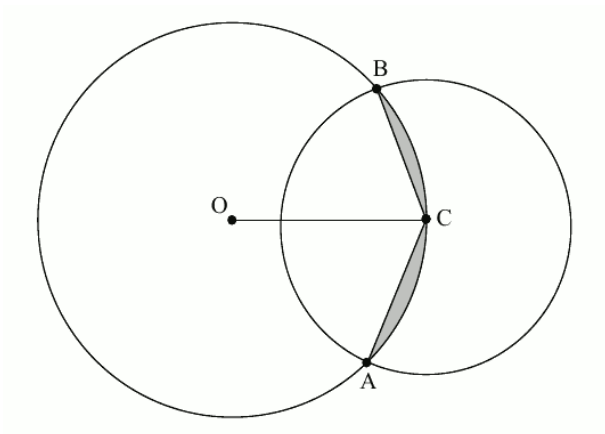
$$\cos \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi & x = \frac{4\pi}{3} + 8k\pi \\ \frac{x}{4} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi & x = \frac{20\pi}{3} + 8k\pi \end{cases} ; \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{4} = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi & x = \frac{8\pi}{3} + 8k\pi \\ \frac{x}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi & x = \frac{16\pi}{3} + 8k\pi \end{cases} ; \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Esta es la solución general, las soluciones comprendidas entre 0 y 8π son $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{3}$ y $\frac{20\pi}{3}$.

♠♠♠♠

18. La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) $\widehat{BOC}$;

(b) el área de la región sombreada.

Solución:

(a) Llamemos $\varphi = \widehat{BOC}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{1{,}5}{4} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 2\operatorname{arsen}\frac{1{,}5}{4} \simeq 0{,}769$$

(b) La región sombreada está formada por dos segmentos circulares de amplitud φ sobre un círculo de 4 cm de radio. El área será igual a

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\,r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1{,}18$$

♠♠♠♠

19. Halle todas las soluciones de la ecuación $\tan x + \tan 2x = 0$ donde $0^{\circ} \leq x < 360^{\circ}$.

Solución:

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 0$$

$$\tan x\left(1-\tan^2 x\right) + 2\tan x = 0$$

$$\tan x\left(3-\tan^2 x\right) = 0$$

$$\tan x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0^{\circ},\quad x = 180^{\circ}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad x = 60^{\circ},\quad x = 240^{\circ}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad x = 120^{\circ},\quad x = 300^{\circ}$$

♠♠♠♠

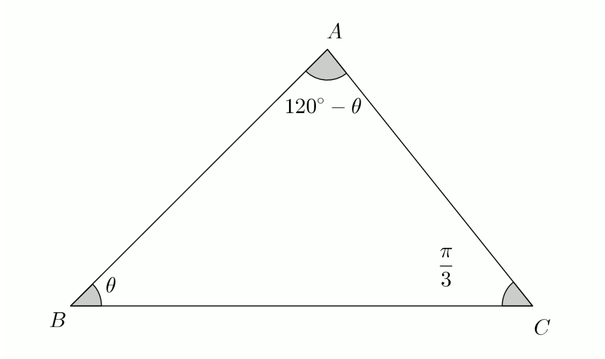
20. En el triángulo ABC, $BC = \sqrt{3}$ cm, $A\hat{B}C = \theta$ y $B\hat{C}A = \frac{\pi}{3}$.

(a) Muestre que la longitud:

$$AB = \frac{3}{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

(b) Sabiendo que AB alcanza un valor mínimo, determine el valor de θ para el cual sucede esto.

Solución:



(a) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 60^o} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(120^o - \theta)} \quad \Longrightarrow \quad AB = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta} = \frac{3}{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

(b) Para que sea máximo, la derivada debe ser cero:

$$y' = \frac{-3(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2} = 0$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$$

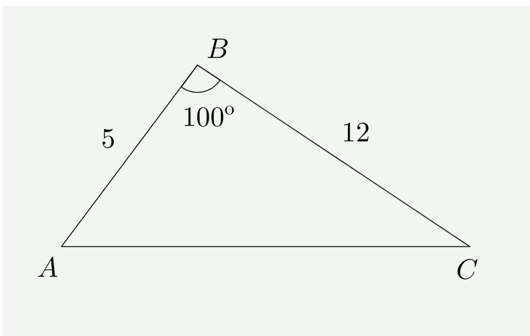
$$-\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 30^o$$

♠♠♠♠

21. En el triángulo ABC, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm, $A\hat{B}C = 100^o$.
   (a) Halle el área del triángulo.
   (b) Halle AC.

Solución:



(a) El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12\cdot \operatorname{sen} 100^o \simeq 29{,}5 \text{ cm}^2$$

(b) Por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 - 2\cdot 5\cdot 12\cos 100^o \quad \Longrightarrow \quad AC \simeq 13{,}8 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

22. El granjero Bill posee un terreno rectangular de 10 m por 4 m. Bill ata una cuerda a un poste de madera situado en una esquina de su terreno, y ata el otro extremo de la cuerda a su cabra Gruff.

   (a) Sabiendo que la cuerda tiene una longitud de 5 m, calcule el porcentaje del terreno de Bill en el que Gruff puede pastar. Dé la respuesta aproximando al número entero más próximo.

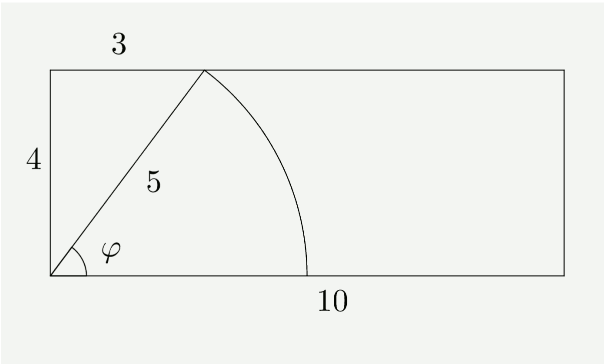
   (b) Bill sustituye la cuerda de Gruff por otra que tiene una longitud a, $4 < a < 10$, de modo que ahora Gruff puede pastar exactamente en la mitad del terreno de Bill.

   Muestre que a satisface la ecuación:

$$a^2 \text{ arsen } \left(\frac{4}{a}\right) + 4\sqrt{a^2-16} = 40$$

   (c) Halle el valor de a.

Solución:



(a) El área que alcanza la cabra puede descomponerse en un triángulo y un sector, Además

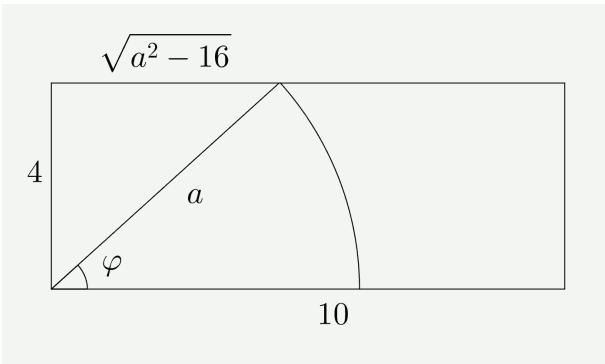
$$\cos(90^{\text{o}} - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \text{ arsen } \frac{4}{5}$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5^2 \cdot \text{ arsen } \frac{4}{5} \simeq 17{,}6$$

lo que supone un 44 % de la superficie total.

(b) En este caso, el área debe ser igual a 20:



Como en el caso anterior:

$$\cos(90^{\text{o}} - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \text{ arsen } \frac{4}{a}$$

Entonces el área cumple:

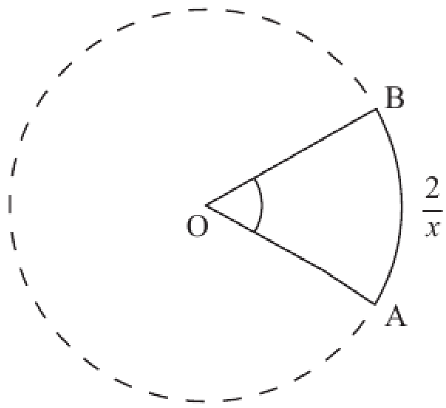
$$\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \sqrt{a^2-16} + \frac{1}{2}\cdot a^2 \cdot \text{ arsen } \frac{4}{a} = 20 \qquad \text{o bien}$$

$$4\sqrt{a^2-16} + a^2 \text{ arsen } \frac{4}{a} = 40$$

(*c*) La ecuación se resuelve con la calculadora y resulta $a = 5{,}53$.

♠♠♠♠

23. La siguiente figura muestra un sector circular, donde $\widehat{AOB} = x$ radianes y la longitud del arco $AB = \frac{2}{x}$ cm. Sabiendo que el área del sector circular es igual a $16\ \mathrm{cm}^2$, halle la longitud del arco AB.



Solución:

Como la longitud del arco es el radio por el ángulo en radianes tenemos que

$$\frac{2}{x} = rx \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{2}{x^2}$$

El área del sector es la mitad del arco por el radio (o la mitad del radio al cuadrado por el ángulo). así:

$$16 = \frac{1}{2}\frac{2}{x^2} \cdot \frac{2}{x}\ ; \qquad x = 2$$

y la longitud del arco es 1 cm.

♠♠♠♠

24. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} 2x - \cos 2x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x \qquad$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:

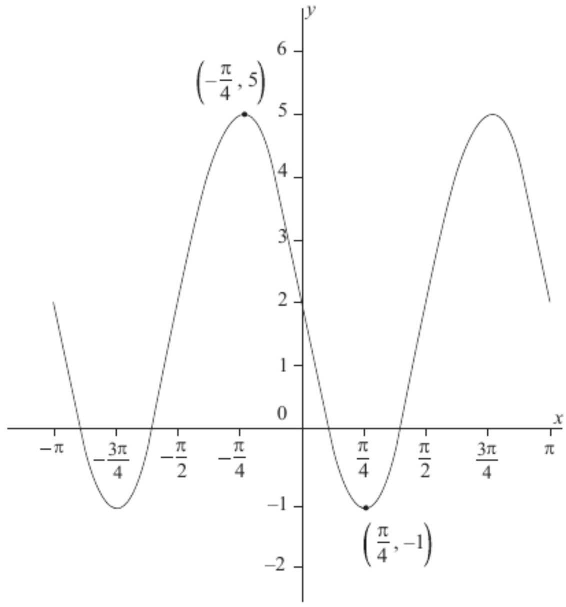
$$\begin{aligned}
&2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x\\
&2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x\\
&2 \operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x = \operatorname{sen} x - \cos x\\
&2 \cos x(\operatorname{sen} x - \cos x) = \operatorname{sen} x - \cos x\\
&(\operatorname{sen} x - \cos x)(2\cos x - 1) = 0
\end{aligned}$$

Y de aquí

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}\\
2\cos x - 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

25. Una función viene dada por $f(x) = A\,\text{sen}(Bx)+C$, $-\pi \leq x \leq \pi$, donde $A, B, C \in \mathbb{Z}$. En la siguiente figura se representa el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Halle el valor de A, B y C.

(b) Resuelva $f(x) = 3$ para $0 \leq x \leq \pi$.

Solución:

(a) El período es π de modo que $B = 2$, la amplitud es 3, pero $A = -3$ porque se han cambiado los signos de la función ($3\,\text{sen}\,2x$ sería positiva entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y negativa entre $-\frac{\pi}{4}$ y 0). La onda se ha desplazado dos unidades hacia arriba así que $C = 2$.

La función es $f(x) = -3\,\text{sen}(2x) + 2$.

(b) Hay dos puntos de intersección $x = 1{,}74$ y $x = 2{,}97$. Se obtienen con la calculadora.

♠♠♠♠

26. El triángulo ABC tiene un área de 21 cm^2. Los lados AB y AC tienen una longitud de 6 cm y 11 cm, respectivamente. Halle los dos posibles valores de la longitud del lado BC.

Solución:

Puesto que el área del triángulo es

$$S = \frac{1}{2}\,AB \cdot AC \cdot \text{sen}\,A \quad \Longrightarrow \quad \text{sen}\,A = \frac{2 \cdot 21}{6 \cdot 11} = \frac{7}{11}$$

Hay dos ángulo que tienen este valor del seno, uno agudo y otro obtuso, uno com el coseno positivo

$$\cos A = \sqrt{1 - \frac{49}{121}} = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

y otro con el coseno negativo $-\frac{6\sqrt{2}}{11}$.

Ahora podemos calcular los dos valores posibles de BC por el teorema del coseno:

$$BC^2 = 6^2 + 11^2 - 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} \quad \Longrightarrow \quad BC \simeq 7{,}43 \text{ cm}$$

$$BC^2 = 6^2 + 11^2 + 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} \quad \Longrightarrow \quad BC \simeq 16{,}1 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

27. Considere la ecuación:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\operatorname{sen} x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}\ ; \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Sabiendo que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(a) Verifique que $x=\frac{\pi}{12}$ es una solución de la ecuación.
(b) A partir de lo anterior, halle otra solución para $0<x<\frac{\pi}{2}$

Solución:

(a) Sustituyendo

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1}{4}}=\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

(b) Teniendo en cuenta la identidad

$$a\operatorname{sen} x+b\cos x=A\operatorname{sen}(x+\varphi)$$

donde $A=\sqrt{a^2+b^2}$ y φ se puede determinar por $a=A\cos\varphi$ y $b=A\operatorname{sen}\varphi$.
Teniendo esto en cuenta, escribamos la ecuación:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\operatorname{sen} x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{3}-1)\cos x+(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen} x=4\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x$$
$$(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen} x+(\sqrt{3}-1)\cos x=2\sqrt{2}\operatorname{sen} 2x$$

En este caso

$$A=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Entonces, la ecuación la podemos escribir:

$$2\sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\varphi)=2\sqrt{2}\operatorname{sen} 2x \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 2x=x+\varphi\ ; & x=\varphi \\ 2x=\pi-(x+\varphi)\ ; & 3x=\pi-\varphi \end{cases}$$

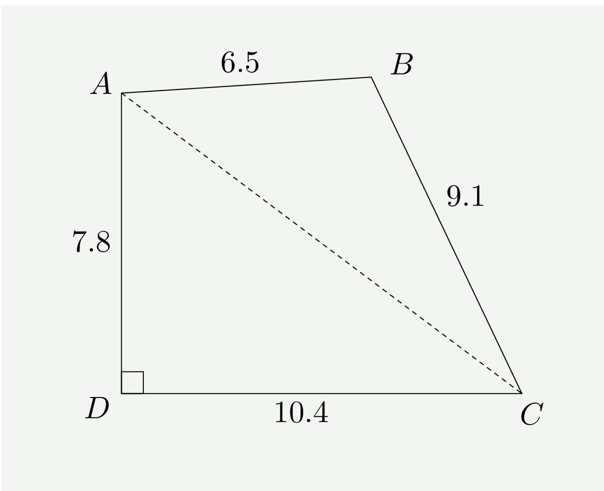
Como conocemos una solución $x=\varphi=\frac{\pi}{12}$, la otra solución es:

$$3x=\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{11\pi}{12} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{11\pi}{36}$$

♠♠♠♠

28. $ABCD$ es un cuadrilátero en el que $AB=6,5$; $BC=9{,}1$; $CD=10{,}4$; $DA=7{,}8$ y $\widehat{CDA}=90^{\circ}$. Halle $\widehat{ABC}$, y dé la respuesta aproximando al número de grados más próximo.

Solución:



Calculamos AC por el teorema de Pitágoras y después el ángulo $\widehat{ABC}$ por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 7{,}8^2 + 10{,}4^2$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{6{,}5^2 + 9{,}1^2 - AC^2}{2 \cdot 6{,}5 \cdot 9{,}1}$$

El ángulo es de 112º.

♠♠♠♠