Problemas de examen
Bachillerato Internacional NS
Cinemática

1. (5 puntos)

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que en el instante t segundos ($t \geq 0$), su velocidad v, en $\mathrm{m\,s^{-1}}1$, viene dada por $v = 10te^{-2t}$. Halle la distancia exacta que recorre la partícula en el primer medio segundo.

Solución:

Calculamos la distancia integrado la velocidad:

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}} 10te^{-2t}\,\mathrm{d}t = 10\int_0^{\frac{1}{2}} te^{-2t}\,\mathrm{d}t$$

Integramos por partes:

$$\begin{aligned} u &= t & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= e^{-2t}\,\mathrm{d}t & v &= -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{aligned}$$

y resulta:

$$s = 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 10\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 10\left[-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 10\left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{e}$$

♠♠♠♠

2. (5 puntos)

Un punto P se mueve en línea recta. Su velocidad v $\mathrm{m\,s^{-1}}$ en el instante t segundos viene dada por

$$v(t) = e^{-t} - 8t^2e^{-2t}$$

donde $t \geq 0$.

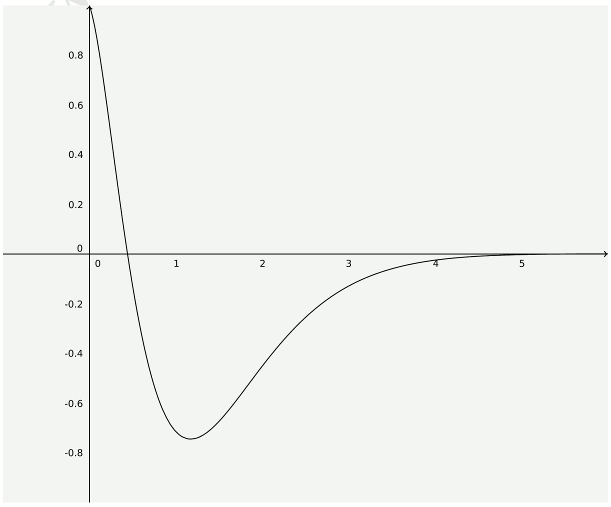
(a) Determine el primer instante t_1 en el que P tiene velocidad cero.

(b) (I) Halle una expresión para la aceleración de P en el instante t.

(II) Halle el valor de la aceleración de P en el instante t_1

Solución:

(a) La gráfica de la función tiene la siguiente forma



La velocidad se hace cero en $t \simeq 0{,}441$.

(b) (I) Derivando

$$\begin{aligned} a &= -e^{-t} - (16te^{-2t} + e^{-2t}(-2)8t^2) \\ &= e^{-t}\left(-1 - 16te^{-t} + 16t^2e^{-t}\right) \end{aligned}$$

(II) El valor de esta función en t_1 es $-2{,}28\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

♠♠♠♠

3. (6 puntos)

Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de modo tal que en el instante t segundos, $t \geq 0$, su aceleración a viene dada por $a = 2t - 1$. Cuando $t = 6$, su desplazamiento s respecto a un origen fijo O es igual a 18,25 m. Cuando $t = 15$, el desplazamiento respecto a O es igual a 922,75 m. Halle una expresión para s en función de t.

Solución:

Obtenemos la velocidad integrando la aceleración:

$$v = \int (2t-1)\,\mathrm{d}t = t^2 - t + C_1$$

La posición se obtiene integrando la velocidad:

$$s = \int (t^2 - t + C_1)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Ahora determinamos las dos constantes por las condiciones que nos dan:

$$\begin{aligned} 18{,}25 &= \frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} + 6C_1 + C_2 \\ 922{,}75 &= \frac{15^3}{3} - \frac{15^2}{2} + 15C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resulta $C_1 = -6$ y $C_2 = \frac{1}{4}$. De modo que:

$$s = \int (t^2 - t + C_1)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t + \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

4. (6 puntos)

A skydiver jumps from a stationary balloon at a height of 2000 m above the ground. Her velocity, v m s^{-1}, t seconds after jumping, is given by $v = 50(1 - e^{-0,2t})$.

(a) Find her acceleration 10 seconds after jumping.

(b) How far above the ground is she 10 seconds after jumping?

Solución:

(a) La aceleración se obtiene derivando la velocidad:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 50 \cdot \left(-e^{-0,2t}\right)(-0{,}2) = 10e^{-0,2t}$$

Al cabo de 10 s, $a = 10e^{-2} \simeq 1{,}35$ m s^{-2}.

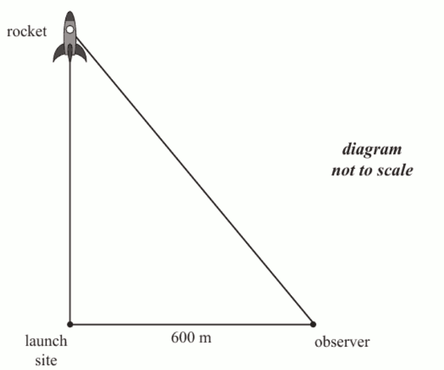
(b) La distancia recorrida la calculamos por integración

$$s = \int_0^{10} 50\left(1 - e^{-0,2t}\right)\,\mathrm{d}t$$

Se puede hacer la integral o calcularla con la calculadora. En cualquier caso se obtiene aproximadamente 283 m. La altura en ese momento es $2000 - 283 = 1716$ m.

♠♠♠♠

5. (6 puntos)



A rocket is rising vertically at a speed of $300\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ when it is $800\ \mathrm{m}$ directly above the launch site. Calculate the rate of change of the distance between the rocket and an observer, who is $600\ \mathrm{m}$ from the launch site and on the same horizontal level as the launch site.

Solución:

Llamemos l a la distancia:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{600^2 + h^2} \\ \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} &= \frac{2h}{2\sqrt{600^2+h^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{800}{\sqrt{600^2+800^2}} \cdot 300 \\ &= 240\ \mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

6. (6 puntos)

The acceleration of a car is $\frac{1}{40}(60 - v)\ \mathrm{m\,s^2}$, when its velocity is v. Given the car starts from rest, find the velocity of the car after 30 seconds.

Solución:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{40}(60-v) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{60-v} = \frac{1}{40}\ \mathrm{d}t$$

Integrando

$$-\ln(60-v) = \frac{1}{40}\,t + C \quad\Longrightarrow\quad 60 - v = e^{-\frac{t}{40}-C} = Ke^{-\frac{t}{40}} \quad\Longrightarrow\quad v = 60 - Ke^{-\frac{t}{40}}$$

donde hemos llamado $K = e^{-C}$. Cuando $t = 0$ la velocidad es 0. Entonces, debe ser $K = 60$ y tenemos

$$v = 60\left(1 - e^{-\frac{t}{40}}\right)$$

Cuando $t = 30$ la velocidad es aproximadamente igual a $31{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

♠♠♠♠

7. (6 puntos)

A body is moving in a straight line. When it is s metres from a fixed point O on the line its velocity, v, is given by $v = -\dfrac{1}{s^2}$, $s > 0$. Find the acceleration of the body when it is 50 cm from O.

Solución:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot v = \frac{2}{s^3}\cdot\frac{-1}{s^2} = \frac{-2}{s^5}$$

Cuando $s = 0{,}5\ \mathrm{m}$, $a = 64\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

♠♠♠♠

8. (6 puntos)

Una partícula se mueve de modo tal que su velocidad $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y su desplazamiento s m, están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{artg}(\operatorname{sen} s)$, $0 \le s \le 1$. La aceleración de la partícula es $a\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

(a) Halle la aceleración de la partícula en función de s.

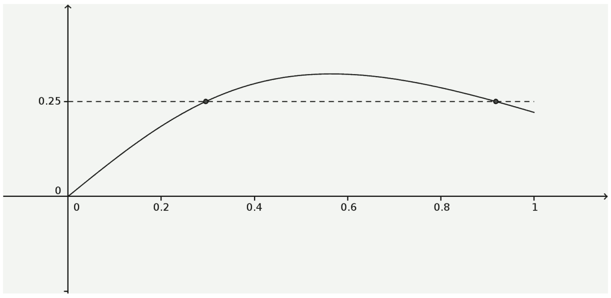
(b) Utilizando un gráfico aproximado adecuado, halle el desplazamiento de la partícula cuando su aceleración es igual a $0{,}25\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Solución:

(a) Obtenemos la aceleración derivando:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot v = \frac{\cos s}{1 + \operatorname{sen}^2 s} \cdot \operatorname{artg}(\operatorname{sen} s)$$

(b) La gráfica de la aceleración es

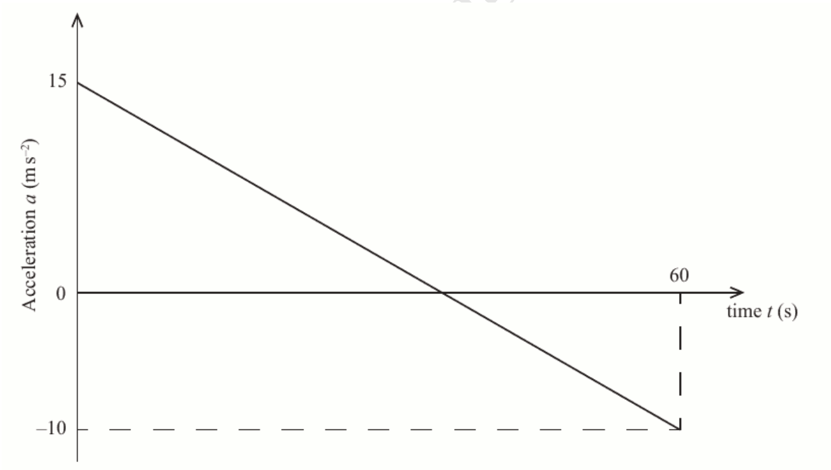


Hay dos posiciones en que la aceleración es 0,25 m s^{-2}: $s_1 \simeq 0{,}296$ m y $s_2 \simeq 0{,}918$ m.

♠♠♠♠

9. (8 puntos)

A jet plane travels horizontally along a straight path for one minute, starting at time $t = 0$, where t is measured in seconds. The acceleration, a, measured in m s^{-2}, of the jet plane is given by the straight line graph below.



(a) Find an expression for the acceleration of the jet plane during this time, in terms of t.

(b) Given that when $t = 0$ the jet plane is travelling at 125 m s^{-1}, find its maximum velocity in m s^{-1} during the minute that follows.

(c) Given that the jet plane breaks the sound barrier at 295 m s^{-1}, find out for how long the jet plane is travelling greater than this speed.

Solución:

(a) La recta pasa por los puntos $(60, -10)$ y $(0, 15)$. La ecuación de la recta es

$$a - 15 = \frac{25}{-60}\,t\,; \qquad a = 15 - \frac{5}{12}\,t$$

(b) La velocidad la obtenemos integrando la aceeración:

$$v = \int \left(15 - \frac{5}{12}\,t\right)\,\mathrm{d}t = 15t - \frac{5t^2}{24} + C$$

y teniendo en cuenta el valor inicial de la velocidad:

$$v = 125 + 15t - \frac{5t^2}{24}$$

El máximo de la velocidad se da cuando su derivada, la aceleración, es igual a cero:

$$15 - \frac{5}{12}\,t = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = 36 \text{ s}\;; \qquad v = 395 \text{ m s}^{-1}$$

(c) Tenemos que resolver la inecuación

$$v > 295 \quad\Longrightarrow\quad 125 + 15t - \frac{5t^2}{24} > 295$$

Con la calculadora obtenemos que el avión viaja a velocidad superior a la del sonido entre $t \simeq 14{,}1$ s y $t \simeq 57{,}9$ s, es decir, aproximadamente durante 43,8 s.

♠♠♠♠

10. (8 puntos)

Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O. La velocidad v, en m s^{-1}, viene dada por la función $v(t) = 1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}$ donde el tiempo $t \geq 0$ se mide en segundos.

(a) Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2 > 0$ en los que la partícula cambia de sentido.

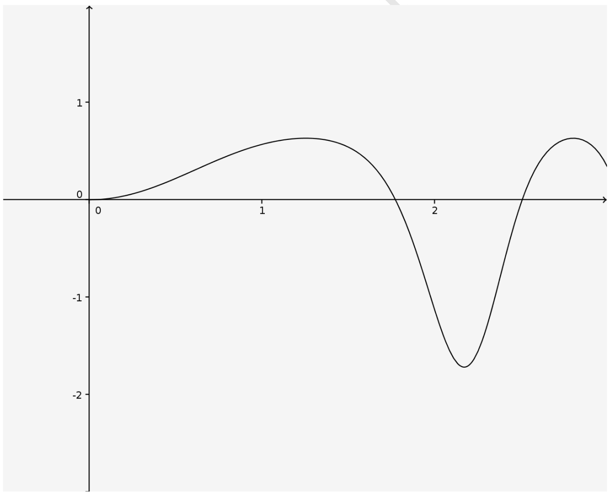
(b) (I) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.

(II) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima.

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$.

Solución:

(a) La gráfica de la velocidad es



La partícula cambia de sentido cuando la velocidad se hace cero. Estos valores son $t_1 \simeq 1{,}77$ y $t_2 = 2{,}51$ s.

(b) (I) La velocidad máxima se da para $t \simeq 1{,}25$ s.

(II) La velocidad mínima se da para $t \simeq 2{,}17$ s.

(c) Como no hay cambio de sentido, la distancia recorrida es igual al cambio en la posición:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}\right)\,\mathrm{d}t \simeq -0{,}711$$

La distancia recorrida es aproximadamente 0,711 m.

♠♠♠♠

11. (8 puntos)

Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O. La velocidad v, en m s^{-1}, viene dada por la función $v(t) = 1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}$ donde el tiempo $t \geq 0$ se mide en segundos.

(a) Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2 > 0$ en los que la partícula cambia de sentido.

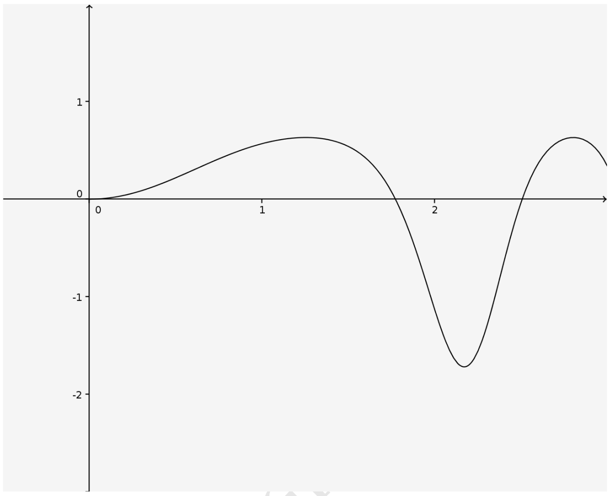
(b) (I) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.

(II) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima.

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$.

Solución:

(a) La gráfica de la velocidad es



La partícula cambia de sentido cuando la velocidad se hace cero. Estos valores son $t_1 \simeq 1{,}77$ y $t_2 = 2{,}51$ s.

(b) (I) La velocidad máxima se da para $t \simeq 1{,}25$ s.

(II) La velocidad mínima se da para $t \simeq 2{,}17$ s.

(c) Como no hay cambio de sentido, la distancia recorrida es igual al cambio en la posición:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}\right) \, \mathrm{d}t \simeq -0{,}711$$

La distancia recorrida es aproximadamente 0,711 m.

♠♠♠♠

12. (8 puntos)

Una partícula se mueve en línea recta. Su velocidad en m s^{-1} en el instante t segundos viene dada por $v = 9t - 3t^2,\ 0 \leq t \leq 5$.

En el instante $t = 0$, el desplazamiento s de la partícula desde el origen O es de 3 m.

(a) Halle el desplazamiento de la partícula cuando $t = 4$.

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico del desplazamiento/tiempo para esta partícula $0 \leq t \leq 5$, mostrando claramente dónde toca la curva a los ejes y las coordenadas de los puntos en los que el desplazamiento alcanza valores máximos y mínimos.

(c) Para $t > 5$ el desplazamiento de la partícula viene dado por:

$$s = a + b \cos \frac{2\pi t}{5}$$

de modo tal que s es continuo para todo $t \geq 0$.

Sabiendo que $s = 16{,}5$ para $t = 7{,}5$, halle los valores de a y b.

(d) Halle los valores t_1 y t_2 $(0 < t_1 < t_2 < 8)$ en los que la partícula vuelve al punto de partida.

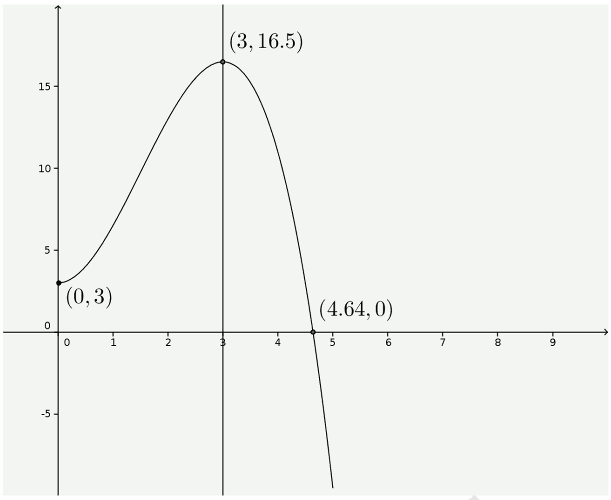
Solución:

(a) Integrando la velocidad y teniendo en cuenta que $s(0) = 3$ se obtiene:

$$s(t) = \frac{9t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} + 3 = \frac{9}{2}\,t^2 - t^3 + 3$$

Sustituyendo $s(4) = 11$.

(b) El gráfico de esta función entre 0 y 5 s es:



(c) Puesto que $s(5) = \frac{9}{2}\,25 - 125 + 3 = -9{,}5$, para que la función sea continua debe ocurrir:

$$a + b\cos\frac{2\pi 5}{5} = a + b\cos 2\pi = -9{,}5$$

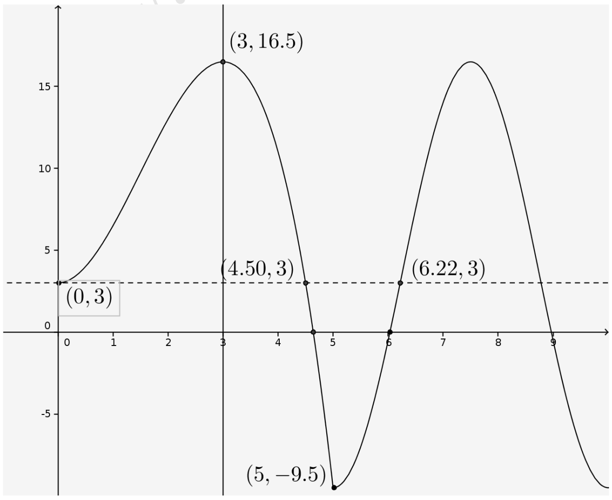
y además:

$$s(7{,}5) = a + b\cos\frac{2\pi 7{,}5}{5} = a + b\cos 3\pi = 16{,}5$$

Entonces a y b son la solución del sistema:

$$\begin{cases} a + b = -9{,}5 \\ a - b = 16{,}5 \end{cases} \implies a = 3{,}5,\ b = -13$$

(d) Representamos la función:



y de aquí $x_1 = 4{,}50$ y $x_2 = 6{,}22$.

♠♠♠♠

13. (12 puntos)

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad v m s^{-1}, en el instante t segundos, viene dada por

$$v(t) = \frac{t}{12 + t^4}, \qquad t \geq 0.$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas.

(b) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\displaystyle\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t$.

(c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma $k \operatorname{artg}(b)$, $\quad k, b \in \mathbb{R}$.

(d) La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad v m s^{-1} y su desplazamiento s m están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arsen}(\sqrt{s})$. Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0{,}1$ m.

Solución:

(a) La derivada de la función es:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{12+t^4-4t^3\cdot t}{(12+t^4)^2} = \frac{12-3t^4}{(12+t^4)^2}$$

La derivada se anula en $t = \sqrt{2}$. La función tiene un máximo en $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{16}\right)$.

(b) Con el cambio $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ tenemos:

$$\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{12+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\operatorname{artg}\frac{u}{\sqrt{12}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{x^2}{2\sqrt{3}} + C$$

(c) Calculamos la integral definida:

$$s = \int_0^6 \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right]_0^6 = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{artg} 6\sqrt{3}$$

(d) Teniendo en cuenta que

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot v$$

Derivando y sustituyendo v:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-s}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot\operatorname{arsen}\sqrt{s}$$

Sustituyendo $s = 0{,}1$ se obtiene $a \simeq 0{,}536$ m s^{-2}.

♠♠♠♠

14. (21 puntos)

A particle, A, is moving along a straight line. The velocity, v_A m s^{-1}, of A t seconds after its motion begins is given by

$$v_A = t^3 - 5t^2 + 6t$$

(a) Sketch the graph of $v_A = t^3 - 5t^2 + 6t$ for $t \geq 0$, with v_A on the vertical axis and t on the horizontal. Show on your sketch the local maximum and minimum points, and the intercepts with the t-axis.

(b) Write down the times for which the velocity of the particle is increasing.

(c) Write down the times for which the magnitude of the velocity of the particle is increasing.

At $t = 0$ the particle is at point O on the line.

(d) Find an expression for the particle's displacement, x_A m, from O at time t.

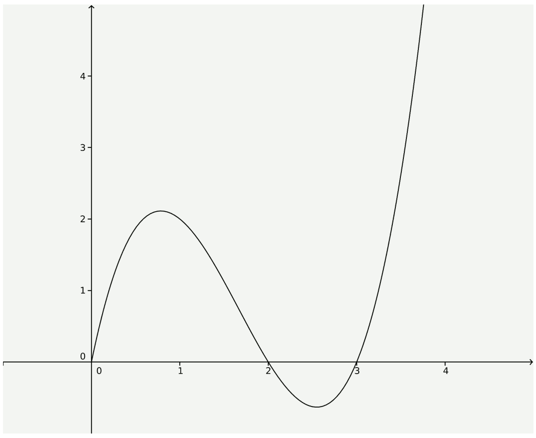
A second particle, B, moving along the same line, has position x_B m, velocity v_B m s^{-1} and acceleration, a_B m s^{-2}, where $a_B = -2v_B$ for $t \geq 0$. At $t = 0$, $x_B = 20$ and $v_B = -20$.

(e) Find an expression for v_B in terms of t.

(f) Find the value of t when the two particles meet.

Solución:

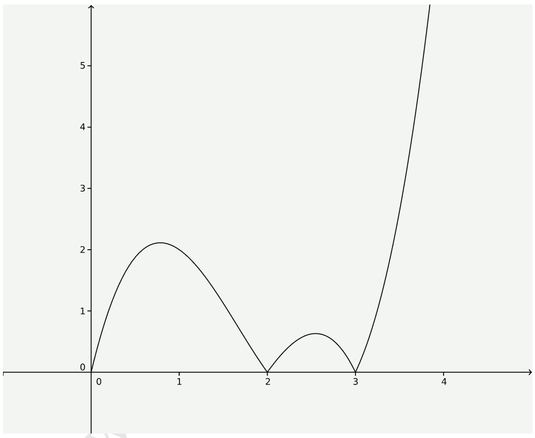
(a)



El máximo se da para $t = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \simeq 0{,}785$ y el mínimo para $t = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \simeq 2{,}55$.

(b) La velocidad está aumentando en todo momento salvo entre $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ y $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$.

(c) El módulo de la velocidad se representa en la siguiente figura



El módulo de la velocidad es creciente excepto en el intervalo $\left[\frac{5-\sqrt{7}}{3}, 2\right]$ y en $\left[\frac{5+\sqrt{7}}{3}, 3\right]$.

(d) La posición del móvil la obtenemos integrando la velocidad:

$$x_A = \int (t^3 - 5t^2 + 6t)\ \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + C$$

La constante de integración C vale cero por las condiciones iniciales:

$$x_A = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + 3t^2$$

(e) Calculamos la velocidad de la partícula B:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2v \ ; \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\ \mathrm{d}t \ ; \qquad \ln(-v) = -2t + C \ ; \qquad v = -e^{-2t+C} = -Ke^{-2t}$$

Puesto que la velocidad inicial es negativa, hemos tomado la primitiva $\ln(-v)$ en lugar de $\ln v$. En el instante inicial la velocidad es igual a -20. Así pues

$$v_B = -20e^{-2t}$$

La posición de la partícula B la obtenemos integrando la velocidad:

$$x_B = \int -20e^{-2t}\ \mathrm{d}t = -20e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}\right) + C = 10e^{-2t} + C$$

En el instante inicial

$$20 = 10 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 10$$

y la posición de la partícula B está dada por

$$x_B = 10\left(1 + e^{-2t}\right)$$

Para calcular el tiempo en que las partículas se encuentran basta obtener (con la calculadora) la intersección de las dos funciones de posición. Hemos obtenido $t \simeq 4,41$ s.

♠♠♠♠

15. (22 puntos)

Una partícula se mueve en línea recta a una velocidad de v metros por segundo. En un instante cualquiera, t segundos, $0 \leq t < \frac{3\pi}{4}$, la velocidad viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2 + 1 = 0.$$

También se sabe que $v = 1$ cuando $t = 0$.

(a) Halle una expresión para v en función de t.

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de v en función de t, mostrando claramente las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de todas las asíntotas.

(c) (I) Escriba el tiempo T para el cual la velocidad es igual a cero.

(II) Halle la distancia recorrida en el intervalo $[0, T]$.

(d) Halle una expresión para el desplazamiento s en función de t, sabiendo que $s = 0$ cuando $t = 0$.

(e) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, compruebe que

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 + v^2}$$

Solución:

(a) Separando las variables e integrando

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 + v^2} = -\,\mathrm{d}t$$
$$\operatorname{artg} v = -t + C$$
$$v = \operatorname{tg}(C - t)$$

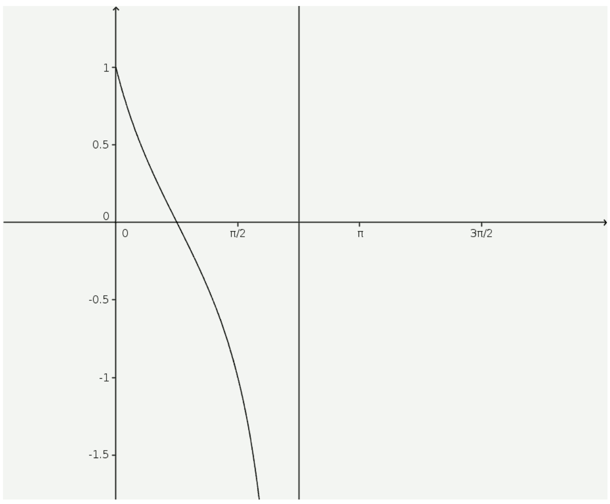
Para $t = 0$, $v = 1$. Entonces

$$\operatorname{tg} C = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}$$

La función queda:

$$v = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$$

(b)



(c) (I) La velocidad es cero para $t = \frac{\pi}{4}$.

(II) Calculamos la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \,\mathrm{d}t$$

Puede calcularse exactamente (la integral de la tangente es menos el logaritmo del coseno). La calculadora nos da 0,347.

(*d*) Calculamos ahora la integral

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v \, \mathrm{d}t = \int_0^t \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)} \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right]_0^t \\ &= \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

(*e*) Teniendo en cuenta:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\ln\cos x = -\frac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} s &= \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1 + v^2) + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{2}{1 + v^2} \end{aligned}$$

♠♠♠♠