Exámenes
Bachillerato Internacional NS
Problemas de Números Complejos

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

1. (4 puntos)

   Given that

$$\frac{z}{z+2} = 2 - i, \qquad z \in \mathbb{C}$$

   find z in the form $a + ib$.

Solución:

Despejando z:

$$\begin{aligned} z &= (z+2)(2-i) \\ z &= 2z - iz + 4 - 2i \\ -z + iz &= 4 - 2i \\ z &= \frac{4-2i}{-1+i} \end{aligned}$$

Para calcular el cociente multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(4-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4-2-4i+2i}{2} = \frac{-6-2i}{2} = -3 - i$$

♠♠♠♠

2. (22 puntos)

   (a) Write down the expansion of $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ in the form $a + ib$, where a and b are in terms of $\sin\theta$ and $\cos\theta$.

   (b) Hence show that $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

   (c) Similarly show that $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

   (d) Hence solve the equation $\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos\theta = 0$, where $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (e) By considering the solutions of the equation $\cos 5\theta = 0$, show that

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

   and state the value of $\cos\frac{7\pi}{10}$.

Solución:

(a) Desarrollamos por la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + 3i^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + i^3\operatorname{sen}^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right) \end{aligned}$$

(b) Puesto que

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta$$

Entonces, Igualando las partes reales

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(c) De la misma manera:

$$\cos 5\theta + i\operatorname{sen} 5\theta = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta + 10i^2\cos^3\operatorname{sen}^2\theta + 10i^3\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + 5i^4\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta + i^5\operatorname{sen}^5\theta$$

Igualando partes reales:

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta) \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \end{aligned}$$

(d) Sustituyendo en la ecuación:

$$\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos\theta = 0$$
$$16\cos^5\theta - 16\cos^3\theta + 3\cos\theta = 0$$
$$\cos\theta(16\cos^4\theta - 16\cos^2\theta + 3) = 0$$

Resolviendo obtenemos $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ u $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

(e) Por una parte tenemos que

$$\cos 5\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad 5\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad\Longrightarrow\quad \theta = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

Además

$$\begin{aligned}\cos 5\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad & 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\\ & \cos\theta(16\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 5)\\ & \cos^2\theta = \frac{20 \pm \sqrt{400-320}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8} \qquad \text{o bien} \qquad \cos\theta = 0\end{aligned}$$

Como la solución $\frac{\theta}{10}$ es la más próxima a cero debe ser la que corresponde al valor más grande del coseno:

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Puesto que el ángulo $\frac{7\pi}{10}$ es solución de la ecuación, su coseno será uno de los valores obtenidos. Como está en el segundo cuadrante debe ser negativo y diferente en valor absoluto del de $\frac{\pi}{10}$ (pues no son suplementarios). Por consiguiente:

$$\cos\frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

♠♠♠♠

3. (6 puntos)

The complex numbers $z_1 = 2 - 2i$ and $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ are represented by the points A and B respectively on an Argand diagram. Given that O is the origin,

(a) find AB, giving your answer in the form $a\sqrt{b-\sqrt{3}}$, where $a, b \in \mathbb{Z}$;

(b) $\widehat{AOB}$ in terms of π.

Solución:

(a) $|AB| = |z_2 - z_1| = |1 - \sqrt{3}i - 2 + 2i| = |-1 + (2-\sqrt{3})i|$

Calculamos el módulo de este complejo:

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + (2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(b) Por el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{AOB} = \frac{8 + 4 - 4(2-\sqrt{3})}{2\cdot\sqrt{8}\cdot 2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Para calcular el ángulo escribimos el coseno de la siguiente forma:

$$\cos\widehat{AOB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$$

y por consiguiente $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{12}$.

♠♠♠♠

4. (20 puntos)

(a) Factorize $z^3 + 1$ into a linear and quadratic factor.

(b) Let

$$\gamma = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

(I) Show that γ is one of the cube roots of -1.
(II) Show that $\gamma^2 = \gamma - 1$.
(III) Hence find the value of $(1-\gamma)^6$.

(c) The matrix A is defined by

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Show that $A^2 - A + I = 0$, where 0 is the zero matrix.

(d) Deduce that
(I) $A^3 = -I$;
(II) $A^{-1} = I - A$.

Solución:

(a) Es claro que -1 es una raíz y, por consiguiente, $z+1$ es un factor del polinomio. Efectuando la división obtenemos

$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$$

(b) (I) en forma polar $\gamma = 1_{\frac{\pi}{3}}$. Entonces

$$\gamma^3 = \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 1_\pi = -1$$

(II) Calculamos γ^2:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 1_{\frac{frm-e\pi}{3}} \\
&= \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \\
&= \gamma - 1
\end{aligned}$$

(III) $(1-\gamma)^6 = (\gamma - 1)^6 = \left(\gamma^2\right)^6 = \gamma^{12} = \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 1_{4\pi} = 1$

(c) Teniendo en cuenta que γ y $\frac{1}{\gamma}$ son complejos conjugados y, por tanto:

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = 2\operatorname{Re}\gamma = 1$$

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \gamma$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = (1-\gamma)^2 = \gamma^2 + 1 - 2\gamma = \gamma - 1 + 1 - 2\gamma = -\gamma$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma + \frac{1}{\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^2 - A + I = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) (I) Puesto que $A^2 = A - I$:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(A - I) = A^2 - A = A - I - A = -I$$

(II) En efecto

$$(I - A)A = A - A^2 = A - A + I = I \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = I - A$$

♠♠♠♠

5. (7 puntos)

If $z_1 = a + a\sqrt{3}i$ and $z_2 = 1 - i$, where a is a real constant, express z_1 and z_2 in the form $r\text{cis}\theta$, and hence find an expression for $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^6$ in terms of a and i.

Solución:

Claramente $z_1 = 2a \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ y $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2a}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$$

Efectuamos ahora la potencia

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6 = \left(a\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}\right)^6 = 8a^6\operatorname{cis}\frac{7\pi}{2} = 8a^6\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = -8a^6 i$$

♠♠♠♠

6. (6 puntos)

Given that z is the complex number $x + iy$ and that $|z| + z = 6 - 2i$, find the value of x and the value of y.

Solución:

Podemos escribir la igualdad como

$$|z| + z = 6 - 2i\ ; \qquad \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 6 - 2i$$

Igualando las partes imaginarias se obtiene $y = -2$: Sustituyendo

$$\sqrt{x^2 + 4} + x = 6$$
$$x^2 + 4 = 36 + x^2 - 12x$$
$$12x = 32$$
$$x = \frac{8}{3}$$

♠♠♠♠

7. (7 puntos)

Sabiendo que $(4 - 5i)m + 4n = 16 + 15i$, donde $i^2 = -1$, halle m y n si

(a) m y n son números reales;

(b) m y n son números complejos conjugados.

Solución:

(a) Igualando partes reales e imaginarias resulta

$$\begin{cases} 4m + 4n = 16 \\ -5m = 15 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad m = -3\ ; \quad n = 7$$

(b) Llamando $m = a + bi$ y $n = a - bi$:

$$(4 - 5i)(a + bi) + 4(a - bi) = 16 + 15i$$
$$4a + 4bi - 5ai + 5b + 4a - 4bi = 16 + 15i$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$\begin{cases} 8a + 5b = 16 \\ -5a = 15 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad a = -3\ ; \quad b = 8$$

La solución es $m = -3 + 8i$ y $n = -3 - 8i$.

♠♠♠♠

8. **Apartado A** (12 puntos)
   (a) Sabiendo que $(x+iy)^2 = -5+12i, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Compruebe que:
      (I) $x^2 - y^2 = -5$;
      (II) $xy = 6$
   (b) A partir de lo anterior, halle las dos raíces cuadradas de $-5+12i$.
   (c) Compruebe que para todo número complejo z, $(z^*)^2 = (z^2)^*$.
   (d) A partir de lo anterior, escriba las dos raíces cuadradas de $-5-12i$.

Solución:

(a) Desarrollando $(x+iy)^2$:

$$-5+12i = (x+iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

E igualando las partes reales e imaginarias se obtiene:

$$x^- y^2 = -5 \; ; \qquad xy = 6$$

(b) Resolviendo el sistema por sustitución $y = \frac{6}{x}$:

$$x^2 - \frac{36}{2} = -5$$
$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$
$$x^2 = 4 \; ; \qquad x^2 = -9 \text{ (no válida)}$$

Así pues las dos raíces son $2+3i$ y $-2-3i$.

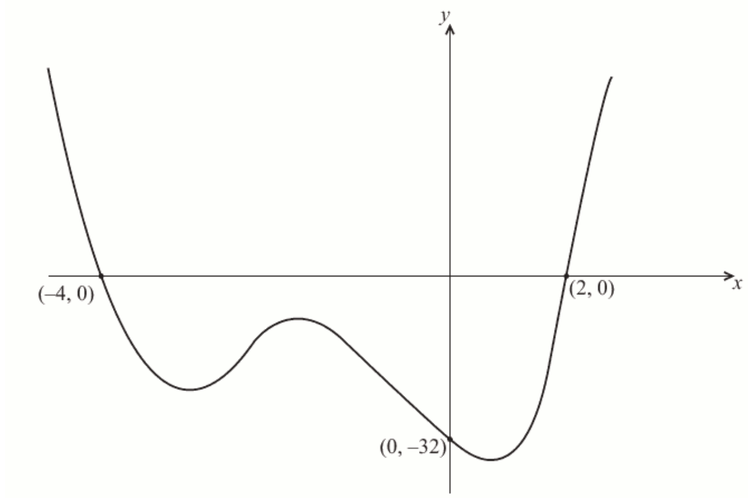
(c) Veamos que los cuadrados de dos números conjugados son también números conjugados:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$
$$(a-bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi \quad \Longrightarrow \quad (z^*)^2 = \left(z^2\right)^*$$

(d) De acuerdo con lo anterior, las raíces de $-5-12i$ serán $2-3i$ y $-2+3i$.

Apartado B (17 puntos)

La gráfica de una función polinómica f de grado 4 se muestra a continuación.



(a) Explique por qué, de las cuatro raíces de la ecuación $f(x) = 0$, dos son reales y dos son complejas.
(b) La curva pasa por el punto $(-1, -18)$. Halle $f(x)$ de la forma

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x^2+cx+d)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
(c) Halle las dos raíces complejas de la ecuación $f(x) = 0$, expresándolas en forma cartesiana.
(d) Dibuje con precisión las cuatro raíces sobre el plano complejo (el plano de Argand).

(e) Exprese cada una de las cuatro raíces de la ecuación de la forma $re^{i\theta}$.

Solución:

(a) Un polinomio de grado 4 tiene 4 raíces reales o complejas. De la figura se desprende que el polinomio tiene dos raíces reales $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$. Además estas raíces son simples pues si fuesen múltiples la gráfica de la función sería tangente al eje de abscisas en alguno de esos puntos. Solamente hay dos raíces reales simples. Las otras dos raíces deben ser complejas.

(b) Puesto que tiene raíces -4 y 2, la función puede escribirse:

$$f(x) = (x+4)(x-2)(x^2+cx+d)$$

Como $f(0) = -32$ resulta $-8d = -32$ y $d = 4$.
Y como $f(-1) = -18$:

$$-18 = 3\cdot(-3)\,(1-c+4)\ ; \qquad -18 = -9(5-c) \quad\Longrightarrow\quad c = 3$$

La función puede escribirse:

$$f(x) = (x+4)(x-2)(x^2+3x+4)$$

♠♠♠♠

9. (6 puntos)

(a) If $w = 2+2i$, find the modulus and argument of w.

(b) Given $z = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$, find in its simplest form w^4z^6.

Solución:

(a) El módulo es $2\sqrt{2}$ y el argumento es $\frac{\pi}{4}$.

(b) $w^4z^6 = 64_\pi \cdot 1_{5\pi} = 64_{6\pi} = 64$.

♠♠♠♠

10. (7 puntos)

Given the complex numbers $z_1 = 1+3i$ and $z_2 = -1-i$.

(a) Write down the exact values of $|z_1|$ and $\arg(z_2)$.

(b) Find the minimum value of $|z_1 + \alpha z_2|$, where $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) $|z_1| = \sqrt{10}, \quad \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$.

(b) $z_1 + \alpha z_2 = 1-\alpha+(3-\alpha)i$. El módulo de este número es:

$$y = |z_1+\alpha z_2| = \sqrt{(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2}$$

Para que sea mínimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2(1-\alpha)(-1)+2(3-\alpha)(-1)}{2\sqrt{(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2}} = \frac{2\alpha-4}{\sqrt{(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2}} = 0$$

Y, por consiguiente, $\alpha = 2$.

♠♠♠♠

11. (18 puntos)

(a) (I) Express each of the complex numbers $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = -\sqrt{3}+i$ and $z_3 = -2i$ in modulus-argument form.

(II) Hence show that the points in the complex plane representing z_1, z_2 and z_3 form the vertices of an equilateral triangle.

(III) Show that $z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2z_3^{3n}$ where $n \in \mathbb{N}$

(b) (I) State the solutions of the equation $z^7 = 1$ for $z \in \mathbb{C}$, giving them in modulus-argument form.

(II) If w is the solution to $z^7 = 1$ with least positive argument, determine the argument of $1 + w$. Express your answer in terms of π.

(III) Show that $z^2 - 2z\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + 1$ is a factor of the polynomial $z^7 - 1$. State the two other quadratic factors with real coefficients.

Solución:

(a) (I) $z_1 = 2_{30^o}$, $z_2 = 2_{150^o}$ y $z_3 = 2_{270^o}$.

(II) Los afijos son los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen porque los tres complejos tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en 120^o.

(III) Primero calculamos

$$z_3^{3n} = (2_{270^o})^{3n} = (8^n)_{270^o \cdot 3n} = (8^n)_{90^o n}$$

Entonces

$$z_1^{3n} + z_2^{3n} = (2_{30^o})^{3n} + (2_{150^o})^{3n} = (8^n)_{90^o n} + (8^n)_{450^o n} = (8^n)_{90^o n} + (8^n)_{90^o n} = 2 \cdot (8^n)_{90^o n} = 2z_3^{3n}$$

(b) (I) Las raíces séptimas de 1 son

$$1_{\frac{2k\pi}{7}}\ ; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(II) El argumento de $1 + 1_{\frac{2\pi}{7}}$ es $\frac{2\pi}{14}$. Es fácil ver por qué si se interpreta la suma vectorialmente.

(III) Multipliquemos dos de los factores correspondientes a raíces conjugadas::

$$\left(z - 1_{\frac{2\pi}{7}}\right)\left(z - 1_{-\frac{2\pi}{7}}\right) = z^2 - z\left(1_{\frac{2\pi}{7}} + 1_{-\frac{2\pi}{7}}\right) + 1 = z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{7} + 1$$

Hemos tenido en cuenta que la suma de un complejo más su conjugado es igual a dos veces la parte real. Los otros factores serán $z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{7} + 1$ y $z^2 - 2z\cos\frac{6\pi}{7} + 1$.

♠♠♠♠

12. (4 puntos)

One root of the equation $x^2 + ax + b = 0$ is $2 + 3i$ where $a, b \in \mathbb{R}$. Find the value of a and the value of b.

Solución:

Sustituyendo obtenemos:

$$(2 + 3i)^2 + a(2 + 3i) + b = 0$$
$$-5 + 12i + a(2 + 3i) + b = 0$$

Igualando a cero la parte imaginaria y la parte real resulta $a = -4$ y $b = 13$.

♠♠♠♠

13. (7 puntos)

Considere los números complejos $u = 2 + 3i$ y $v = 3 + 2i$.

(a) Sabiendo que

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{10}{w}$$

exprese w de la forma $a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Halle w^* y expréselo de la forma $re^{i\theta}$.

Solución:

(a) despejamos w:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{10}{w}\ ; \qquad \frac{u+v}{uv}=\frac{10}{w} \quad \Longrightarrow \quad w=\frac{10uv}{u+v}$$

Sustituyendo:

$$w=\frac{10uv}{u+v}=\frac{10\cdot 13i}{5+5i}=\frac{26i}{1+i}=\frac{26i(1-i)}{2}=13i(1-i)=13+13i$$

(b)

$$w^*=13-13i=13\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

♠♠♠♠

14. (20 puntos)

Considere $z=r\,(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, $z\in\mathbb{C}$

(a) Utilice la inducción matemática para demostrar que $z^n=r^n\,(\cos n\theta+i\operatorname{sen}n\theta)$, $n\in\mathbb{Z}^+$.

(b) Sabiendo que $u=1+\sqrt{3}i$ y $v=1-i$,

(I) exprese u y v en forma módulo-argumental;

(II) a partir de lo anterior, halle u^3v^4.

(III) Los números complejos u y v se representan en un diagrama de Argand mediante el punto A y el punto B, respectivamente. Sitúe el punto A y el punto B en el diagrama de Argand.

(IV) El punto A se rota $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen O, convirtiéndose en el punto A'. El punto B se rota en el sentido de las agujas del reloj $\frac{\pi}{2}$ alrededor de O, convirtiéndose en el punto B'. Halle el área del triángulo $OA'B'$.

(V) Sabiendo que u y v son raíces de la ecuación $z^4+bz^3+cz^2+dz+e=0$, donde $b,c,d,e\in\mathbb{R}$ halle los valores de b, c, d y e.

Solución:

(a) La fórmula se cumple evidentemente para $n=1$. Supongamos que se cumple para $n=k$

$$z^k=r^k\,(\cos k\theta+i\operatorname{sen}k\theta)$$

y veamos que, en ese caso, se cumple también para $n=k+1$:

$$\begin{aligned} z^{k+1}&=z^k\cdot z=r^k\,(\cos k\theta+i\operatorname{sen}k\theta)\cdot r\,(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\\ &=r^{k+1}\,(\cos k\theta\cos\theta-\operatorname{sen}k\theta\operatorname{sen}\theta+i(\operatorname{sen}k\theta\cos\theta+\cos k\theta\operatorname{sen}\theta))\\ &=r^{k+1}\,(\cos(k\theta+\theta)+i\operatorname{sen}(k\theta+\theta)\\ &=r^{k+1}\,(\cos(k+1)\theta+i\operatorname{sen}(k+1)\theta) \end{aligned}$$

y, en consecuencia, la fórmula se cumple para $n=k+1$. Por el principio de inducción se cumple para todo $n\in\mathbb{Z}^+$.

(b) (I) $u=2_{60^{\circ}}$ y $v=(\sqrt{2})_{-45^{\circ}}$.

(II) $u^3v^4=8_{180^{\circ}}\cdot 4_{-180^{\circ}}=32_{0^{\circ}}=32$.

(III)

(IV) Es fácil ver que $\widehat{A'OB'}=75^{\circ}$. Entonces, el área del triángulo es:

$$S=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\operatorname{sen}75^{\circ}\simeq 1{,}37$$

(V)

15. (a) Halle tres raíces distintas de la ecuación $8z^3+27=0$, $z\in\mathbb{C}$, en forma módulo-argumental.

(b) Las raíces se representan mediante los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand. Muestre que el área del triángulo es igual a $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

Solución:

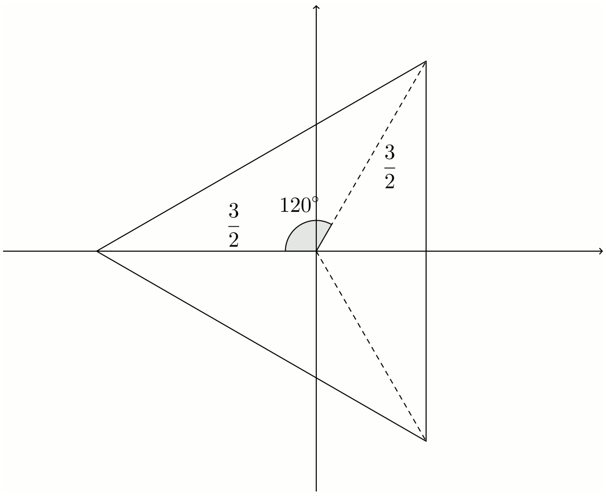
(a) Puesto que:

$$z=\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)_{180^{\circ}}}=\left(\frac{3}{2}\right)_{60^{\circ}+120^{\circ}K} \qquad K=0,1,2$$

de modo que las tres raíces son:

$$\left(\frac{3}{2}\right)_{60^{\circ}},\qquad \left(\frac{3}{2}\right)_{180^{\circ}},\qquad \left(\frac{3}{2}\right)_{300^{\circ}}$$

(b) Representamos las raíces:



El área del triángulo la podemos calcular como suma de las áreas de tres triángulos isósceles:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 120^{\text{o}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

♠♠♠♠

16. (17 puntos)

(a) Resuelva la ecuación $z^3 = 8i$, $z \in \mathbb{C}$ y dé las respuestas en la forma $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Considere los números complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$.

(I) Escriba z_1 en la forma $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

(II) Calcule $z_1 z_2$ y escriba el resultado en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(III) A partir de lo anterior, halle el valor de $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$ en la forma $c + d\sqrt{3}$, donde $c, d \in \mathbb{Z}$.

(IV) Halle el menor valor $p > 0$ para el que $(z_2)^p$ es un número real positivo.

Solución:

(a) Las raíces cúbicas de $8i = 8_{90^{\text{o}}}$ tienen de módulo 2 y argumento $\frac{90^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Es decir

$$z_1 = 2\left(\cos 30^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 30^{\text{o}}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2\left(\cos 270^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 270^{\text{o}}\right) = -2i$$

(b) (I) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

(II) El módulo del producto es $2\sqrt{2}$ y el argumento $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{2\sqrt{3} + 2}{2}i$$

(III) Dividiendo seno entre coseno

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{(2\sqrt{3} + 2)^2}{(2\sqrt{3} - 2)(2\sqrt{3} + 2)} = \frac{16 + 8\sqrt{3}}{8} = 2 + \sqrt{3}$$

(IV) Para $p = 12$:

$$\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^{12} = \left(2^{12}\right)_{2\pi} = 2^{12} > 0$$

Para $p = 6$ también resulta un número real pero es negativo.

♠♠♠♠

17. (23 puntos)

Sea $w = \cos\frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7}$.

(a) Verifique que w es una raíz de la ecuación $z^7 - 1 = 0$.

(b) (I) Desarrolle $(w-1)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6)$.

(II) A partir de lo anterior deduzca que $1 + w + w^2 + w^3 + +w^4 + w^5 + w^6 = 0$.

(c) Escriba las raíces de la ecuación $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$ en función de w y sitúe estas raíces en un diagrama de Argand.

Considere la ecuación cusdrática $z^2 + bz + c = 0$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Las raíces de esta ecuación son α y α^* donde α^* es el número complejo conjugado de α.

(d) (I) Sabiendo que $\alpha = w + w^2 + w^4$, muestre que $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$.

(II) Halle el valor de b y el valor de c.

(e) Utilizando los valores de b y de c que ha obtenido en el apartado (d)(II), halle la parte imaginaria de α en forma de radical irracional.

Solución:

(a) En efecto

$$\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 7\frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\, 7\frac{2\pi}{7} = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\, 2\pi = 1$$

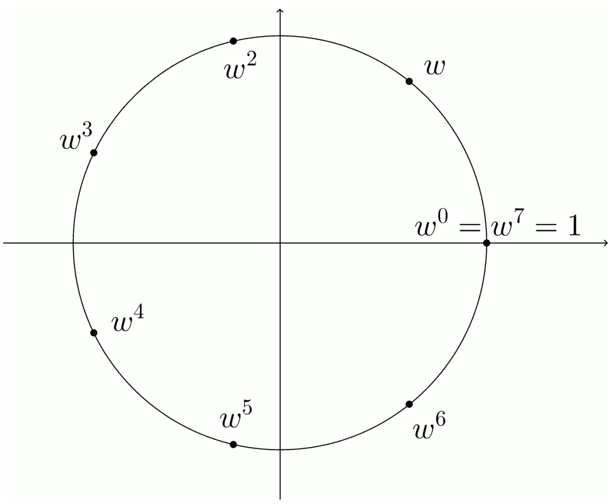
(b) (I)

$$\begin{aligned}(w-1)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6) &= w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + w^7 - 1 \\ &\quad - w - w^2 - w^3 - w^4 - w^5 - w^6 \\ &= w^7 - 1\end{aligned}$$

(II) Puesto que w es una raíz séptima de 1:

$$\begin{aligned}&w^7 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \\ &(w-1)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6) = 0 \quad \Longrightarrow \\ &1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0 \qquad \text{puesto que } w - 1 \neq 0\end{aligned}$$

(c) Los afijos de las raíces de la unidad se encuentran sobre la circunferencia de radio 1.



En realidad estas propiedades que estamos demostrando en este problema son propiedades generales de las raíces enésimas de un número complejo:

– La suma de todas las raíces complejas de cualquier número es igual a cero.
– Todas las raíces de 1 pueden expresarse como potencias de una de ellas (en el caso de las raíces de índice primo de cualquiera de ellas). Se dice que forman un grupo cíclico.
– Si z es una raíz de 1 (o, en general, de cualquier polinomio con coeficientes reales) su conjugado también es raíz.

(d) Esto es así porque w es el conjugado de w^6, w^2 es el conjugado de w^5 y w^3 es elconjugado de w^4.

(e) El coeficiente b es la suma de las raíces del polinomio cambiada de signo:

$$b = -(\alpha + \alpha^*) = -(w + w^2 + w^4 + w^6 + w^5 + w^3) = -(-1) = 1$$

El coeficiente c es igual al producto de las raíces:

$$\begin{aligned} c = \alpha \cdot \alpha^* &= (w + w^2 + w^4)(w^6 + w^5 + w^3) \\ &= w^7 + w^6 + w^4 + w^8 + w^7 + w^5 + w^{10} + w^9 + w^7 \ ; \quad w^7 = 1\,, w^8 = w, \quad w^9 = w^2,\ w^{10} = w^3 \\ &= 3 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

(f) La ecuación es $z^2 + z + 2 = 0$. Sus raíces son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

La parte imaginaria de α es $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

♠♠♠♠