Exámenes
Bachillerato Internacional NS
Problemas de Cálculo

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

1. (6 puntos)

   Find the area enclosed by the curve $y = \arctan x$, the x-axis and the line $x = \sqrt{3}$.

   Solución:

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{artg} x \, \mathrm{d}x$$

La integral se hace por partes:

$$u = \operatorname{artg} x \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

Así:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{artg} x \, \mathrm{d}x &= \Big[x \operatorname{artg} x\Big]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\ln 4\end{aligned}$$

♠♠♠♠

2. (6 puntos)

   Consider the functions given below:

$$f(x) = 2x+3, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

(a) (I) Find $(g \circ f)(x)$ and write down the domain of the function.
(II) Find $(f \circ g)(x)$ and write down the domain of the function.

(b) Find the coordinates of the point where the graph of $y = f(x)$ and the graph of $y = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ intersect.

Solución:

(a) (I) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\,(2x+3) = \dfrac{1}{2x+3}$.
El dominio de esta función son todos los números reales distintos de $-\frac{3}{2}$.

(II) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\left(\dfrac{1}{x}\right) + 3 = \dfrac{2}{x} + 3$.
El dominio de esta función son todos los números reales distintos de 0.

(b) Teniendo en cuenta que $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ tenemos que:

$$(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = g^{-1}[(f \circ g)(x)] = g^{-1}\left(\frac{2}{x} + 3\right) = g^{-1}\left(\frac{2+3x}{x}\right) = \frac{x}{3x+2}$$

La intersección de $y = 2x+3$ con $y = \dfrac{x}{3x+2}$ es el punto $(-1, 1)$.

♠♠♠♠

3. (7 puntos)

   Show that the points $(0,0)$ and $(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi})$ on the curve $e^{x+y} = \cos(xy)$ have a common tangent.

   Solución:

Calculemos la derivada:

$$e^{x+y}(1+y') = -\operatorname{sen}(xy)(y+xy')$$

En el punto $(0,0)$ calculamos la derivada sustituyendo x e y por 0:

$$1 + y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -1$$

y, en consecuencia la tangnte en ese punto es $y = -x$.

Calculamos ahora la derivada en $\left(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi}\right)$:

$$1 + y' = -\operatorname{sen}(-2\pi)(\ldots) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -1$$

La ecuación de la tangente es:

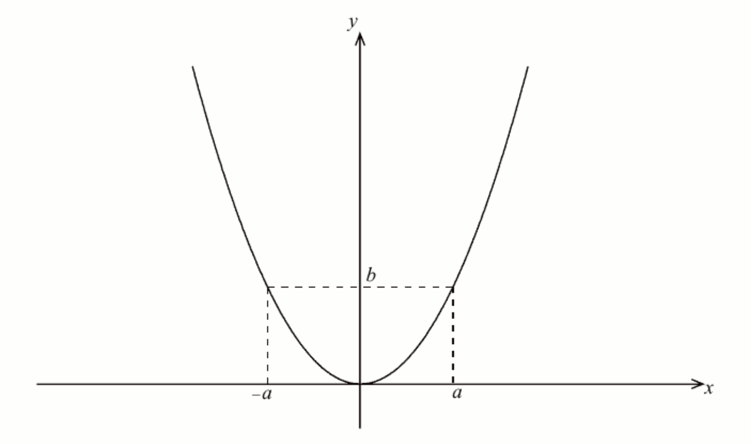
$$y + \sqrt{2\pi} = (-1)(x - \sqrt{2\pi}) \quad \Longrightarrow \quad y = -x$$

y vemos que en ambos puntos la tangente es la misma.

♠♠♠♠

4. (8 puntos)

The diagram below shows the graph of the function $y = f(x)$, defined for all $x \in \mathbb{R}$, where $b > a > 0$.



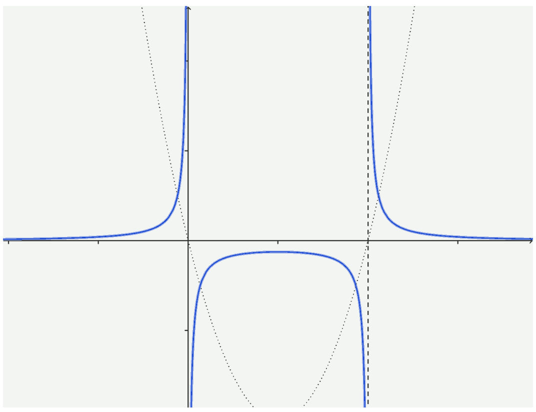
Consider the function:

$$g(x) = \frac{1}{f(x-a) - b}$$

(a) Find the largest possible domain of the function g.

(b) Sketch the graph of $y = g(x)$. On the graph, indicate any asymptotes and local maxima or minima, and write down their equations and coordinates.

Solución:



(a) El denominador de la función $g(x)$ es la función $f(x)$ desplazada a unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo. Los ceros de esta función son $x = 0$ y $x = 2a$. El dominio de la función g es

$$\text{Dominio de } g = \mathbb{R} - \{0, 2a\}$$

(b) Las asíntotas de $y = g(x)$ son $x = 0$, $x = 2a$ e $y = 0$. El máximo está en $\left(a, -\frac{1}{b}\right)$.

♠♠♠♠

5. (19 puntos)

Consider the function

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}, \qquad 0<x<e^2.$$

(a) (I) Solve the equation $f'(x)=0$.
(II) Hence show the graph of f has a local maximum.
(III) Write down the range of the function f.

(b) Show that there is a point of inflexion on the graph and determine its coordinates.

(c) Sketch the graph of $y=f(x)$, indicating clearly the asymptote, x-intercept and the local maximum.

(d) Now consider the functions

$$g(x)=\frac{\ln|x|}{x}, \quad h(x)=\frac{\ln|x|}{|x|}$$

where $0<|x|<e^2$.
(I) Sketch the graph of $y=g(x)$.
(II) Write down the range of g.
(III) Find the values of x such that $h(x)>g(x)$.

Solución:

(a) (I) Derivamos:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Igualamos a cero la derivada:

$$1-\ln x=0 \quad\Longrightarrow\quad x=e$$

(II) El signo de la derivada es

$$\begin{array}{ccc} + & 0 & - \\ \hline & e & \end{array}$$

y, por consiguiente, hay un máximo en $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

(III) Como

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$

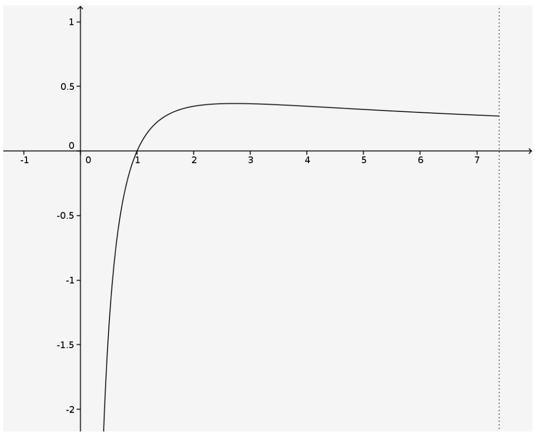
el rango de la función es $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

(b) Calculamos la derivada segunda:

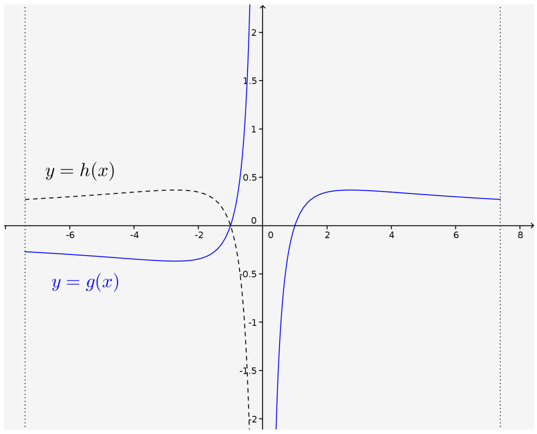
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

La derivada segunda se anula en $x=e^{\frac{3}{2}}$. Hay un punto de inflexion en $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

(c) La asíntota es $x=0$. La recta $y=0$ no es asíntota porque la función solo está definida para $x\in(0,e^2)$. El punto de corte con el eje x es el punto $(1,0)$.



(d) (I)



(II) El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.

(III) En $(-e^2, -1)$.

♠♠♠♠

6. (6 puntos)

Consider the function $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10, \quad x \in \mathbb{R}$.

(a) Find the equation of the straight line passing through the maximum and minimum points of the graph $y = f(x)$.

(b) Show that the point of inflexion of the graph $y = f(x)$ lies on this straight line.

Solución:

(a) Calculamos los ceros de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1, \quad x = 3$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:

	-1		3	
$+$	0	$-$	0	$+$

Hay un máximo en $(-1, 15)$ y un mínimo en $(3, -17)$. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$y - 15 = -\frac{32}{4}(x+1) \;; \qquad y = -8x + 7$$

(b) En el punto de inflexión la segunda derivada debe anularse:

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

El punto de inflexión es $(1, -1)$ que está contenido en la recta calculada anteriormente.

♠♠♠♠

7. (5 puntos)

The function $f(x) = 4x^3 + 2ax - 7a$, $a \in \mathbb{R}$, leaves a remainder of -10 when divided by $(x - a)$.

(a) Find the value of a.

(b) Show that for this value of a there is a unique real solution to the equation $f(x) = 0$.

Solución:

(a) Segun el teorema del resto el valor del polinomio para $x = a$ debe ser igual a -10:

$$f(a) = 4a^3 + 2a^2 - 7a = -10 \;; \qquad 4a^3 + 2a^2 - 7a + 10 = 0$$

La solución es $a = -2$.

(b) Para $a=-2$ la ecuación resulta

$$4x^3-4x+14=0$$

Puede verse con la calculadora que la función $F(x)=4x^3-4x+14$ se anula para un solo valor de x.

♠♠♠♠

8. (16 puntos)

An open glass is created by rotating the curve $y=x^2$, defined in the domain $x\in[0,10]$, 2π radians about the y-axis. Units on the coordinate axes are defined to be in centimetres.

(a) When the glass contains water to a height h cm, find the volume V of water in terms of h.

(b) If the water in the glass evaporates at the rate of 3 cm^3 per hour for each cm^2 of exposed surface area of the water, show that

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-3\sqrt{2\pi V}$$

where t is measured in hours.

(c) If the glass is filled completely, how long will it take for all the water to evaporate?

Solución:

(a) El volumen del sólido de revolución se calcula mediante la integral

$$V=\pi\int_0^h x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^h y\,\mathrm{d}y=\left[\frac{\pi y^2}{2}\right]_0^h=\frac{\pi h^2}{2}$$

(b) El área de la superficie es πx^2. Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-3\pi x^2=-3\pi h$$

Escribiendo h en función de V mediante la fórmula calculada en el apartado anterior resulta:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-3\pi x^2=-3\pi\frac{\sqrt{2V}}{\pi}=-3\sqrt{2\pi V}$$

(c) Integrando la ecuación anterior tras separar variables

$$\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{V}}=3\sqrt{2\pi}\,\mathrm{d}t$$

$$2\int\frac{\mathrm{d}V}{2\sqrt{V}}=3\sqrt{2\pi}\int\,\mathrm{d}t$$

$$2\sqrt{V}=-3\sqrt{2\pi}t+C$$

$$\sqrt{V}=\sqrt{V_0}-\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}t$$

En el instante inicial, cuando el vaso está lleno $h=100$ cm de modo que $V_0=\frac{\pi 100^2}{2}$. Si el volumen final ha de ser cero:

$$t=\frac{2\sqrt{V_0}}{3\sqrt{2\pi}}=\frac{2\sqrt{\frac{\pi 100^2}{2}}}{3\sqrt{2\pi}}=\frac{100}{3}$$

♠♠♠♠

9. (6 puntos)

The quadratic function $f(x)=p+qx-x^2$ has a maximum value of 5 when $x=3$.

(a) Find the value of p and the value of q.

(b) The graph of $f(x)$ is translated 3 units in the positive direction parallel to the x-axis. Determine the equation of the new graph.

Solución:

(a) Puesto que la derivada se anula en $x = 3$:

$$f'(x) = q - 2x \; ; \qquad f'(3) = q - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 6$$

Y, puesto que la ordenada del máximo vale 5:

$$f(3) = p + 6 \cdot 3 - 9 = 5 \quad \Longrightarrow \quad p = -4$$

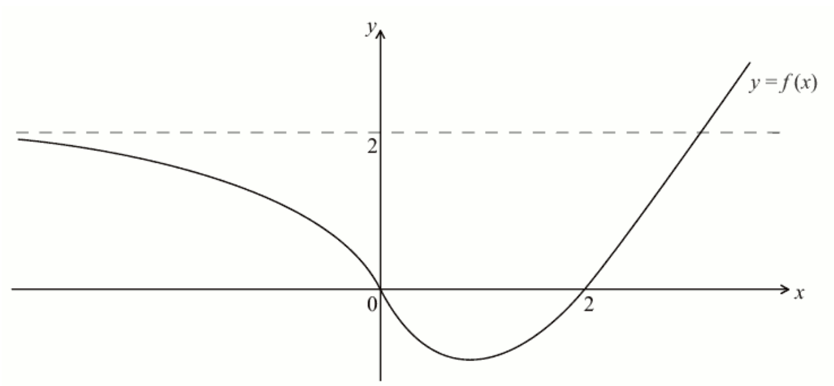
(b) La ecuación de la parábola que hemos obtenido es $y = -4 + 6x - x^2$. Para trasladar la gráfica 3 unidades hacia la derecha hemos de sustituir x por $x - 3$. Resulta la ecuación:

$$y = -4 + 6(x - 3) - (x - 3)^2$$
$$y = -31 + 12x - x^2$$

♠♠♠♠

10. (6 puntos)

The diagram shows the graph of $y = f(x)$. The graph has a horizontal asymptote at $y = 2$.



(a) Sketch the graph of $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

(b) Sketch the graph of $y = xf(x)$.

Solución:

(a)

♠♠♠♠

11. (6 puntos)

A function is defined by $h(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$. Find an expression for $h^{-1}(x)$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 2e^y - \frac{1}{e^y} \; ; \qquad xe^y = 2e^{2y} - 1 \; ; \qquad 2e^{2y} - xe^y - 1 = 0$$

Despejamos como en una ecuación de segundo grado:

$$e^y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 8}}{4}$$

El signo menos no tiene sentido puesto que la exponencial no puede ser negativa:

$$e^y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{4} \quad \Longrightarrow \quad y = h^{-1}(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{4}$$

♠♠♠♠

12. (15 puntos)

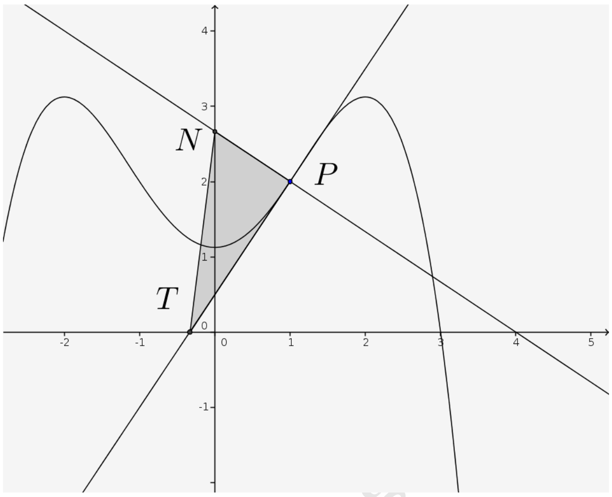
The curve C has equation $y = \frac{1}{8}(9 + 8x^2 - x^4)$.

(a) Find the coordinates of the points on C at which $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

(b) The tangent to C at the point $P(1, 2)$ cuts the x-axis at the point T. Determine the coordinates of T.

(c) The normal to C at the point P cuts the y-axis at the point N. Find the area of triangle PTN.

Solución:



(a) Derivando la función e igualando a cero:

$$y' = \frac{1}{8}\left(16x - 4x^3\right) = \frac{1}{8} \cdot 4x\left(4 - x^2\right) = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones $x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$.

(b) La pendiente de la tangnte es

$$m = y'(1) = \frac{3}{2}$$

La ecuación de la tangente es

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

y su intersección con el eje OX es el punto $T\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

(c) La ecuación de la normal es

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

y su intersección con el eje OY es el punto $N\left(0, \frac{8}{3}\right)$.

El triángulo PTN es rectángulo en P. Las longitudes de los catetos son:

$$PT = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

$$PN = \sqrt{(1 - 0)^2 + \left(2 - \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

y el área:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{13}{9}$$

♠♠♠♠

13. (25 puntos)

(a) (I) Sketch the graphs of $y = \sin x$ and $y = \sin 2x$, on the same set of axes, for $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(II) Find the x-coordinates of the points of intersection of the graphs in the $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(III) Find the area enclosed by the graphs.

(b) Find the value of

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\ \mathrm{d}x$$

using the substitution $x = 4\sin^2\theta$.

(c) The increasing function f satisfies $f(0) = 0$ and $f(a) = b$, where $a > 0$ and $b > 0$.

(I) By reference to a sketch, show that

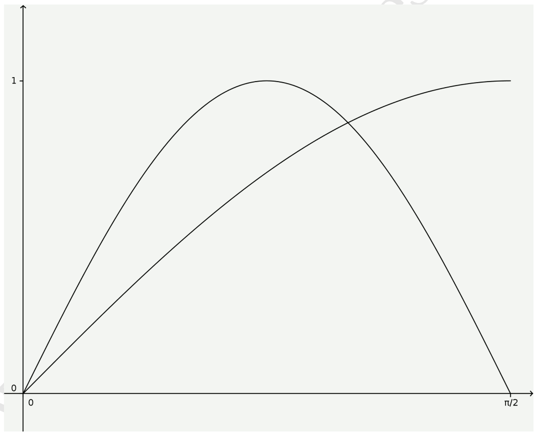
$$\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = ab - \int_0^b f^{-1}(x)\ \mathrm{d}x.$$

(II) Hence find the value of

$$\int_0^2 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)\ \mathrm{d}x$$

Solución:

(a) (I)



(II) Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen} x\\ 2\operatorname{sen} x\cos x &= \operatorname{sen} x\\ \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) &= 0\end{aligned}$$

ecuación que tiene como soluciones $\operatorname{sen} x = 0$ y $\cos x = \frac{1}{2}$, es decir, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

(III) El área es

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos 2x}{2} - (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0\right)\\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(b) De acuerdo con el cambio

$$x = 4\operatorname{sen}^2\theta\ ; \qquad \mathrm{d}x = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$$

Además, para $x = 0$, $\theta = 0$ y para $x = 1$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{4\operatorname{sen}^2\theta}{4-4\operatorname{sen}^2\theta}}\,8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \Big[4\theta - 2\operatorname{sen}2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

(c) (I)

(II) La función inversa de $f(x) = \operatorname{arsen}\frac{x}{4}$ es:

$$x = \operatorname{arsen}\frac{y}{4} \quad\Longrightarrow\quad y = f^{-1}(x) = 4\operatorname{sen}x$$

Cuando $x = 2$, $f(2) = \operatorname{arsen}\frac{2}{4} = \operatorname{arsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
Entonces, según la fórmula anterior

$$\begin{aligned}\int_0^2 \operatorname{arsen}\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{3} - \Big[-4\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4\end{aligned}$$

♠♠♠♠

14. (7 puntos)

Sketch the graph of

$$f(x) = x + \frac{8x}{x^2-9}.$$

Clearly mark the coordinates of the two maximum points and the two minimum points. Clearly mark and state the equations of the vertical asymptotes and the oblique asymptote.

Solución: Las asíntotas son las rectas $x = -3$, $x = 3$ e $y = x$.

El resto de las cuestiones se pueden resolver mediante la calculadora. Los máximos son los puntos $(-5{,}06; -7{,}50)$ y $(0{,}592; 0{,}0445)$. Los mínimos están en $(5{,}06; 7{,}50)$ y $(-0{,}592; -0{,}0445)$.

♠♠♠♠

15. (5 puntos)

Consider the functions

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad \text{and} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

The graphs of $y = f(x)$ and $y = g(x)$ meet at the point $(0, 1)$ and one other point, P.

(a) Find the coordinates of P.

(b) Calculate the size of the acute angle between the tangents to the two graphs at the point P.

Solución:

(a) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = \frac{1}{x^3+1} \end{cases} \quad ; \qquad (x^3+1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^3 + 1 = 1 \\ x^3 + 1 = -1 \end{cases}$$

Obtenemos $x = 0$ y $x = -2$. Sustituyendo en $y = x^3 + 1$ obtenemos los puntos $(0,1)$ y $\left(\sqrt[3]{-2}, -1\right)$.

(b) Para calcular el ángulo de las tangentes necesitamos calcular las pendientes de las curvas en ese punto. Esto se puede hacer derivando y sustituyendo $\sqrt[3]{-2}$ o bien directamente con la calculadora. Las pendientes de las tangentes son:

$$m_1 = 3\sqrt[3]{4}\ ; \qquad m_2 = -3\sqrt[3]{4}$$

El ángulo de las tangentes cumple

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2\sqrt[3]{4}}{1 - 9\sqrt[3]{16}}\right|$$

♠♠♠♠

16. (8 puntos)

The point P, with coordinates (p, q) , lies on the graph of $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $a > 0$. The tangent to the curve at P cuts the axes at $(0, m)$ and $(n, 0)$. Show that $m + n = a$.

Solución:

Calculamos la derivada:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

La tangente en el punto $P(p, q)$ tiene por ecuación:

$$y - q = -\sqrt{\frac{q}{p}}(x - p)$$

Calculamos las intersecciones con los ejes de esta recta. Para $x = 0$:

$$m - q = \sqrt{pq} \quad \Longrightarrow \quad m = q + \sqrt{pq}$$

y para $y = 0$:

$$-q = -\sqrt{\frac{q}{p}}(n - p)\ ; \qquad n - p = \sqrt{pq} \quad \Longrightarrow \quad n = p + \sqrt{pq}$$

Por otra parte

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{a}\ ; \qquad p + q + 2\sqrt{pq} = a \quad \Longrightarrow \quad p + q = a - 2\sqrt{pq}$$

Entonces:

$$m + n = p + q + 2\sqrt{pq} = a - 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pq} = a$$

♠♠♠♠

17. (a) Using integration by parts, show that

$$\int e^{2x}\sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right) + C$$

(b) Solve the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - y^2}\,e^{2x}\sin x$$

given that $y = 0$ when $x = 0$, writing your answer in the form $y = f(x)$.

(c) (I) Sketch the graph of $y = f(x)$, found in part (b), for $0 \leq x \leq 1{,}5$. Determine the coordinates of the point P, the first positive intercept on the x-axis, and mark it on your sketch.

(II) The region bounded by the graph of $y = f(x)$ and the x-axis, between the origin and P, is rotated 360º about the x-axis to form a solid of revolution. Calculate the volume of this solid.

Solución:

(a) Por partes:

$$u = e^{2x} \qquad \mathrm{d}u = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \qquad v = -\cos x$$

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = e^{2x} \qquad \mathrm{d}u = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad v = \operatorname{sen} x$$

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\right)$$

Vuelve a aparecer la misma integral. Pasando al primer miembro y despejando obtenemos:

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$$

(b) Separando las variables:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

$$\operatorname{arsen} y = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$$

Cuando $x = 0$, y debe valer 0. Por tanto

$$0 = \frac{1}{5} + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{5}$$

De modo que podemos escribir la función

$$y = \operatorname{sen}\frac{e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) - 1}{5}$$

(c) Se hace con la calculadora:

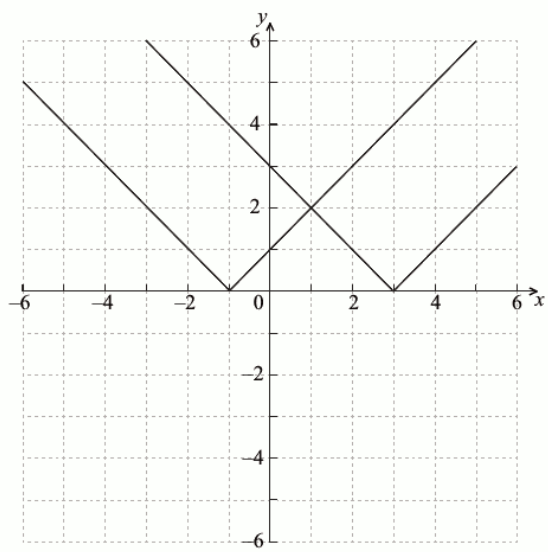
(I) $P(0{,}599, 0)$.

(II) Debemos integrar la función al cuadrado entre cero y el valor hallado y multiplicar por π. El resultado es 0,174.

♠♠♠♠

18. (8 puntos)

The graphs of $y = |x+1|$ and $y = |x-3|$ are shown below.



Let $f(x) = |x+1| - |x-3|$.

(a) Draw the graph of $y = f(x)$.

(b) Hence state the value of

(I) $f'(-3)$;

(II) $f'(2{,}7)$

(III) $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

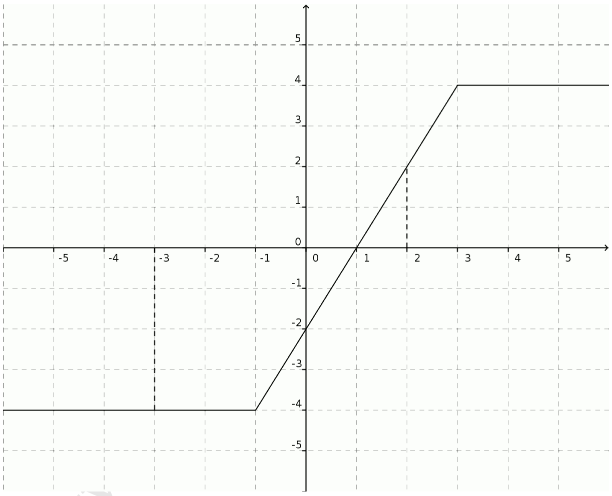
(a) Podemos escribir las funciones $|x+1|$ y $|x-3|$ como funciones a trozos:

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x \leq -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases} ; \qquad |x-3| = \begin{cases} -x+3 & x \leq 3 \\ x-3 & x > 3 \end{cases}$$

Restando las funciones obtenemos:

$$f(x) = |x+1| - |x-3| = \begin{cases} -4 & x \leq -1 \\ 2x-2 & -1 < x \leq 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases}$$

La gráfica de esta función es:



(b) De la expresión de la función o de la gráfica se desprende inmediatamente que

(I) $f'(3) = 0$

(II) $f'(2{,}7) = 2$

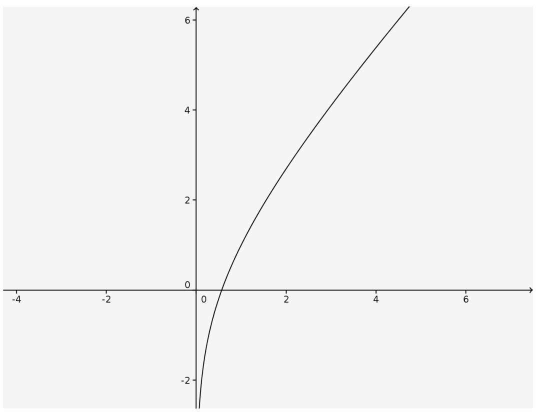
(III) $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x) = -11$

♠♠♠♠

19. (6 puntos)

The graph below shows $y = f(x)$, where $f(x) = x + \ln x$.

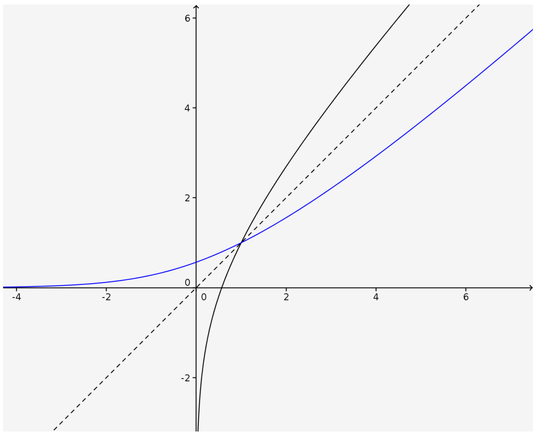
(a) On the graph below, sketch the curve $y = f^{-1}(x)$.



(*b*) Find the coordinates of the point of intersection of the graph of $y = f(x)$ and the graph of $y = f^{-1}(x)$.

Solución:

(*a*) La gráfica de la función inversa de $f(x)$ es la simétrica de $y = f(x)$ respecto a la recta $y = x$.



(*b*) Es el punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = x$:

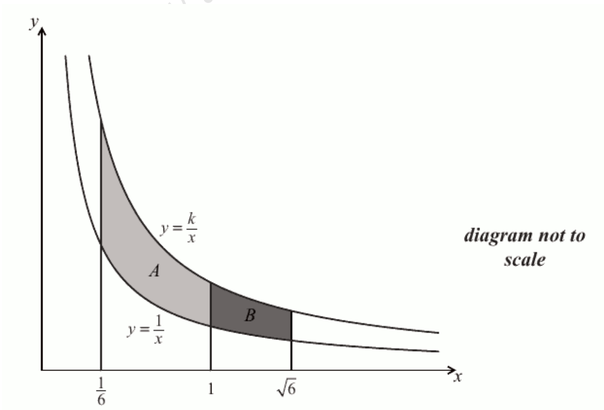
$$x + \ln x = x \; ; \qquad \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

El punto de intersección es $(1, 1)$.

♠♠♠♠

20. (8 puntos)

The graph below shows the two curves $y = \dfrac{1}{x}$ and $y = \dfrac{k}{x}$, where $k > 1$.



(*a*) Find the area of region A in terms of k.
(*b*) Find the area of region B in terms of k.
(*c*) Find the ratio of the area of region A to the area of region B.

Solución:

(*a*) Integrando:

$$S_1 = \int_{\frac{1}{6}}^{1} \left(\frac{k}{x} - \frac{1}{x} \right) \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}}^{1} \frac{x-1}{x} \,\mathrm{d}x = \Big[(k-1) \ln x \Big]_{\frac{1}{6}}^{1} = (k-1) \ln 6$$

(*b*) Lo mismo

$$S_2 = \int_{1}^{\sqrt{6}} \left(\frac{k}{x} - \frac{1}{x} \right) \,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\sqrt{6}} \frac{x-1}{x} \,\mathrm{d}x = \Big[(k-1) \ln x \Big]_{1}^{\sqrt{6}} = (k-1) \ln \sqrt{6} = \frac{1}{2}(k-1) \ln 6$$

(c) Es el doble.

♠♠♠♠

21. (9 puntos)

The curve C has equation $2x^2 + y^2 = 18$. Determine the coordinates of the four points on C at which the normal passes through the point $(1, 0)$.

Solución:

Calculamos la derivada de la función:

$$4x + 2yy' = 0 \ ; \qquad y' = -\frac{2x}{y}$$

La normal en un punto (x_0, y_0) tiene como ecuación:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

Si pasa por el punto $(1, 0)$:

$$-y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(1 - x_0) \ ; \qquad y_0\left(\frac{1 - x_0}{2x_0} + 1\right) = 0$$

Entonces

– O bien se cumple

$$y_0 = 0 \ ; \qquad 2x^2 = 18$$

y encontramos los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

– O bien se cumple

$$\frac{1 - x_0}{2x_0} + 1 = 0 \ ; \qquad 1 - x_0 + 2x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -1$$

y encontramos los puntos $(-1, -4)$ y $(-1, 4)$.

♠♠♠♠

22. (22 puntos)

Let $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}, \quad 0 < x < 1.$

(a) Show that $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,(1 - x)^{\frac{3}{2}}$ and deduce that f is an increasing function.

(b) Show that the curve $y = f(x)$ has one point of inflexion, and find its coordinates.

(c) Use the substitution $x = \sin^2\theta$ to show that

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + c.$$

Solución:

(a) Derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

La derivada es positiva para todo $x \in (0, 1)$. La función es creciente.

(b) Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-1)x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\left[3(1-x)^{-1} - x^{-1}\right]$$

Igualando a cero

$$\frac{3}{1-x} - \frac{1}{x} = 0 \ ; \qquad \frac{3x - 1 + x}{x(1-x)} = 0 \ ; \qquad \frac{4x - 1}{x(x-1)} = 0$$

En $x = \frac{1}{4}$ la segunda derivada es cero y además toma valores de signos opuestos a su izquierda y su derecha. Es un punto de inflexión. Sus coordenadas son $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(c) Con el cambio $x = \operatorname{sen}^2\theta$, $\mathrm{d}x = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \int\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1-\cos^2\theta}}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int\operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta+C\\ &= \theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\end{aligned}$$

Para deshacer el cambio tenemos en cuenta que

$$x = \operatorname{sen}^2\theta\,;\quad \operatorname{sen}\theta=\sqrt{x}\,;\quad \theta = \operatorname{arsen}\sqrt{x}$$
$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{x}\,;\quad \cos\theta=\sqrt{1-x}$$

Por consiguiente:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsen}\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}+C$$

♠♠♠♠

23. (5 puntos)

Given that the graph of $y = x^3 - 6x^2 + kx - 4$ has exactly one point at which the gradient is zero, find the value of k.

Solución:

La derivado $y' = 3x^2 - 12x + k$ debe tener un único cero. Entonces el discriminante debe ser cero.

$$144 - 12k = 0 \quad\Longrightarrow\quad k = 12$$

♠♠♠♠

24. (5 puntos)

Let $f(x) = \ln x$. The graph of f is transformed into the graph of the function g by a translation of $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, followed by a reflection in the x-axis. Find an expression for $g(x)$, giving your answer as a single logarithm.

Solución:

Al aplicar la traslación obtenemos la función:

$$g(x) = \ln(x-3) - 2$$

Una reflexión en el eje OX se obtiene multiplicando la función por -1:

$$h(x) = 2 - \ln(x-3) = \ln\frac{e^2}{x-3}$$

♠♠♠♠

25. (9 puntos)

A cone has height h and base radius r. Deduce the formula for the volume of this cone by rotating the triangular region, enclosed by the line $y = h - \frac{h}{r}x$ and the coordinate axes, through 2π about the y-axis.

Solución:

El volumen se calcula mediante la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^h \left(r \, \frac{h-y}{h} \right)^2 \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h \left(h^2 + y^2 - 2hy \right) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[h^2 y + \frac{y^3}{3} - hy^2 \right]_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \, h^3 \\ &= \frac{1}{3} \, \pi r^2 h \end{aligned}$$

♠♠♠♠

26. (8 puntos)

A triangle is formed by the three lines $y = 10 - 2x$, $y = mx$ and $y = -\dfrac{1}{m}x$, where $m > \dfrac{1}{2}$. Find the value of m for which the area of the triangle is a minimum.

Solución:

El triángulo es rectángulo ya que la segunda y la tercera recta son perpendiculares. Además se cortan en el origen de coordenadas $A(0,0)$. Calculemos los otros dos vértices:

$$\begin{cases} y = 10 - 2x \\ y = mx \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B \left(\frac{10}{m+2}, \frac{10m}{m+2} \right)$$

y el tercer vértice

$$\begin{cases} y = 10 - 2x \\ y = -\frac{1}{m} \, x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C \left(\frac{10m}{2m-1}, \frac{-10}{2m-1} \right)$$

La función que ha de ser mínima es

$$S = \frac{1}{2} \, AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{100(1+m^2)}{(m+2)^2}} \sqrt{\frac{100(1+m^2)}{(2m-1)^2}} = 50 \, \frac{1+m^2}{(m+2)(2m-1)} = \frac{50(1+m^2)}{2m^2+3m-2}$$

El mínimo de esta función puede obtenerse con la calculadora o derivando. Vamos a calcular la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}m} = 50 \, \frac{2m(2m^2+3m-2) - (4m+3)(m^2+1)}{(2m^2+3m-2)^2} = 50 \, \frac{3m^2 - 8m - 3}{(2m^2+3m-2)^2}$$

Igualando a cero la derivada resulta $m = -\frac{1}{3}$ y $m = 3$. La solución válida es $m = 3$.

♠♠♠♠

27. (14 puntos)

The function $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ is defined for $0 < x < 2\pi$.

(a) Write down the coordinates of the minimum point on the graph of f.
(b) The points $P(p, 3)$ and $Q(q, 3)$, $q > p$, lie on the graph of $y = f(x)$. Find p and q.
(c) Find the coordinates of the point, on $y = f(x)$, where the gradient of the graph is 3.
(d) Find the coordinates of the point of intersection of the normals to the graph at the points P and Q.

Solución:

(a) Con la calculadora se obtiene directamente el punto $(3{,}79, 5)$. También podríamos escrito la función como $A \operatorname{sen}(x + \varphi)$ donde $A = \sqrt{3^2 + 4^4} = 5$ y $\varphi = \operatorname{artg} \frac{4}{3}$. El mínimo se produce cuando $x + \varphi = -\frac{\pi}{2}$. El valor exacto de la abscisa del mínimo es $-\frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \frac{4}{3}$ y el valor exacto de la ordenada es -5.

(b) Con la calculadora obtenemos $p \simeq 1{,}57$ y $q \simeq 6{,}00$.

(c) Calculamos la derivada

$$f'(x) = 3\cos x - 4\operatorname{sen} x$$

y de nuevo con la calculadora obtenemos el valor $f'(x) = 3$. Resulta $x \simeq 4{,}43$.

(d) Con la calculadora obtenemos los valores de la derivada en p y q que son -4 y 4. La ecuación de las normales es entonces

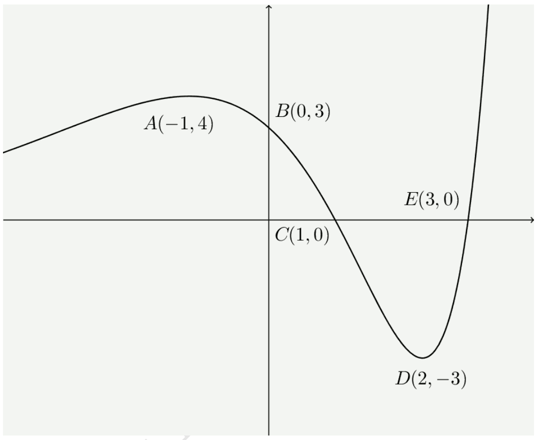
$$y - 3 = \frac{1}{4}(x - p)\ ; \qquad y - 30 - \frac{1}{4}(x - q)$$

Los valores exactos de las coordenadas del punto de intersección son $\left(\frac{p+q}{3}, 3 + \frac{q-p}{8}\right)$. Aproximadamente $(3{,}79, 3{,}55)$.

♠♠♠♠

28. (6 puntos)

A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$, donde A es un máximo local y D es un mínimo local.



(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de

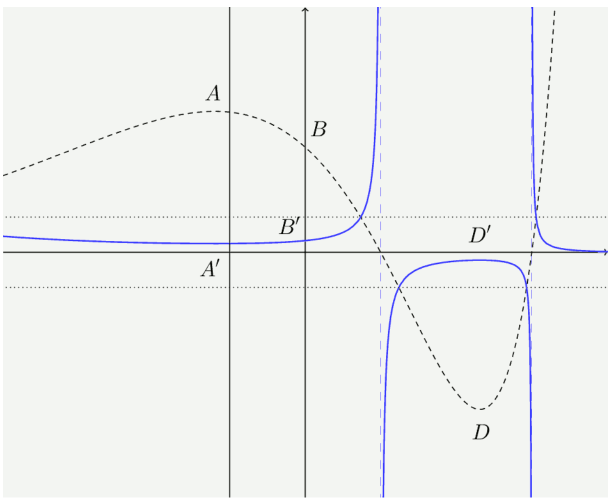
$$y = \frac{1}{f(x)}$$

mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A, B y D, rotulándolos A' , B' y D' respectivamente, y las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.

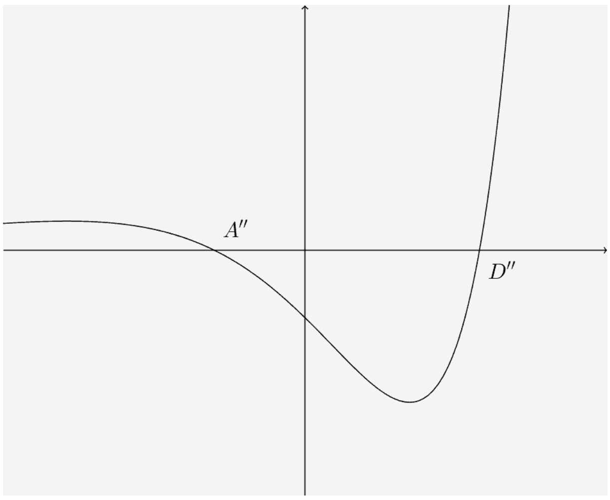
(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de la función derivada $y = f'(x)$, mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A y D, y rotulándolos A'' y D'' respectivamente.

Solución:

(a)



(b)



♠♠♠♠

29. (6 puntos)
Sea $x^3 y = a \operatorname{sen} nx$. Utilizando la derivación implícita, compruebe que:

$$x^3 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 6x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(n^2 x^2 + 6\right) xy = 0$$

Solución:

Derivando obtenemos:

$$3x^2 y + x^3 y' = an \cos nx$$

Derivando de nuevo:

$$6xy + 3x^2 y' + 3x^2 y' + x^3 y'' = -an^2 \operatorname{sen} nx$$

Agrupando términos y teniendo en cuenta que $a \operatorname{sen} nx = x^3 y$:

$$x^3 y'' + 6x^2 y' + 6xy = -n^2 x^3 y$$

$$x^3 y'' + 6x^2 y' + xy(n^2 x^2 + 6) = 0$$

♠♠♠♠

30. (9 puntos)
La función f definida en el dominio $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, viene dada por $f(x) = e^{-x} \cos x$.
   (a) Indique los ceros de f.
   (b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f.
   (c) Se denomina A a la región delimitada por la gráfica, el eje x y el eje y, mientras que se denomina B a la región delimitada por la gráfica y el eje x. Compruebe que la razón entre el área de A y el área de B es igual a

$$\frac{e^{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}+1}\right)}{e^{\pi}+1}$$

31. (18 puntos)
Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{75}, \quad x \geq 0 \qquad\qquad g(x) = \frac{|3x - 4|}{10}, \quad x \in \mathbb{R}$$

   (a) Indique el recorrido de f y de g.

(b) Halle una expresión para la función compuesta $f \circ g(x)$, de la forma $\dfrac{ax^2+bx+c}{3750}$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(c) (I) Halle una expresión para la función inversa $f^{-1}(x)$.
(II) Indique el dominio y el recorrido de $f^{-1}(x)$.

(d) Ahora el dominio de f y el de g quedan restringidos a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considerando los valores de f y de g en este nuevo dominio, determine cuál de las dos funciones, f y g, podría utilizarse para hallar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta X . Explique claramente las razones por las cuales ha dado esa respuesta.

(e) Utilizando esta distribución de probabilidad, calcule la media de X.

Solución:

(a) La gráfica de f es una rama de parábola con el vértice en $\left(0, \frac{1}{25}\right)$. El recorrido es el intervalo $\left[\frac{1}{25}, \infty\right)$. La función g es continua y solo toma valores positivos. Puesto que tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ y toma el valor cero en $x = \frac{4}{3}$ toma todos los valores del intervalo $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$, éste es su recorrido.

(b)
$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\frac{|3x-4|}{10}\right)$$
$$= \frac{2\frac{|3x-4|^2}{10^2}+3}{75} = \frac{2(3x-4)^2+300}{7500}$$
$$= \frac{18x^2-48x+332}{7500} = \frac{9x^2-24x+166}{3750}$$

(c) (I) Intercambiando las variables y despejando:
$$x = \frac{2y^2+3}{75} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{75x-3}{2}}$$

(II) El dominio es $\left[\frac{1}{25}, \infty\right)$. El recorrido es $[0, \infty)$.

(d) En este caso, los valores de $f(x)$ y $g(x)$ serían:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{3}{75}$	$\frac{5}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{21}{75}$	$\frac{35}{75}$

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$

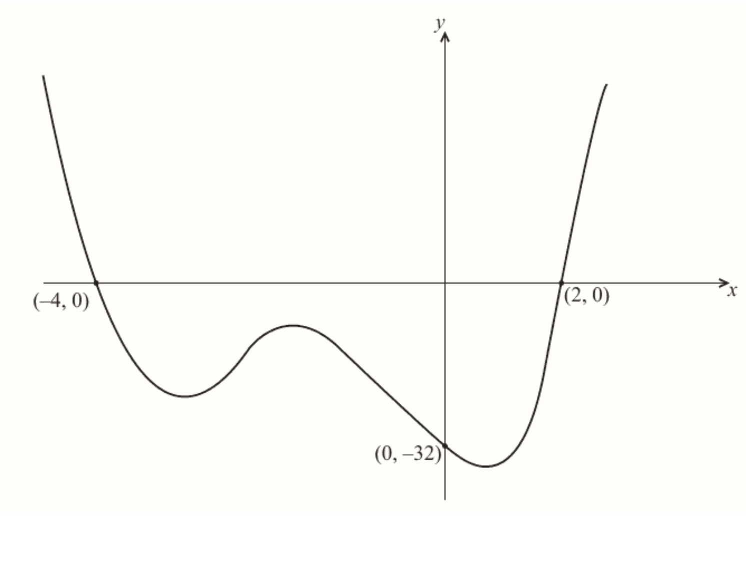
$f(x)$ puede ser una función de probabilidad pues toma valores positivos que suman 1. En cambio, los valores de $g(x)$ no suman 1 y, por consiguiente, no puede ser una función de probabilidad.

(e) La media de $f(x)$ sería:
$$0 \cdot \frac{3}{75} + 1 \cdot \frac{5}{75} + 2 \cdot \frac{11}{75} + 3 \cdot \frac{21}{75} + 4 \cdot \frac{35}{75} = \frac{230}{75} = \frac{46}{15}$$

♠♠♠♠

32. (17 puntos)

La gráfica de una función polinómica f de grado 4 se muestra a continuación.



(a) Explique por qué, de las cuatro raíces de la ecuación $f(x) = 0$, dos son reales y dos son complejas.

(b) La curva pasa por el punto $(-1, -18)$. Halle $f(x)$ de la forma

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x^2 + cx + d)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(c) Halle las dos raíces complejas de la ecuación $f(x) = 0$, expresándolas en forma cartesiana.

(d) Dibuje con precisión las cuatro raíces sobre el plano complejo (el plano de Argand).

(e) Exprese cada una de las cuatro raíces de la ecuación de la forma $re^{i\theta}$.

Solución:

(a) Un polinomio de grado 4 tiene 4 raíces reales o complejas. De la figura se desprende que el polinomio tiene dos raíces reales $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$. Además estas raíces son simples pues si fuesen múltiples la gráfica de la función sería tangente al eje de abscisas en alguno de esos puntos. Solamente y dos raíces reales simples. Las otras dos raíces deben ser complejas.

(b) Puesto que tiene raíces -4 y 2, la función puede escribirse:

$$f(x) = (x + 4)(x - 2)(x^2 + cx + d)$$

Como $f(0) = -32$ resulta $-8d = -32$ y $d = 4$.
Y como $f(-1) = -18$:

$$-18 = 3 \cdot (-3)\,(1 - c + 4)\ ; \qquad -18 = -9(5 - c) \quad \Longrightarrow \quad c = 3$$

La función puede escribirse:

$$f(x) = (x + 4)(x - 2)(x^2 + 3x + 4)$$

(c) Resolvemos $x^2 + 3x + 4 = 0$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

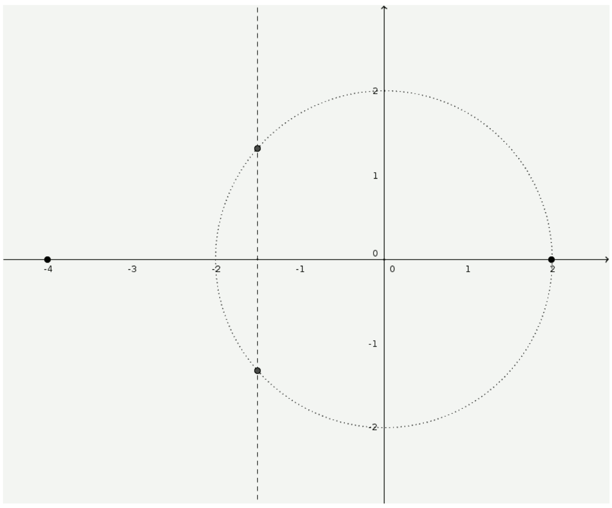
Las raíces complejas son:

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i\ ; \qquad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

(d) El módulo de las raíces complejas es:

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2$$

Por consiguiente, los afijos de las raíces complejas se encuentran sobre la circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Como, además, la parte real es igual a $-\frac{3}{2}$, tenemos la siguiente representación:



(e) Las raíces reales pueden escribirse en forma exponencial como:

$$2e^{i0}\ ; \qquad 4e^{i\pi}$$

Las raíces complejas tienen módulo 2 y argumentos $\operatorname{arcos}\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $-\operatorname{arcos}\left(-\frac{3}{4}\right)$:

$$2e^{i\,\operatorname{arcos}\left(-\frac{3}{4}\right)}\ ; \qquad 2e^{-i\,\operatorname{arcos}\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

♠♠♠♠

33. (13 puntos)

(*a*) Utilizando la definición de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

compruebe que la derivada de $\dfrac{1}{2x+1}$ es $\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$.

(*b*) Demuestre mediante inducción matemática que la derivada n-ésima de $(2x+1)^{-1}$ es

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$$

Solución:

(*a*) Aplicando la definición de derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)+1} - \frac{1}{2x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2x+1-2(x+h)-1}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-2h}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \\ &= \frac{-2}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

(*b*) Veamos en primer lugar que se cumple para $n = 1$. Sustituyendo en la fórmula:

$$f'(x) = (-1)^1 \frac{2^1 1!}{(2x+1)^{1+1}} = \frac{-2}{(2x+1)^2}$$

que es la derivada que hemos calculado en el apartado anterior.
Supongamos que se cumple para $n = k$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{2^k k!}{(2x+1)^{k+1}}$$

y veamos que, en ese caso, se cumple para $n = k+1$. En efecto, derivando:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k 2^k k! \frac{-(k+1)(2x+1)^k \cdot 2}{(2x+1)^{2k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2x+1)^{2k+2-k}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}} \end{aligned}$$

que es el resultado de sustituir en la fórmula n por $k+1$.
De acuerdo con el principio de inducción, la fórmula se cumple para $n \geq 1$.

♠♠♠♠

34. (8 puntos)

(*a*) Dibuje aproximadamente la curva

$$y = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad -4 \leq x \leq 4$$

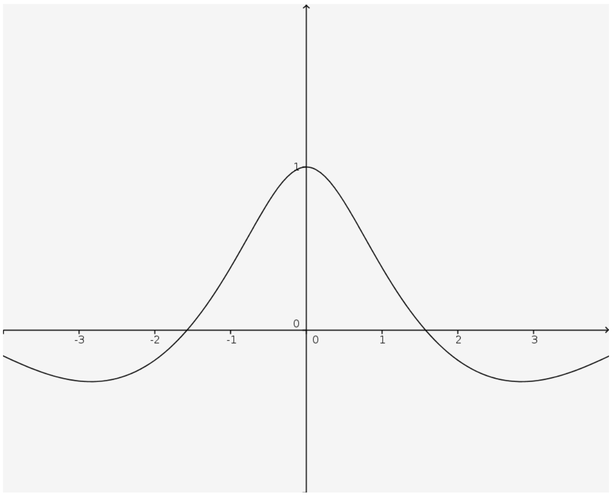
mostrando claramente las coordenadas de las intersecciones con el eje x, y todos los máximos y mínimos.

(*b*) Escriba la pendiente de la curva en $x = 1$.

(c) Halle la ecuación de la normal a la curva en $x = 1$.

Solución:

(a) Es un ejercicio de calculadora:



Hay mínimos en $(-2{,}84; -0{,}317)$ y en $(2{,}84; -0{,}317)$. Hay un máximo relativo en $(0, 1)$. Las intersecciones con el eje OX son los puntos $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) $f'(1) \simeq -0{,}786$

(c) $y - 0{,}382 = \frac{1}{0{,}786}(x - 1)$

♠♠♠♠

35. (5 puntos)

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^4}, \qquad 0 \leq x \leq a$$

(a) Halle el valor de a.

(b) Halle la media de X.

Solución:

(a) Lo mas sencillo es probar valores con la calculadora para conseguir

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Así se obtiene $a \simeq 1{,}40$.

(b) Con este valor:

$$\int_0^a \frac{x}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}550$$

♠♠♠♠

36. (5 puntos)

The probability density function of the random variable X is defined as

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

find $\mathrm{E}(X)$.

Solución:

El valor esperado se calcula mediante la integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(-\cos x) && \text{integrando por partes} \\
&= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

37. (6 puntos)

Paint is poured into a tray where it forms a circular pool with a uniform thickness of 0,5 cm. If the paint is poured at a constant rate of 4 cm$^3 seg^{-1}$, find the rate of increase of the radius of the circle when the radius is 20 cm.

Solución:

Tenemos que

$$V = \pi r^2 h = 0{,}5\pi r^2$$

Puesto que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4$:

$$4 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0{,}5\pi 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi r}$$

Cuando $r = 20$ cm, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5\pi}$.

♠♠♠♠

38. (7 puntos)

A curve is defined by the equation $8y\ln x - 2x^2 + 4y^2 = 7$. Find the equation of the tangent to the curve at the point where $x = 1$ and $y > 0$.

Solución:

En primer lugar, calculamos la ordenada del punto de tangencia. Para $x = 1$ e $y > 0$:

$$-2 + 4y^2 = 7 \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{3}{2}$$

Derivamos:

$$y'\ln x + \frac{1}{x}\,y - 4x + 8yy' = 0 \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{4x - \frac{1}{x}}{8y + \ln x}$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$:

$$m = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}\,(x - 1)$$

♠♠♠♠

39. (7 puntos)
   (*a*) Find all values of x for $0{,}1 \leq x \leq 1$ such that $\sin(\pi x^{-1}) = 0$.
   (*b*) Find

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \pi x^{-2} \sin(\pi x^{-1})\, \mathrm{d}x$$

   showing that it takes different integer values when n is even and when n is odd.
   (*c*) Evaluate

$$\int_{0,1}^{1} \left|\pi x^{-2} \sin\left(\pi x^{-1}\right)\right|\, \mathrm{d}x$$

Solución:

(*a*) La función $\operatorname{sen} x$ se hace cero para $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\sin(\pi x^{-1}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\pi}{x} = k\pi \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$$

Si debe cumplirse $0{,}1 \leq x \leq 1$ tiene que ser $k \in \mathbb{Z}^+$ y $k \leq 10$.

(*b*)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \pi x^{-2} \sin(\pi x^{-1})\, \mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\pi}{x^2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\, \mathrm{d}\left(\frac{\pi}{x}\right) \\ &= \left[\cos\frac{\pi}{x}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \\ &= \cos n\pi - \cos(n+1)\pi\end{aligned}$$

Si n es par la integral es igual a 2 y si es impar es igual a -2.

(*c*) Sea $f(x) = \left|\pi x^{-2} \sin\left(\pi x^{-1}\right)\right|$. Entonces

$$\int_{\frac{1}{10}}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} f(x)\, \mathrm{d}x + \ldots + \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{9}} f(x)\, \mathrm{d}x$$

En el segundo miembro, todas las integrales son iguales a 2 y hay 9 de ellas. Por tanto

$$\int_{\frac{1}{10}}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = 18$$

♠♠♠♠

40. (19 puntos)
   (*a*) Express $4x^2 - 4x + 5$ in the form $a(x-h)^2 + k$ where $a, h, k \in \mathbb{Q}$.
   (*b*) The graph of $y = x^2$ is transformed onto the graph of $y = 4x^2 - 4x + 5$. Describe a sequence of transformations that does this, making the order of transformations clear.

The function f is defined by

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 5}$$

   (*c*) Sketch the graph of $y = f(x)$.
   (*d*) Find the range of f.
   (*e*) By using a suitable substitution show that

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\, \mathrm{d}x$$

   (*f*) Prove that

$$\int_{1}^{3,5} \frac{1}{4x^2 - 4x + 5}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$$

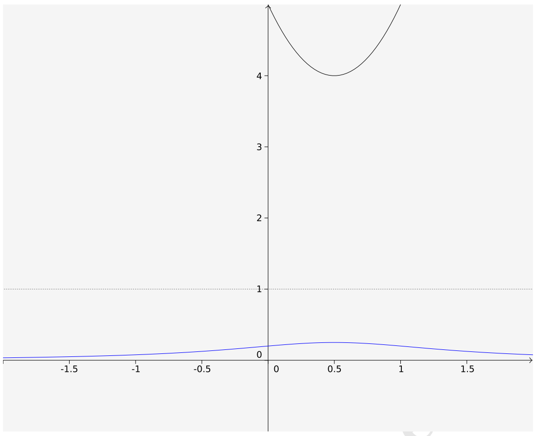
Solución:

(a) $4x^2 - 4x + 5 = 4\left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right) = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right] = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$

(b) Se han efectuado las siguietes transformaciones;

- Traslación en la dirección del eje OX de vector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,
- Cambio de escala en el eje OY multiplicando la función por 4,
- Traslación en la dirección de OY de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c)



(d) El máximo está en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. El rango de la función es el intervalo $\left(0, \frac{1}{4}\right]$.

(e) Haciendo $u = x - \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x^2 - 4x + 5} &= \int \frac{1}{4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

(f) Teniendo en cuenta que para $x = 1$, $u = \frac{1}{2}$ y para $x = 3{,}5$, $u = 3$:

$$\begin{aligned} \int_1^{3{,}5} \frac{1}{4x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\Big[\operatorname{artg} u\Big]_{\frac{1}{2}}^{3} \\ &= \frac{1}{4}\left(\operatorname{artg} 3 - \operatorname{artg}\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

El resultado se obtiene teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{4}\left(\operatorname{artg} 3 - \operatorname{artg}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{artg}\frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\operatorname{artg} 1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

♠♠♠♠

41. (6 puntos)

Let $f(x) = \sin(x - 1)$, $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} + 1$. Find the volume of the solid formed when the region bounded by $y = f(x)$, and the lines $x = 0$, $y = 0$ and $y = 1$ is rotated by 2π about the y-axis.

Solución:

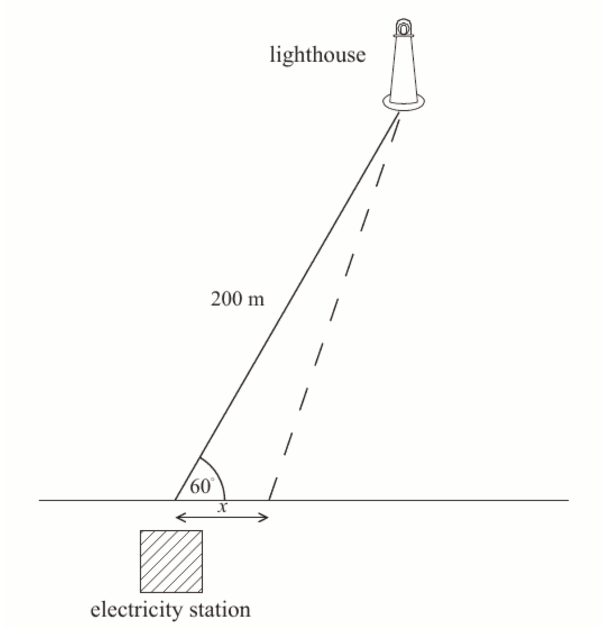
El volumen es igual a

$$V = \pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 (1 + \operatorname{arsen} y)^2\,\mathrm{d}y \simeq 2{,}61\pi \simeq 8{,}20$$

♠♠♠♠

42. (6 puntos)

An electricity station is on the edge of a straight coastline. A lighthouse is located in the sea 200 m from the electricity station. The angle between the coastline and the line joining the lighthouse with the electricity station is 60^o. A cable needs to be laid connecting the lighthouse to the electricity station. It is decided to lay the cable in a straight line to the coast and then along the coast to the electricity station. The length of cable laid along the coastline is x metres. This information is illustrated in the diagram below.



The cost of laying the cable along the sea bed is US\$80 per metre, and the cost of laying it on land is US\$20 per metre.

(a) Find, in terms of x, an expression for the cost of laying the cable.

(b) Find the value of x, to the nearest metre, such that this cost is minimized.

Solución:

(a) La longitud de cable por el mar puede calcularse por el teorema del coseno y es igual a

$$\sqrt{40000 + x^2 - 2 \cdot 200 \cdot x \cos 60^o} = \sqrt{40000 + x^2 - 200x}$$

El coste es

$$f(x) = 20x + 80\sqrt{40000 + x^2 - 200x}$$

(b) El mínimo puede obtenerse con la calculadora o igualando a cero la derivada:

$$f'(x) = 20 + \frac{80(2x - 200)}{2\sqrt{40000 + x^2 - 200x}} = 0$$

En cualquier caso se obtiene $x \simeq 55$ m.

♠♠♠♠

43. (19 puntos)

The function f has inverse f^{-1} and derivative $f'(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. For all functions with these properties you are given the result that for $a \in \mathbb{R}$ with $b = f(a)$ and $f'(a) \neq 0$

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(a) Verify that this is true for $f(x) = x^3 + 1$ at $x = 2$.

(b) Given that $g(x) = xe^{x^2}$, show that $g'(x) > 0$ for all values of x.

(c) Using the result given at the start of the question, find the value of the gradient function of $y = g^{-1}(x)$ at $x = 2$.

(d) (I) With f and g as defined in parts (a) and (b), solve $g \circ f(x) = 2$.
(II) Let $h(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$. Find $h'(2)$.

Solución:

(a) Para la función $f(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 1 \\ f(2) &= 9 \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f'(2) &= 12 \end{aligned}$$

y para la función inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x-1} \\ \left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ \left(f^{-1}\right)'(9) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(9-1)^2}} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Vemos que se cumple

$$f(2) = 9 \quad \Longrightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(9) = \frac{1}{f'(2)}$$

(b) Derivamos la función

$$g'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}2x = e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

La derivada es positiva porque es producto de dos números positivos.

(c) Tenemos que calcular un número x_0 tal que $g(x_0) = 2$ pues entonces

$$\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Resolvemos la ecuación

$$xe^{x^2} = 2$$

y obtenemos $x_0 \simeq 0{,}896$. Entonces:

$$\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(x_0)} \simeq 0{,}157$$

(d) Calculamos la función compuesta:

$$(g \circ f)(x) = g(x^3 + 1) = (x^3 + 1)e^{(x^3+1)^2}$$

El resto es un ejercicio de calculadora.

(I) Resolvemos la ecuación

$$(x^3 + 1)e^{(x^3+1)^2} = 2$$

Llamemos a a la solución de la ecuación. Hemos obtenido $a \simeq -0{,}470$.

(II) La derivada la obtenemos también con la calculadora. Tenemos representada la función $(g \circ f)(x)$:

$$\left[(g \circ f)^{-1}\right]'(2) = \frac{1}{(g \circ f)'(a)}$$

El número $(g \circ f)'(a)$ lo obtenemos con la calculadora a partir de la gráfica de $(g \circ f)(x)$, aproximadamente es igual a 320. Sustituyendo obtenemos

$$\left[(g \circ f)^{-1}\right]'(2) \simeq 0{,}00312$$

♠♠♠♠

44. (6 puntos)

Find the exact value of

$$\int_1^2 \left((x-2)^2 + \frac{1}{x} + \sin \pi x \right) \, \mathrm{d}x$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left((x-2)^2 + \frac{1}{x} + \sin \pi x \right) \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{(x-2)^3}{3} + \ln x - \frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_1^2 \\ &= \left(\ln 2 - \frac{1}{\pi} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \right) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

45. (7 puntos)

The curve C is given by

$$y = \frac{x \cos x}{x + \cos x}, \text{ for } x \geq 0$$

(a) Show that

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2}, \qquad x \geq 0.$$

(b) Find the equation of the tangent to C at the point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Solución:

(a) Derivamos el cociente:

$$y' = \frac{(\cos x - x \operatorname{sen} x)(x + \cos x) - (1 - \operatorname{sen} x) x \cos x}{(x + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2}$$

(b) La pendiente es la derivada en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$m = \frac{-\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{4}} = -1$$

La ecuación de la tangente es $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

♠♠♠♠

46. (7 puntos)

Given the complex numbers $z_1 = 1 + 3i$ and $z_2 = -1 - i$.

(a) Write down the exact values of $|z_1|$ and $\arg(z_2)$.

(b) Find the minimum value of $|z_1 + \alpha z_2|$, where $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) $|z_1| = \sqrt{10}, \quad \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$.

(b) $z_1 + \alpha z_2 = 1 - \alpha + (3 - \alpha)i$. El módulo de este número es:

$$y = |z_1 + \alpha z_2| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2}$$

Para que sea mínimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2(1-\alpha)(-1) + 2(3-\alpha)(-1)}{2\sqrt{(1-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2}} = \frac{2\alpha - 4}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2}} = 0$$

Y, por consiguiente, $\alpha = 2$.

♠♠♠♠

47. (6 puntos)

The curve C is given implicitly by the equation

$$\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y \qquad \text{for } y > 0$$

(a) Express $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of x and y.

(b) Find the value of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ at the point on C where $y = 1$ and $x > 0$.

Solución:

(a) Derivando en forma implícita:

$$\frac{2xy - x^2y'}{y^2} - 2 = \frac{y'}{y}\ ; \qquad 2xy - x^2y' - 2y^2 = yy' \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{2xy - 2y^2}{x^2 + y}$$

(b) Para $y = 1$, x puede valer 0 o 2. Para $x = 2$:

$$y'(2,1) = \frac{2}{5}$$

♠♠♠♠

48. (7 puntos)

The function f is given by

$$f(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 3^{-x}}, \qquad \text{for } x > 0.$$

(a) Show that $f(x) > 1$ for all $x > 0$.

(b) Solve the equation $f(x) = 4$.

Solución:

(a) En efecto:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3^x + 1}{3^x - 3^{-x}} && \text{Puesto que } e^{-x} > 0 \\ &> \frac{3^x + 1}{3^x} \\ &= 1 + \frac{1}{3^x} \\ &> 1 \end{aligned}$$

(b) Tenemos que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} &\frac{3^{2x} + 3^x}{3^{2x} - 1} = 4 \\ &3^{2x} + 3^x = 4 \cdot 3^{2x} - 4 \\ &3 \cdot 3^{2x} - 3^x - 4 = 0 \\ &3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Y entonces

$$x = \log_3 \frac{4}{3} = \log_3 4 - 1$$

♠♠♠♠

49. (21 puntos)

The function f is defined by $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, with domain $D = \{x : -1 \le x \le 8\}$.

(a) Express $f(x)$ in the form $A + \dfrac{B}{x+2}$, where A and $B \in \mathbb{Z}$.

(b) Hence show that $f'(x) > 0$ on D.

(c) State the range of f.

(d) (I) Find an expression for $f^{-1}(x)$.

(II) Sketch the graph of $y = f(x)$, showing the points of intersection with both axes.

(III) On the same diagram, sketch the graph of $y = f^{-1}(x)$.

(e) (I) On a different diagram, sketch the graph of $y = f(|x|)$ where $x \in D$.

(II) Find all solutions of the equation $f(|x|) = \dfrac{1}{4}$.

Solución:

(a) Haciendo la división de los dos polinomios:

$$f(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$$

(b) Derivando:

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

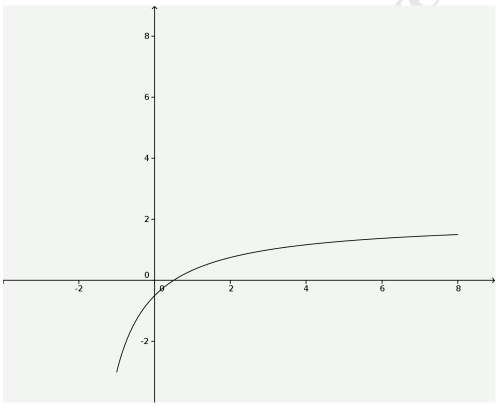
y la función es creciente.

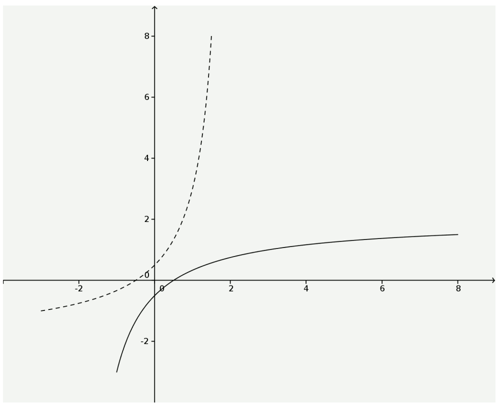
(c) Puesto que f es creciente y $f(-1) = -3$ y $f(8) = \frac{3}{2}$, el rango es el intervalo $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

(d) (I) Intercambiando las variables y despejando se obtiene:

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2}\ ; \qquad -3 \le x \le \frac{3}{2}$$

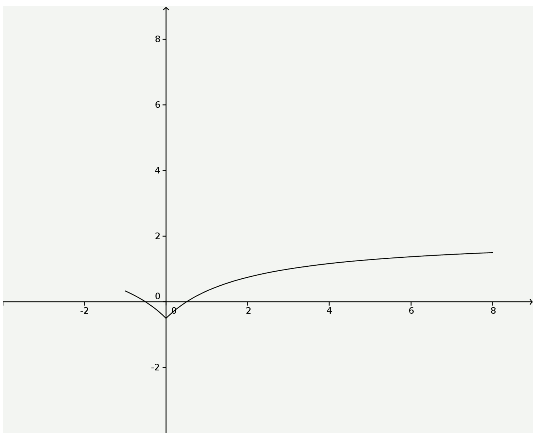
(II) Los puntos de intersección con los ejes son $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.





(III)

(e) (I)



(II) Resolvemos para $x > 0$:

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1}{4}\ ; \qquad 8x+4 = x+2\ ; \qquad 7x+6$$

Así que una solución es $x = \frac{6}{7}$. Por simetría, hay otra solución $x = -\frac{6}{7}$.

♠♠♠♠

50. (6 puntos)

(a) Find $\displaystyle\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

(b) Determine the value of m if

$$\int_0^m x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \qquad \text{where } m > 0$$

Solución:

(a) Por partes:

$$\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(b) Hay que pensar que m es menor que $\frac{\pi}{2}$ pues en ese punto hay un infinito de la función. Aplicando la regla de Barrow:

$$\Big[x\operatorname{tg} x + \ln\cos x\Big]_0^m = m\operatorname{tg} m + \ln\cos m = 0{,}5$$

Resolviendo con la calculadora se obtiene $m = 0{,}822$.

♠♠♠♠

51. (7 puntos)

The length, X metres, of a species of fish has the probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{for } 0 \le x \le 0{,}5 \\ 0{,}5a(1-x) & \text{for } 0{,}5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Show that $a = 9{,}6$.

(b) Sketch the graph of the distribution.

(c) Find $P(X < 0{,}6)$.

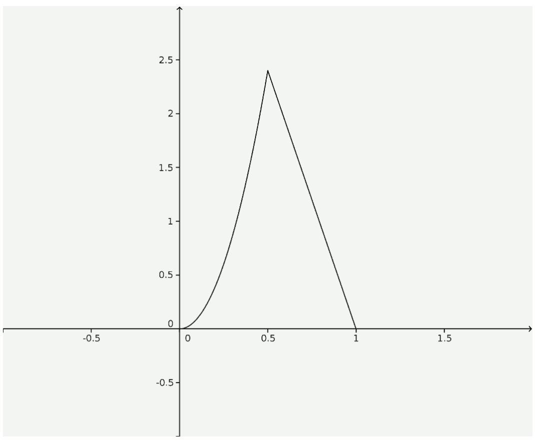
Solución:

(a) Como la suma de las probabilidades ha de ser igual a 1:

$$a\int_0^{0,5} x^2\,\mathrm{d}x + 0{,}5a\int_{0,5}^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{0{,}5^3 a}{3} - 0{,}5a\left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_{0,5}^1 = \frac{0{,}5^3 a}{3} + \frac{0{,}5^3 a}{2} = \frac{5\cdot 0{,}5^3 a}{6} = 1$$

despejando se obtiene $a = 9{,}6$.

(b)



(*c*)

$$p(x < 0{,}6) = 9{,}6 \int_0^{0{,}5} x^2 \, \mathrm{d}x + 0{,}5 \cdot 9{,}6 \int_{0{,}5}^{0{,}6} (1 - x) \, \mathrm{d}x = 0{,}4 + 0{,}216 = 0{,}616$$

♠♠♠♠

52. (22 puntos)

Consider the differential equation $y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos 2x$.

(*a*) (I) Show that the function $y = \cos x + \sin x$ satisfies the differential equation.

(II) Find the general solution of the differential equation. Express your solution in the form $y = f(x)$, involving a constant of integration.

(III) For which value of the constant of integration does your solution coincide with the function given in part (I)?

(*b*) A different solution of the differential equation, satisfying $y = 2$ when $x = \frac{\pi}{4}$, defines a curve C.

(I) Determine the equation of C in the form $y = g(x)$, and state the range of the function g.

(II) A region R in the xy plane is bounded by C, the x-axis and the vertical lines $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$. Find the area of R.

(III) Find the volume generated when that part of R above the line $y = 1$ is rotated about the x-axis through 2π radians.

Solución:

(*a*) (I) Sustituyendo la función en el primer miembro de la ecuación:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x + \cos x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$$

(II) Separando las variables:

$$\begin{aligned} &y \, \mathrm{d}y = \cos 2x \, \mathrm{d}x \\ &\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C \\ &y = \sqrt{C + \operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

(III) Para $C = 1$ puesto que:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2x} &= \sqrt{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x} \\ &= \sqrt{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \\ &= \operatorname{sen} x + \cos x \end{aligned}$$

(*b*) (I) Para $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 2$. Sustituyendo:

$$2 = \sqrt{C + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{C + 1} \quad \Longrightarrow \quad C = 3$$

La función es $g(x) = \sqrt{3 + \operatorname{sen} 2x}$. Su rango es $[\sqrt{2}, 2]$.

(II) Puesto que la función es siempre positiva, el área es igual a la siguiente integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 + \operatorname{sen} 2x} \, \mathrm{d}x \simeq 2{,}99$$

El valor de la integral lo hemos obtenido con la calculadora.

(III) El volumen se calcula mediante la integral

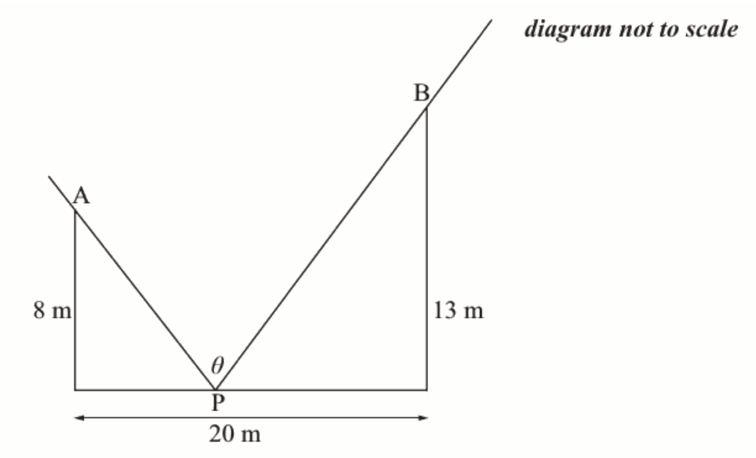
$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([g(x)]^2 - 1 \right) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \operatorname{sen} 2x) \, \mathrm{d}x \simeq 13{,}0$$

(el valor exacto del volumen es $\pi(\pi + 1)$).

♠♠♠♠

53. (19 puntos)

A straight street of width 20 metres is bounded on its parallel sides by two vertical walls, one of height 13 metres, the other of height 8 metres. The intensity of light at point P at ground level on the street is proportional to the angle θ where $\theta = \widehat{APB}$, as shown in the diagram.



(a) Find an expression for θ in terms of x, where x is the distance of P from the base of the wall of height 8 m.

(b) (I) Calculate the value of θ when $x = 0$.

(II) Calculate the value of θ when $x = 20$.

(c) Sketch the graph of θ, for $0 \leq x \leq 20$.

(d) Show that

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{5\left(744 - 64x - x^2\right)}{(x^2+64)(x^2-40x+569)}$$

(e) Using the result in part (d), or otherwise, determine the value of x corresponding to the maximum light intensity at P. Give your answer to four significant figures.

(f) The point P moves across the street with speed 0,5 m s^{-1}. Determine the rate of change of θ with respect to time when P is at the midpoint of the street.

Solución

(a) El ángulo θ es igual a:

$$\theta = \pi - \operatorname{artg}\frac{8}{x} - \operatorname{artg}\frac{13}{20-x}\ ; \qquad 0 < x < 20$$

(b) (I) Teniendo en cuenta cómo se describe el ángulo θ y que cuando $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{artg} x = \frac{\pi}{2}$ la función en cero debe definirse:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\frac{13}{20}$$

(II) Y en $x = 20$:

$$\theta(20) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\frac{8}{20}$$

(c)

(d) Derivando y simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{1+\frac{64}{x^2}}\left(-\frac{8}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{169}{(20-x)^2}}\cdot\frac{13}{(20-x)^2} \\
&= \frac{8}{x^2+64} - \frac{13}{(20-x)^2+169} \\
&= \frac{8}{x^2+64} - \frac{13}{x^2-40x+569} \\
&= \frac{5\left(744-64x-x^2\right)}{(x^2+64)(x^2-40x+569)}
\end{aligned}$$

(e) En el máximo se cumple

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 744 - 64x - x^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $x \simeq 10{,}05$.

(f) Aplicando la regla de derivación de las funciones compuestas:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

La derivada $\frac{dx}{dt} = 0{,}5$ y en $x = 10$, $\frac{d\theta}{dx} \simeq 0{,}0004533\ldots$. Entonces, con tres cifras significativas:

$$\frac{d\theta}{dt} \simeq 0{,}000227 \text{ s}^{-1}$$

♠♠♠♠

54. (8 puntos)

(a) Use the identity $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ to prove that

$$\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

(b) Find a similar expression for $\sin\frac{1}{2}x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(c) Hence find the value of

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}\right)\, dx$$

Solución:

(a) Sustituyendo $\theta = \frac{x}{2}$:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

(b) Podemos escribir la identidad que nos dan como:

$$\cos 2\theta = 2(1-\operatorname{sen}^2\theta) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Procediendo ahora como en el apartado anterior resulta

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

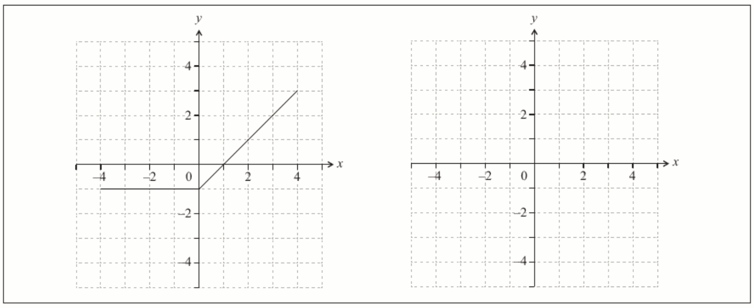
(c) Ha que tener en cuenta que en las fórmulas anteriores deberá tomarse la raíz positiva o negativa de acuerdo con el cuadrante en que se encuentre el ángulo $\frac{x}{2}$. En la integral no hay ningún problema puesto que x se encuentra en el primer cuadrante.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}\right)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\, dx \\
&= \left[2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(2\sqrt{2}\operatorname{sen}0 - 2\sqrt{2}\cos 0\right) \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

55. (6 puntos)

The first set of axes below shows the graph of $y = F(x)$ for $-4 \leq x \leq 4$.



Let $g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ for $-4 \le x \le 4$.

(a) State the value of x at which $g(x)$ is a minimum.

(b) On the second set of axes, sketch the graph of $y = g(x)$.

Solución:

(a) Como, según el teorema fundamental del cálculo integral $g'(x) = f(x)$, para que la función $g(x)$ tenga un mínimo, su derivada $f(x)$ debe ser cero. Esto sucede en $x = 1$.

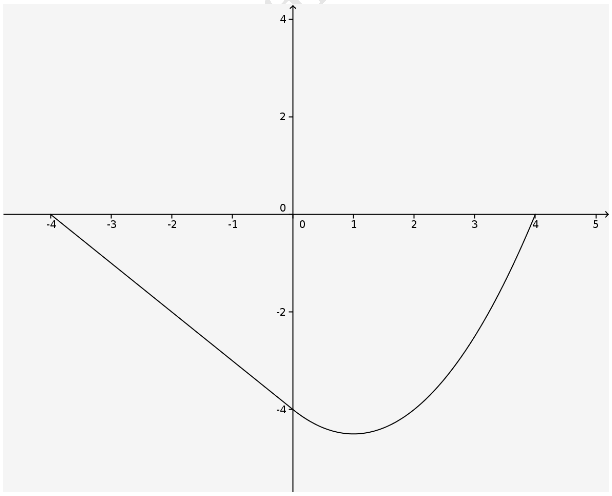
(b) Entre -4 y 0:

$$g(x) = \int_{-4}^{x} -1\,\mathrm{d}t = \Big[-t\Big]_{-4}^{x} = -x - 4$$

Entre 0 y 4:

$$g(x) = -4 + \int_{0}^{x} (t-1)\,\mathrm{d}t = -4 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - x - 4$$

La gráfica es



♠♠♠♠

56. (9 puntos)

A curve has equation $\arctan x^2 + \arctan y^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of x and y.

(b) Find the gradient of the curve at the point where $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $y < 0$.

Solución

(a) Derivando:

$$\frac{2x}{1+x^4} + \frac{2yy'}{1+y^4} = 0 \quad\Longrightarrow\quad y' = -\frac{x(1+y^4)}{y(1+x^4)}$$

(b) De la fórmula de la tangente de la suma de ángulos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

se deduce

$$\operatorname{artg}\,\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \alpha+\beta = \operatorname{artg}\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

y llamando $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$ resulta

$$\operatorname{artg} a + \operatorname{artg} b = \operatorname{artg}\frac{a+b}{1-ab}$$

Entonces

$$\operatorname{artg} x^2 + \operatorname{artg} y^2 = \frac{\pi}{4} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{artg}\frac{x^2+y^2}{1-x^2y^2} = \operatorname{artg} 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2+y^2}{1-x^2y^2} = 1$$

Para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\frac{1}{2}+y^2}{1-\frac{y^2}{2}} = \frac{1+2y^2}{2-y^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad 1+2y^2 = 2-y^2 \quad\Longrightarrow\quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

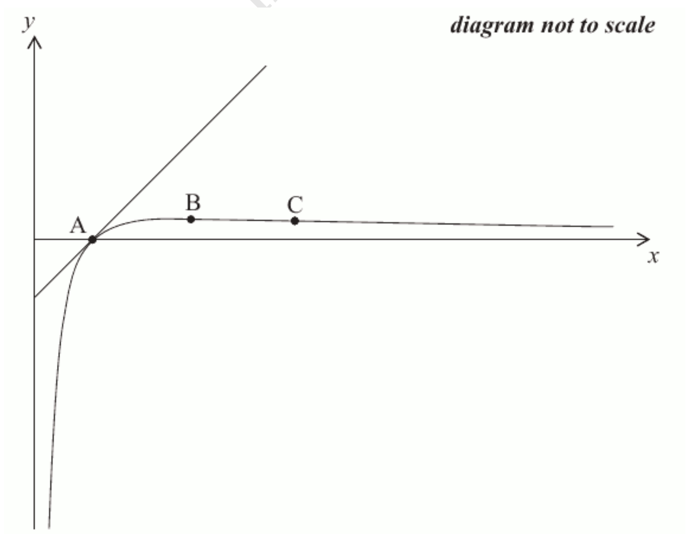
Sustituyendo el valor negativo en la fórmula de la derivada:

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{8\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}$$

♠♠♠♠

57. (21 puntos)

Consider the function $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. The sketch below shows the graph of $y = f(x)$ and its tangent at a point A.



(a) Show that $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(b) Find the coordinates of B, at which the curve reaches its maximum value.

(c) Find the coordinates of C, the point of inflexion on the curve.

The graph of $y = f(x)$ crosses the x-axis at the point A.

(d) Find the equation of the tangent to the graph of f at the point A.

(e) Find the area enclosed by the curve $y = f(x)$, the tangent at A, and the line $x = e$.

Solución:

(a) Derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

(b) Igualando a cero la derivada resulta:

$$\ln x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = e$$

El máximo está en $B\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

(c) Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x - 2(1-\ln x)}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

La derivada segunda se anula para

$$2\ln x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}}$$

El punto de inflexión está en $C\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

(d) El punto A tiene de coordenadas $(1,0)$. La pendiente de la tangente es la derivada en $x=1$. Puesto que $f'(1)=1$ la ecuación es $y = x-1$.

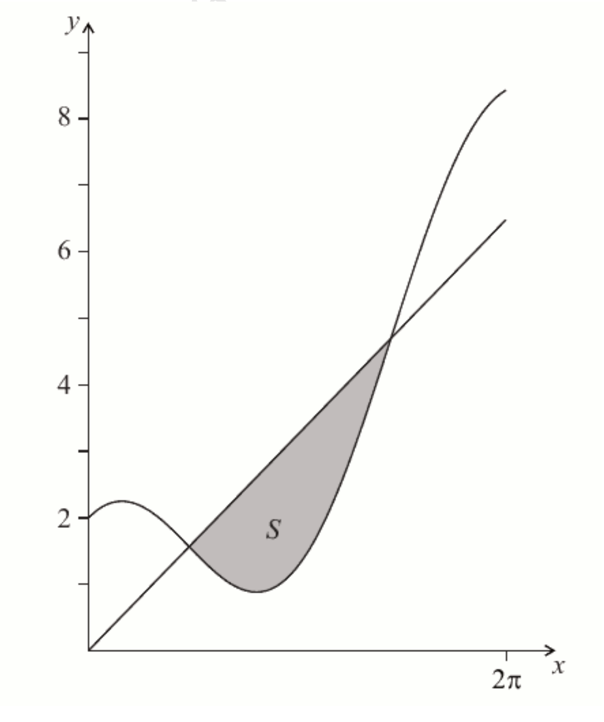
(e) El área es:

$$S = \int_1^e \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} - e$$

♠♠♠♠

58. (8 puntos)

The shaded region S is enclosed between the curve $y = x + 2\cos x$, for $0 \leq x \leq 2\pi$, and the line $y = x$, as shown in the diagram below.



(a) Find the coordinates of the points where the line meets the curve.

(b) The region S is rotated by 2π about the x-axis to generate a solid.

(I) Write down an integral that represents the volume V of the solid.

(II) Find the volume V.

Solución:

(a) Los puntos de intersección son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x + 2\cos x \\ y = x \end{cases}$$

Los puntos de intersección son $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

(b) El volumen se calcula mediante la integral

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x^2 - (x + 2\cos x)^2\right) \mathrm{d}x = -4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos^2 x + x\cos x\right) \mathrm{d}x$$

Se puede integrar por partes. La calculadora da 59,2.

♠♠♠♠

59. (10 puntos)

Let $f(x) = x(x+2)^6$.

(a) Solve the inequality $f(x) > x$.

(b) Find $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) La inecuación puede escribirse:

$$x(x-2)^6 < x$$
$$x(x-2)^6 - x < 0$$
$$x[(x-2)^6 - 1] < 0$$

Los raíces (simples) del polinomio son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. El signo del polinomio lo podemos representar por

	0		0		0	
$-$		$+$		$-$		$+$
	-1		0		3	

La solución de la inecuación es $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$.

(b) Podemos integrar por partes o bien:

$$\int x(x+1)^6\,\mathrm{d}x = \int (x+1-1)(x+1)^6\,\mathrm{d}x = \int (x+1)^7\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^6\,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^8}{8} - \frac{(x+1)^7}{7} + C$$

♠♠♠♠

60. (21 puntos)

Let $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x - 2}$.

(a) Find the equations of the horizontal and vertical asymptotes of the curve $y = f(x)$.

(b) (I) Find $f'(x)$.

(II) Show that the curve has exactly one point where its tangent is horizontal.

(III) Find the coordinates of this point.

(c) Find the equation of L_1, the normal to the curve at the point where it crosses the y-axis.

The line L_2 is parallel to L_1 and tangent to the curve $y = f(x)$.

(d) Find the equation of the line L_2.

Solución:

(a) La recta $x = \ln 2$ es una asíntota vertical puesto que para este valor de x se anula el denominador de la fracción y el límite es infinito. Además:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-2} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

La recta $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

(b) (I) La derivada es:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-2) - e^x(e^{2x}+1)}{(e^x-2)^2} = \frac{e^{3x}-4e^{2x}-e^x}{(e^x-2)^2} =$$

(II) Igualando a cero la derivada se obtiene

$$e^x = 2 \pm \sqrt{5}$$

La solución $2-\sqrt{5}$ no es válida puesto que $e^x > 0$.

(III) El único cero de la derivada es $x_0 = \ln(2+\sqrt{5})$. La ordenada del punto es

$$y_0 = \frac{(2+\sqrt{5})^2+1}{2+\sqrt{5}-2} = \frac{10+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4+2\sqrt{5}$$

(c) El punto de intersección de la curva y el eje OY es $(0,-2)$, Para $x=0$ la derivada vale -4. La ecuación de la normal es:

$$y+2 = \frac{1}{4}\,x \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{4}\,x - 2$$

(d) Hay que ver en qué punto de la curva la derivada es igual a $\frac{1}{4}$:

$$\frac{e^x(e^{2x}-4e^x-1)}{(e^x-2)^2} = \frac{1}{4}$$

Resolviendo con la calculadora obtenemos $x \simeq 1{,}46$ La ordenada correspondiente a este punto es $y \simeq 3{,}68$. La ecuación de L_2 es

$$y - 3{,}68 = \frac{1}{4}\,(x-1{,}46) \quad\Longrightarrow\quad y = 0{,}25x + 4{,}04$$

♠♠♠♠

61. (21 puntos)

A random variable X has probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Show that $5a+2b=2$.

Let $\mathrm{E}(X) = \mu$.

(b) (I) Show that $a = 12\mu - 30$.

(II) Find a similar expression for b in terms of μ.

Let the median of the distribution be 2.3.

(c) (I) Find the value of μ.

(II) Find the value of the standard deviation of X.

Solución:

(a) Como la suma de las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\int_2^3 (ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_2^3 = \frac{9a}{2} + 3b - 2a - 2b = \frac{5a}{2} + b = 1$$

y, por consiguiente, $5a+2b=2$.

(b) La media es igual a

$$\mu = \int_2^3 x(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right]_2^3 = 9a + \frac{9b}{2} - \frac{8a}{3} - 2b = \frac{19a}{3} + \frac{5b}{2}$$

Sustituyendo $b = 1 - \frac{5a}{2}$ resulta:

$$\mu = \frac{19a}{3} + \frac{5}{2} - \frac{25a}{4} \quad \Longrightarrow \quad a = 12\mu - 30$$

(c) Sustituyendo el valor obtenido de a en $b = 1 - \frac{5a}{2}$ resulta $b = -30\mu + 76$

(d) (I) Si la mediana es igual a 2,3 quiere decir que

$$\int_2^{2,3} (ax+b)\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_2^{2,3} = 0{,}5$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación

$$1{,}29a + 0{,}6b = 1$$

y, mediante las relaciones que hemos obtenido anteriormente:

$$1{,}29(12\mu - 30) + 0{,}6(-30\mu + 76) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mu \simeq 2{,}34$$

Con este valor podemos calcular a y b que necesitaremos en el apartado siguiente.

(II) Calculamos la media de X^2:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_2^3 x^2(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3}\right]_2^3 = \frac{65a}{4} + \frac{19b}{3}$$

La varianza es:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$$

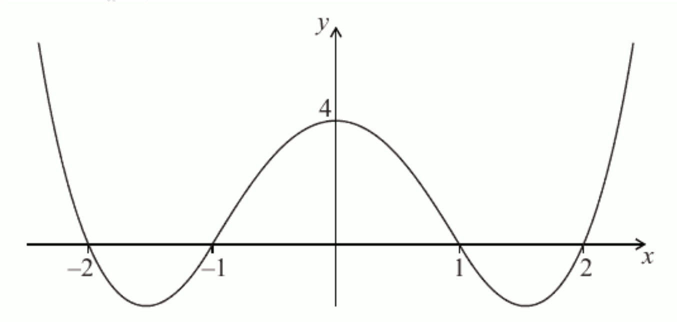
Sustituyendo los valores obtenidos, resulta para la desviación típica $\sigma \simeq 0{,}241$.

♠♠♠♠

62. (18 puntos)

Let $f(x) = |x| - 1$.

(a) The graph of $y = g(x)$ is drawn below.



(I) Find the value of $(f \circ g)(1)$.
(II) Find the value of $(f \circ g \circ g)(1)$.
(III) Sketch the graph of $y = (f \circ g)(x)$.

(b) (I) Sketch the graph of $y = f(x)$.
(II) State the zeros of f.

(c) (I) Sketch the graph of $y = (f \circ f)(x)$.
(II) State the zeros of $f \circ f$.

(d) Given that we can denote $f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ as f^n,
(I) find the zeros of f^3;
(II) find the zeros of f^4;
(III) deduce the zeros of f^8.

(e) The zeros of f^{2n} are a_1, a_2, a_3, …, a_N.

(I) State the relation between n and N;

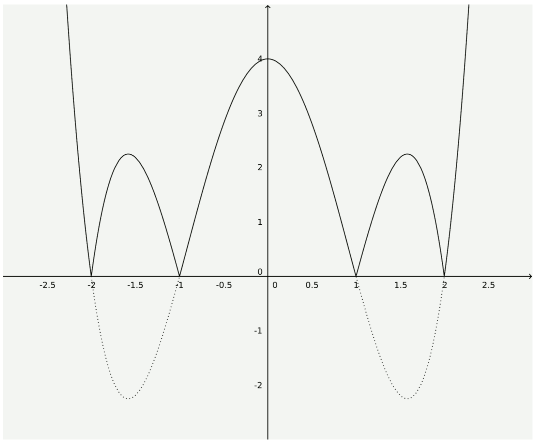
(II) Find, and simplify, an expression for $\sum_{r=1}^{N} |a_r|$ in terms of n.

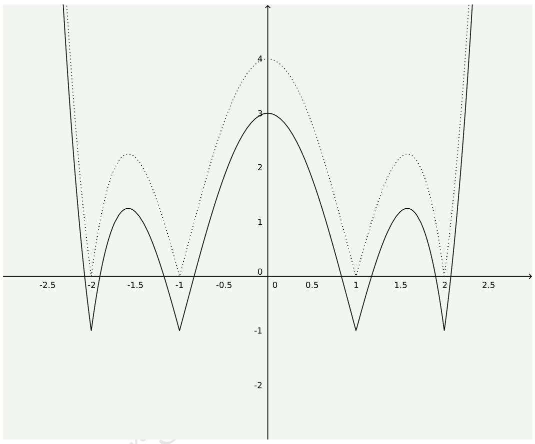
Solución:

(a) (I) $(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(0) = -1$

(II) $(f \circ g \circ g)(1) = (f \circ g)[g(1)] = (f \circ g)(0) = f[g(0)] = f(4) = 3$

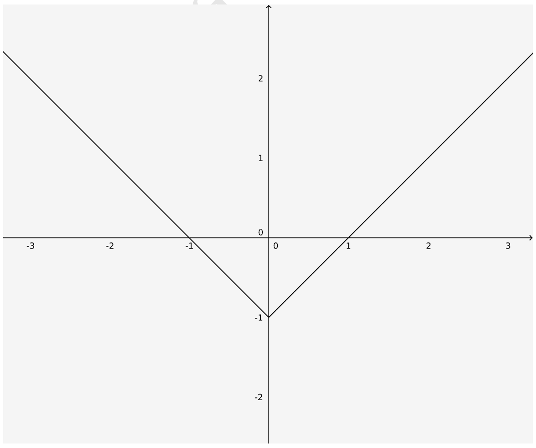
(III) $f \circ g)(x) = |g(x)| - 1$. Tenemos que representar primero $y = |g(x)|$ y después trasladar el gráfico una unidad hacia abajo:





(b) (I) La función $f(x)$ puede escribirse:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



(II) La función $f(x)$ se hace cero en $x = \pm 1$.

(c) (I) A la función $y = f(x)$ le aplicamos el valor absoluto y después una traslación hacia abajo como se ve en las siguientes figuras:

(II) $f \circ f$ se hace cero en 0 y ± 2.

(d) (I) Los ceros de f^3 son ± 1 y ± 3.

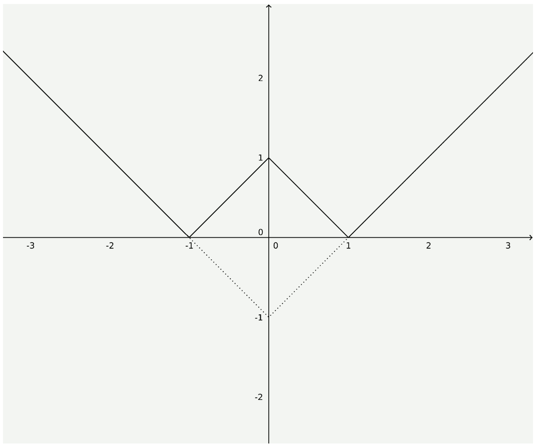
(II) Los ceros de f^4 son 0, ± 2 y ± 4.

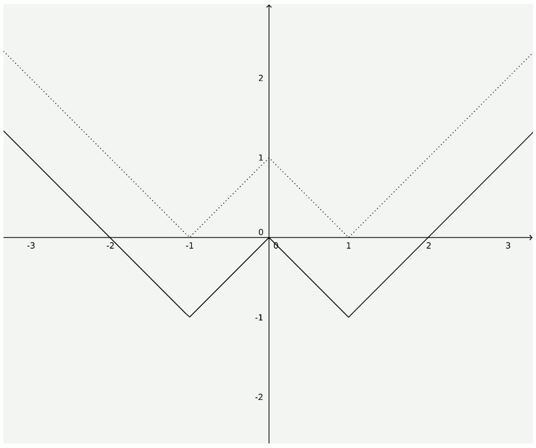
(III) Los ceros de f^8 serán 0, ± 2, ± 4, ± 6 y ± 8.

(e) (I) $N = 2n + 1$

(II) Teniendo en cuenta lo anterior

$$\sum_{r=1}^{N} |a_r| = 2\,(2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) = 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 4 \cdot \frac{(n+1)n}{2} = 2n(n+1)$$





♠♠♠♠

63. (6 puntos)

La función f viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \leq 2 \\ \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3 & x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine si f es o no continua.

(b) El gráfico de la función g se obtiene aplicando las siguientes transformaciones al gráfico de f: una simetría respecto al eje y seguida de una traslación por medio del vector $\binom{2}{0}$. Halle $g(x)$.

Solución:

(a) Para $x \neq 2$ la función $f(x)$ es continua por estar definida mediante funciones continuas. En $x = 2$ calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (1-2x) = -3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3 = -3$$

El límite de la función es -3 y coincide con el valor de la función. Así pues, $f(x)$ es continua en $x = 2$.

(b) Aplicamos la simetría (cambiar x por $-x$) y obtenemos:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1+2x & -x \leq 2 \\ \frac{3}{4}(-x-2)^2 - 3 & -x > 2 \end{cases} \qquad = \begin{cases} \frac{3}{4}(x+2)^2 - 3 & x < -2 \\ 1+2x & x \geq -2 \end{cases}$$

Ahora aplicamos la traslación sustituyendo x por $x-2$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-2+2)^2 - 3 & x-2 < -2 \\ 1+2(x-2) & x-2 \geq -2 \end{cases} \qquad = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2 - 3 & x < 0 \\ -3+2x & x \geq 0 \end{cases}$$

♠♠♠♠

64. (7 puntos)

Utilice la sustitución $x = a\sec\theta$ para demostrar que

$$\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3}+\pi-6\right)$$

Solución:

(a) Si $x = a\sec\theta$:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{a}{\cos\theta}\right) = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

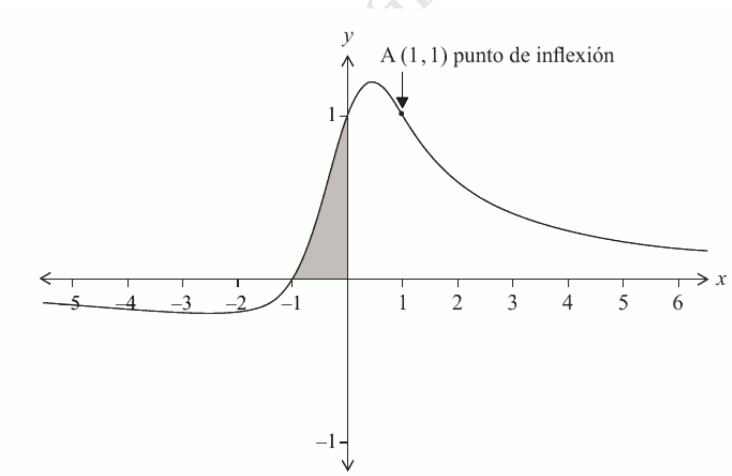
Además, cuando $x = a\sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ y cuando $x = 2a$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{a}{\cos^3\theta}\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}} \cdot \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\frac{a}{\cos\theta}\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{a\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{a}\left[\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3}+\pi-6\right)
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

65. (16 puntos)

A continuación se muestra el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.



(a) Halle $f'(x)$.

(b) A partir de lo anterior, halle las coordenadas x de los puntos en los que la pendiente del gráfico de f es igual a cero.

(c) Halle $f''(x)$ expresando la respuesta de la forma $\dfrac{p(x)}{(x^2+1)^3}$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

(d) El punto $(1,1)$ es un punto de inflexión. Hay otros dos puntos de inflexión. Halle las coordenadas x de los otros dos puntos de inflexión.

(e) Halle el área de la región sombreada. Exprese la respuesta de la forma $\frac{\pi}{a} - \ln\sqrt{b}$ donde a y b son enteros.

Solución:

(a) La derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

(b) Igualando a cero la derivada:

$$-x^2-2x+1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

Los puntos son $x_1 = -1-\sqrt{2}$ y $x_2 = -1+\sqrt{2}$.

(c) Derivando:

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(-2x-2)(x^2+1) - 2\cdot 2x(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}$$

(d) Igualando a cero $f''(x)$:

$$2x^3+6x^2-6x-2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2(x-1)(x^2+4x+1)=0$$

Los otros puntos de inflexión están en $x_3 = -2+\sqrt{3}$ y $x_4 = -2-\sqrt{3}$.

(e) El área mide:

$$S = \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{artg} x\right]_{-1}^{0}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - \operatorname{artg}(-1)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2}$$

♠♠♠♠

66. (14 puntos)

Considere las siguientes funciones:

$$h(x) = \operatorname{artg}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = h(x)$.

(b) Halle una expresión para la función compuesta $h \circ g(x)$ e indique su dominio.

(c) Sabiendo que $f(x) = h(x) + h \circ g(x)$,

(I) halle $f'(x)$, expresando el resultado en forma simplificada;

(II) muestre que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ para $x > 0$.

(d) Nigel indica que f es una función impar, mientras que Tom sostiene que f es una función par.

(I) Indique quién tiene razón y justifique su respuesta.

(II) A partir de lo anterior, halle el valor de $f(x)$ para $x < 0$.

Solución:

(a)

(b) La función compuesta es

$$(h\circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{0\}$.

(c) (I) La función que debemos derivar es $f(x) = \operatorname{artg} x + \operatorname{artg}\frac{1}{x}$. La derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2} = 0$$

(II) Para $x > 0$ la función es continua y derivable. Puesto que la derivada es cero, de acuerdo con el teorema del valor medio, la función es constante. Calculamos el valor de la función para $x = 1$:

$$f(1) = \operatorname{artg} 1 + \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

y la función toma este valor para $x > 0$.

(*d*) (I) La función es impar porque es composición de funciones impares.
(II) Vale $\frac{\pi}{2}$ para $x > 0$ y $-\frac{\pi}{2}$ para $x < 0$.

♠♠♠♠

67. (5 puntos)

Los gráficos de $y = x^2 e^{-x}$ e $y = 1 - 2 \operatorname{sen} x$ para $2 \leq x \leq 7$ se cortan en los puntos A y B. Las coordenadas x de A y B son x_A y x_B.

(*a*) Halle el valor de x_A y el valor de x_B.

(*b*) Halle el área delimitada por los dos gráficos, para $x_A \leq x \leq x_B$.

Solución:

(*a*) Con la calculadora obtenemos $x_A \simeq 2{,}87$ y $x_B \simeq 6{,}78$.

(*b*) También con la calculadora obtenemos

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(1 - 2 \operatorname{sen} x - x^2 e^{-x}\right) \, \mathrm{d}x \simeq 6{,}76$$

♠♠♠♠

68. (8 puntos)

La función f se define de la forma $f(x) = -3 + \dfrac{1}{x-2}, \quad x \neq 2.$

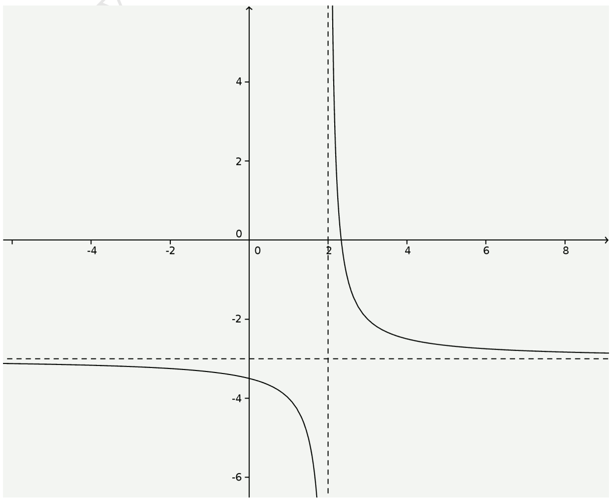
(*a*) (I) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.

(II) Escriba las ecuaciones de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

(*b*) Halle la función inversa f^{-1} e indique su dominio.

Solución:

(*a*)



Las asíntotas son $x = 2$ e $y = -3$. Los puntos de corte con los ejes son $A\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ y $B\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.

(*b*) Intercambiamos las variables y despejemos:

$$x = -3 + \frac{1}{y-2}\,; \qquad x + 3 = \frac{1}{y-2}\,; \qquad y - 2 = \frac{1}{x+3}\,; \qquad y = f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{-3\}$.

♠♠♠♠

69. (5 puntos)

Se vierte arena para formar un cono de h cm de altura y r cm de radio de la base. En todo momento, la altura es igual al radio de la base. La altura del cono va aumentando a razón de 0,5 cm min^{-1}. Halle la razón a la que se vierte la arena, en cm^3 min^{-1}, cuando la altura es igual a 4 cm.

Solución:

Si la altura es igual al radio, el volumen del cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

Derivando

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\pi\, 3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \pi h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

Cuando $h = 4$ cm:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \pi\cdot 16\cdot 0{,}5 = 8\pi\ \text{cm}^3\ \text{min}^{-1}$$

♠♠♠♠

70. (8 puntos)

Considere la curva definida por la ecuación $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4xy^2$.

(a) Utilice la derivación implícita para hallar una expresión para $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $(1,1)$.

Solución:

(a) Derivando y despejando y':

$$2\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2yy'\right) = 4y^2+4x\cdot 2yy' \qquad \text{Dividiendo por 4}$$

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x+yy'\right) = y^2+x\cdot 2yy'$$

$$y' = \frac{x(x^2+y^2)-y^2}{2xy-y(x^2+y^2)}$$

(b) En el punto $(1,1)$ la derivada se hace infinita. Eso significa que la tangente en ese punto es vertical y, en consecuencia, la normal es horizontal. La ecuación de la normal será $y=1$.

♠♠♠♠

71. (13 puntos)

La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\cos x & 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ \text{donde } a\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{resto de valores}\end{cases}$$

(a) Muestre que $a = \dfrac{2}{\pi-2}$.

(b) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(c) Halle:

(I) la moda de X;

(II) la mediana de X.

(d) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{8} \mid X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

(a) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \, \mathrm{d}x = 1$$

Integrando por partes:

$$a\Big[x \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

y de aquí:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{2}{\pi - 2}$$

La función de distribución es entonces:

$$\mathrm{p}(X < x) = \frac{2}{\pi - 2}\Big[x \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{x} = \frac{2}{\pi - 2}\,(x \operatorname{sen} x + \cos x - 1)$$

(b) Con esa función de distribución:

$$\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \simeq 0{,}460$$

(c) (I) La moda es el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos:

$$\text{moda} \simeq 0{,}860$$

(II) La mediana cumple que

$$\mathrm{p}(X < \text{med}) = 0{,}5$$

es decir, es la solución de la ecuación

$$\frac{2}{\pi - 2}\,(x \operatorname{sen} x + \cos x - 1) = 0{,}5$$

Con la calculadora obtenemos

$$\text{med} \simeq 0{,}826$$

(III) En este caso

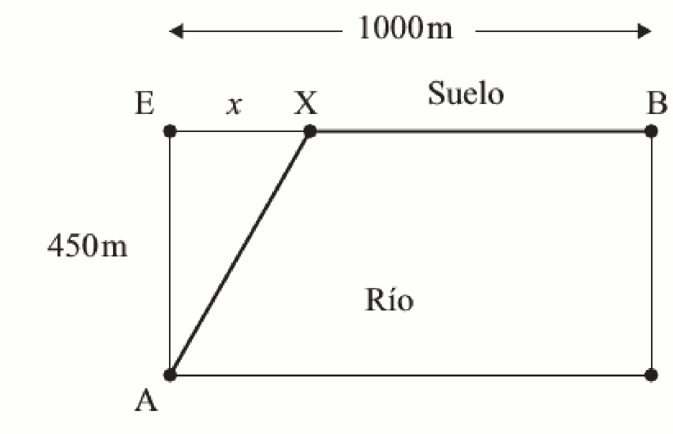
$$\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{8}\,\middle|\, X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{8}\right)}{\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{4}\right)} \simeq 0{,}283$$

♠♠♠♠

72. (15 puntos)

Un grupo de ingenieros necesita instalar tuberías para conectar dos ciudades A y B que están separadas por un río de 450 metros de ancho, tal y como se muestra en la siguiente figura. Tienen previsto instalar las tuberías por debajo del río entre A y X, y por debajo del suelo entre X y B. El coste de instalar las tuberías por debajo del río es cinco veces mayor que el coste de instalar las tuberías por debajo del suelo.

Sea $EX = x$.



Sea k el coste, en dólares por metro, de instalar las tuberías por debajo del suelo.

(a) Muestre que el coste total C, en dólares, de instalar las tuberías entre A y B viene dado por

$$C = 5k\sqrt{202500 + x^2} + (1000 - x)\,k$$

(b) (I) Halle $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$.

(II) A partir de lo anterior, halle para qué valor de x el coste total es mínimo y justifique por qué este valor es un mínimo.

(c) Halle el coste total mínimo en función de k.

(d) El ángulo que forman las tuberías en el lugar en el que se unen es $AXB = \theta$. Halle θ para el valor de x calculado en el apartado (b).

(e) Por motivos de seguridad, θ tiene que ser como mínimo 120^{o}. Dado este nuevo requisito,

(I) halle el nuevo valor de x que minimiza el coste total;

(II) halle en qué porcentaje ha aumentado el coste total mínimo.

Solución:

(a) Por el teorema de Pitágoras la longitud bajo el río es $\sqrt{450^2 + x^2}$. La longitud por la orilla es $1000-x$. Entonces, el coste es

$$C = 5k\sqrt{450^2 + x^2} + k(1000 - x)$$

(b) (I) La derivada de esta función es

$$C'(x) = \frac{10kx}{2\sqrt{450^2 + x^2}} - k = \frac{5kx}{\sqrt{450^2 + x^2}} - k$$

(II) El coste mínimo lo calculamos igualando la derivada a cero:

$$\frac{5kx}{\sqrt{450^2 + x^2}} - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5x - \sqrt{450^2 + x^2} = 0$$

La solución de esta ecuación es $x = \frac{450}{\sqrt{24}} \simeq 91{,}9$ m. Se trata de un mínimo porque la derivada es positiva a la derecha y negativa a la izquierda de este valor.

(c) El coste mínimo lo obtenemos sustituyendo este valor de x:

$$C_{min} \simeq 3200k$$

(d) De

$$\operatorname{tg}(180 - \theta) = \frac{450}{x}$$

resulta $\theta \simeq 102^{\mathrm{o}}$.

(e) (I) El coste mínimo se dará cuando $\theta = 120^{\mathrm{o}}$ puesto que al aumentar el ángulo aumenta x y ya hemos visto que en esta región la función $C(x)$ era creciente. Entonces:

$$x = \frac{450}{\operatorname{tg} 60^{\mathrm{o}}} \simeq 260 \text{ m}$$

(II) El coste para este nuevo valor de x es $C \simeq 3340k$. El incremento porcentual del coste es del 4,17 %.

♠♠♠♠

73. Considere la función definida mediante $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

(a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ es una función decreciente.

(b) En la curva $y = f(x)$ hay un punto de inflexión P. Halle las coordenadas de P.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

El signo de la derivada está dado por el siguiente esquema:

	0		0	
$+$		$-$		$+$
	0		2	

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.

(*b*) La segunda derivada es:

$$f''(x) = 6x - 6$$

El signo de la segunda derivada es:

	0	
$-$	|	$+$
	1	

Hay un punto de inflexión en $P(1,2)$.

♠♠♠♠

74. Muestre que

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

Solución:

Integramos por partes:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x &= \int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \left[\frac{x^4 \ln x}{4}\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4 \, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{16 \ln 2}{4}\right) - \left[\frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{16}\right) \\
&= 4\ln 2 - \frac{15}{16}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

75. Utilizando la sustitución $t = \tan x$, halle

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

Exprese la respuesta de la forma $m \arctan(n \tan x) + c$ donde m y n son constantes que deberá determinar.

Solución:

Derivamos la fórmula de sustitución:

$$t = \tan x \, ; \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \, ; \qquad \mathrm{d}x = \cos^2 x \, \mathrm{d}t$$

Hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x} \, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + \tan^2 x + \tan^2 x} \, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + 2\tan^2 x} \, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + 2t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}t)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c
\end{aligned}$$

de modo que $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $n = \sqrt{2}$.

♠♠♠♠

76. La función f se define mediante $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes x e y.

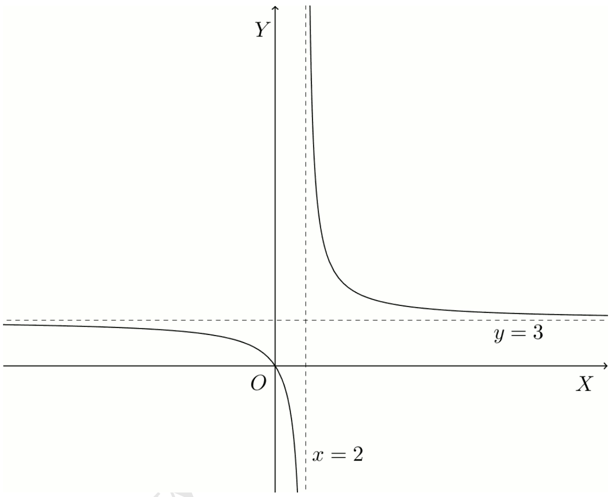
(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(c) Halle todos los valores de x para los que $f(x) = f^{-1}(x)$.

(d) Resuelva la inecuación $|f(x)| < \frac{3}{2}$.

(e) Resuelva la inecuación $f(|x|) < \frac{3}{2}$.

Solución:



(a) Las asíntotas son las rectas $x = 2$ e $y = 3$. La curva corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

(b) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$\begin{aligned} y = \frac{3x}{x-2} \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{3y}{y-2} \\ &\Longrightarrow \quad x(y-2) = 3y \\ &\Longrightarrow \quad xy - 3y = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y(x-3) = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y = f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3} \end{aligned}$$

(c) Igualando las dos funciones:

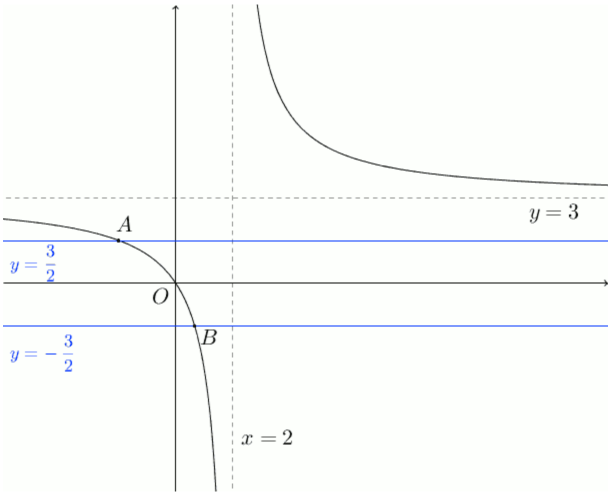
$$\frac{3x}{x-2} = \frac{2x}{x-3} \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 9x = 2x^2 - 4x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x = 0$$

Las dos funciones toman los mismos valores en $x = 0$ y en $x = 5$.

(d) La inecuación equivale a:

$$-\frac{3}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$$

Lo podemos resolver gráficamente



La parte de la curva que cumple la condición es la comprendida entre los puntos A y B es decir para $x \in \left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

(e) Se trata de una función simétrica respecto al eje de ordenadas. Para $x > 0$ la desigualdad se cumple en el intervalo $[0, 2)$. Por la simetría debe cumplirse también en $(-2, 0]$. La solución es entonces el intervalo $(-2, 2)$. También puede expresarse la función como:

$$f(|x|) = \frac{3|x|}{|x| - 2} = \begin{cases} \frac{3x}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-3x}{-x-2} = \frac{3x}{x+2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y obtener la solución por separado para $x < 0$ y para $x \geq 0$.

♠♠♠♠

77. Considere las funciones $f(x) = \tan x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$.

(a) Halle una expresión para $g \circ f(x)$; indique cuál es su dominio.

(b) A partir de lo anterior muestre que:

$$g \circ f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(c) Sea $y = g \circ f(x)$. Halle el valor exacto de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en el punto del gráfico de $y = g \circ f(x)$ en el que $x = \frac{\pi}{6}$; exprese la respuesta de la forma $a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Z}$.

(d) Muestre que el área delimitada por el gráfico de $y = g \circ f(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{6}$ es $\ln(1 + \sqrt{3})$.

Solución:

(a)

$$g \circ f(x) = g(\tan x) = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

El dominio de la función es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$

(b) Sustituyendo la tangente en función del seno y el coseno:

$$g \circ f(x) = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(c) Derivamos:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) + (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x + \operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

Para $x = \frac{\pi}{6}$:

$$(g \circ f)'(\frac{\pi}{6}) = \frac{-2}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{-2}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-4}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{-4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = -8 - 4\sqrt{3}$$

(d) En la integral siguiente, el numerador es la derivada del denominador:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|\cos x - \operatorname{sen} x|\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right| = \ln\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Este logaritmo es menor que cero por lo que el área es igual a:

$$S = -\ln\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \ln\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \ln\frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \ln\frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$= \ln(\sqrt{3} + 1)$$

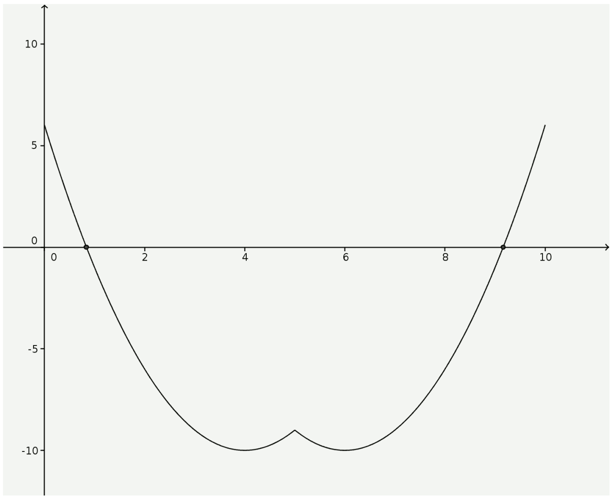
♠♠♠♠

78. (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = (x - 5)^2 - 2|x - 5| - 9$, para $0 \leq x \leq 10$.
    (b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación:

$$(x - 5)^2 - 2|x - 5| - 9 = 0$$

Solución:

(a) Puede dibujarse con la calculadora. El resultado es algo como esto:



(b) Las soluciones de la ecuación pueden obtenerse como las intersecciones de la curva del apartado anterior con el eje OX. De esta manera se obtiene:

$$x_1 = 0{,}84\ ; \qquad x_2 = 9{,}16$$

El valor exacto puede calcularse resolviendo:

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(x-5) - 9 = 0 \\ x > 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 6 + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(5-x) - 9 = 0 \\ x < 5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 4 - \sqrt{10}$$

♠♠♠♠

79. El gráfico de $y = \ln(5x + 10)$ se obtiene a partir del gráfico de $y = \ln x$ realizando una traslación de a unidades en la dirección del eje x seguida de una traslación de b unidades en la dirección del eje y.

 (a) Halle el valor de a y el valor de b.

 (b) La región delimitada por el gráfico de $y = \ln(5x + 10)$, el eje x y las rectas $x = e$ y $x = 2e$, se rota alrededor del eje x. Halle el volumen así generado.

Solución:

(a) Podemos escribir la función como:

$$Y = \ln(5x + 10) = \ln[5(x + 2)] = \ln 5 + \ln(x + 2)$$

con lo que vemos que la curva $y = \ln x$ se ha trasladado -2 unidades en la dirección del eje x y $\ln 5$ unidades en la dirección del eje y. Es decir, $a = -2$ y $b = \ln 5$.

(b) El volumen es igual a la siguiente integral que podemos obtener con la calculadora:

$$V = \pi \int_e^{2e} (\ln(5x + 10))^2 \ \mathrm{d}x = 31{,}6\pi$$

También puede obtenerse el valor exacto integrando por partes.

♠♠♠♠

80. Una curva se define mediante $x^2 - 5xy + y^2 = 7$.

 (a) Muestre que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5y - 2x}{2y - 5x}$$

(b) Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto $(6, 1)$.

(c) Halle la distancia que hay entre los dos puntos de la curva en los cuales la tangente correspondiente es paralela a la recta $y = x$.

Solución:

(a) Por derivación implícita:

$$2x - 5(y + xy') + 2yy' = 0$$
$$2yy' - 5xy' = 5y - 2x$$
$$y' = \frac{5y - 2x}{2y - 5x}$$

(b) La derivada en ese punto es:

$$y'(6, 1) = \frac{5 - 12}{2 - 30} = \frac{1}{4}$$

Entonces, la pendiente de la recta normal es $m = -4$ y su ecuación:

$$y - 1 = -4(x - 6)$$

(c) Los puntos de la curva que tienen tangente de pendiente 1 son la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ \dfrac{5y - 2x}{2y - 5x} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los puntos $P(1, -1)$ y $Q(-1, 1)$. Su distancia es:

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

♠♠♠♠

81. (4 puntos)

Utilizando la integración por partes, halle $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$.

Solución:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \qquad v = -\cos x$$

$$\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

♠♠♠♠

82. (6 puntos)

Considere la curva $y = \dfrac{1}{1 - x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 1.$

(a) Halle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Determine la ecuación de la normal a la curva en el punto $x = 3$ en la forma $ax + by + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Solución:

(a) Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0 - (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

(*b*) En el punto de abscisa $x_0 = 3$ la ordenada vale $y_0 = -\frac{1}{3}$.
La pendiente de la recta tangente en ese punto es:

$$m = \frac{1}{(1-3)^2} = \frac{1}{4}$$

de forma que la pendiente de la normal es -4. La ecuación de la normal es

$$y + \frac{1}{3} = -4(x-3)$$
$$3y + 1 = -4x + 12$$
$$4x + 3y - 11 = 0$$

♠♠♠♠

83. (4 puntos)

Utilice la sustitución $u = \ln x$ para hallar el valor de $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Solución:

$u = \ln x$; $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Además, para $x = e$, $u = 1$ y para $x = e^2$, $u = 2$.

Sustituyendo

$$\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln u\Big]_1^2 = \ln 2$$

♠♠♠♠

84. (8 puntos)

Una curva viene dada por $xy = y^2 + 4$.

(*a*) Muestre que no hay ningún punto en el que la tangente a la curva sea horizontal.

(*b*) Halle las coordenadas de aquellos puntos en los que la tangente a la curva es vertical.

Solución:

(*a*) Derivando de forma implícita se obtiene:

$$y + xy' = 2yy'$$
$$2yy' - xy' = y$$
$$y'(2y - x) = y$$
$$y' = \frac{y}{2y - x}$$

Según esta expresión, la derivada se anula para $y = 0$. Sin embargo no hay ningún punto de la curva con ordenada cero pues al sustituir este valor en la ecuación de la curva se obtiene $0 = 4$. No hay entonces ningún punto de tangente horizontal.

(*b*) La tangente es vertical cuando la derivada tiende a infinito, es decir, en este caso, cuando $2y - x = 0$. Sustituyendo $x = 2y$ en la ecuación de la curva:

$$2y^2 = y^2 + 4$$
$$y^2 = 4$$
$$y = -2\ ; \quad y = 2$$

Los puntos son $(-4, -2)$ y $(4, 2)$.

♠♠♠♠

85. (8 puntos)

(*a*) Muestre que $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$.

(b) Considere $f(x) = \text{sen}(ax)$, donde a es una constante. Demuestre mediante inducción matemática que

$$f^{(n)}(x) = a^n \,\text{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f^{(n)}(x)$ representa la n-ésima derivada de $f(x)$.

Solución:

(a) Aplicando la fórmula del seno de la suma

$$\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \cos\theta$$

(b)
- La propiedad se cumple para $n = 1$ puesto que

$$f'(x) = a\cos(ax) = a\,\text{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Supongamos que se cumple para $n = k - 1$, es decir:

$$f^{(k-1)}(x) = a^{k-1}\,\text{sen}\left(ax + \frac{(k-1)\pi}{2}\right)$$

y veamos que, en ese caso, se cumple para $n = k$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= a^{k-1}\cos\left(ax + \frac{(k-1)\pi}{2}\right)\cdot a \\ &= a^k\,\text{sen}\left(ax + \frac{(k-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a^k\,\text{sen}\left(ax + \frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- Como consecuencia del principio de inducción, la propiedad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

86. (20 puntos)

Considere la función $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ definida en el dominio $-1 \leq x \leq 1$.

(a) Muestre que f es una función impar.

(b) Halle $f'(x)$.

(c) A partir de lo anterior, halle la coordenada x de todos los máximos o mínimos locales que haya.

(d) Halle el recorrido de f.

(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y de todos los máximos o mínimos locales que haya.

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y el eje x para $x \geq 0$.

(g) Muestre que

$$\int_{-1}^{1} \left|x\sqrt{1 - x^2}\right|\,\mathrm{d}x > \left|\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x\right|$$

Solución:

(a) Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$. Las gráficas de las funciones impares tienen un centro de simetría en el origen de coordenadas.

$$f(-x) = (-x)\sqrt{1 - (-x)^2} = -x\sqrt{1 - x^2} = -f(x)$$

(b) Aplicando la regla de derivación del producto

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{1 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\cdot x = \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(*c*) Calculamos los ceros de la derivada:

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0$$
$$1-x^2-x^2=0$$
$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema

$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$\nexists$
	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	

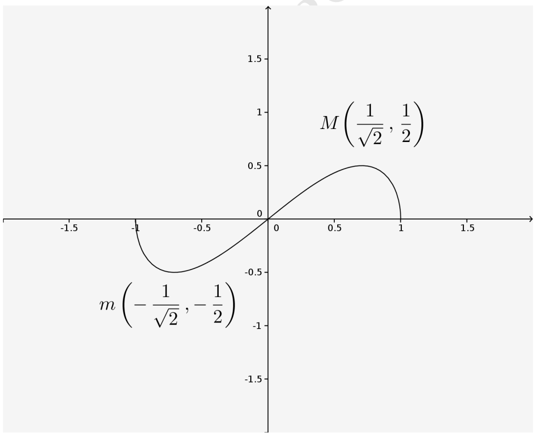
Hay un mínimo para $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y un máximo relativo en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(*d*) El dominio de la función es el intervalo $[-1,1]$ y la función es continua en ese intervalo. Los valores máximo y mínimo absolutos de la función (que existen de acuerdo con el teorema de Weierstrass) o son máximos y mínimos relativos o se dan en los extremos del intervalo. Entonces, puesto que

$$f(-1)=0$$
$$f(1)=0$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

el recorrido de la función es el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(*e*) La representación gráfica es la siguiente:



(*f*) El área es

$$S=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(*g*) Es claro puesto que

$$\int_{-1}^{1}\left|x\sqrt{1-x^2}\right|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$
$$\left|\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right|=0$$

♠♠♠♠

87. (6 puntos)

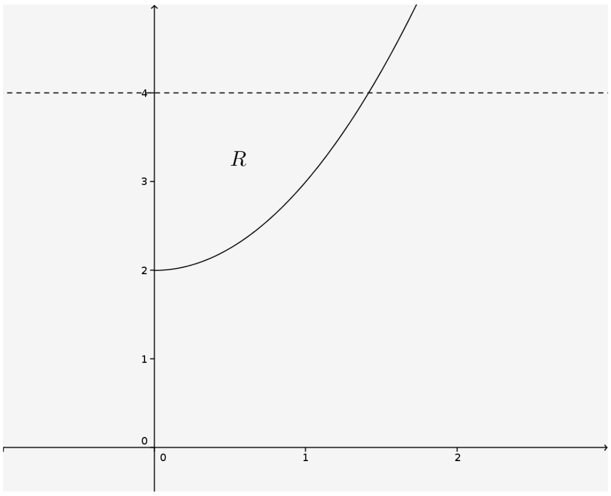
Una función viene dada por $f(x)=x^2+2$, $x\geq 0$. La región R está delimitada por $y=f(x)$, el eje y, y la recta $y=4$.

(*a*) (I) Exprese el área de la región R como una integral con respecto a y.

(II) Determine el área de R con una aproximación de cuatro cifras significativas.

(b) Halle el volumen exacto que se genera cuando la región R se rota 2π radianes alrededor del eje y.

Solución:



(a) (I) En la figura vemos que el área de R es

$$S = \int_2^4 x \, \mathrm{d}y = \int_2^4 \sqrt{y-2} \, \mathrm{d}y$$

(II) La calculadora da 1,886.

(b) El volumen es

$$V = \pi \int_2^4 x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_2^4 (y-2) \, \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^2}{2} - 2y \right]_2^4 = 2\pi$$

♠♠♠♠

88. (6 puntos)

La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución de probabilidad $f(x) = A \operatorname{sen}(\ln x)$, $1 \leq x \leq 5$.

(a) Halle el valor de A con una aproximación de tres cifras decimales.

(b) Halle la moda de X.

(c) Halle el valor $\mathrm{p}(X \leq 3 \mid x \geq 2)$.

Solución:

(a) Con la calculadora vemos que

$$I = \int_1^5 \operatorname{sen} \ln x \, \mathrm{d}x \simeq 3{,}09$$

Entonces, A debe valer

$$A = \frac{1}{I} \simeq 0{,}323$$

(b) Calculamos el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos que la moda es 4,81.

(c) La probabilidad es:

$$\mathrm{p}(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}(X \geq 2)}$$

Las probabilidades las calculamos mediante integrales:

$$\mathrm{p}(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 A \operatorname{sen} \ln x \, \mathrm{d}x \simeq 0{,}253$$

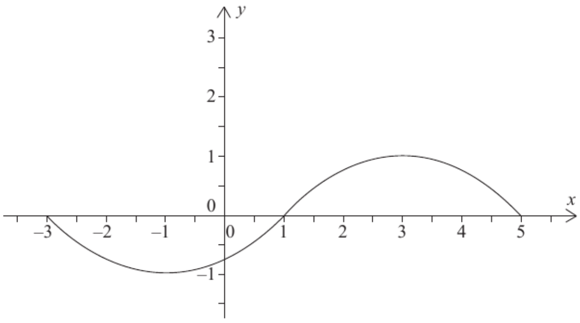
$$\mathrm{p}(X \geq 2) = \int_2^5 A \operatorname{sen} \ln x \, \mathrm{d}x \simeq 0{,}881$$

Entonces

$$\mathrm{p}(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}(X \geq 2)} \simeq 0{,}288$$

89. (21 puntos)

El siguiente gráfico representa una función $y = f(x)$, donde $-3 \leq x \leq 5$. La función tiene un máximo en $(3, 1)$ y un mínimo en $(-1, -1)$.



(a) Las funciones u y v vienen dadas por $u(x) = x - 3$, $v(x) = 2x$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(I) Indique cuál es el recorrido de la función $u \circ f$.

(II) Indique cuál es el recorrido de la función $u \circ v \circ f$.

(III) Halle el mayor dominio posible de la función $f \circ v \circ u$.

(b) (I) Explique por qué la función f no tiene inversa.

(II) El dominio de f se restringe para así definir una función g que sí que tenga inversa g^{-1}. Indique cuál es el mayor dominio posible de g.

(III) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g^{-1}(x)$, mostrando claramente el punto de corte con el eje y e indicando las coordenadas de los extremos.

Considere la función que viene dada por $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+d}$, $x \neq -d$ y $d \in \mathbb{R}$

(c) (I) Halle una expresión para la función inversa $h^{-1}(x)$.

(II) Halle el valor de d para el cual la función h coincide con su inversa.

(III) Para ese valor de d, existe una función k tal que $h \circ k(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, $x \neq -1$. Halle $k(x)$

Solución:

(a) (I) La función f tiene recorrido $[-1, 1]$. La función u resta 3 unidades al resultado de aplicar f. El recorrido de $u \circ f$ será $[-4, -2]$.

(II) El recorrido de $v \circ f$ es $[-2, 2]$ y el de $u \circ v \circ f$ será $[-5, -1]$.

(III) Debe ocurrir

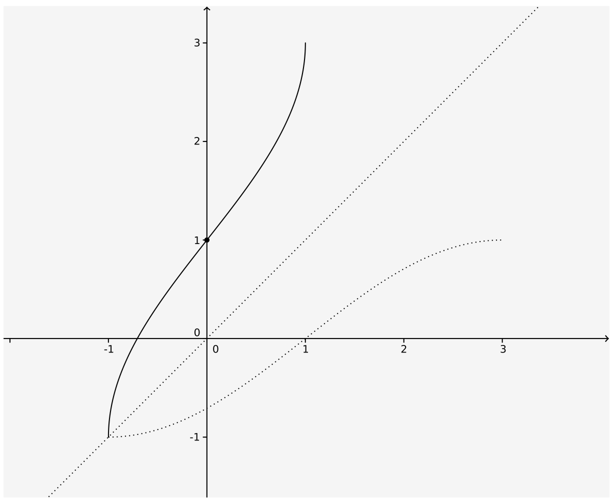
$$-3 \leq 2(x-3) \leq 5$$

En consecuencia, el dominio es $\left[\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right]$.

(b) (I) No tiene inversa porque no es inyectiva.

(II) En $[-1, 3]$ la función es inyectiva y puede definirse la función inversa.

(III) La gráfica de la función $f^{-1}(x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x)$ en $y = x$.



(c) (I) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \frac{2y-5}{y+d} \ ; \qquad x(y+d) = 2y-5 \ ; \qquad xy - 2y = -dx - 5 \ ; \qquad y(x-2) = -dx-5$$

y finalmente

$$y = h^{-1}(x) = \frac{-dx-5}{x-2}$$

(II) La función coincide con su inversa para $d = -2$. En este caso

$$h(x) = h^{-1}(x) = \frac{2x-5}{x-2}$$

(III) Despejamos aplicando a los dos miembros la función $h^{-1} = h$:

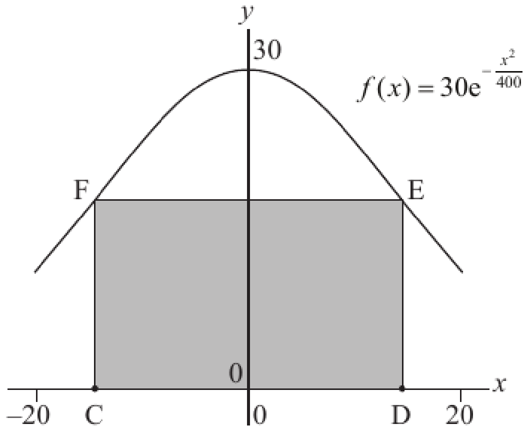
$$h \circ k(x) = \frac{2x}{x+1} \ ; \qquad h^{-1} \circ h \circ k(x) = h^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right) \ ; \qquad k(x) = h\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

Por tanto

$$k(x) = \frac{\frac{2\cdot 2x}{x+1} - 5}{\frac{2x}{x+1} - 2} = \frac{4x - 5x - 5}{2x - 2x - 2} = \frac{-x-5}{-2} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

♠♠♠♠

90. (21 puntos)
La siguiente figura muestra la sección transversal vertical de un edificio.



La sección transversal del tejado del edificio se puede modelizar mediante la curva

$$f(x) = 30e^{-\frac{x^2}{400}} \ ; \qquad -20 \le x \le 20$$

El eje x representa el nivel de la calle.

(a) Halle $f''(x)$.
(b) Muestre que la pendiente de la función del tejado es máxima para $x = -\sqrt{200}$.

La sección transversal del espacio habitable que queda bajo el tejado está modelizado por el rectángulo $CDEF$, con los puntos $C(-a, 0)$ y $D(a, 0)$, donde $0 < a \le 20$.

(c) Muestre que el área (A) máxima del rectángulo $CDEF$ es $600\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$.
(d) A la función I se la conoce como el factor de aislamiento de $CDEF$. La función se define como $I(a) = \dfrac{P(a)}{A(a)}$, donde P = perímetro y A = área del rectángulo.
  (I) Halle una expresión para P en función de a.
  (II) Halle el valor de a que minimiza I.

(III) Utilizando el valor de a hallado en el apartado (II), calcule el porcentaje del área de la sección transversal bajo todo el tejado que no está incluido en la sección transversal del espacio habitable.

Solución:

(a) Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 30e^{-\frac{x^2}{400}} \cdot \frac{-2x}{400} \\ &= -\frac{3x}{20}\, e^{-\frac{x^2}{400}} \\ f''(x) &= -\frac{3}{20}\, e^{-\frac{x^2}{400}} + e^{-\frac{x^2}{400}}\, \frac{-2x}{400} \cdot \frac{-3x}{20} \\ &= \frac{3}{20}\, e^{-\frac{x^2}{400}} \left(\frac{x^2}{200} - 1 \right) \end{aligned}$$

(b) Para calcular el máximo de la pendiente (de la derivada) estudiamos el signo de la derivada segunda. Ésta se anula en $-\sqrt{200}$ y en $\sqrt{200}$. El signo de f'' se representa en el siguiente esquema

	$-\sqrt{200}$		$\sqrt{200}$	
$+$	0	$-$	0	$+$

y vemos que el máximo esta en $x = -\sqrt{200}$ donde la función $f'(x)$ pasa de creciente a decreciente.

(c) La base del rectángulo es $2a$ y la altura $30e^{-\frac{a^2}{400}}$. El área es

$$S(a) = 60ae^{-\frac{a^2}{400}}$$

Para calcular el máximo igualamos la derivada a cero:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = 60e^{-\frac{a^2}{400}} + 60ae^{-\frac{a^2}{400}}\, \frac{-2a}{400} = 60e^{-\frac{a^2}{400}} \left(1 - \frac{a^2}{200} \right)$$

El máximo se da para $a = \sqrt{200}$ y el área es

$$S(\sqrt{200}) = 60\sqrt{200}e^{-\frac{1}{2}} = 600\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

(d) (I) Sustituyendo el perímetro y el área

$$I(a) = \frac{4a + 60e^{-\frac{a^2}{400}}}{60ae^{-\frac{a^2}{400}}} = \frac{a + 15e^{-\frac{a^2}{400}}}{15ae^{-\frac{a^2}{400}}} = \frac{1}{15} e^{\frac{a^2}{400}} + \frac{1}{a}$$

(II) Con la calculadora se obtiene el mínimo para $a \simeq 12{,}6$ m.

(III) El área del rectángulo es aproximadamente $508{,}34$ m^2 y el área total $666{,}85$ m^2. El porcentaje de la sección no habitable sobre la sección total es $23{,}8\,\%$.

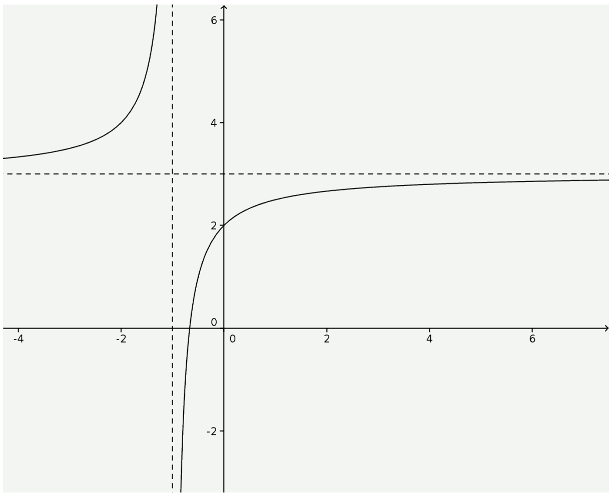
91. (5 puntos)

La función f se define mediante

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}\ ; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -1$$

Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas que haya y sus ecuaciones, y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

Solución:



Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 3$. Los puntos de corte con los ejes son $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, 2)$.

♠♠♠♠

92. (5 puntos)

 (a) Muestre que $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

 (b) A partir de lo anterior, halle

$$\int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{cotg}\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Solución:

(a) Basta ver la definición de ambas funciones en un triángulo rectángulo.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{cotg}\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \Big[\operatorname{artg} x\Big]_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{cotg}\alpha} \\ &= \operatorname{artg}\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{artg}\operatorname{tg}\alpha \\ &= \operatorname{artg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{artg}\operatorname{tg}\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} - \alpha - \alpha \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\alpha\end{aligned}$$

♠♠♠♠

93. (6 puntos)

La función f viene dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hayley formula la siguiente conjetura

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(x_2) + f'(x_1)}{2}\ ; \qquad x_1 \neq x_2$$

Muestre que la conjetura de Hayley es correcta.

Solución:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b$$

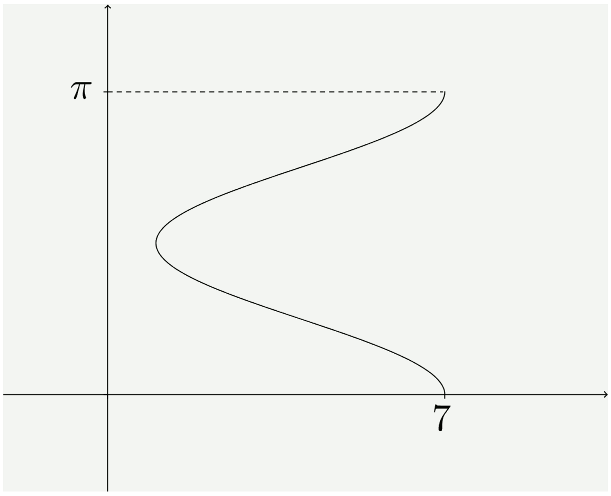
Por otra parte $f'(x) = 2ax + b$:

$$\frac{f'(x_2) + f'(x_1)}{2} = \frac{2ax_2 + b + 2ax_1 + b}{2} = \frac{2a(x_2 + x_1) + 2b}{2} = a(x_2 + x_1) + b$$

♠♠♠♠

94. (19 puntos)

El siguiente gráfico muestra la relación $x = 3\cos 2y + 4$, $0 \le y \le \pi$.



La curva se rota 360º alrededor del eje para así generar el volumen de revolución V.

(a) Calcule el valor de V.

Se fabrica un contenedor que tiene esta forma, con un volumen igual a V cm^3 y una base sólida de 14 cm de diámetro. El contenedor se va llenando de agua a razón de 2 cm^3 min^{-1}. La profundidad del agua es h cm, $0 \le h \le \pi$.

(b) (I) Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \pi(3\cos 2h + 4)^2$, halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

(II) Halle el valor de $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ cuando $h = \frac{\pi}{4}$.

(c) (I) Halle $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}$.

(II) Halle los valores de h para los que $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

(III) Haciendo referencia explícita a la forma del contenedor, interprete $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ en los valores de h que ha hallado en el apartado (c)(II).

Solución:

(a) El volumen es

$$V = \pi\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^\pi (3\cos 2y + 4)^2\,\mathrm{d}y$$

Si fuese un examen con calculadora el problema estaría resuelto. Pero vamos a tener que obtener la integral. Veremos que pensando un poco se simplifica bastante. Desarrollamos el cuadrado:

$$V = \pi\int_0^\pi (9\cos^2 2y + 24\cos 2y + 16)\,\mathrm{d}y$$

La función $\cos 2y$ tiene periodo π. Por tanto, la integral entre 0 y π de esta función es cero. Por otra parte, la función coseno cuadrado puede escribirse en función del ángulo doble y tenemos:

$$V = \pi\int_0^\pi \left(\frac{9(1+\cos 4y)}{2} + 16\right)\,\mathrm{d}y$$

De nuevo, la integral de 0 a π de $\cos 4y$ es igual a cero. Tenemos que

$$V = \pi\int_0^\pi \left(\frac{9}{2} + 16\right)\,\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{41y}{2}\right]_0^\pi = \frac{41\pi^2}{2}$$

(b) (I) Derivamos el volumen respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \pi(3\cos 2h + 4)^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\pi(3\cos 2h + 4)^2}$$

(II) Sustituyendo $h = \frac{\pi}{4}$ resulta $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{8\pi}$ cm min^{-1}

(c) (I) Llamemos:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v = \frac{2}{\pi(3\cos 2h + 4)^2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{-2\pi\cdot 2(3\cos 2h+4)\cdot(-3\,\mathrm{sen}\,2h)\cdot 2}{\pi^2(3\cos 2h+4)^4}\cdot\frac{2}{\pi(3\cos 2h+4)^2}\\ &= \frac{-2\pi\cdot 2\cdot(-3\,\mathrm{sen}\,2h)\cdot 2}{\pi^2(3\cos 2h+4)^3}\cdot\frac{2}{\pi(3\cos 2h+4)^2}\\ &= \frac{48\,\mathrm{sen}\,2h}{\pi^2(3\cos 2h+4)^5}\end{aligned}$$

(II) La derivada segunda se hace cero cuando $\mathrm{sen}\,2h = 0$, o sea, para $h = 0$, $h = \frac{\pi}{2}$ y $h = \pi$.

(III) Hay mínimos en $h = 0$ y $h = \pi$ porque al ser mayor la sección del recipiente el nivel de líquido aumenta más lentamente. Por el contrario en $h = \frac{\pi}{2}$ al ser mínima la sección la variación de la altura de líquido es máxima.

♠♠♠♠

95. (6 puntos)

La función f se define mediante

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ ; \qquad -1 < x \leq 1.$$

Halle la función inversa f^{-1} e indique el dominio y el recorrido de dicha función.

Solución:

El dominio de la función f es el intervalo $(-1, 1]$. En $x = -1$ la función tiende a infinito y en $x = 1$ se hace cero. El recorrido de la función es el intervalo $[0, \infty)$.

Para calcular la inversa intercambiamos las variables:

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\ ; \qquad x^2 = \frac{1-y}{1+y}\ ; \qquad (1+y)x^2 = 1-y$$

y despejamos

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

El dominio de esta función es el intervalo $[0, \infty)$ y el recorrido $(-1, 1]$.

♠♠♠♠

96. (8 puntos)

Considere la curva que viene dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 4xy$.

(a) Utilice la derivación implícita para mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

La tangente a esta curva es paralela al eje x en el punto donde $x = k$, $k > 0$.

(b) Halle el valor de k.

Solución:

(a) Derivando:

$$3x^2 + 3y^2y' = 4y + 4xy'\ ; \qquad y'(3y^2 - 4x) = 4y - 3x^2 \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

(b) Puesto que la pendiente de la tangente es cero:

$$4y - 3k^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3k^2}{4}$$

El punto $\left(k, \frac{3k^2}{4}\right)$ debe cumplir la ecuación de la curva:

$$k^3 + \frac{27k^6}{64} = 3k^3 \ ; \qquad \frac{27k^6}{64} = 2k^3$$

Puesto que $k > 0$, podemos dividir por k^3:

$$\frac{27k^3}{64} = 2 \ ; k^3 = \frac{128}{27} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{4\sqrt[3]{2}}{3}$$

♠♠♠♠

97. (15 puntos)

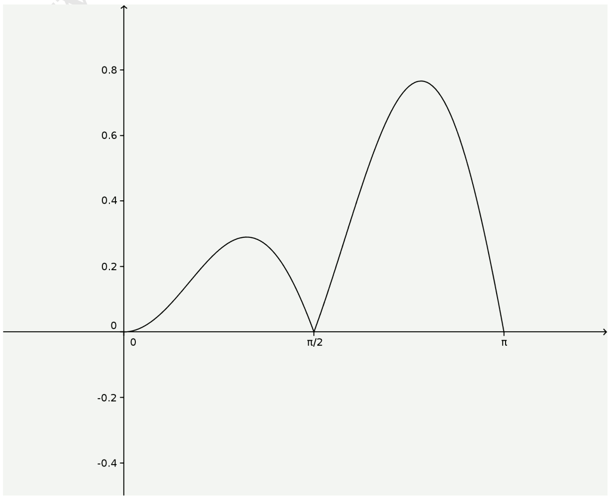
Una variable aleatoria continua T tiene la siguiente función de densidad de probabilidad f:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t|\operatorname{sen} 2t|}{\pi} & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(t)$.
(b) Utilice este gráfico aproximado para hallar la moda de T.
(c) Halle la media de T.
(d) Halle la varianza de T.
(e) Halle la probabilidad de que el valor de T esté comprendido entre la media y la moda.
(f) (I) Halle $\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ donde $0 \le T \le \frac{\pi}{2}$.
(II) A partir de lo anterior, verifique que el primer cuartil de T es $\dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

(a) Podemos obtener el gráfico con la calculadora.



(b) La moda es aproximadamente 2,46. Se obtiene con la calculadora.

(c) La media la obtenemos integrando

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\,\mathrm{d}t \simeq 2{,}04$$

El valor exacto de esta integral puede obtenerse calculando una primitiva por partes. El valor que damos lo hemos obtenido con la calculadora.

(d) Calculamos primero

$$\mathrm{E}(T^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^3 \operatorname{sen} 2t \ \mathrm{d}t \simeq 4,67$$

Entonces

$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{E}(T^2) - \mathrm{E}(T)^2 \simeq 0{,}516$$

(e)

$$p = \frac{1}{\pi}\int_{2{,}04}^{2{,}46} t|\operatorname{sen} 2t| \ \mathrm{d}t \simeq 0{,}285$$

(f) (I)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^T t \operatorname{sen} 2t \ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^T t \ \mathrm{d}(-\cos 2t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[-t\cos 2t\Big]_0^T + \frac{1}{2\pi}\int_0^T \cos 2t \ \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[-t\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\Big]_0^T\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[-T\cos 2T + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2T\Big]\end{aligned}$$

(II) Para $T = \frac{\pi}{2}$:

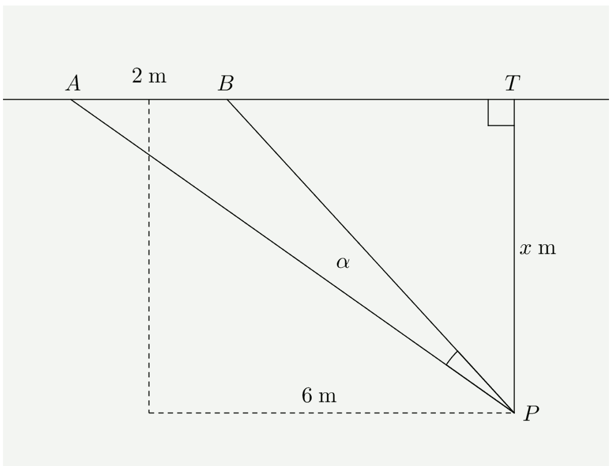
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{sen} 2t \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) = \frac{1}{4}$$

y, por consiguiente, el primer cuartil es $\frac{\pi}{2}$.

♠♠♠♠

98. (22 puntos)

Los puntos A, B y T se encuentran sobre una línea de una cancha de fútbol sala. La portería AB, tiene 2 m de ancho. Un jugador situado en el punto P patea el balón en dirección a la portería. PT es perpendicular a la recta AB y se encuentra a 6 m de una recta paralela que pasa por el centro de AB. Sea PT igual a x metros y sea $\alpha = \widehat{APB}$, medido en grados. Suponga que el balón se desplaza por el piso.



(a) Halle el valor de α cuando $x = 10$.

(b) Muestre que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2x}{x^2+35}$$

El valor de α es máximo cuando el valor de $\operatorname{tg}\alpha$ es máximo.

(c) (I) Halle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\alpha)$.

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de α tal que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\alpha) = 0$.

(III) Halle $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\operatorname{tg}\alpha)$ y, a partir de lo anterior, muestre que el valor de α nunca supera los 10^{o}.

(d) Halle el conjunto de valores de x para los cuales $\alpha \geq 7^{\text{o}}$

Solución:

(a) Por el terema de Pitágoras:

$$PB^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$
$$PA^2 = 10^2 + 7^2 = 149$$

Por el teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{125 + 149 - 4}{2\sqrt{125}\sqrt{149}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \simeq 8{,}43^{\text{o}}$$

(b) Llamemos $\widehat{TPA} = \alpha_1$ y $\widehat{TPB} = \alpha_2$. Entonces $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ y

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{7}{x} - \frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x}\frac{5}{x}} = \frac{2x}{x^2 + 35}$$

(c) (I)

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}x} = \frac{2(x^2+35) - 2x \cdot 2x}{(x^2+35)^2} = \frac{70 - 2x^2}{(x^2+35)^2}$$

(II) La derivada se anula para $x = \sqrt{35}$ m.

(III) La derivada segunda es igual a:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{-4x(x^2+35)^2 - 2(x^2+35)\cdot 2x \cdot (70 - 2x^2)}{(x^2+35)^4} \\
&= \frac{-4x(x^2+35) - 2\cdot 2x \cdot (70 - 2x^2)}{(x^2+35)^3} \\
&= \frac{4x^3 - 420x}{(x^2+35)^3} \\
&= \frac{4x(x^2 - 105)}{(x^2+35)^3}
\end{aligned}$$

La derivada segunda para $x = \sqrt{35}$ es negativa. Por consiguiente α es máximo para este valor de x. El valor máximo de α es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{35}}{35 + 35} = \frac{\sqrt{35}}{35} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \simeq 9{,}59^{\text{o}}$$

Por tanto, α nunca es mayor de 10^{o}.

(d) Representamos con la calculadora las curvas

$$y_1 = \operatorname{artg}\frac{2x}{x^2+35}\ ; \qquad y_2 = 7$$

y vemos que el ángulo es mayor de 7^{o} entre 2,55 m y 13,7 m.

♠♠♠♠

99. (23 puntos)

Las funciones f y g se definen mediante:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ; \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) (I) Muestre que $\dfrac{1}{4f(x) - 2g(x)} = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 3}$.

(II) Utilice la sustitución $u = e^x$ para hallar

$$\int_0^{\ln 3} \frac{1}{4f(x) - 2g(x)}\, \mathrm{d}x$$

Dé la respuesta en la forma $\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Sea $h(x) = nf(x) + g(x)$ donde $n \in \mathbb{R}$, $n > 1$.

(*b*) (I) Resuelva la ecuación $h(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}^+$, formando para ello una ecuación cuadrática en e^x.

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que la ecuación $h(x) = k$ tiene dos soluciones reales siempre que se cumpla que $k > \sqrt{n^2 - 1}$ y $k \in \mathbb{R}^+$.

Sea $t(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

(*c*) (I) Muestre que $t'(x) = \dfrac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{[f(x)]^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

(II) A partir de lo anterior, muestre que $t'(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución:

(*a*) (I) Sustituyendo:

$$\frac{1}{4f(x) - 2g(x)} = \frac{1}{2(e^x + e^{-x}) - e^x + e^{-x}} =$$

Multiplicando por e^x numerador y denominador queda finalmente

$$= \frac{e^x}{e^{2x} + 3}$$

(II)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 3} \frac{1}{4f(x) - 2g(x)}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \frac{1}{u^2 + 3}\, \mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{u}{\sqrt{3}}\right]_1^3
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Barrow se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

(*b*) (I) Escribimos la ecuación:

$$\frac{n(e^x + e^{-x})}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = k\,; \qquad (n+1)e^x + (n-1)e^{-x} = 2k$$

Multiplicando por e^x:

$$(n+1)e^{2x} - 2ke^x + n - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4(n+1)(n-1)}}{2(n+1)}$$

Simplificando:

$$e^x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - (n+1)(n-1)}}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad x = \ln \frac{k \pm \sqrt{k^2 - (n+1)(n-1)}}{n+1}$$

(II) La ecuación tendrá dos soluciones si el discriminante es mayor que cero, o sea, si $k^2 > (n+1)(n-1) = n^2 - 1$. En ese caso, la fracción será positiva y tendrá sentido el logaritmo.

(*c*) (I) La función $t(x)$ es igual a

$$t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Derivamos:

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \qquad \text{multiplicando y dividiendo por 4} \\
&= \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{[f(x)]^2}
\end{aligned}$$

(II) Esta derivada es positiva puesto que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

♠♠♠♠

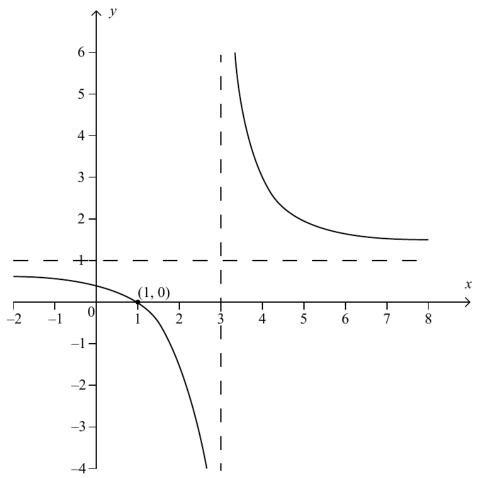
100. (4 puntos)

Una función racional viene dada por

$$f(x) = a + \frac{b}{x - c}$$

donde los parámetros $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$.

En la siguiente figura se representa el gráfico de $y = f(x)$. Utilizando la información que aparece



en el gráfico,

(a) indique el valor de a y el valor de c;

(b) halle el valor de b.

Solución:

(a) $a = 1$, $c = 3$

(b) Para $x = 1$, y vale 0. Por tanto:

$$0 = 1 + \frac{b}{1-3} \quad \Longrightarrow \quad b = 2.$$

♠♠♠♠

101. (9 puntos)

Una curva viene dada por la ecuación $3x - 2y^2e^{x-1} = 2$.

(a) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x e y.

(b) Halle las ecuaciones de las tangentes a esta curva en aquellos puntos donde la curva corta a la recta $x = 1$.

Solución:

(a) Derivando en forma implícita:

$$3 - 4yy'e^{x-1} - 2y^2e^{x-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3 - 2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}$$

(b) Si $x = 1$:

$$3 - 2y^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La pendiente de la tangente en $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es

$$m = \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y la ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$$

De la misma manera se obtiene que la ecuación de la tangente en $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es:

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$$

♠♠♠♠

102. (22 puntos)

Sea $y = e^x \operatorname{sen} x$.

(a) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(b) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2e^x \cos x$

Considere la función f, definida mediante $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(c) Muestre que la función f alcanza un valor máximo local en $x = \frac{3\pi}{4}$.

(d) Halle la coordenada x del punto de inflexión del gráfico de f.

(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de f, indicando claramente la posición del punto máximo local, del punto de inflexión y de los puntos de corte con los ejes.

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de f y el eje x.

La curvatura de un gráfico en un punto cualquiera (x, y) se define como

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(g) Halle el valor de la curvatura del gráfico de f en el punto máximo local.

(h) Halle el valor de κ para $x = \frac{\pi}{2}$ y comente acerca de su significado en lo que respecta a la forma del gráfico.

Solución:

(a) Derivando el producto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

(b) Derivando de nuevo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x$$

(c) Basta ver que en $\frac{3\pi}{4}$ se anula la primera derivada puesto que

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$$

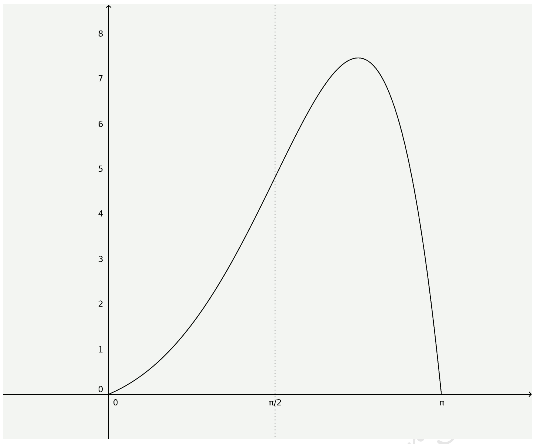
y la derivada segunda en ese punto es negativa. Por consiguiente, en $x = \frac{3\pi}{4}$ hay un máximo local.

(*d*) La segunda derivada se anula en $x = \frac{\pi}{2}$. El signo de la segunda derivada lo representamos en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ + & \Big| & - \\ & \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

En $x = \frac{\pi}{2}$ la curva pasa de cóncava a convexa y es, por tanto, un punto de inflexión.

(*e*) La curva corta al eje OX en $x = 0$ $x = \pi$, tiene un máximo en $x = \frac{3\pi}{4}$ y un punto de inflexión en $x = \frac{\pi}{2}$:



(*f*) Calcularemos el área mediante una integral. Calculemos primero por partes la integral indefinida:

$$\begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx & v = -\cos x \end{array}$$

de forma que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \operatorname{sen} x \end{array}$$

resulta:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}\, e^x\,(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

entonces, el área es:

$$\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx = \left[\frac{1}{2}\, e^x\,(\operatorname{sen} x - \cos x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\, e^{\pi}(\operatorname{sen}\pi - \cos\pi) - \frac{1}{2}\, e^0(\operatorname{sen} 0 - \cos 0) = \frac{1}{2}\,(e^{\pi} + 1)$$

(*g*) En $x = \frac{3\pi}{4}$ la derivada primera es cero y la derivada segunda:

$$2e^{\frac{3\pi}{4}} \cos\frac{3\pi}{4} = 2e^{\frac{3\pi}{4}}\,\frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$$

La curvatura en $x = \frac{3\pi}{4}$ es $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

(*h*) La curvatura en el punto de inflexión es 0. Eso significa que alrededor de ese punto la función se representa aproximadamente por una recta.

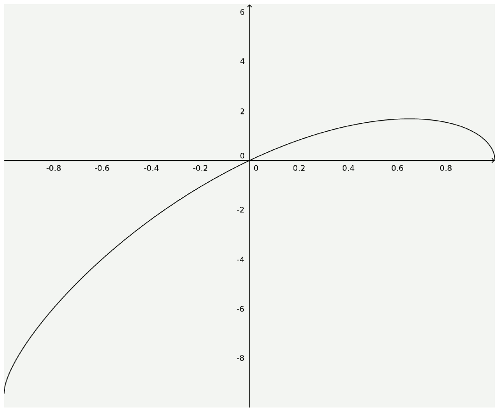
♠♠♠♠

103. (9 puntos)

Considere la función f definida mediante $f(x) = 3x\ \operatorname{arcos}(x)$, donde $-1 \leq x \leq 1$.

(*a*) Dibuje aproximadamente el gráfico de f indicando claramente todos los puntos de corte con los ejes y las coordenadas de todos los máximos o mínimos locales que haya.
(*b*) Indique el recorrido de f.
(*c*) Resuelva la inecuación $|3x \arccos(x)| > 1$.

Solución:



(*a*) La curva corta a los ejes en $(0,0)$ y en $(1,0)$. Tiene un máximo local en $(0{,}652; 1{,}68)$.
(*b*) El recorrido es el intervalo $[-9{,}42; 1{,}68]$.
(*c*) Mediante la calculadora gráfica obtenemos $x \in [-1, -0{,}189) \cup (0{,}254; 0{,}937)$

♠♠♠♠

104. (6 puntos)
Un satélite terrestre se mueve siguiendo una trayectoria definida mediante la curva $72{,}5x^2 + 71{,}5y^2 = 1$, donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ se expresan en miles de kilómetros y t es el tiempo en segundos. Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 7{,}75 \times 10^{-5}$ cuando $x = 3{,}2 \times 10^{-3}$, halle los posibles valores de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Dé las respuestas en forma estándar (notación científica).

Solución:

Calculamos los valores de y correspondientes al valor de x que nos dan:

$$y^2 = \frac{72{,}5x^2 - 1}{71{,}5} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 0{,}11792\ldots$$

Ahora, derivando en la ecuación de la trayectoria respecto del tiempo:

$$72{,}5 \cdot 2x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 71{,}5 \cdot 2y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{72{,}5x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{71{,}5y} = -\frac{145x}{143y} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Sustituyendo los valores de x, y y $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \simeq \pm 2{,}13 \times 10^{-6}$$

♠♠♠♠

105. (22 puntos)
Sea f la función definida mediante $f(x) = \frac{2-e^x}{2e^x-1} \quad x \in D$
(*a*) Determine D, el mayor dominio posible de f.
(*b*) Muestre que el gráfico de f tiene tres asíntotas e indique sus ecuaciones.
(*c*) Muestre que $f'(x) = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$.
(*d*) Utilice las respuestas dadas en los apartados (*b*) y (*c*) para justificar que f tiene una inversa e indique su dominio.
(*e*) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(f) Considere la región R delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y los ejes. Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando R se rota 2π alrededor del eje y.

Solución:

(a) El valor de x que anula el denominador no pertenece al dominio:

$$2e^x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

(b) La recta $x = -\ln 2$ es asíntota vertical de la curva pues

$$\lim_{x\to -\ln 2} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \infty$$

Cuando x tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

La recta $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
Cuando x tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

La recta $y = -2$ es asíntota horizontal de la curva en $-\infty$.

(c) Derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{-e^x(2e^x-1) - 2e^x(2-e^x)}{(2e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$$

(d) Puesto que la derivada es siempre negativa, la función es decreciente y, por consiguiente, inyectiva. En consecuencia puede definirse la función inversa. El dominio de f^{-1} será el recorrido de la función f es decir $\mathbb{R} \setminus \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

(e) Intercambiamos las variables:

$$x = \frac{2-e^y}{2e^y-1}$$

y despejamos y:

$$x(2e^y-1) = 2-e^y \;; \qquad e^y(2x+1) = 2+x \;; \qquad e^y = \frac{x+2}{2x+1}$$

La función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{2x+1}$$

(f) El punto de corte de la curva con el eje OY es $(0,1)$. El volumen se calcula mediante la integral:

$$V = \pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 \left(\ln\frac{y+2}{2y+1}\right)^2 \mathrm{d}y$$

Con la calculadora obtenemos $V \simeq 0{,}331$.

♠♠♠♠

106. (puntos)

Consider the graphs of $y = |x|$ and $y = -|x| + b$, where $b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Sketch the graphs on the same set of axes.

(b) Given that the graphs enclose a region of area 18 square units, find the value of b.

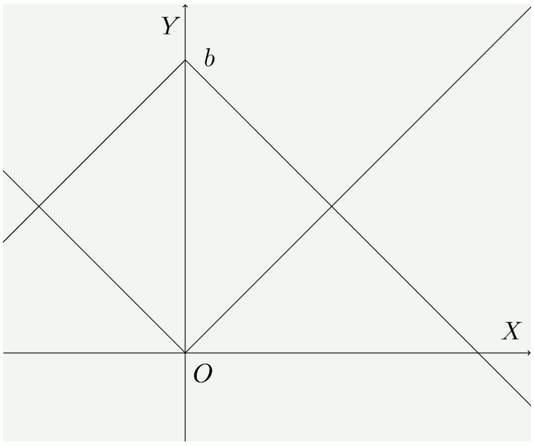
Solución:

(a)

(b) Puesto que la diagonal del cuadrado es igual a b (positivo):

$$18 = \frac{b^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad b = 6$$

♠♠♠♠



107. (5 puntos)

Find $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

Solución:

Integrando por partes:

$$u = \operatorname{arsen} x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

resulta:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{arsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arsen} x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

108. (17 puntos)

(*a*) (I) Express $x^2 + 3x + 2$ in the form $(x+h)^2 + k$.
(II) Factorize $x^2 + 3x + 2$.

Consider the function

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq -2,\ x \neq -1$$

(*b*) Sketch the graph of $f(x)$, indicating on it the equations of the asymptotes, the coordinates of the y-intercept and the local maximum.

(*c*) Show that

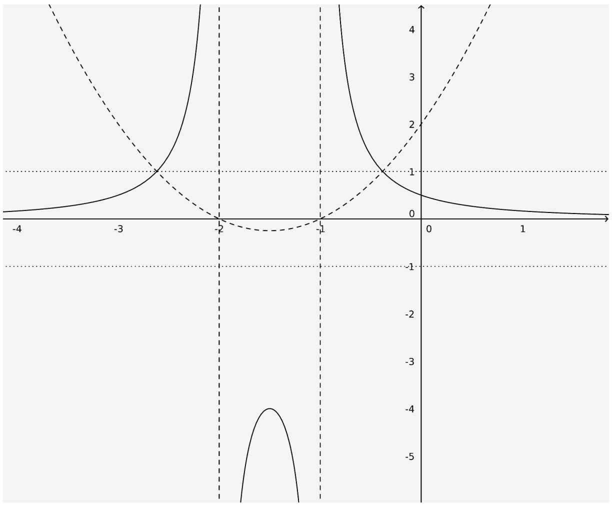
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2+3x+2}$$

(*d*) Hence find the value of p if $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(p)$.

(*e*) Sketch the graph of $y = f(|x|)$.

(*f*) Determine the area of the region enclosed between the graph of $y = f(|x|)$, the x-axis and the lines with equations $x = -1$ and $x = 1$.

Solución:



(a) $x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

(b) Las asíntotas son $x=-1$, $x=-2$ e $y=0$. La curva corta al eje OY en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. El máximo local está en $\left(-\frac{3}{2},-4\right)$.

(c) Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{x^2+3x+2}$$

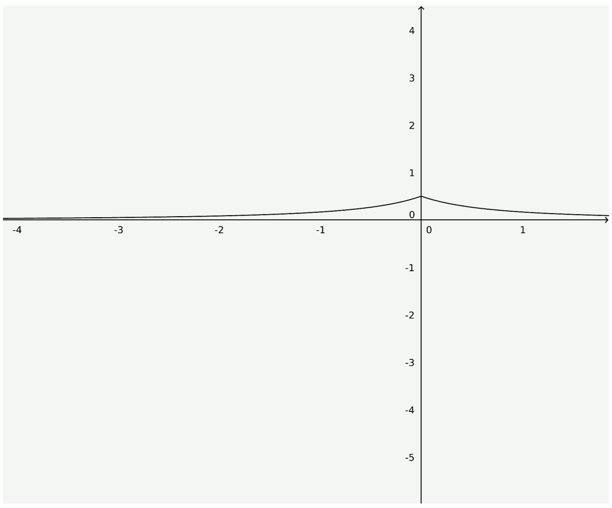
Identificando coeficientes resulta $A=1$ y $B=-1$. Por consiguiente:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

(d) Integrando:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\Big[\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big]_0^1\\&=\ln 2-\ln 3-\ln 1+2\\&=\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Por consiguiente, $p=\frac{4}{3}$.



(e)

(f) Por la simetría:

$$\int_{-1}^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Entonces;

$$S = 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{4}{3}$$

♠♠♠♠

109. (18 puntos)

Consider the polynomial $P(z) = z^5 - 10z^2 + 15z - 6$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Write down the sum and the product of the roots of $P(z) = 0$.

(b) Show that $(z-1)$ is a factor of $P(z)$.

The polynomial can be written in the form $P(z) = (z-1)^3(z^2 + bz + c)$

(c) Find the value of b and the value of c.

(d) Hence find the complex roots of $P(z) = 0$.

Consider the function $q(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

(e) (I) Show that the graph of $y = q(x)$ is concave up for $x > 1$.

(II) Sketch the graph of $y = q(x)$ showing clearly any intercepts with the axes.

Solución:

(a) De acuerdo con las relaciones de Cardano, la suma depende del coeficiente de z^4 y el producto del término independiente. En este caso la suma es 0 y el producto 6.

(b) Basta ver que $P(1) = 0$:

$$P(1) = 1^5 - 10 \cdot^2 + 15 \cdot 1 - 6 = 1 - 10 + 15 - 6 = 0$$

(c) Dividiendo tres veces por $z-1$ mediante la regla de Ruffini:

	1	0	0	−10	15	−6
1		1	1	1	−9	6
	1	1	1	−9	6	0
1		1	2	3	−6	
	1	2	3	−6	0	
1		1	3	6		
	1	3	6	0		

obtenemos

$$P(z) = (z-1)^3(z^2+3z+6) \quad \Longrightarrow \quad b = 3, \quad c = 6$$

(d) Calculamos las raíces complejas del polinomio de segundo grado:

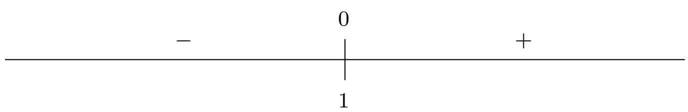
$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

Las raíces del polinomio son $z = 1$ (triple), $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$ $z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

(e) (I) Calculamos las derivadas de $q(x)$: Las derivadas de esta función son:

$$q(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$$
$$q'(x) = 5x^4 - 20x + 15$$
$$q''(x) = 20x^3 - 20$$

La segunda derivada solamente tiene una raíz real $x = 1$. El signo de la segunda derivada está representado en el siguiente esquema:



Para $x > 1$ la segunda derivada es positiva y, en consecuencia, la función es cóncava.

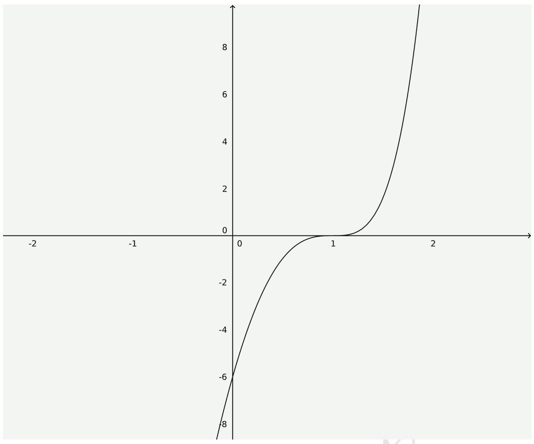
(II) La derivada de $q(x)$ puede escribirse factorizada como

$$q'(x) = 5x^4 - 20x + 15 = 5(x-1)^2(x^2+2x+3)$$

La derivada tiene una sola raíz $x = 1$ (doble). El signo de la derivada está representado por:

	$+$	0	$+$
		1	

La función es siempre creciente. El único punto en el que se anula la derivada es en $x = 1$ pero ya sabemos que se trata de un punto de inflexión.



♠♠♠♠

110. (7 puntos)

The curve C is defined by equation $xy - \ln y = 1$, $y > 0$.

(a) Find $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of x and y.

(b) Determine the equation of the tangent to C at the point $\left(\frac{2}{e}, e\right)$.

Solución:

(a) Derivando en forma implícita:

$$y + xy' - \frac{y'}{y} = 0\ ; \qquad y^2 + xyy' - y' = 0 \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{y^2}{1-xy}$$

(b) La pendiente de la tangente es:

$$m = \frac{e^2}{1 - \frac{2e}{e}} = -e^2$$

y su ecuación:

$$y - e = -e^2\left(x - \frac{2}{e}\right) \qquad \text{o bien} \qquad y = -e^2x + 3e$$

♠♠♠♠

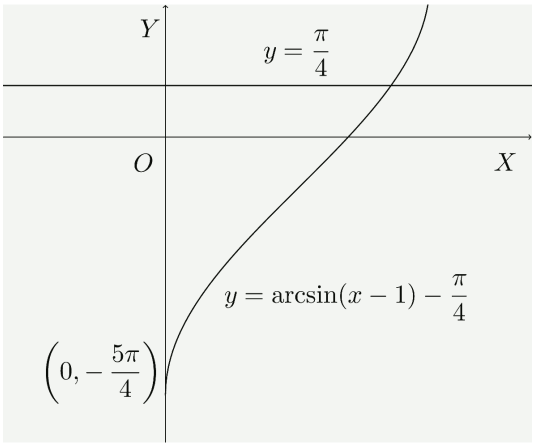
111. (6 puntos)

The region A is enclosed by the graph of $y = 2\arcsin(x-1) - \frac{\pi}{4}$, the y-axis and the line $y = \frac{\pi}{4}$.

(a) Write down a definite integral to represent the area of A.

(b) Calculate the area of A.

Solución:



(a) La curva corta al eje de ordenadas en el punto:

$$y_0 = 2 \text{ arsen}\,(-1) - \frac{\pi}{4} = 2\,\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

Despejamos x:

$$2 \text{ arsen}\,(x-1) = y + \frac{\pi}{4}\ ; \qquad \text{arsen}\,(x-1) = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{8}\ ; \qquad x - 1 = \text{sen}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

y, finalmente:

$$x = 1 + \text{sen}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

El área se puede calcular mediante la integral:

$$S = \int_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \text{sen}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right)\,\mathrm{d}y$$

(b) Con la calculadora se obtiene un área de $3,30$ unidades.

♠♠♠♠

112. (6 puntos)

Consider the graph of $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, where $-\pi \le x \le 2\pi$.

(a) Write down the equations of the vertical asymptotes of the graph.

The graph is reflected in the y-axis, then stretched parallel to the y-axis by a factor 2, then translated by

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) Give the equation of the transformed graph.

Solución:

(a) Las asíntotas son:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ; \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Teniendo en cuenta los valores que puede tomar x damos a k los valores -1, 0 y 1 y obtenemos las asíntotas $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$.

(b) Por la reflexión en el eje y (cambiar x por $-x$) obtenemos la función:

$$y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

El cambio de escala produce:

$$y = 2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

y la traslación:

$$y = -3 + 2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -3 + 2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

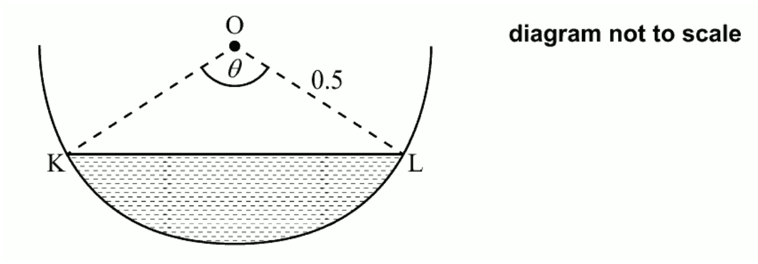
o bien:

$$y = -3 + 2\,\text{cotg}\,x$$

♠♠♠♠

113. (7 puntos)

A water trough which is 10 metres long has a uniform cross-section in the shape of a semicircle with



(a) Find an expression for the volume of water $V(\text{ m}^3)$ in the trough in terms of θ.

The volume of water is increasing at a constant rate of 0,0008 $\text{m}^3\ \text{s}^{-1}$.

(b) Calculate $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ when $\theta = \frac{\pi}{3}$

Solución:

(a) El volumen de agua es igual al área del segmento por 10:

$$V = \frac{1}{2}\,0{,}5^2\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)\cdot 10 = 1{,}25\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

(b) Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 1{,}25\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

Sustituyendo $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ y $\cos\theta$:

$$0{,}0008 = 1{,}25\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1{,}25}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{0{,}0016}{1,25} = 0{,}00128\ \text{s}^{-1}$$

♠♠♠♠

114. (9 puntos)

Xavier, the parachutist, jumps out of a plane at a height of h metres above the ground. After free falling for 10 seconds his parachute opens.

His velocity, v m s^{-1}, t seconds after jumping from the plane, can be modelled by the function

$$v(t) = \begin{cases} 9{,}8t & 0 \le t \le 10 \\ \frac{98}{\sqrt{1+(t-10)^2}} & t > 10 \end{cases}$$

(a) Find his velocity when $t = 15$.

(b) Calculate the vertical distance Xavier travelled in the first 10 seconds.

His velocity when he reaches the ground is 2,8 m s^{-1}.

(c) Determine the value of h.

Solución:

(a) Aplicando la fórmula de la velocidad:

$$v(15) = \frac{98}{\sqrt{1+(15-1)^2}} = \frac{98}{\sqrt{26}} \simeq 19{,}2\ \text{m s}^{-1}$$

(b) La distancia recorrida se obtiene integrando la velocidad:

$$s = \int_0^{10} 9{,}8t\ \mathrm{d}t = 490\ \text{m}$$

(c) El tiempo que tarda en llegar al suelo es la solución de la ecuación:

$$2{,}8 = \frac{98}{\sqrt{1+(t-10)^2}}$$

Resolvemos la ecuación y resulta $t = 44{,}985\ldots$. La altura será la distancia recorrida para ese valor del tiempo:

$$h = 490 + \int_{10}^{44{,}985} \frac{98}{\sqrt{1+(t-10)^2}}\ \mathrm{d}t \simeq 906\ \text{m}$$

♠♠♠♠

115. (6 puntos)

La función f se define mediante $f(x) = 2x^3 + 5$, $-2 \leq x \leq 2$.

(a) Escriba el recorrido de f.

(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(c) Escriba el dominio y el recorrido de f^{-1}.

Solución:

(a) Puesto que $f'(x) = 6x^2 > 0$ la función es creciente. Puesto que además es continua, toma todos los valores comprendidos entre su valor más pequeño $f(-2) = -11$ y su valor más grande $f(2) = 21$. El recorrido es el intervalo cerrado $[-11, 21]$.

(b) Intercambiamos las variables:

$$x = 2y^3 + 5$$

y despejamos:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$$

(c) El dominio es $[-11, 21]$ y el recorrido $[-2, 2]$.

♠♠♠♠

116. (7 puntos)

Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. El desplazamiento s metros, en el instante t segundos viene dado por $s = t + \cos 2t$, $t \geq 0$. Sean t_1 y t_2 las dos primeras veces que la partícula está en reposo, donde $t_1 < t_2$.

(a) Halle t_1 y t_2.

(b) Halle el desplazamiento de la partícula cuando $t = t_1$.

Solución:

(a) La velocidad de la partícula se obtiene derivando:

$$v = 1 - 2 \operatorname{sen} 2t$$

Si la partícula está en reposo, su velocidad es igual a cero:

$$1 - 2 \operatorname{sen} 2t = 0$$

$$\operatorname{sen} 2t = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 2t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$t = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Para $k = 0$ obtenemos $t_1 = \frac{\pi}{12}$ y $t_2 = \frac{5\pi}{12}$.

(b) El desplazamiento para $t = t_1$ es:

$$s\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

♠♠♠♠

117. (7 puntos)

(a) Utilizando la sustitución $x = \tan\theta$, muestre que:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(*b*) A partir de lo anterior, halle el valor de:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(*a*) Si $x = \tan\theta$, cuando $x = 0$, $\theta = 0$ y cuando $x = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Además:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Entonces:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(*b*) Con la fórmula trigonométrica:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\,(1+\cos 2\theta)$$

resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{8}$$

♠♠♠♠

118. (17 puntos)

Considere la función f definida por $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$ donde a es una constante positiva.

(*a*) Dibuje aproximadamente las siguientes curvas en sistemas de ejes separados, mostrando todos los cortes con los ejes x e y, los máximos, los mínimos y las asíntotas que haya:

(I) $y = f(x)$ (II) $y = \frac{1}{f(x)}$ (III) $y = \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

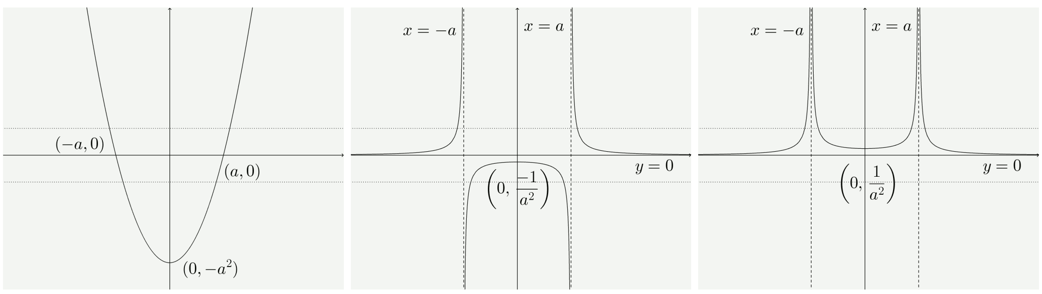
(*b*) Halle $\displaystyle\int f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$

La función g se define mediante $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ para $|x| > a$.

(*c*) Hallando $g'(x)$, explique por qué g es una función creciente.

Solución:

(*a*) Las gráficas son las siguientes:



(*b*) Calcularemos la integral por partes:

$$\int (x^2-a^2)\cos x\,\mathrm{d}x = \int x^2\cos x\,\mathrm{d}x - a^2\int \cos x\,\mathrm{d}x$$

Haciendo:

$$u = x^2 \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \quad v = \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned}\int (x^2-a^2)\cos x\,\mathrm{d}x &= x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x - a^2\operatorname{sen} x\\ &= (x^2-a^2)\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - a^2) \cos x \, \mathrm{d}x &= (x^2 - a^2) \operatorname{sen} x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x \right) \\ &= (x^2 - a^2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C \\ &= (x^2 - a^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + C \end{aligned}$$

(c) Calculamos la derivada de $g(x) = x\sqrt{x^2 - a^2}$:

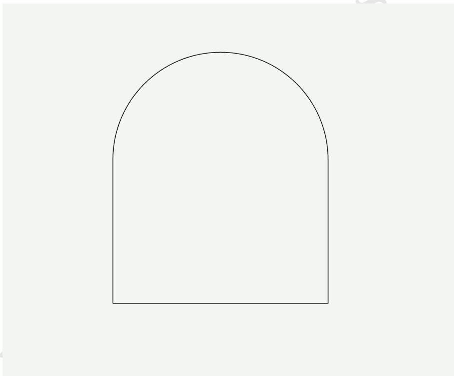
$$g'(x) = \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Para todo x en el dominio de g la derivada es positiva y, en consecuencia, la función es creciente.

♠♠♠♠

119. (11 puntos)

Una ventana se ha construido con forma de rectángulo con un semicírculo de radio r metros situado en la parte superior, como se muestra en la figura. El perímetro de la ventana es constante e igual a P metros.



(a) (I) Halle el área de la ventana en función de P y r.

(II) Halle la anchura de la ventana en función de P cuando el área alcanza un valor máximo y justifique por qué se trata de un máximo.

(b) Muestre que en este caso la altura del rectángulo es igual al radio del semicírculo.

Solución:

(a) (I) Llamemos h a la altura del rectángulo. La base es igual a $2r$. Entonces:

$$P = \pi r + 2h + 2r \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{P - 2r - \pi r}{2}$$

El área de la ventana es igual a:

$$S = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{2r(P - 2r - \pi r)}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2Pr - 4r^2 - \pi r^2}{2}$$

(II) Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{2P - 8r - 2\pi r}{2} = P - r(4 + \pi)$$

En el máximo la derivada es cero:

$$P - r(4 + \pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{P}{4 + \pi}$$

Se trata de un máximo porque a la izquierda de este valor la derivada es positiva y a la derecha es negativa. La función en ese punto pasa de creciente a decreciente.
La anchura de la ventana es:

$$2r = \frac{2P}{4 + \pi}$$

(b) En este caso, la altura del rectángulo es:

$$h = \frac{P - 2r - \pi r}{2} = \frac{1}{2}\left(P - \frac{2P}{4 + \pi} - \frac{\pi P}{4 + \pi}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{P(4 + \pi) - 2P - \pi P}{4 + \pi} = \frac{P}{4 + \pi} = r$$

♠♠♠♠

120. (9 puntos)

Considere la curva definida por la ecuación $4x^2 + y^2 = 7$.

(a) Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

(b) Halle el volumen del sólido que se forma cuando la región delimitada por la curva, el eje x para $x \geq 0$ y el eje y para $y \geq 0$ se rota 2π alrededor del eje x.

Solución:

(a) Calculemos la derivada en el punto:

$$8x + 2yy' = 0 \; ; \qquad y' = \frac{-8x}{2y} = -\frac{4x}{y}$$

La pendiente de la tengente en el punto es:

$$m = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

y la pendiente de la normal:

$$\frac{-1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

La ecuación de la normal es:

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(x-1)$$

(b) Para $y = 0$, $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$. El volumen es:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{7}}{2}} y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{7}}{2}} \left(7 - 4x^2\right) \, \mathrm{d}x = \pi \left[7x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \pi \left(\frac{7\sqrt{7}}{2} - \frac{7\sqrt{7}}{6}\right) = \frac{7\sqrt{7}\pi}{3}$$

♠♠♠♠

121. (15 puntos)

(a) Una variable aleatoria continua X tiene la función de densidad de probabilidad f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} + b & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

Se sabe que $\mathrm{p}(X \geq 2) = 0{,}75$.

(a) Muestre que $a = 32$ y $b = \frac{1}{12}$.

(b) Halle $\mathrm{E}(X)$.

(c) Halle $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Halle la mediana de X.

Se realizan 8 observaciones independientes de X y la variable aleatoria Y es el número de observaciones tales que $X \geq 2$.

(e) Halle $\mathrm{E}(Y)$.

(f) Halle $\mathrm{p}(Y \geq 3$.

Solución:

(a) Basta comprobar que:

$$\int_0^4 \left(\frac{x^2}{32} + \frac{1}{12}\right) \, \mathrm{d}x = 1 \qquad \text{y} \qquad \int_2^4 \left(\frac{x^2}{32} + \frac{1}{12}\right) \, \mathrm{d}x = 0{,}75$$

Se pueden hacer las integrales calculando la primitiva o verificar estos resultados con la calculadora.

(b) También mediante la calculadora obtenemos:

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^4 x f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\frac{x^3}{32} + \frac{x}{12}\right) \, \mathrm{d}x = \frac{8}{3} \simeq 2{,}67$$

(c) Para calcular la varianza primero calculamos la integral

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^4 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{32} + \frac{x^2}{12}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{368}{45} \simeq 8{,}18$$

La varianza es:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \simeq 1{,}07$$

(d) La mediana m cumple que:

$$\int_0^m \left(\frac{x^2}{32} + \frac{1}{12}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

es decir:

$$\frac{m^3}{96} + \frac{m}{12} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m^3 + 8m - 48 = 0$$

Con la calculadora obtenemos $m \simeq 2{,}91$

(e) Ahora $Y \sim \mathrm{B}(8; 0{,}75)$:

$$\mathrm{E}(Y) = 8 \cdot 0{,}75 = 6$$

(f) Mediante la calculadora:

$$\mathrm{p}(Y \geq 3) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 2) \simeq 0{,}996$$

♠♠♠♠