EXÁMENES
Bachillerato Internacional

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Índice

1. 2011. Primer examen. TZ1

1.1. Section A

Ejercicio 1. (7 puntos)

Events A and B are such that $\mathrm{p}(A) = 0{,}3$ and $\mathrm{p}(B) = 0{,}4$.

(a) Find the value of $\mathrm{p}(A \cup B)$ when

(i) A and B are mutually exclusive;

(ii) A and B are independent.

(b) Given that $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}6$, find $\mathrm{p}(A \mid B)$.

Solución:

(a) (i) En este caso $\mathrm{p}(A \cap B) = 0$ y

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) = 0{,}7$$

(ii) Si son independientes $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B) = 0{,}12$. Entonces:

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}58$$

(b) En este caso:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}1$$

y entonces:

$$\mathrm{p}(A \mid B) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

Given that

$$\frac{z}{z+2} = 2 - i, \qquad z \in \mathbb{C}$$

find z in the form $a + ib$.

Solución:

Despejando z:

$$\begin{aligned} z &= (z+2)(2-i) \\ z &= 2z - iz + 4 - 2i \\ -z + iz &= 4 - 2i \\ z &= \frac{4-2i}{-1+i} \end{aligned}$$

Para calcular el cociente multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(4-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4-2-4i+2i}{2} = \frac{-6-2i}{2} = -3 - i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (7 puntos)

A geometric sequence u_1, u_2, u_3, ... has $u_1 = 27$ and a sum to infinity of $\frac{81}{2}$.

(a) Find the common ratio of the geometric sequence.

(b) An arithmetic sequence v_1, v_2, v_3, ... is such that $v_2 = u_2$ and $v_4 = u_4$. Find the greatest value of N such that

$$\sum_{n=1}^{N} v_n > 0$$

Solución:

(a) La suma de los infinitos términos es:

$$S = \frac{u_1}{1-r} = \frac{27}{1-r} = \frac{81}{2} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{3}$$

(b) Tenemos que $v_2 = 9$ y $v_4 = 1$. De aquí deducimos que $d = -4$ y $v_1 = 13$. Sumamos los primeros términos:

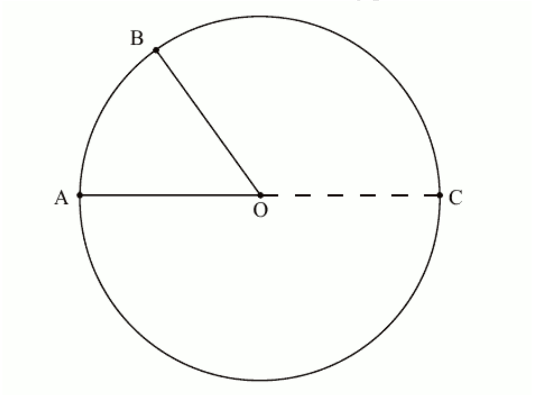
$$13 + 9 + 5 + 1 - 3 - 7 - 11 - 15 - \ldots$$

Vemos que la suma es positiva para los siete primeros términos. A partir del ontavo ya es negativa. La solución es $N = 7$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

The diagram below shows a circle with centre O .The points A, B, C lie on the circumference of the circle and AC is a diameter.



Let $\vec{OA} = \vec{a}$ and $\vec{OB} = \vec{b}$.

(a) Write down expressions for $\vec{AB}$ and $\vec{CB}$ in terms of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

(b) Hence prove that angle $\widehat{ABC}$ is a right angle.

Solución:

(a) $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \Longrightarrow \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

(b) Como en el apartado anterior puede verse que $\vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Entonces si r es el radio de la circunferencia:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = r^2 - r^2 = 0$$

Puesto que el producto escalar es cero, los dos vectores son perpendiculares y el ángulo $\widehat{ABC}$ es recto.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

(a) Demostrar que

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$$

(b) Hence find the value of $\cot\frac{\pi}{8}$ in the form $a + b\sqrt{2}$, where $a, b \in \mathbb{Z}$.

Solución:

(a)

$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

(b) Por la propiedad anterior:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Entonces:

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

♠♠♠♠

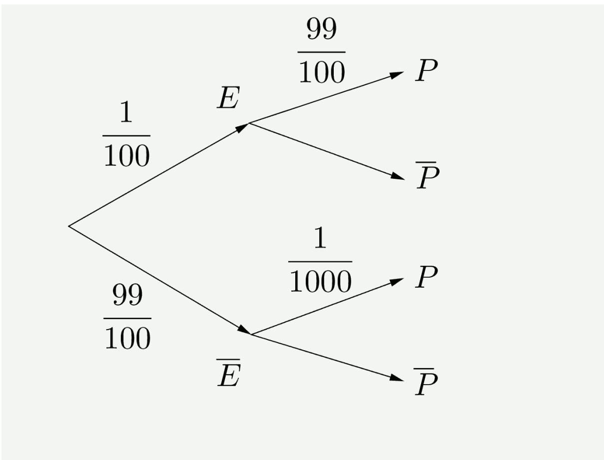
Ejercicio 6. (5 puntos)

In a population of rabbits, 1 % are known to have a particular disease. A test is developed for the disease that gives a positive result for a rabbit that does have the disease in 99 % of cases. It is also known that the test gives a positive result for a rabbit that does not have the disease in 0,1 % of cases. A rabbit is chosen at random from the population.

(a) Find the probability that the rabbit tests positive for the disease.

(b) Given that the rabbit tests positive for the disease, show that the probability that the rabbit does not have the disease is less than 10 %.

Solución:



(a)

$$\mathrm{p}(P) = \frac{1}{100}\cdot\frac{99}{100} + \frac{99}{100}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1089}{100000}$$

(b)

$$\mathrm{p}(E \mid P) = \frac{\mathrm{p}(E\cap P)}{\mathrm{p}(P)} = \frac{99/100000}{1089/100000} = \frac{99}{1089} < \frac{10}{100}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

Find the area enclosed by the curve $y = \arctan x$, the x-axis and the line $x = \sqrt{3}$.

Solución:

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{artg} x \, \mathrm{d}x$$

La integral se hace por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{artg} x & \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{artg} x \, \mathrm{d}x &= \Big[x + \operatorname{artg} x\Big]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

Consider the functions given below:

$$f(x) = 2x+3, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

(a) (I) Find $(g \circ f)(x)$ and write down the domain of the function.
(II) Find $(f \circ g)(x)$ and write down the domain of the function.

(b) Find the coordinates of the point where the graph of $y = f(x)$ and the graph of $y = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ intersect.

Solución:

(a) (I) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\,(2x+3) = \dfrac{1}{2x+3}$.

El dominio de esta función son todos los números reales distintos de $-\frac{3}{2}$.

(II) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\left(\dfrac{1}{x}\right) + 3 = \dfrac{2}{x} + 3$.

El dominio de esta función son todos los números reales distintos de 0.

(b) Teniendo en cuenta que $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ tenemos que:

$$(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = g^{-1}[(f \circ g)(x)] = g^{-1}\left(\frac{2}{x} + 3\right) = g^{-1}\left(\frac{2+3x}{x}\right) = \frac{x}{3x+2}$$

La intersección de $y = 2x+3$ con $y = \dfrac{x}{3x+2}$ es el punto $(-1, 1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

Show that the points $(0,0)$ and $(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi})$ on the curve $e^{x+y} = \cos(xy)$ have a common tangent.

Solución:

Calculemos la derivada:

$$e^{x+y}(1+y') = -\operatorname{sen}(xy)(y+xy')$$

En el punto $(0,0)$ calculamos la derivada sustituyendo x e y por 0:

$$1 + y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -1$$

y, en consecuencia la tangente en ese punto es $y = -x$.

Calculamos ahora la derivada en $\left(\sqrt{2\pi}, -\sqrt{2\pi}\right)$:

$$1 + y' = -\operatorname{sen}(-2\pi)(\ldots) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -1$$

La ecuación de la tangente es:

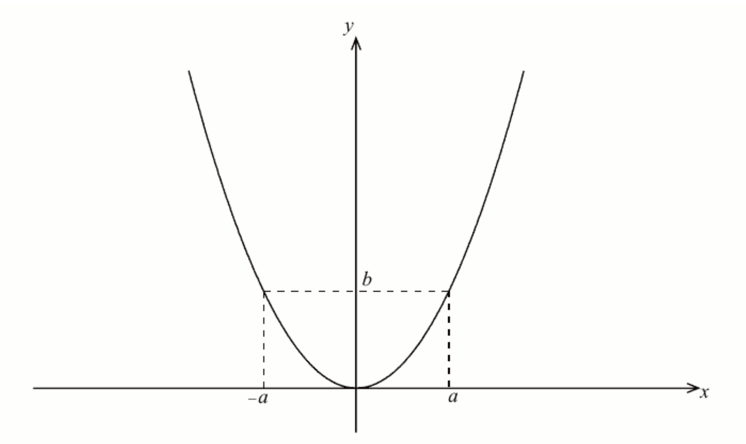
$$y + \sqrt{2\pi} = (-1)(x - \sqrt{2\pi}) \quad \Longrightarrow \quad y = -x$$

y vemos que en ambos puntos la tangente es la misma.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

The diagram below shows the graph of the function $y = f(x)$, defined for all $x \in \mathbb{R}$, where $b > a > 0$.



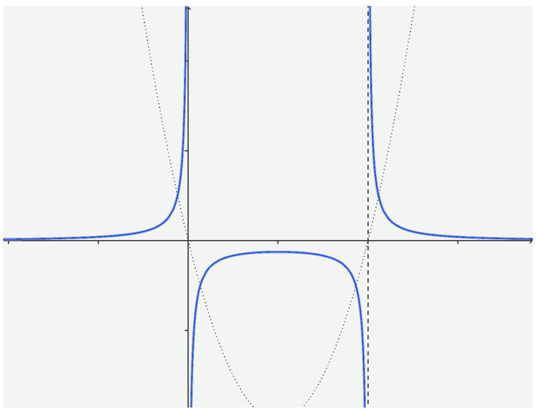
Consider the function:

$$g(x) = \frac{1}{f(x-a) - b}$$

(a) Find the largest possible domain of the function g.

(b) Sketch the graph of $y = g(x)$. On the graph, indicate any asymptotes and local maxima or minima, and write down their equations and coordinates.

Solución:



(a) El denominador de la función $g(x)$ es la función $f(x)$ desplazada a unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo. Los ceros de esta función son $x = 0$ y $x = 2a$. El dominio de la función g es

$$\text{Dominio de } g = \mathbb{R} - \{0, 2a\}$$

(b) Las asíntotas de $y = g(x)$ son $x = 0$, $x = 2a$ e $y = 0$. El máximo está en $\left(a, -\frac{1}{b}\right)$.

♠♠♠♠

1.2. Section B

Ejercicio 11. (19 puntos)

The points $A(1, 2, 1)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(5, -1, 2)$ and $D(5, 3, 7)$ are the vertices of a tetrahedron.

(a) Find the vectors $\vec{AB}$ and $\vec{AC}$.

(b) Find the Cartesian equation of the plane π that contains the face ABC.

(c) Find the vector equation of the line that passes through D and is perpendicular to π. Hence, or otherwise, calculate the shortest distance to D from π.

(d) (I) Calculate the area of the triangle ABC.
(II) Calculate the volume of the tetrahedron $ABCD$.

(e) Determine which of the vertices B or D is closer to its opposite face.

Solución:

(a)
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} x-1 & -4 & 4 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 8(x-1) + 16(y-2) + 16(z-1) = 0$$

Simplificando, la ecuación del plano es $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

(c)
$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La distancia del punto al plano es:

$$d = \frac{5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 - 7}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{18}{3} = 6$$

(d) (I) Calculamos el producto vectorial

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -4 & 4 \\ \vec{\jmath} & -1 & -3 \\ \vec{k} & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{1+4+4} = 12$$

(II) El volume del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 144$$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24$$

(e) Ya hemos calculado la distancia de D al plano ABC. Calculemos ahora la distancia de B al plano ACD. La ecuación de este plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 4 \\ y-2 & -3 & 1 \\ z-1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -19(x-1) - 20(y-2) + 16(z-1) = 0$$

o, en forma general $-19x - 20y + 16z + 43 = 0$.
La distancia del punto B a este plano es:

$$\frac{-19(-3) - 20 \cdot 1 + 16 \cdot 4 + 43}{\sqrt{19^2 + 20^2 + 16^2}} < 6$$

El vértice B está más próximo a la cara opuesta.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (19 puntos)

Consider the function

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad 0 < x < e^2.$$

(a) (I) Solve the equation $f'(x) = 0$.
(II) Hence show the graph of f has a local maximum.
(III) Write down the range of the function f.

(b) Show that there is a point of inflexion on the graph and determine its coordinates.

(c) Sketch the graph of $y = f(x)$, indicating clearly the asymptote, x-intercept and the local maximum.

(d) Now consider the functions

$$g(x) = \frac{\ln |x|}{x}, \quad h(x) = \frac{\ln |x|}{|x|}$$

where $0 < |x| < e^2$.
(I) Sketch the graph of $y = g(x)$.
(II) Write down the range of g.
(III) Find the values of x such that $h(x) > g(x)$.

Solución:

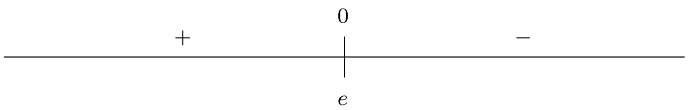
(a) (I) Derivamos:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Igualamos a cero la derivada:

$$1 - \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = e$$

(II) El signo de la derivada es



y, por consiguiente, hay un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

(III) Como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

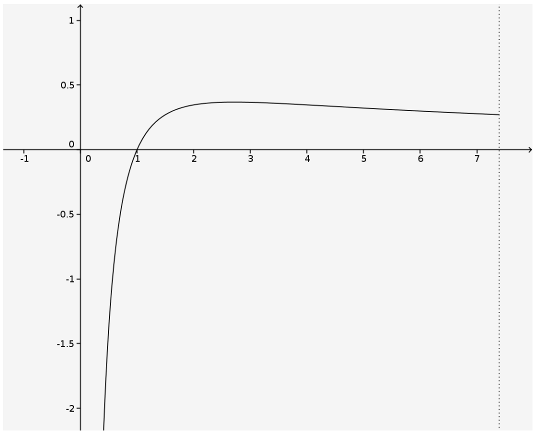
el rango de la función es $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

(b) Calculamos la derivada segunda:

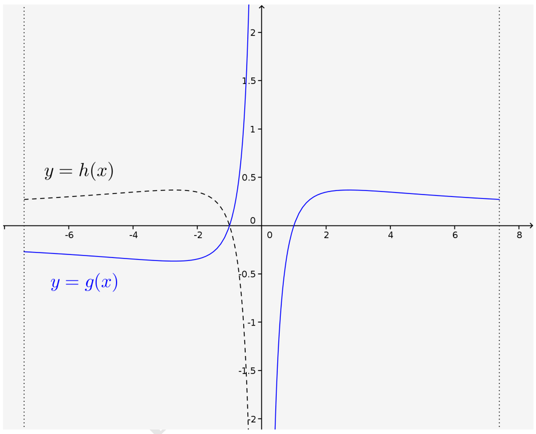
$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

La derivada segunda se anula en $x = e^{\frac{3}{2}}$. Hay un punto de inflexión en $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

(c) La asíntota es $x = 0$. La recta $y = 0$ no es asíntota porque la función solo está definida para $x \in (0, e^2)$. El punto de corte con el eje x es el punto $(1, 0)$.



(d) (I)



(II) El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.

(III) En $(-e^2, -1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (22 puntos)

(a) Write down the expansion of $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ in the form $a + ib$, where a and b are in terms of $\sin\theta$ and $\cos\theta$.

(b) Hence show that $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

(c) Similarly show that $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

(d) Hence solve the equation $\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos\theta = 0$, where $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) By considering the solutions of the equation $\cos 5\theta = 0$, show that

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

and state the value of $\cos\frac{7\pi}{10}$.

Solución:

(a) Desarrollamos por la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + 3i^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + i^3\operatorname{sen}^3\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right)\end{aligned}$$

(*b*) Puesto que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

Entonces, Igualando las partes reales

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(*c*) De la misma manera:

$$\cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta \operatorname{sen}\theta + 10i^2\cos^3 \operatorname{sen}^2\theta + 10i^3\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\theta + 5i^4\cos\theta \operatorname{sen}^4\theta + i^5 \operatorname{sen}^5\theta$$

Igualando partes reales:

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3 \operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta \operatorname{sen}^4\theta\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta)\\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\end{aligned}$$

(*d*) Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned}&\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos\theta = 0\\ &16\cos^5\theta - 16\cos^3\theta + 3\cos\theta = 0\\ &\cos\theta(16\cos^4\theta - 16\cos^2\theta + 3) = 0\end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ u $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

(*e*) Por una parte tenemos que

$$\cos 5\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad 5\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad\Longrightarrow\quad \theta = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

Además

$$\begin{aligned}\cos 5\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad & 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\\ & \cos\theta(16\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 5)\\ & \cos^2\theta = \frac{20 \pm \sqrt{400-320}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8} \qquad \text{o bien} \qquad \cos\theta = 0\end{aligned}$$

Como la solución $\frac{\theta}{10}$ es la más próxima a cero debe ser la que corresponde al valor más grande del coseno:

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Puesto que el ángulo $\frac{7\pi}{10}$ es solución de la ecuación, su coseno será uno de los valores obtenidos. Como está en el segundo cuadrante debe ser negativo y diferente en valor absoluto del de $\frac{\pi}{10}$ (pues no son suplementarios). Por consiguiente:

$$\cos\frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

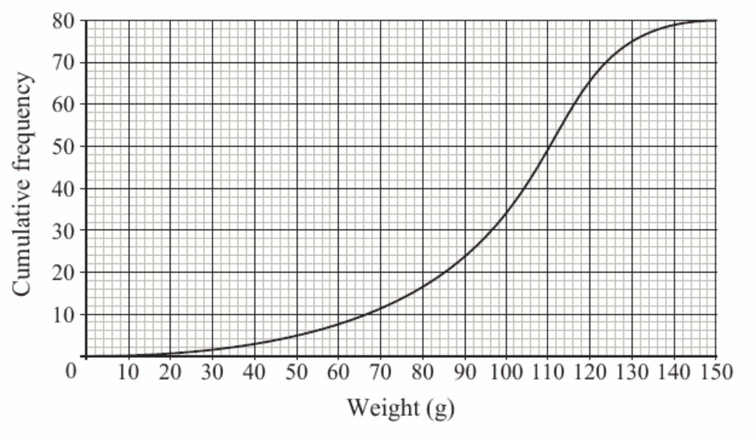
♠♠♠♠

2. 2011. Segundo examen. TZ1

2.1. Section A

Ejercicio 1. (4 puntos)

The cumulative frequency graph below represents the weight in grams of 80 apples picked from a particular tree.



(*a*) Estimate the
 (I) median weight of the apples;
 (II) 30th percentile of the weight of the apples.

(*b*) Estimate the number of apples which weigh more than 110 grams.

Solución:

(*a*) (I) 110 g
 (II) 96 g

(*b*) 40 manzanas.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

Consider the function $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10, \quad x \in \mathbb{R}$.

(*a*) Find the equation of the straight line passing through the maximum and minimum points of the graph $y = f(x)$.

(*b*) Show that the point of inflexion of the graph $y = f(x)$ lies on this straight line.

Solución:

(*a*) Calculamos los ceros de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1, \quad x = 3$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ + & | & - & | & + \\ & -1 & & 3 & \end{array}$$

Hay un máximo en $(-1, 15)$ y un mínimo en $(3, -17)$. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$y - 15 = -\frac{32}{4}(x+1) \ ; \qquad y = -8x + 7$$

(b) En el punto de inflexión la segunda derivada debe anularse:

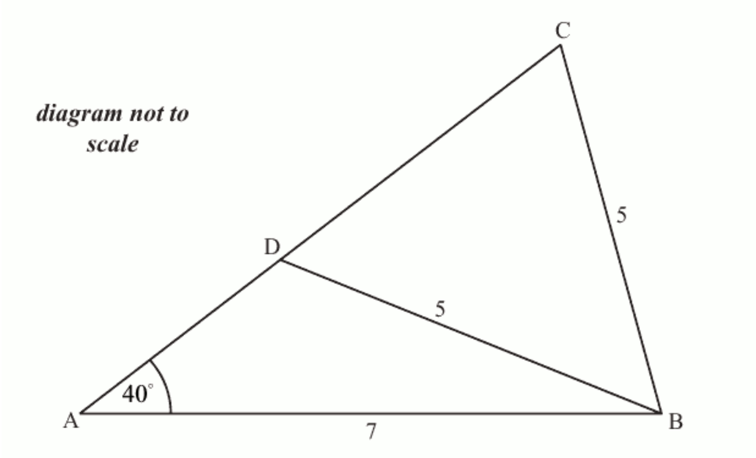
$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

El punto de inflexión es $(1, -1)$ que está contenido en la recta calculada anteriormente.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Given $\triangle\, ABC$, with lengths shown in the diagram below, find the length of the line segment CD.



Solución:

El ángulo C es agudo porque es uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles. Lo podemos calcular por el teorema del seno:

$$\frac{5}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{7}{\operatorname{sen} C} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} C = \frac{7 \operatorname{sen} 40^\circ}{5}$$

Por otra parte en el triángulo isósceles:

$$\frac{1}{2} CD = 5 \cos C \;; \qquad CD = 10 \cos C \simeq 4{,}36$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

The function $f(x) = 4x^3 + 2ax - 7a,\ a \in \mathbb{R}$, leaves a remainder of -10 when divided by $(x - a)$.

(a) Find the value of a.

(b) Show that for this value of a there is a unique real solution to the equation $f(x) = 0$.

Solución:

(a) Según el teorema del resto el valor del polinomio para $x = a$ debe ser igual a -10:

$$f(a) = 4a^3 + 2a^2 - 7a = -10 \;; \qquad 4a^3 + 2a^2 - 7a + 10 = 0$$

La solución es $a = -2$.

(b) Para $a = -2$ la ecuación resulta

$$4x^3 - 4x + 14 = 0$$

Puede verse con la calculadora que la función $F(x) = 4x^3 - 4x + 14$ se anula para un solo valor de x.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

(a) Write down the quadratic expression $2x^2 + x - 3$ as the product of two linear factors.

(b) Hence, or otherwise, find the coefficient of x in the expansion of $(2x^2 + x - 3)^8$.

Solución:

(a) $2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$

(b) $(2x^2 + x - 3)^8 = (x-1)^8(2x+3)^8$.

El término en x es la suma del producto del término independiente del primer desarrollo por el término en x del segundo y del término independiente del segundo por el término en x del primero:

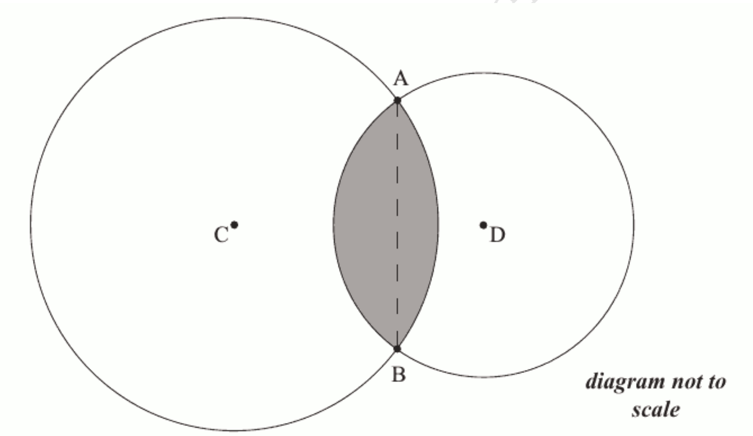
$$(-1)^8\binom{8}{1}3^7 2x + 3^8\binom{8}{1}(-1)^7 x = 10935x$$

El coeficiente es 10935.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

The radius of the circle with centre C is 7 cm and the radius of the circle with centre D is 5 cm. If the length of the chord AB is 9 cm, find the area of the shaded region enclosed by the two arcs AB.



Solución:

El área es la suma de dos segmentos circulares. En el círculo de la izquierda el ángulo correspondiente al segmento es:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{4{,}5}{7}\ ; \qquad \varphi = 2 \operatorname{arsen}\frac{4{,}5}{7}$$

y el área del segmento es

$$S_1 = \frac{1}{2}r^2\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) = \frac{1}{2}\,49\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$$

De la misma manera, en el círculo de la derecha el ángulo es

$$\theta = 2 \operatorname{arsen}\frac{4{,}5}{5}$$

y el área

$$S_2 = \frac{1}{2}\,25\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

El área total es aproximadamente 28,3 cm^2.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

A continuous random variable X has a probability density function given by the function $f(x)$, where

$$f(x) = \begin{cases} k(x+2)^2 & -2 \leq x < 0 \\ k & 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Find the value of k.

(b) Hence find

(I) the mean of X;

(II) the median of X.

Solución:

(a) Puesto que la suma de las probabilidades debe ser igual 1:

$$1 = \int_{-2}^{0} k(x+2)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{4}{3}k = \left[\frac{k(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \frac{4k}{3} = \frac{8k}{3} + \frac{4k}{3} = 4k$$

Por tanto, $k = \frac{1}{4}$.

(b) (I) La media es

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}x(x+2)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{4}x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$$

(II) La mediana m cumple que

$$\int_{-2}^{m} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{1}{4} \, \frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{m} = \frac{(m+2)^3}{12} = \frac{1}{2}$$

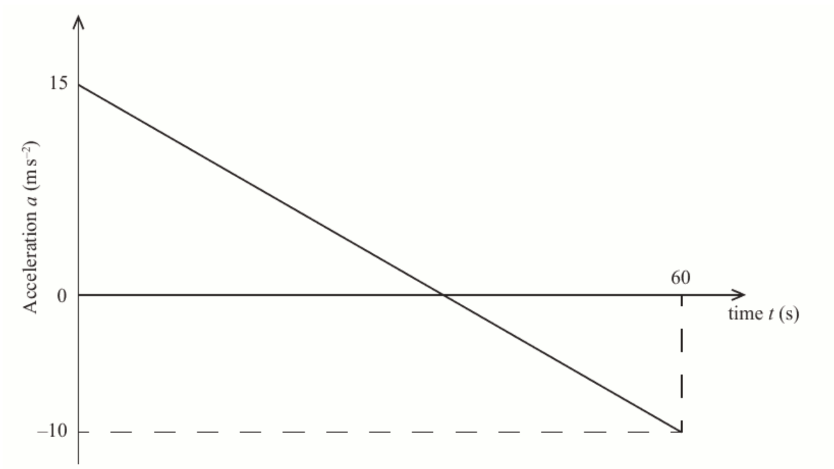
y, de aquí

$$m = \sqrt[3]{6} - 2 \simeq -0{,}183$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

A jet plane travels horizontally along a straight path for one minute, starting at time $t = 0$, where t is measured in seconds. The acceleration, a, measured in $\mathrm{m\,s^{-2}}$, of the jet plane is given by the straight line graph below.



(a) Find an expression for the acceleration of the jet plane during this time, in terms of t.

(b) Given that when $t = 0$ the jet plane is travelling at 125 m s^{-1}, find its maximum velocity in m s^{-1} during the minute that follows.

(c) Given that the jet plane breaks the sound barrier at 295 m s^{-1}, find out for how long the jet plane is travelling greater than this speed.

Solución:

(a) La recta pasa por los puntos $(60, -10)$ y $(0, 15)$. La ecuación de la recta es

$$a - 15 = \frac{25}{-60}\,t\;; \qquad a = 15 - \frac{5}{12}\,t$$

(b) La velocidad la obtenemos integrando la aceeración:

$$v = \int \left(15 - \frac{5}{12}\,t\right)\,\mathrm{d}t = 15t - \frac{5t^2}{24} + C$$

y teniendo en cuenta el valor inicial de la velocidad:

$$v = 125 + 15t - \frac{5t^2}{24}$$

El máximo de la velocidad se da cuando su derivada, la aceleración, es igual a cero:

$$15 - \frac{5}{12}\,t = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = 36 \text{ s}\;; \qquad v = 395 \text{ m s}^{-1}$$

(c) Tenemos que resolver la inecuación

$$v > 295 \quad\Longrightarrow\quad 125 + 15t - \frac{5t^2}{24} > 295$$

Con la calculadora obtenemos que el avión viaja a velocidad superior a la del sonido entre $t \simeq 14{,}1$ s y $t \simeq 57{,}9$ s, es decir, aproximadamente durante 43,8 s.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (6 puntos)

Solve the following system of equations.

$$\begin{cases} \log_{x+1} y = 2 \\ \log_{y+1} x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Solución:

La primera ecuación equivale a

$$y = (x+1)^2$$

y la segunda

$$x = (y+1)^{\frac{1}{4}} \quad\Longrightarrow\quad y + 1 = x^4\;; \qquad y = x^4 - 1$$

De aquí:

$$x^4 - 1 = (x+1)^2\;; \qquad (x^2+1)(x-1)(x+1) = (x+1)^2$$

Puesto que $x + 1$ no puede ser 0, esta ecuación es equivalente a:

$$(x^2+1)(x-1) = x + 1$$

que tiene como solución $x \simeq 1{,}70$, $y \simeq 7{,}27$.

♠♠♠♠

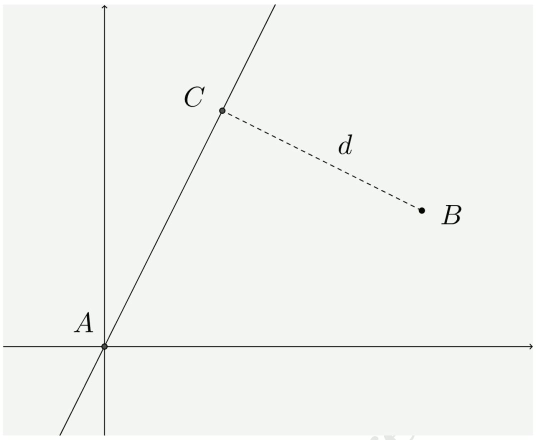
Ejercicio 10. (7 puntos)

Port A is defined to be the origin of a set of coordinate axes and port B is located at the point $(70, 30)$, where distances are measured in kilometres. A ship S_1 sails from port A at 10:00 in a straight line such that its position t hours after 10:00 is given by

$$\vec{r} = t\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$$

A speedboat S_2 is capable of three times the speed of S_1 and is to meet S_1 by travelling the shortest possible distance. What is the latest time that S_2 can leave port B?

Solución:



La trayectoria del barco S_1 es la recta $2x - y = 0$. Para que el barco S_2 recorra la menor distancia posible, debe encontrarlo en el punto C. Este punto es la intersección de $2x - y = 0$ con la perpendicular por el punto $(70, 30)$. Esta perpendicular tiene por ecuación

$$y - 30 = -\frac{1}{2}(x - 70)\ ; \qquad x + 2y = 130$$

Resolviendo el sistema obtenemos $C(26, 52)$. La distancia d es

$$d = \sqrt{(70-26)^2 + 830 - 52)^2} = 22\sqrt{5}$$

La velocidad de S_1 es

$$v_1 = \sqrt{100 + 400} = 10\sqrt{5}$$

La velocidad de S_2 es entonces $30\sqrt{5}$ km h^{-1}. El barco S_2 tardará en llegar a C:

$$t = \frac{22\sqrt{5}}{30\sqrt{5}} = \frac{22}{30}\ \text{h} \simeq 0{,}733\ \text{h}$$

El barco S_1 tarda en llegar 2,6 h, o sea que está en C a las 12,6. El barco S_2 debe partir 0,733 h antes o sea a las 11,87 o sea a las 11 h 52 mín.

♠♠♠♠

2.2. Section B

Ejercicio 11. (14 puntos)

The equations of three planes, are given by

$$ax + 2y + z = 3$$
$$-x + (a+1)y + 3z = 1$$
$$-2x + y + (a+2)z = k$$

where $a \in \mathbb{R}$.

(a) Given that $a = 0$, show that the three planes intersect at a point.

(b) Find the value of a such that the three planes do not meet at a point.

(c) Given a such that the three planes do not meet at a point, find the value of k such that the planes meet in one line and find an equation of this line in the form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Para $a = 0$, el rango de la matriz de coeficientes es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado sea cual sea el valor de k. Los tres planos se cortan en un punto.

(b) Para que el rango sea menor que 3, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & a+1 & 3 \\ -2 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo la ecuación resulta una única solución $a = 1$.

(c) Si no hay una solución única el rango de la matriz ampliada debe ser igual 2:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & k \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6+k \end{pmatrix}$$

Para que el rango de la matriz sea 2 debe ocurrir $k = -1$.
En este caso el sistema es compatible indeterminado, los tres planos se cortan en una recta. Para determinar la ecuación de esta recta consideramos el sistema formado por la ecuación de dos de estos planos. La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando como parámetro $z = \lambda$, obtenemos de la segunda ecuación $y = 1 - \lambda$ y de la primera $x = 1 + \lambda$. La ecuación vectorial de la recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (17 puntos)

A student arrives at a school X minutes after 08:00, where X may be assumed to be normally distributed. On a particular day it is observed that 40 % of the students arrive before 08:30 and 90 % arrive before 08:55.

(a) Find the mean and standard deviation of X.

(b) The school has 1200 students and classes start at 09:00. Estimate the number of students who will be late on that day.

(c) Maelis had not arrived by 08:30. Find the probability that she arrived late.

(d) At 15:00 it is the end of the school day and it is assumed that the departure of the students from school can be modelled by a Poisson distribution. On average 24 students leave the school every minute. Find the probability that at least 700 students leave school before 15:30.

(e) There are 200 days in a school year. Given that Y denotes the number of days in the year that at least 700 students leave before 15:30, find

(I) $\mathrm{E}(Y)$;

(II) $\mathrm{p}(Y > 150)$.

Solución:

(*a*) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Para determinar los parámetros de la distribución tenemos las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{p}(X < 30) = 0{,}40 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40$$

$$\mathrm{p}(X < 55) = 0{,}90 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{55-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos aproximadamente:

$$\frac{30-\mu}{\sigma} = -0{,}253$$

$$\frac{55-\mu}{\sigma} = 1{,}28$$

Resolviendo el sistema se obtiene y $\mu \simeq 34{,}1$ y $\sigma \simeq 16{,}3$.

(*b*) La probabilidad de llegar tarde es:

$$p = \mathrm{p}(X > 60) \simeq 0{,}0561$$

Sea ahora T la variable aleatoria que representa el número de estudiantes que llegan tarde, $T \sim \mathrm{B}(1200, p)$. El valor esperado de esta variable es:

$$\mathrm{E}(T) = 1200 * p \simeq 67{,}3$$

(*c*) La probabilidad que nos piden es

$$\mathrm{p}(X > 60 \mid X > 30) = \frac{\mathrm{p}(X > 60)}{\mathrm{p}(X > 30)} \simeq 0{,}0935$$

(*d*) Sea S la variable aleatoria que representa el número de estudiantes que salen en 30 minutos. Según los datos que nos dan la media es $24 \cdot 30 = 720$. Por tanto $S \sim \mathrm{Po}(720$ y la probabilidad que nos piden es

$$\mathrm{p}(S \geq 700) = 1 - \mathrm{p}(S \leq 699) \simeq 0{,}777$$

(*e*) La variable aleatoria Y sigue una binomial $\mathrm{B}(200, p)$ donde p es la probabilidad calculada en el apartado anterior.

(I) $\mathrm{E}(Y) = 200p \simeq 155$

(II) $\mathrm{p}(Y > 150) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 150) \simeq 0{,}797$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (13 puntos)

(*a*) Given that

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

show that

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

(*b*) Prove by induction that

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

(*c*) Given that A^{-1} is the inverse of matrix A, show that the result in part (b) is true where $n = -1$.

Solución:

(*a*) Multiplicando las matrices y teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas del ángulo doble:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

(*b*) Ya hemos visto que la fórmula se cumple para $n = 1$ y $n = 2$. Veamos ahora que si se cumple para $n = k$:

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \operatorname{sen} k\theta \\ -\operatorname{sen} k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

también se cumple para $n = k + 1$. En efecto:

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k A &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & \operatorname{sen} k\theta \\ -\operatorname{sen} k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \cos k\theta \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen} k\theta \cos\theta - \cos k\theta \operatorname{sen}\theta & \cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k\theta + \theta) & \operatorname{sen}(k\theta + \theta) \\ -\operatorname{sen}(k\theta + \theta) & \cos(k\theta + \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & \operatorname{sen}(k+1)\theta \\ -\operatorname{sen}(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y se cumple la fórmula. Por el principio de inducción, ésta se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

(*c*) Hay que comprobar que la matriz que se obtiene para $n = -1$ es la matriz inversa de A. En efecto

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \operatorname{sen}(-\theta) \\ -\operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Vamos a ver que multiplicando esta matriz por A se obtiene la matriz unidad y, por consiguiente, es la inversa de A:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 14. (16 puntos)

An open glass is created by rotating the curve $y = x^2$, defined in the domain $x \in [0, 10]$, 2π radians about the y-axis. Units on the coordinate axes are defined to be in centimetres.

(*a*) When the glass contains water to a height h cm, find the volume V of water in terms of h.

(*b*) If the water in the glass evaporates at the rate of 3 cm^3 per hour for each cm^2 of exposed surface area of the water, show that

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -3\sqrt{2\pi V}$$

where t is measured in hours.

(*c*) If the glass is filled completely, how long will it take for all the water to evaporate?

Solución:

(*a*) El volumen del sólido de revolución se calcula mediante la integral

$$V = \pi \int_0^h x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^h y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{\pi y^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi h^2}{2}$$

(*b*) El área de la superficie es πx^2. Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -3\pi x^2 = -3\pi h$$

Escribiendo h en función de V mediante la fórmula calculada en el apartado anterior resulta:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -3\pi x^2 = -3\pi \frac{\sqrt{2V}}{\pi} = -3\sqrt{2\pi V}$$

(*c*) Integrando la ecuación anterior tras separar variables

$$\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{V}} = 3\sqrt{2\pi}\,\mathrm{d}t$$

$$2\int \frac{\mathrm{d}V}{2\sqrt{V}} = 3\sqrt{2\pi}\int \mathrm{d}t$$

$$2\sqrt{V} = -3\sqrt{2\pi}t + C$$

$$\sqrt{V} = \sqrt{V_0} - \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}t$$

En el instante inicial, cuando el vaso está lleno $h = 100$ cm de modo que $V_0 = \frac{\pi 100^2}{2}$. Si el volumen final ha de ser cero:

$$t = \frac{2\sqrt{V_0}}{3\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sqrt{\frac{\pi 100^2}{2}}}{3\sqrt{2\pi}} = \frac{100}{3}$$

♠♠♠♠

3. 2011. Primer examen. TZ2

3.1. Section A

Ejercicio 1. (6 puntos)

The quadratic function $f(x) = p + qx - x^2$ has a maximum value of 5 when $x = 3$.

(a) Find the value of p and the value of q.

(b) The graph of $f(x)$ is translated 3 units in the positive direction parallel to the x-axis. Determine the equation of the new graph.

Solución:

(a) Puesto que la derivada se anula en $x = 3$:

$$f'(x) = q - 2x\ ; \qquad f'(3) = q - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 6$$

Y, puesto que la ordenada del máximo vale 5:

$$f(3) = p + 6 \cdot 3 - 9 = 5 \quad \Longrightarrow \quad p = -4$$

(b) La ecuación de la parábola que hemos obtenido es $y = -4 + 6x - x^2$. Para trasladar la gráfica 3 unidades hacia la derecha hemos de sustituir x por $x - 3$. Resulta la ecuación:

$$y = -4 + 6(x-3) - (x-3)^2$$
$$y = -31 + 12x - x^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Find the matrix A^2.

(b) If $\det A^2 = 16$, determine the possible values of a.

Solución:

(a) Multiplicamos A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ -a & 2a+1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2a & -2 \\ -a & 2a+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & -1 \\ -a & 2a+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2$$

Como el determinante es igual a 16 los valores posibles de a son -2 y 2.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

The random variable X has probability density function f where

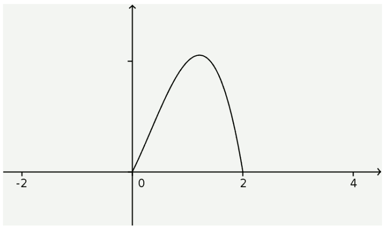
$$f(x) = \begin{cases} kx(x+1)(2-x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Sketch the graph of the function. You are not required to find the coordinates of the maximum.

(b) Find the value of k.

Solución:

(a)



(b) Puesto que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1:

$$1 = \int_0^2 kx(x+1)(2-x)\,\mathrm{d}x = k\int_0^2 \left(-x^3+x^2+2x\right)\,\mathrm{d}x = k\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}k \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{3}{8}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos) The complex numbers $z_1 = 2-2i$ and $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ are represented by the points A and B respectively on an Argand diagram. Given that O is the origin,

(a) find AB, giving your answer in the form $a\sqrt{b-\sqrt{3}}$, where $a, b \in \mathbb{Z}$;

(b) $\widehat{AOB}$ in terms of π.

Solución:

(a) $|AB| = |z_2 - z_1| = |1-\sqrt{3}i-2+2i| = |-1+(2-\sqrt{3})i|$

Calculamos el módulo de este complejo:

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2+(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(b) Por el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{AOB} = \frac{8+4-4(2-\sqrt{3})}{2\cdot\sqrt{8}\cdot 2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Para calcular el ángulo escribimos el coseno de la siguiente forma:

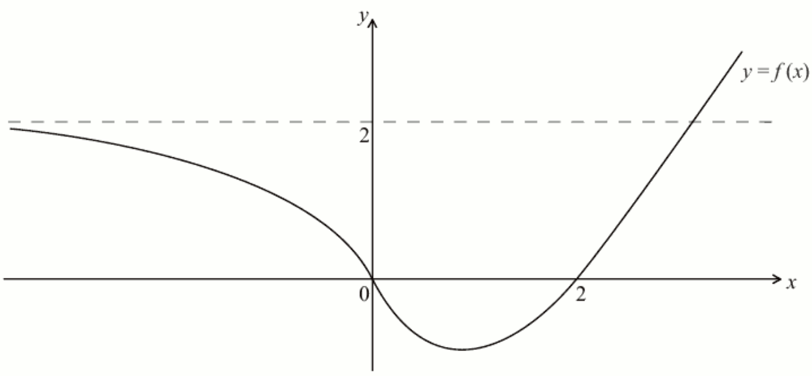
$$\cos\widehat{AOB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$$

y por consiguiente $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{12}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

The diagram shows the graph of $y = f(x)$. The graph has a horizontal asymptote at $y = 2$.



(a) Sketch the graph of $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

(b) Sketch the graph of $y = xf(x)$.

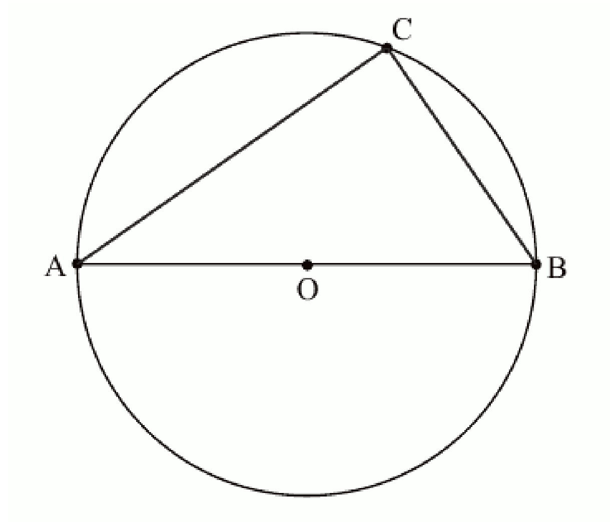
Solución:

(a)

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (5 puntos)

In the diagram below, $[AB]$ is a diameter of the circle with centre O. Point C is on the circumference of the circle. Let $\vec{OB} = \vec{b}$ and $\vec{OC} = \vec{c}$.



(a) Find an expression for $\vec{CB}$ and for $\vec{AC}$ in terms of $\vec{b}$ and $\vec{c}$.

(b) Hence prove that $\widehat{ACB}$ is a right angle.

Solución:

(a) $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{b} - \vec{c}$
$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{b} + \vec{c}$

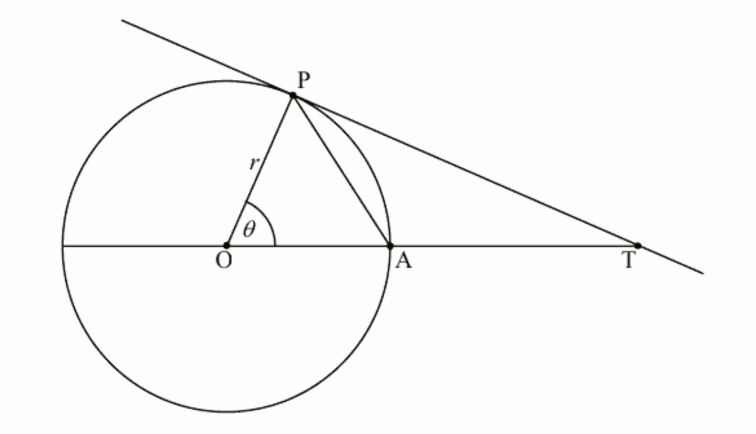
(b) Para ver que el ángulo es recto comprobemos que el producto escalar de los dos vectores es cero:

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c} = r^2 - r^2 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

The diagram shows a tangent, (TP), to the circle with centre O and radius r. The size of $\widehat{POA}$ is θ radians.



(a) Find the area of triangle AOP in terms of r and θ.

(b) Find the area of triangle POT in terms of r and θ.

(c) Using your results from part (a) and part (b), show that $\operatorname{sen}\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta$.

Solución:

(a) $S = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\theta$.

(b) Es un triángulo rectángulo:

$$S = \frac{1}{2}r \cdot PT = \frac{1}{2}r \cdot r \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg}\theta$$

(c) Puesto que el área del sector AOP es $\frac{1}{2}r^2\theta$:

$$\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg}\theta \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

A function is defined by $h(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$. Find an expression for $h^{-1}(x)$.

Solución:

Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 2e^y - \frac{1}{e^y}\ ; \qquad xe^y = 2e^{2y} - 1\ ; \qquad 2e^{2y} - xe^y - 1 = 0$$

Despejamos como en una ecuación de segundo grado:

$$e^y = \frac{x \pm \sqrt{x^2+8}}{4}$$

El signo menos no tiene sentido puesto que la exponencial no puede ser negativa:

$$e^y = \frac{x + \sqrt{x^2+8}}{4} \quad \Longrightarrow \quad y = h^{-1}(x) = \ln\frac{x + \sqrt{x^2+8}}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

A batch of 15 DVD players contains 4 that are defective. The DVD players are selected at random, one by one, and examined. The ones that are checked are not replaced.

(a) What is the probability that there are exactly 3 defective DVD players in the first 8 DVD players examined?

(b) What is the probability that the 9th DVD player examined is the 4th defective one found?

Solución:

(a) La probabilidad de que los tres primeros sean defectuosos y los cinco siguientes no lo sean es:

$$\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{1}{195}$$

Puesto que los tres defectuosos se pueden elegir de $\binom{8}{3}$ maneras:

$$p=\binom{8}{3}\cdot\frac{1}{195}=\frac{56}{195}$$

(b) Es la probabilidad de que haya 3 defectuosos estre los 8 primeros y, además el noveno sea defectuoso:

$$p=\frac{56}{195}\cdot\frac{1}{7}=\frac{8}{195}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

An arithmetic sequence has first term a and common difference $d, d\neq 0$. The 3rd, 4th and 7th terms of the arithmetic sequence are the first three terms of a geometric sequence.

(a) Show that $a=-\frac{3}{2}d$.

(b) Show that the 4th term of the geometric sequence is the 16th term of the arithmetic sequence.

Solución:

(a) Sean $a+2d$, $a+3d$ y $a+6d$ el tercer, cuarto y séptimo término de la progresión aritmética. Puesto que estos números forman una progresión geométrica se cumple que

$$\frac{a+6d}{a+3d}=\frac{a+3d}{a+2d}\ ;\qquad a^2+8ad+12d^2=a^2+6ad+9d^2\ ;\qquad 3d^2+2ad=0$$

y, puesto que d no puede ser cero resulta $a=-\frac{3}{2}d$.

(b) La razón de la progresión geométrica es

$$r=\frac{a+3d}{a+2d}=\frac{-\frac{3}{2}d+3d}{-\frac{3}{2}d+2d}=\frac{-3d+6d}{-3d+4d}=3$$

de modo que el 16° término de la progresión aritmética y el 4° de la progresión geométrica son iguales a

$$a+15d=\frac{3}{2}d+15d=\frac{27}{2}d$$

$$(a+2d)\cdot 3^3=\left(-\frac{3}{2}d+2d\right)\cdot 27=\frac{27}{2}\,d$$

y vemos que son iguales.

♠♠♠♠

3.2. Sección B

Ejercicio 11. (15 puntos)

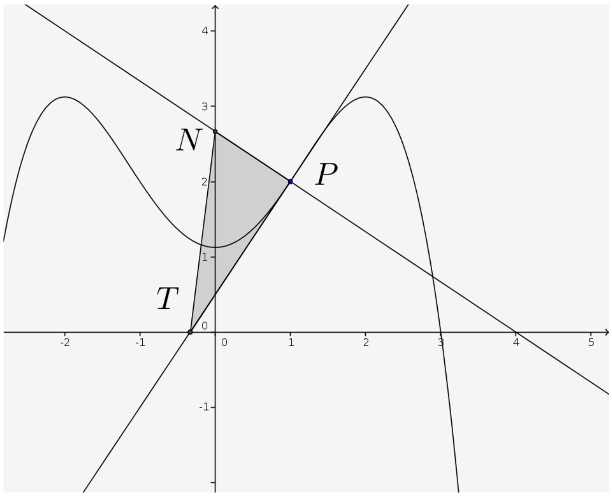
The curve C has equation $y=\frac{1}{8}(9+8x^2-x^4)$.

(a) Find the coordinates of the points on C at which $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$.

(b) The tangent to C at the point $P(1,2)$ cuts the x-axis at the point T. Determine the coordinates of T.

(c) The normal to C at the point P cuts the y-axis at the point N. Find the area of triangle PTN.

Solución:



(a) Derivando la función e igualando a cero:

$$y' = \frac{1}{8}\left(16x - 4x^3\right) = \frac{1}{8}\cdot 4x\left(4 - x^2\right) = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones $x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$.

(b) La pendiente de la tangnte es

$$m = y'(1) = \frac{3}{2}$$

La ecuación de la tangente es

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

y su intersección con el eje OX es el punto $T\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

(c) La ecuación de la normal es

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

y su intersección con el eje OY es el punto $N\left(0, \frac{8}{3}\right)$.

El triángulo PTN es rectángulo en P. Las longitudes de los catetos son:

$$PT = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

$$PN = \sqrt{(1 - 0)^2 + \left(2 - \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

y el área:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{13}{9}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (20 puntos)

(a) Factorize $z^3 + 1$ into a linear and quadratic factor.

(b) Let

$$\gamma = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

(I) Show that γ is one of the cube roots of -1.

(II) Show that $\gamma^2 = \gamma - 1$.

(III) Hence find the value of $(1-\gamma)^6$.

(c) The matrix A is defined by

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Show that $A^2 - A + I = 0$, where 0 is the zero matrix.

(d) Deduce that

(I) $A^3 = -I$;

(II) $A^{-1} = I - A$.

Solución:

(a) Es claro que -1 es una raíz y, por consiguiente, $z+1$ es un factor del polinomio. Efectuando la división obtenemos

$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$$

(b) (I) en forma polar $\gamma = 1_{\frac{\pi}{3}}$. Entonces

$$\gamma^3 = \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 1_\pi = -1$$

(II) Calculamos γ^2:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 1_{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \\ &= \gamma - 1\end{aligned}$$

(III) $(1-\gamma)^6 = (\gamma-1)^6 = \left(\gamma^2\right)^6 = \gamma^{12} = \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 1_{4\pi} = 1$

(c) Teniendo en cuenta que γ y $\frac{1}{\gamma}$ son complejos conjugados y, por tanto:

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = 2\mathrm{Re}\,\gamma = 1$$

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \gamma$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = (1-\gamma)^2 = \gamma^2 + 1 - 2\gamma = \gamma - 1 + 1 - 2\gamma = -\gamma$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma + \frac{1}{\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^2 - A + I = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) (I) Puesto que $A^2 = A - I$:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(A-I) = A^2 - A = A - I - A = -I$$

(II) En efecto

$$(I-A)A = A - A^2 = A - A + I = I \implies A^{-1} = I - A$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (25 puntos)

(a) (I) Sketch the graphs of $y = \sin x$ and $y = \sin 2x$, on the same set of axes, for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(II) Find the x-coordinates of the points of intersection of the graphs in the $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(III) Find the area enclosed by the graphs.

(b) Find the value of

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\ \mathrm{d}x$$

using the substitution $x = 4\sin^2\theta$.

(c) The increasing function f satisfies $f(0) = 0$ and $f(a) = b$, where $a > 0$ and $b > 0$.

(I) By reference to a sketch, show that

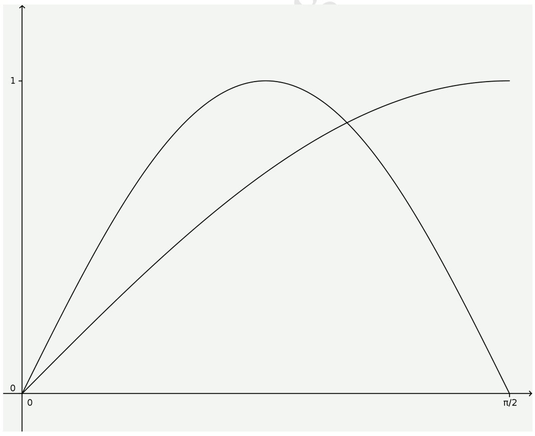
$$\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = ab - \int_0^b f^{-1}(x)\ \mathrm{d}x.$$

(II) Hence find the value of

$$\int_0^2 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)\ \mathrm{d}x$$

Solución:

(a) (I)



(II) Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen} x \\ 2\operatorname{sen} x\cos x &= \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

ecuación que tiene como soluciones $\operatorname{sen} x = 0$ y $\cos x = \frac{1}{2}$, es decir, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

(III) El área es

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos 2x}{2} - (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(b) De acuerdo con el cambio

$$x = 4\operatorname{sen}^2\theta\ ; \qquad \mathrm{d}x = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$$

Además, para $x=0$, $\theta=0$ y para $x=1$, $\theta=\frac{\pi}{6}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{4\operatorname{sen}^2\theta}{4-4\operatorname{sen}^2\theta}}\,8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \Big[4\theta-2\operatorname{sen}2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(c) (I)

(II) La función inversa de $f(x)=\operatorname{arsen}\frac{x}{4}$ es:

$$x=\operatorname{arsen}\frac{y}{4} \quad\Longrightarrow\quad y=f^{-1}(x)=4\operatorname{sen}x$$

Cuando $x=2$, $f(2)=\operatorname{arsen}\frac{2}{4}=\operatorname{arsen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.
Entonces, según la fórmula anterior

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \operatorname{arsen}\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x &= 2\cdot\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{3}-\Big[-4\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}-4 \\
&= \frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-4
\end{aligned}$$

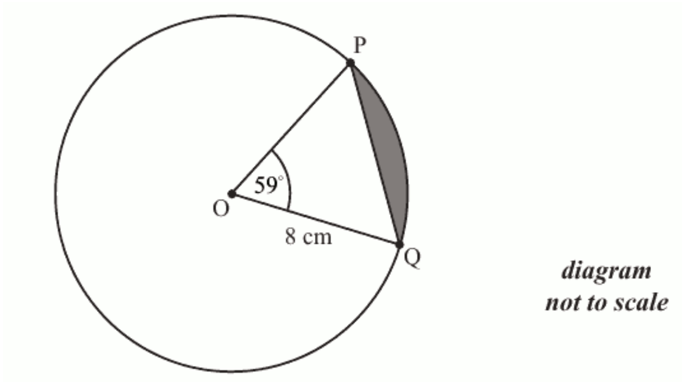
♠♠♠♠

4. 2011. Segundo examen. TZ2

4.1. Section A

Ejercicio 1. (5 puntos)

The points P and Q lie on a circle, with centre O and radius 8 cm, such that $POQ = 59°$.



Find the area of the shaded segment of the circle contained between the arc PQ and the chord $[PQ]$.

Solución:

Sea φ el ángulo POQ en radianes. El área del segmento circular es

$$S = \frac{1}{2}r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) = \frac{1}{2}\,64\left(\frac{59\pi}{180} - \operatorname{sen}59°\right) \simeq 5{,}52\ \text{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

In the arithmetic series with n^{th} term u_n, it is given that $u_4 = 7$ and $u_9 = 22$. Find the minimum value of n so that $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n > 10000$.

Solución: Calculamos la diferencia de la progresión mediante:

$$u_9 = u_4 + d(9-4)\ ; \qquad 22 = 7 + 5d \quad \Longrightarrow \quad d = 3, \quad u_1 = -2$$

Debe cumplirse

$$\frac{[-2-2+3(n-1)]n}{2} > 10000\ ; \qquad 3n^2 - 7n - 20000 > 0 \quad \Longrightarrow \quad n > 82{,}8$$

El número más pequeño para el que se cumple la desigualdad es $n = 83$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

A skydiver jumps from a stationary balloon at a height of 2000 m above the ground. Her velocity, v m s^{-1}, t seconds after jumping, is given by $v = 50(1 - e^{-0,2t})$.

(a) Find her acceleration 10 seconds after jumping.

(b) How far above the ground is she 10 seconds after jumping?

Solución:

(*a*) La aceleración se obtiene derivando la velocidad:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 50 \cdot \left(-e^{-0{,}2t}\right)(-0{,}2) = 10e^{-0{,}2t}$$

Al cabo de 10 s, $a = 10e^{-2} \simeq 1{,}35$ m s^{-2}.

(*b*) La distancia recorrida la calculamos por integración

$$s = \int_0^{10} 50\left(1 - e^{-0{,}2t}\right)\,\mathrm{d}t$$

Se puede hacer la integral o calcularla con la calculadora. En cualquier caso se obtiene aproximadamente 283 m. La altura en ese momento es $2000 - 283 = 1716$ m.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, for $0 < \theta < 2\pi$.

(*a*) Show that $\det A = \cos\theta$

(*b*) Find the values of θ for which $\det A^2 = \sin\theta$.

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos\theta \end{vmatrix} &= \cos 2\theta\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= (\cos^\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta + 2\cos\theta(1-\cos^\theta) \\
&= -\cos\theta + 2\cos\theta \\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

(*b*) Puesto que $|A^2| = |A|^2$ resulta que $|A^2| = cos^2\theta$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta = \operatorname{sen}\theta \\
&1 - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0 \\
&\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \\
&\operatorname{sen}\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

y de aquí obtenemos $\theta \simeq 38{,}2^\circ$ y $\theta \simeq 141{,}8^\circ$,

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (7 puntos)

Sketch the graph of

$$f(x) = x + \frac{8x}{x^2 - 9}.$$

Clearly mark the coordinates of the two maximum points and the two minimum points. Clearly mark and state the equations of the vertical asymptotes and the oblique asymptote.

Solución: Las asíntotas son las rectas $x = -3$, $x = 3$ e $y = x$.

El resto de las cuestiones se pueden resolver mediante la calculadora. Los máximos son los puntos $(-5{,}06; -7{,}50)$ y $(0{,}592; 0{,}0445)$. Los mínimos están en $(5{,}06; 7{,}50)$ y $(-0{,}592; -0{,}0445)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

The fish in a lake have weights that are normally distributed with a mean of 1,3 kg and a standard deviation of 0,2 kg.

(a) Determine the probability that a fish which is caught weighs less than 1,4 kg.

(b) John catches 6 fish. Calculate the probability that at least 4 of the fish weigh more than 1,4 kg.

(c) Determine the probability that a fish which is caught weighs less than 1 kg, given that it weighs less than 1,4 kg.

Solución:

(a) La variable aleatoria X sigue la distribución N(1,3 ; 0,2):

$$\mathrm{p}(X < 1{,}4) = \simeq 0{,}691$$

(b) Sea Y la variable número de peces que pesan más de 1,4 kg. Esta variable sigue la distribución $\mathrm{B}(6, p)$ donde $p = \mathrm{p}(X > 1{,}4)$.

$$\mathrm{p}(Y \geq 4) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 3) \simeq 0{,}0775$$

(c) Nos piden una probabilidad condicionada

$$\mathrm{p}(X < 1 \mid X < 1{,}4) = \frac{\mathrm{p}(X < 1)}{\mathrm{p}(X < 1{,}4)} \simeq 0{,}0966$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

Consider the functions

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad \text{and} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 + 1}.$$

The graphs of $y = f(x)$ and $y = g(x)$ meet at the point $(0, 1)$ and one other point, P.

(a) Find the coordinates of P.

(b) Calculate the size of the acute angle between the tangents to the two graphs at the point P.

Solución:

(a) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = \frac{1}{x^3+1} \end{cases} \quad ; \qquad (x^3 + 1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^3 + 1 = 1 \\ x^3 + 1 = -1 \end{cases}$$

Obtenemos $x = 0$ y $x = -2$. Sustituyendo en $y = x^3 + 1$ obtenemos los puntos $(0, 1)$ y $\left(\sqrt[3]{-2}, -1\right)$.

(b) Para calcular el ángulo de las tangentes necesitamos calcular las pendientes de las curvas en ese punto. Esto se puede hacer derivando y sustituyendo $\sqrt[3]{-2}$ o bien directamente con la calculadora. Las pendientes de las tangentes son:

$$m_1 = 3\sqrt[3]{4}\,; \qquad m_2 = -3\sqrt[3]{4}$$

El ángulo de las tangentes cumple

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2\sqrt[3]{4}}{1 - 9\sqrt[3]{16}}\right|$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

The vertices of an equilateral triangle, with perimeter P and area A , lie on a circle with radius r. Find an expression for $\frac{P}{A}$ in the form $\frac{k}{r}$, where $k \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

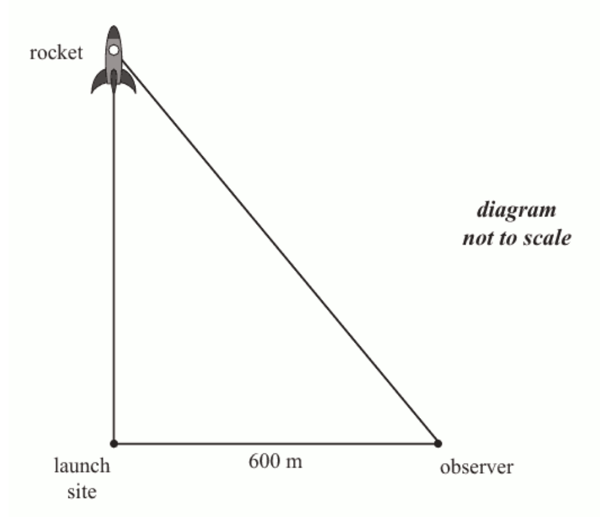
Es fácil ver que el lado l del triángulo equilátero es igual a $r\sqrt{3}$. Entonces:

$$\frac{P}{A}=\frac{3l}{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{12}{l\sqrt{3}}=\frac{12}{3r}=\frac{4}{r}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (6 puntos)

A rocket is rising vertically at a speed of $300\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ when it is 800 m directly above the launch site. Calculate the rate of change of the distance between the rocket and an observer, who is 600 m from the launch site and on the same horizontal level as the launch site.



Solución:

Llamemos l a la distancia:

$$l=\sqrt{600^2+h^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}&=\frac{2h}{2\sqrt{600^2+h^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{800}{\sqrt{600^2+800^2}}\cdot 300\\&=240\ \mathrm{m\ s^{-1}}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

The point P, with coordinates (p,q) , lies on the graph of $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $a>0$. The tangent to the curve at P cuts the axes at $(0,m)$ and $(n,0)$. Show that $m+n=a$.

Solución:

Calculamos la derivada:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0\quad\Longrightarrow\quad y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

La tangente en el punto $P(p,q)$ tiene por ecuación:

$$y-q=-\sqrt{\frac{q}{p}}(x-p)$$

Calculamos las intersecciones con los ejes de esta recta. Para $x = 0$:

$$m - q = \sqrt{pq} \quad \Longrightarrow \quad m = q + \sqrt{pq}$$

y para $y = 0$:

$$-q = -\sqrt{\frac{q}{p}}(n - p)\ ; \qquad n - p = \sqrt{pq} \quad \Longrightarrow \quad n = p + \sqrt{pq}$$

Por otra parte

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{a}\ ; \qquad p + q + 2\sqrt{pq} = a \quad \Longrightarrow \quad p + q = a - 2\sqrt{pq}$$

Entonces:

$$m + n = p + q + 2\sqrt{pq} = a - 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pq} = a$$

♠♠♠♠

4.2. Section B

Ejercicio 11. (17 puntos)

The points $P(-1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$, $R(0, 5, 1)$ and S form a parallelogram, where S is diagonally opposite Q.

(a) Find the coordinates of S.

(b) The vector product

$$\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}.$$

Find the value of m.

(c) Hence calculate the area of parallelogram $PQRS$.

(d) Find the Cartesian equation of the plane, Π_1, containing the parallelogram $PQRS$.

(e) Write down the vector equation of the line through the origin $(0, 0, 0)$ that is perpendicular to the plane Π_1.

(f) Hence find the point on the plane that is closest to the origin.

(g) A second plane, π_2, has equation $x - 2y + z = 3$. Calculate the angle between the two planes.

Solución:

(a) Si es un paralelogramo debe ocurrir $\vec{PQ} = \vec{SR}$. Sea $S(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 5 - y \\ 1 - z \end{pmatrix}$$

Se obtiene $S(1, 6, -2)$.

(b) Calculamos el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 2 \\ \vec{\jmath} & -1 & 4 \\ \vec{k} & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad m = -2$$

(c) El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial

$$S = \sqrt{169 + 49 + 4} = \sqrt{222}$$

(d) Podemos tomar como vector normal el producto $\vec{PQ} \times \vec{PS}$ que hemos calculado y como punto del plano el punto $P(-1, 2, -3)$:

$$-13(x + 1) + 7(y - 2) - 2(z + 3) = 0\ ; \qquad -13x + 7y - 2z - 33 = 0$$

(e) La recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(f) El punto que nos piden es el punto de intersección del plano y la recta perpendicular:

$$\begin{cases} x = -13\lambda \\ y = 7\lambda \\ z = -2\lambda \\ -13x + 7y - 2z - 33 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\lambda = \frac{11}{74}$ y el punto es $\left(\frac{-143}{74}, \frac{77}{74}, \frac{-22}{74}\right)$.

(g) Es el ángulo entre los vectores:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este ángulo es:

$$\cos\varphi = \frac{|-13 \cdot 1 - 7 \cdot 2 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{222}\sqrt{6}} = \frac{22}{\sqrt{222}\sqrt{6}} = \frac{11}{\sqrt{333}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (18 puntos)

The number of accidents that occur at a large factory can be modelled by a Poisson distribution with a mean of 0,5 accidents per month.

(a) Find the probability that no accidents occur in a given month.

(b) Find the probability that no accidents occur in a given 6 month period.

(c) Find the length of time, in complete months, for which the probability that at least 1 accident occurs is greater than 0,99.

(d) To encourage safety the factory pays a bonus of \$1000 into a fund for workers if no accidents occur in any given month, a bonus of \$500 if 1 or 2 accidents occur and no bonus if more than 2 accidents occur in the month.

(I) Calculate the expected amount that the company will pay in bonuses each month.

(II) Find the probability that in a given 3 month period the company pays a total of exactly \$2000 in bonuses.

Solución:

(a) Sea X la variable aleatoria que representa el número de accidentes en un mes; $X \sim \text{Po}(0{,}5)$ y

$$\text{p}(X = 0) \simeq 0{,}607$$

(b) Si ahora X representa el número de accidentes en 6 meses $X \sim \text{Po}(3)$ y:

$$\text{p}(X = 0) \simeq 0{,}0498$$

(c) Sea $X \sim \text{Po}(m)$. Vamos a calcular m de modo que $\text{p}(X = 0) < 0{,}01$:

$$\begin{aligned} &\text{p}(X = 0) = e^{-m} < 0{,}01 \\ &-m < \ln 0{,}01 \\ &m > 4{,}61 \end{aligned}$$

La media obtenida corresponde a un período de tiempo de $\frac{m}{0{,}5} \simeq 9{,}21$ meses. A partir de 10 meses la probabilidad de que ocurra al menos un accidente es mayor que 0,99.

(d) (I) Si $X \sim \text{Po}(0{,}5)$ el valor esperado del bonus es:

$$1000 \cdot \text{p}(X = 0) + 500 \cdot \text{p}(X = 1) + 500 \cdot \text{p}(X = 2) \simeq 796$$

(II) Para que el bonus en los tres meses sea de \$2000 tiene que haber habido dos meses sin accidentes y uno con más de dos, o bien 1 mes sin accidentes y dos meses con uno o dos accidentes. La probabilidad de que ocurra esto es:

$$3 \cdot \text{p}(X = 0) \cdot \text{p}(X = 0) \cdot \text{p}(X > 2) + 3 \cdot \text{p}(X = 0) \cdot \text{p}(X = 1 \text{ ó } 2) \cdot \text{p}(X = 1 \text{ ó } 2) \simeq 0{,}277$$

Se ha multiplicado por 3 porque el mes con más de dos accidentes ha podido ser el primero, el segundo o el tercero. Lo mismo en el segundo caso.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (25 puntos)

Part A

Prove by mathematical induction that, for $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Solución:

– Para $n=1$ se cumple la igualdad puesto que el primer miembro es igual a 1 y el segundo también.

– Supongamos que se cumple para $n=k$, es decir, Supongamos que la suma de los primeros k términos es

$$S_k = 4-\frac{k+2}{2^{k-1}}$$

Debemos demostrar que, entonces

$$S_{k+1}=4-\frac{k+1+2}{2^{k+1-1}}=4-\frac{k+3}{2^k}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k+\frac{k+1}{2^k} \\ &= 4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+\frac{k+1}{2^k} \\ &= 4-\frac{2(k+2)-k-1}{2^k} \\ &= 4-\frac{k+3}{2^k} \end{aligned}$$

– Como consecuencia del principio de inducción, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Part B

(a) Using integration by parts, show that

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x-\cos x\right)+C$$

(b) Solve the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}\,e^{2x}\sin x$$

given that $y=0$ when $x=0$, writing your answer in the form $y=f(x)$.

(c) (I) Sketch the graph of $y=f(x)$, found in part (b), for $0\le x\le 1{,}5$. Determine the coordinates of the point P, the first positive intercept on the x-axis, and mark it on your sketch.

(II) The region bounded by the graph of $y=f(x)$ and the x-axis, between the origin and P, is rotated 360° about the x-axis to form a solid of revolution. Calculate the volume of this solid.

Solución:

(a) Por partes:

$$u=e^{2x} \qquad \mathrm{d}u=2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v=\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x \qquad v=-\cos x$$

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x=-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u=e^{2x} \qquad \mathrm{d}u=2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x \qquad v=\operatorname{sen}x$$

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x=-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x=-e^{2x}\cos x+2\left(e^{2x}\operatorname{sen}x-2\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x\right)$$

Vuelve a aparecer la misma integral. Pasando al primer miembro y despejando obtenemos:

$$\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\operatorname{sen}x-\cos x\right)+C$$

(*b*) Separando las variables:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = e^{2x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

$$\operatorname{arsen} y = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$$

Cuando $x = 0$, y debe valer 0. Por tanto

$$0 = \frac{1}{5} + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{5}$$

De modo que podemos escribir la función

$$y = \operatorname{sen}\frac{e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) - 1}{5}$$

(*c*) Se hace con la calculadora:

(I) $P(0{,}599, 0)$.

(II) Debemos integrar la función al cuadrado entre cero y el valor hallado y multiplicar por π. El resultado es 0,174.

♠♠♠♠

5. 2012. Primer examen. TZ1.

5.1. Section A

Ejercicio 1. (4 puntos)

Find the value of k if $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^r = 7$

Solución:

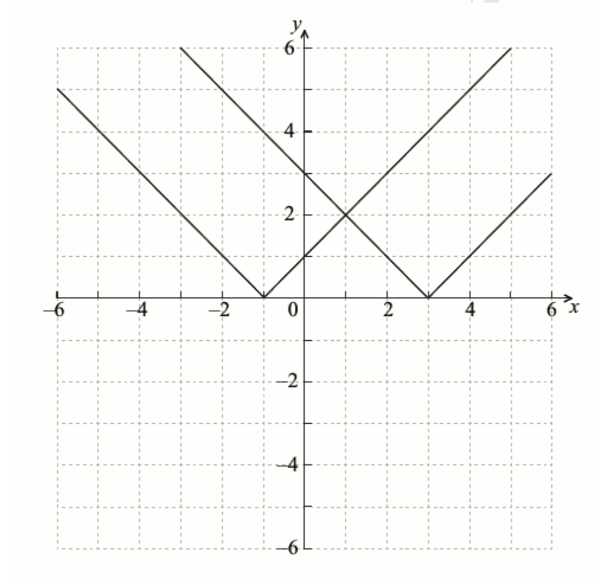
Es la suma de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{k}{3}$ y la razón es $\frac{1}{3}$. Entonces:

$$\frac{\frac{k}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 7 \quad \Longrightarrow \quad \frac{k}{2} = 7\,; \quad k = 14$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (8 puntos)

The graphs of $y = |x+1|$ and $y = |x-3|$ are shown below.



Let $f(x) = |x+1| - |x-3|$.

(a) Draw the graph of $y = f(x)$.

(b) Hence state the value of

(I) $f'(-3)$;

(II) $f'(2{,}7)$

(III) $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

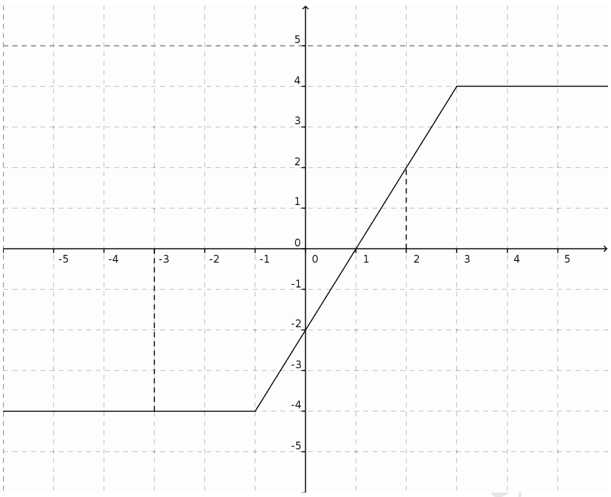
(a) Podemos escribir las funciones $|x+1|$ y $|x-3|$ como funciones a trozos:

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x \leq -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases} \;; \qquad |x-3| = \begin{cases} -x+3 & x \leq 3 \\ x-3 & x > 3 \end{cases}$$

Restando las funciones obtenemos:

$$f(x) = |x+1| - |x-3| = \begin{cases} -4 & x \le -1 \\ 2x-2 & -1 < x \le 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases}$$

La gráfica de esta función es:



(b) De la expresión de la función o de la gráfica se desprende inmediatamente que

(I) $f'(3) = 0$

(II) $f'(2{,}7) = 2$

(III) $\int_{-3}^{2} f(x) = -11$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (7 puntos)

If $z_1 = a + a\sqrt{3}i$ and $z_2 = 1 - i$, where a is a real constant, express z_1 and z_2 in the form $r\text{cis}\theta$, and hence find an expression for $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6$ in terms of a and i.

Solución:

Claramente $z_1 = 2a \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ y $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2a}{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$$

Efectuamos ahora la potencia

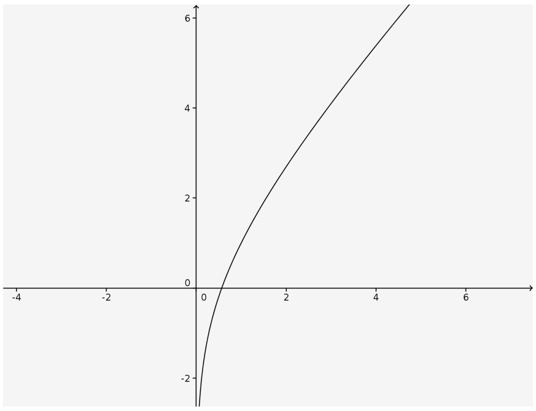
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6 = \left(a\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}\right)^6 = 8a^6 \operatorname{cis}\frac{7\pi}{2} = 8a^6 \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = -8a^6 i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

The graph below shows $y = f(x)$, where $f(x) = x + \ln x$.

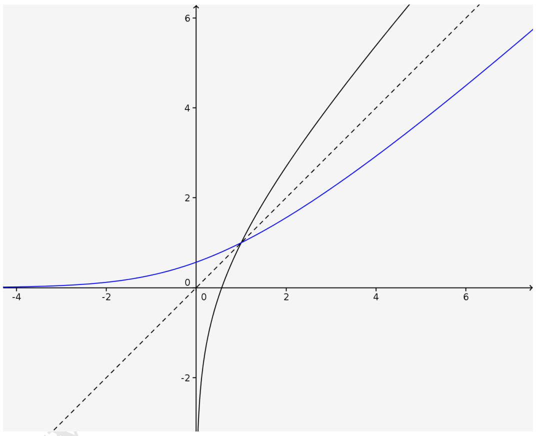
(a) On the graph below, sketch the curve $y = f^{-1}(x)$.



(b) Find the coordinates of the point of intersection of the graph of $y = f(x)$ and the graph of $y = f^{-1}(x)$.

Solución:

(a) La gráfica de la función inversa de $f(x)$ es la simétrica de $y = f(x)$ respecto a la recta $y = x$.



(b) Es el punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = x$:

$$x + \ln x = x \; ; \qquad \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

El punto de intersección es $(1, 1)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (7 puntos)

Let $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

(a) For what values of x does $f(x)$ not exist?

(b) Simplify the expression $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

Solución:

(a) Cuando se anule $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$, es decir $x = k\pi$ o $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

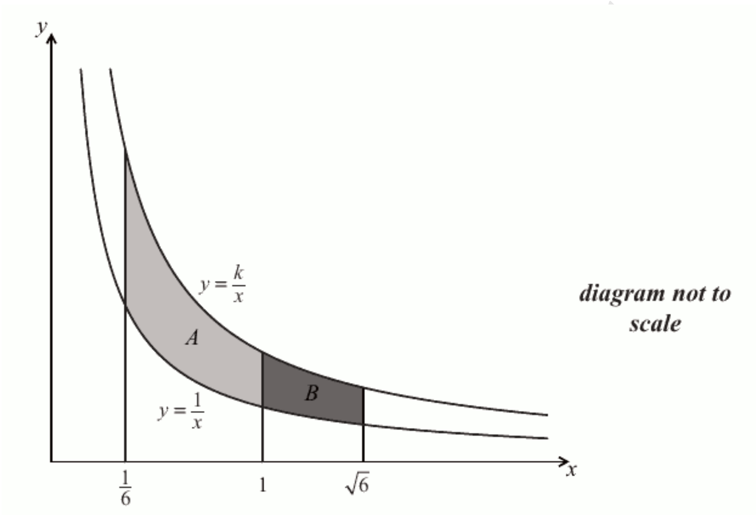
(*b*) Desarrollando el ángulo triple:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\operatorname{sen}(2x+x)}{\operatorname{sen} x}-\frac{\cos(2x+x)}{\cos x}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 2x\cos x+\cos 2x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}-\frac{\cos 2x\cos x-\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x}{\cos x}\\
&= \frac{2\operatorname{sen} x\cos^2 x+(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}-\frac{(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)\cos x-2\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\cos x}\\
&= 2\cos^2 x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}^2 x\right)\\
&= 2\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x\\
&= 2\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\right)\\
&= 2
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (8 puntos)

The graph below shows the two curves $y=\dfrac{1}{x}$ and $y=\dfrac{k}{x}$, where $k>1$.



(a) Find the area of region A in terms of k.

(b) Find the area of region B in terms of k.

(c) Find the ratio of the area of region A to the area of region B.

Solución:

(*a*) Integrando:

$$S_1=\int_{\frac{1}{6}}^{1}\left(\frac{k}{x}-\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{6}}^{1}\frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x=\Big[(k-1)\ln x\Big]_{\frac{1}{6}}^{1}=(k-1)\ln 6$$

(*b*) Lo mismo

$$S_2=\int_{1}^{\sqrt{6}}\left(\frac{k}{x}-\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{\sqrt{6}}\frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x=\Big[(k-1)\ln x\Big]_{1}^{\sqrt{6}}=(k-1)\ln\sqrt{6}=\frac{1}{2}(k-1)\ln 6$$

(*c*) Es el doble.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

Given that z is the complex number $x+iy$ and that $|z|+z=6-2i$, find the value of x and the value of y.

Solución:

Podemos escribir la igualdad como

$$|z|+z=6-2i\ ;\qquad \sqrt{x^2+y^2}+x+iy=6-2i$$

Igualando las partes imaginarias se obtiene $y=-2$: Sustituyendo

$$\sqrt{x^2+4}+x=6$$
$$x^2+4=36+x^2-12x$$
$$12x=32$$
$$x=\frac{8}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (5 puntos)

Solve the equation $2-\log_3(x+7)=\log_{\frac{1}{3}}2x$.

Solución:

Podemos escribir la ecuación:

$$2-\log_3(x+7)=-\log_3 2x$$
$$\log_3 2x-\log_3(x+7)=-2$$
$$\frac{2x}{x+7}=\frac{1}{9}$$
$$x=\frac{7}{17}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (9 puntos)

The curve C has equation $2x^2+y^2=18$. Determine the coordinates of the four points on C at which the normal passes through the point $(1,0)$.

Solución:

Calculamos la derivada de la función:

$$4x+2yy'=0\ ;\qquad y'=-\frac{2x}{y}$$

La normal en un punto (x_0,y_0) tiene como ecuación:

$$y-y_0=\frac{y_0}{2x_0}(x-x_0)$$

Si pasa por el punto $(1,0)$:

$$-y_0=\frac{y_0}{2x_0}(1-x_0)\ ;\qquad y_0\left(\frac{1-x_0}{2x_0}+1\right)=0$$

Entonces

- O bien se cumple
  $$y_0=0\ ;\qquad 2x^2=18$$
  y encontramos los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$.
- O bien se cumple
  $$\frac{1-x_0}{2x_0}+1=0\ ;\qquad 1-x_0+2x_0=0\quad\Longrightarrow\quad x_0=-1$$
  y encontramos los puntos $(-1,-4)$ y $(-1,4)$.

♠♠♠♠

5.2. Section B

Ejercicio 10. (21 puntos)

In the triangle ABC, $\widehat{ABC} = 90°$, $AC = \sqrt{2}$ and $AB = BC + 1$.

(a) Show that $\cos A - \sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

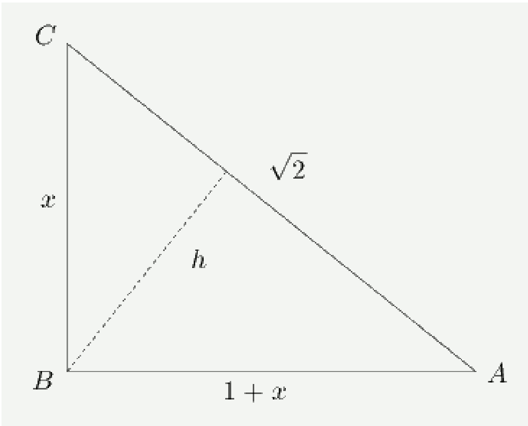
(b) By squaring both sides of the equation in part (a), solve the equation to find the angles in the triangle.

(c) Apply Pythagoras' theorem in the triangle ABC to find BC, and hence show that

$$\sin A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(d) Hence, or otherwise, calculate the length of the perpendicular from B to $[AC]$.

Solución:



(a) $\cos A - \operatorname{sen} A = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A - 2 \operatorname{sen} A \cos A = \dfrac{1}{2}$; $\quad 1 - \operatorname{sen} 2A = \dfrac{1}{2}$; $\quad \operatorname{sen} 2A = \dfrac{1}{2}$

y por tanto $2A = 30°$, $A = 15°$, $B = 75°$.

(c) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + (x+1)^2 = 2$$

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Sustituyendo:

$$\operatorname{sen} A = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(d) Teniendo en cuenta que $y = (x+1) \operatorname{sen} A$:

$$y = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6} + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (17 puntos)

(a) A and U are square matrices, and $X = U^{-1}AU$. Use mathematical induction to prove that $X^n = U^{-1}A^nU$, for $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Let $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ and $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) Find the matrix D such that $AU = UD$.
(II) Write down the matrix D^2.
(III) Hence prove that $A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, for $n \in \mathbb{Z}^+$.
(IV) Using the result from part (iii), show that $(A^n)^{-1} = A^n$, for $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

(a)
- La igualdad se cumple para $n = 1$.
- Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, supongamos

$$X^k = U^{-1}A^kU$$

y comprobemos que, en ese caso, también se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^kX \\ &= U^{-1}A^kUX \\ &= U^{-1}A^kUU^{-1}AU \\ &= U^{-1}A^kAU \\ &= U^{-1}A^{k+1}U \end{aligned}$$

- Como consecuencia del principio de inducción, la igualdad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) (I) Calculamos U^{-1} y multiplicamos las matrices:

$$\begin{aligned} D = U^{-1}AU &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(II) Multiplicando la matriz D por sí misma:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(III) De acuerdo con el resultado obtenido anteriormente:

$$A = UDU^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A^{2n} = UD^{2n}U^{-1} = UIU^{-1} == UU^{-1} = I$$

(IV) Puesto que $A^{2n} = I$:

$$A^nA^n = I \quad \Longrightarrow \quad (A^n)^{-1} = A^n$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (22 puntos)

Let $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}, \quad 0 < x < 1.$

(a) Show that $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ and deduce that f is an increasing function.
(b) Show that the curve $y = f(x)$ has one point of inflexion, and find its coordinates.
(c) Use the substitution $x = \sin^2\theta$ to show that

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + c.$$

Solución:

(a) Derivando:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

La derivada es positiva para todo $x\in(0,1)$. La función es creciente.

(b) Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-1)x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\left[3(1-x)^{-1}-x^{-1}\right]$$

Igualando a cero

$$\frac{3}{1-x}-\frac{1}{x}=0\ ;\qquad \frac{3x-1+x}{x(1-x)}=0\ ;\qquad \frac{4x-1}{x(x-1)}=0$$

En $x=\frac{1}{4}$ la segunda derivada es cero y además toma valores de signos opuestos a su izquierda y su derecha. Es un punto de inflexión. Sus coordenadas son $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(c) Con el cambio $x=\operatorname{sen}^2\theta$, $\mathrm{d}x=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x&=\int\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1-\cos^2\theta}}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int\operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=2\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta+C\\&=\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\end{aligned}$$

Para deshacer el cambio tenemos en cuenta que

$$x=\operatorname{sen}^2\theta\ ;\quad \operatorname{sen}\theta=\sqrt{x}\ ;\quad \theta=\operatorname{arsen}\sqrt{x}$$
$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{x}\ ;\quad \cos\theta=\sqrt{1-x}$$

Por consiguiente:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arsen}\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}+C$$

♠♠♠♠

6. 2012. Segundo examen. TZ1.

6.1. Section A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Given that the graph of $y = x^3 - 6x^2 + kx - 4$ has exactly one point at which the gradient is zero, find the value of k.

Solución:

La derivado $y' = 3x^2 - 12x + k$ debe tener un único cero. Entonces el discriminante debe ser cero.

$$144 - 12k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 12$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

The probability density function of the continuous random variable X is given by

$$f(x) = \begin{cases} k\,2^{\frac{1}{x}} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where k is a constant. Find the expected value of X.

Solución:

Es un problema que se resuelve con la calculadora. Primero calculamos k teniendo en cuenta que

$$k\int_1^2 2^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = 1$$

y obtenemos $k \simeq 0{,}616$.

Una vez calculado k el valor esperado lo obtenemos mediante:

$$\mathrm{E}(X) = k\int_1^2 x \cdot 2^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \simeq 1{,}47$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (7 puntos)

A team of 6 players is to be selected from 10 volleyball players, of whom 8 are boys and 2 are girls.

(*a*) In how many ways can the team be selected?
(*b*) In how many of these selections is exactly one girl in the team?
(*c*) If the selection of the team is made at random, find the probability that exactly one girl is in the team.

Solución:

(*a*) $C_{10,6} = 210$
(*b*) $2 \cdot C_{8,5} = 112$
(*c*) $p = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

The planes $2x+3y-z=5$ and $x-y+2z=k$ intersect in the line $5x+1=9-5y=-5z$. Find the value of k.

Solución:

Escribimos la recta en forma paramétrica. Tomando $z=\lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 5x=-1-5\lambda \\ 5y=9+5\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \text{o bien} \begin{cases} x=-\frac{1}{5}-\lambda \\ y=\frac{9}{5}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

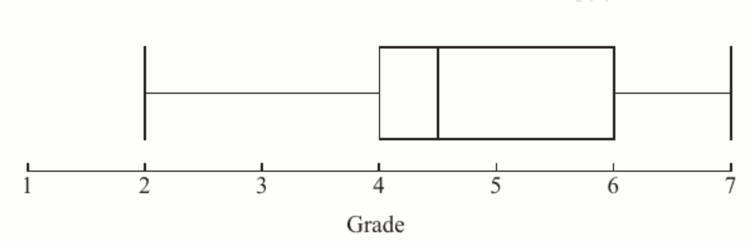
Cualquier punto de esta recta, por ejemplo $\left(-\frac{1}{5},\frac{9}{5},0\right)$ debe estar contenido en los dos planos. Entonces

$$x-y+2z=k \quad\Longrightarrow\quad k=-\frac{1}{5}-\frac{9}{5}=-2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

The box and whisker plot below illustrates the IB grades obtained by 100 students.



IB grades can only take integer values.

(a) How many students obtained a grade of more than 4?

(b) State, with reasons, the maximum possible number and minimum possible number of students who obtained a 4 in the exam.

Solución:

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (5 puntos)

Let $f(x)=\ln x$. The graph of f is transformed into the graph of the function g by a translation of $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, followed by a reflection in the x-axis. Find an expression for $g(x)$, giving your answer as a single logarithm.

Solución:

Al aplicar la traslación obtenemos la función:

$$g(x)=\ln(x-3)-2$$

Una reflexión en el eje OX se obtiene multiplicando la función por -1:

$$h(x)=2-\ln(x-3)=\ln\frac{e^2}{x-3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

A fisherman notices that in any hour of fishing, he is equally likely to catch exactly two fish, as he is to catch less than two fish. Assuming the number of fish caught can be modelled by a Poisson distribution, calculate the expected value of the number offish caught when he spends four hours fishing.

Solución:

Sea $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Debe cumplirse $\mathrm{p}(X \leq 1 = \mathrm{p}(X = 2)$:

$$e^{-m}(1+m) = e^{-m}\frac{m^2}{2}\ ; \qquad m^2 - 2m - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 1 + \sqrt{3}$$

En 4 horas el valor esperado es $4(1+\sqrt{3}) \simeq 10{,}9$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (9 puntos)

A cone has height h and base radius r. Deduce the formula for the volume of this cone by rotating the triangular region, enclosed by the line $y = h - \frac{h}{r}x$ and the coordinate axes, through 2π about the y-axis.

Solución:

El volumen se calcula mediante la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^h \left(r\,\frac{h-y}{h}\right)^2 \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h \left(h^2 + y^2 - 2hy\right) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[h^2 y + \frac{y^3}{3} - hy^2\right]_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}\, h^3 \\ &= \frac{1}{3}\, \pi r^2 h \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

Find the constant term in the expansion of $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^4 \left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^3$.

Solución:

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^3 = x^6 + 3\,x^4\,\frac{2}{x} + 3\,x^2\,\frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} = x^6 + 6x^3 + 12 + \frac{8}{x^3}$$

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^4 = x^4 - 4x^3\,\frac{2}{x} + 6x^2\,\frac{4}{x^2} - 4x\,\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4} = x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}$$

El término constante es $12 \cdot 24 = 298$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

A triangle is formed by the three lines $y = 10 - 2x$, $y = mx$ and $y = -\dfrac{1}{m}x$, where $m > \dfrac{1}{2}$. Find the value of m for which the area of the triangle is a minimum.

Solución:

El triángulo es rectángulo ya que la segunda y la tercera recta son perpendiculares. Además se cortan en el origen de coordenadas $A(0,0)$. Calculemos los otros dos vértices:

$$\begin{cases} y = 10 - 2x \\ y = mx \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad B\left(\frac{10}{m+2}, \frac{10m}{m+2}\right)$$

y el tercer vértice

$$\begin{cases} y = 10 - 2x \\ y = -\frac{1}{m}\,x \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad C\left(\frac{10m}{2m-1}, \frac{-10}{2m-1}\right)$$

La función que ha de ser mínima es

$$S = \frac{1}{2}\,AB\cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{100(1+m^2)}{(m+2)^2}}\sqrt{\frac{100(1+m^2)}{(2m-1)^2}} = 50\,\frac{1+m^2}{(m+2)(2m-1)} = \frac{50(1+m^2)}{2m^2+3m-2}$$

El mínimo de esta función puede obtenerse con la calculadora o derivando. Vamos a calcular la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}m} = 50\,\frac{2m(2m^2+3m-2)-(4m+3)(m^2+1)}{(2m^2+3m-2)^2} = 50\,\frac{3m^2-8m-3}{(2m^2+3m-2)^2}$$

Igualando a cero la derivada resulta $m = -\frac{1}{3}$ y $m = 3$. La solución válida es $m = 3$.

♠♠♠♠

6.2. Section B

Ejercicio 11. (14 puntos)

The function $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ is defined for $0 < x < 2\pi$.

(a) Write down the coordinates of the minimum point on the graph of f.

(b) The points $P(p,3)$ and $Q(q,3)$, $q > p$, lie on the graph of $y = f(x)$. Find p and q.

(c) Find the coordinates of the point, on $y = f(x)$, where the gradient of the graph is 3.

(d) Find the coordinates of the point of intersection of the normals to the graph at the points P and Q.

Solución:

(a) Con la calculadora se obtiene directamente el punto (3,79, 5). También podríamos escrito la función como $A\operatorname{sen}(x+\varphi)$ donde $A = \sqrt{3^2+4^4} = 5$ y $\varphi = \operatorname{artg}\frac{4}{3}$. El mínimo se produce cuando $x + \varphi = -\frac{\pi}{2}$. El valor exacto de la abscisa del mínimo es $-\frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\frac{4}{3}$ y el valor exacto de la ordenada es -5.

(b) Con la calculadora obtenemos $p \simeq 1{,}57$ y $q \simeq 6{,}00$.

(c) Calculamos la derivada

$$f'(x) = 3\cos x - 4\operatorname{sen} x$$

y de nuevo con la calculadora obtenemos el valor $f'(x) = 3$. Resulta $x \simeq 4{,}43$.

(d) Con la calculadora obtenemos los valores de la derivada en p y q que son -4 y 4. La ecuación de las normales es entonces

$$y - 3 = \frac{1}{4}\,(x-p)\ ; \qquad y - 30 - \frac{1}{4}\,(x-q)$$

Los valores exactos de las coordenadas del punto de intersección son $\left(\frac{p+q}{3}, 3 + \frac{q-p}{8}\right)$. Aproximadamente (3,79, 3,55).

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (22 puntos)

A ski resort finds that the mean number of accidents on any given weekday (Monday to Friday) is 2,2. The number of accidents can be modelled by a Poisson distribution.

(*a*) Find the probability that in a certain week (Monday to Friday only):
  (I) there are fewer than 12 accidents;
  (II) there are more than 8 accidents, given that there are fewer than 12 accidents.

(*b*) Due to the increased usage, it is found that the probability of more than 3 accidents in a day at the weekend (Saturday and Sunday) is 0,24. Assuming a Poisson model,
  (I) calculate the mean number of accidents per day at the weekend (Saturday and Sunday);
  (II) calculate the probability that, in the four weekends in February, there will be more than 5 accidents during at least two of the weekends.

(*c*) It is found that 20 % of skiers having accidents are at least 25 years of age and 40 % are under 18 years of age. Assuming that the ages of skiers having accidents are normally distributed, find the mean age of skiers having accidents.

Solución:

(*a*) Si X representa el número de accidentes durante los 5 días, $X \sim \mathrm{Po}(11)$. Entonces:
  (I) $\mathrm{p}(X < 12) = \mathrm{p}(X \leq 11) = 0{,}579$
  (II) Se trata de una probabilidad condicionada:

$$\mathrm{p}(X > 8 \mid X < 12) = \frac{\mathrm{p}(X > 8) \cap (X < 12)}{\mathrm{p}(X \leq 11)} = \frac{\mathrm{p}(X = 9\,\text{ó}\,10\,\text{ó}\,11)}{\mathrm{p}(X \leq 11)} \simeq 0{,}600$$

(*b*) Durante el fin de semana $X \sim \mathrm{Po}(m)$. Entonces:
  (I) $\mathrm{p}(X > 3) = 0{,}24 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(X \leq 3) = 0{,}76$:

$$e^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}\right) = 0{,}76$$

Resolvemos la ecuación con la calculadora y obtenemos $m \simeq 2{,}49$.
También podría resolverse con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{poissoncdf}(X, 3) - 0{,}76 = 0$$

y se obtendría el mismo resultado.

  (II) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de fines de semana en los que hay más de 5 accidentes. La probabilidad de que en un fin de semana haya más de 5 accidentes es, de acuerdo con la media calculada anteriormente:

$$p = \mathrm{p}(X > 5) = 1 - \mathrm{p}(X \leq 5) \simeq 0{,}380$$

Entonces $Y \sim \mathrm{B}(4, p)$ y

$$\mathrm{p}(Y \geq 2) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 1) \simeq 0{,}490$$

(*c*) Si ahora X representa la edad de los esquiadores accidentados y $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ tenemos que

$$\mathrm{p}(X < 25) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}80 \quad \Longrightarrow \quad \frac{25-\mu}{\sigma} \simeq 0{,}842$$
$$\mathrm{p}(X < 18) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{18-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40 \quad \Longrightarrow \quad \frac{18-\mu}{\sigma} \simeq -0{,}253$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 19{,}6$.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (24 puntos)

The coordinates of points A, B and C are given as $(5, -2, 5)$, $(5, 4, -1)$ and $(-1, -2, -1)$ respectively.

(*a*) Show that $AB = AC$ and that $\widehat{BAC} = 60°$.

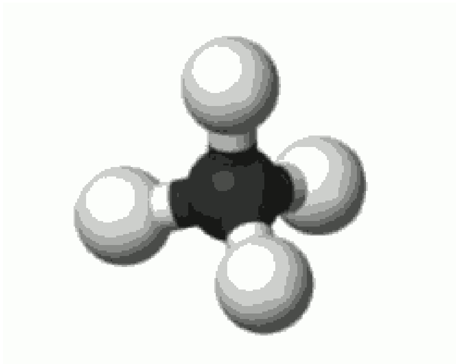
(*b*) Find the Cartesian equation of Π, the plane passing through A, B, and C.

(*c*) (I) Find the Cartesian equation of Π_1, the plane perpendicular to (AB) passing through the midpoint of $[AB]$.

(II) Find the Cartesian equation of Π_2, the plane perpendicular to (AC) passing through the midpoint of $[AC]$.

(*d*) Find the vector equation of L, the line of intersection of Π_1 and Π_2, and show that it is perpendicular to Π.

A methane molecule consists of a carbon atom with four hydrogen atoms symmetrically placed around it in three dimensions.



The positions of the centres of three of the hydrogen atoms are A, B and C as given. The position of the centre of the fourth hydrogen atom is D.

(*e*) Using the fact that $AB = AD$, show that the coordinates of one of the possible positions of the fourth hydrogen atom is $(-1, 4, 5)$.

(*f*) Letting D be $(-1, 4, 5)$, show that the coordinates of G, the position of the centre of the carbon atom, are $(2, 1, 2)$. Hence calculate $\widehat{DGA}$, the bonding angle of carbon.

Solución:

(*a*) Calculamos los vectores:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La longitud de ambos vectores es igual a $6\sqrt{2}$.

(*b*) La ecuación del plano que pasa por los tres puntos es

$$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y+2 & 1 & 0 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene la ecuación $x - y.z - 2 = 0$.

(*c*) (I) El punto medio es $M(5, 1, 2)$ y como vector normal podemos tomar el vector $\frac{1}{6}\vec{AB}$:

$$0(x-5) + 1(y-1) - 1(z-2) = 0\ ; \qquad y - z + 1 = 0$$

(II) De la misma forma que el anterior, el plano debe pasar por $N(2, -2, 2)$ y su dirección es la de $\vec{AC}$:

$$1(x-2) + 0(y+2) + 1(z-2)\ ; \qquad x + z - 4 = 0$$

(*d*) La recta tiene por ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro la ecuación de la recta es

$$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

o en forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$$

(*e*) Por la simetría de la molécula, los otros tres átomos de hidrógeno deben estar a la misma distancia de A. Deben estar sobre la superficie esférica de centro A y radio $6\sqrt{2}$:

$$(x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=72$$

También debe estar sobre la recta que hemos calculado. De ser una de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=72\\ x=4-\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=\lambda \end{cases}$$

Puede verse fácilmente que el punto $D(-1,4,5)$ es la solución del sistema para $\lambda=5$

(*f*) Calculamos el plano bisector de AD:

$$(x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=(x+1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2$$
$$-10x+25+4y+4=2x+1-8y+16$$
$$12x-12y-12=0$$
$$x-y-1=0$$

El centro del átomo de carbono de ser el punto de intersección de los tres planos bisectores. Debe ser la solución del sistema:

$$\begin{cases} y-z+1=0\\ x+z-4=0\\ x-y-1=0 \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} x=4-\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=\lambda\\ x-y-1=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $G(2,1,2)$. También se podía haber calculado como la media aritmética de las coordenadas de los cuatro puntos.

Para calcular el ángulo $\widehat{DGA}$ calculamos los vectores $\vec{GA}$ y $\vec{GD}$:

$$\vec{GA}=\begin{pmatrix} 3\\ -3\\ 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{GD}=\begin{pmatrix} -3\\ 3\\ 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$$

El ángulo que forman estos vectores cumple

$$\cos\varphi=\frac{\vec{GA}\cdot\vec{GD}}{|GA||GD|}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{-1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi\simeq 109^\circ$$

♠♠♠♠

7. 2012. Primer examen. TZ2.

7.1. Sección A

Ejercicio 1. (6 puntos)

Cuando se divide $2x^3 + kx^2 + 6x + 32$ y $x^4 - 6x^2 - k^2x + 9$ entre $x + 1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k.

Solución:

De acuerdo con el teorema del resto, el valor numérico para $x = -1$ es el mismo para ambos polinomios. Entonces

$$-2 + k - 6 + 32 = 1 - 6 + k^2 + 9 \quad\Longrightarrow\quad k^2 - k - 20 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene $k = -4$ y $k = 5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Halle los valores de x para los cuales los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2\cos x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 2\operatorname{sen} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

son perpendiculares, siendo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución:

Si los vectores son perpendiculares, su producto escalar debe ser igual a cero:

$$-1 + 4\operatorname{sen} x\cos x = 0 \quad\Longrightarrow\quad -1 + 2\operatorname{sen} 2x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$\begin{aligned} &2x = 30^\circ \pm 360^\circ k \\ &2x = 150^\circ \pm 360^\circ k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

o sea, $x = 15^\circ \pm 180^\circ k$ o $x = 75^\circ \pm 180^\circ k$.

Las soluciones comprendidas entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ son 15° y 75°, o sea, $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{5\pi}{12}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

En un día dado, la probabilidad de que llueva es igual a $\frac{2}{5}$. La probabilidad de que el equipo de fútbol *Tigers* gane en un día de lluvia es $\frac{2}{7}$, mientras que la probabilidad de que gane un día que no llueve es igual a $\frac{4}{7}$.

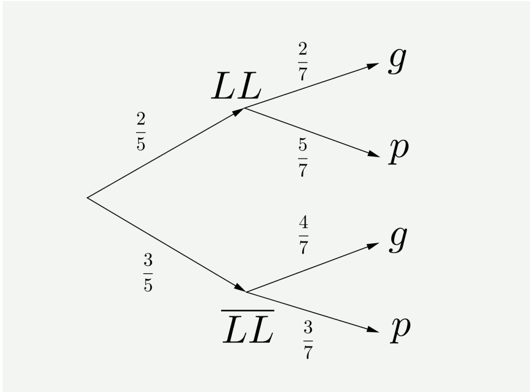
(a) Dibuje con precisión un diagrama de árbol para representar estos sucesos y sus posibles resultados.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de fútbol *Tigers* gane?

(c) Sabiendo que el equipo de fútbol *Tigers* ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que ese día haya llovido?

Solución

(a)



(b) $\mathrm{p}(g) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{35}$

(c) $\mathrm{p}(LL \mid g) = \dfrac{\mathrm{p}(LL \cap g)}{\mathrm{p}(g)} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{16}{35}} = \dfrac{1}{4}$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

(a) Desarrolle y simplifique

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$$

(b) A partir de lo anterior, determine el término constante del desarrollo

$$\left(2x^2 + 1\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$$

Solución:

(a) Desarrollamos:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{2}{x}\right)^4 &= x^4 - 4x^3\frac{2}{x} + 6x^2\frac{4}{x^2} - 4x\frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4}\\ &= x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}\end{aligned}$$

(b) El término constante de

$$\left(2x^2 + 1\right)\left(x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right)$$

resulta de multiplicar $2x^2$ por $-\frac{32}{x^2}$ y 1 por 24. El resultado es -40.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

Tres matrices de 2×2 no singulares, A, B y X, satisfacen la ecuación $4A - 5BX = B$.

(a) Halle X en función de A y B.

(b) Sabiendo que $A = 2B$, halle X.

Solución:

(a) Puesto que las matrices son no singulares tienen inversa. Así:

$$5BX = 4A - B \quad \Longrightarrow \quad BX = \frac{4}{5}A - \frac{1}{5}B$$

y multiplicando por la izquierda por B^{-1}

$$X = \frac{4}{5}B^{-1}A - \frac{1}{5}B^{-1}B = \frac{4}{5}B^{-1}A - \frac{1}{5}I$$

(b) Si $A = 2B$:

$$X = \frac{4}{5}B^{-1}2B - \frac{1}{5}I = \frac{8}{5}I - \frac{1}{5}I = \frac{7}{5}I$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Sabiendo que $(4-5i)m + 4n = 16 + 15i$, donde $i^2 = -1$, halle m y n si

(a) m y n son números reales;

(b) m y n son números complejos conjugados.

Solución:

(a) Igualando partes reales e imaginarias resulta

$$\begin{cases} 4m + 4n = 16 \\ -5m = 15 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad m = -3\ ; \quad n = 7$$

(b) Llamando $m = a + bi$ y $n = a - bi$:

$$(4-5i)(a+bi) + 4(a-bi) = 16 + 15i$$
$$4a + 4bi - 5ai + 5b + 4a - 4bi = 16 + 15i$$

Igualando partes reales e imaginarias:

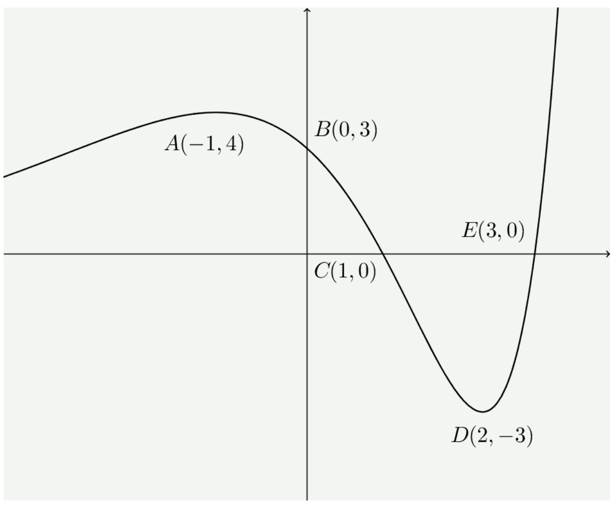
$$\begin{cases} 8a + 5b = 16 \\ -5a = 15 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = -3\ ; \quad b = 8$$

La solución es $m = -3 + 8i$ y $n = -3 - 8i$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$, donde A es un máximo local y D es un mínimo local.



(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de

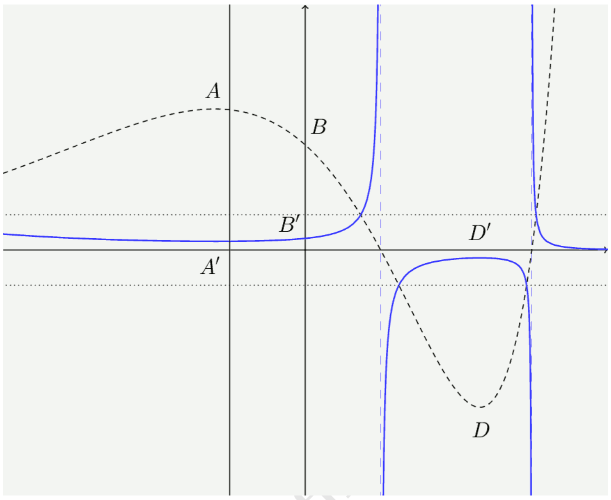
$$y = \frac{1}{f(x)}$$

mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A, B y D, rotulándolos A' , B' y D' respectivamente, y las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.

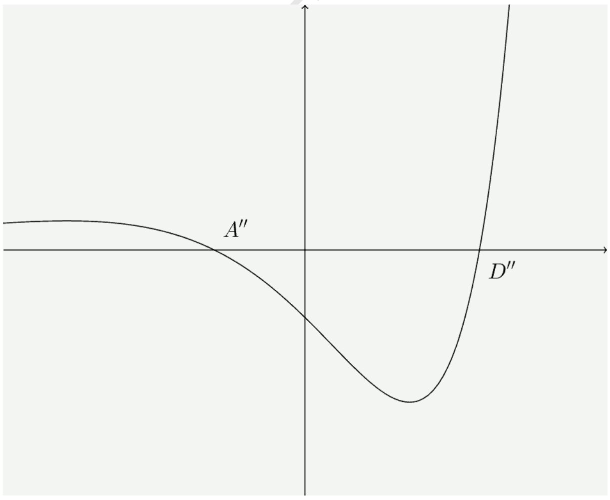
(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de la función derivada $y = f'(x)$, mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A y D, y rotulándolos A'' y D'' respectivamente.

Solución:

(a)



(b)



♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

Sea $x^3 y = a \operatorname{sen} nx$. Utilizando la derivación implícita, compruebe que:

$$x^3 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 6x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(n^2 x^2 + 6\right) xy = 0$$

Solución:

Derivando obtenemos:

$$3x^2 y + x^3 y' = an \cos nx$$

Derivando de nuevo:

$$6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' = -an^2 \operatorname{sen} nx$$

Agrupando términos y teniendo en cuenta que $a \operatorname{sen} nx = x^3y$:

$$x^3y'' + 6x^2y' + 6xy = -n^2x^3y$$

$$x^3y'' + 6x^2y' + xy(n^2x^2 + 6) = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (6 puntos)

Compruebe que

$$\frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \sec 2A + \operatorname{tg} 2A$$

Solución:

Multiplicando numerador y denominador por $\cos A + \operatorname{sen} A$ resulta:

$$\frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \frac{(\cos A + \operatorname{sen} A)^2}{(\cos A - \operatorname{sen} A)(\cos A + \operatorname{sen} A)} = \frac{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A + 2 \operatorname{sen} A \cos A}{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}$$

y teniendo en cuenta que $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$, $2 \operatorname{sen} A \cos A = \operatorname{sen} 2A$ y $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \cos 2A$:

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} 2A}{\cos 2A} = \frac{1}{\cos 2A} + \frac{\operatorname{sen} 2A}{\cos 2A} = \sec 2A + \operatorname{tg} 2A$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (9 puntos)

La función f definida en el dominio $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, viene dada por $f(x) = e^{-x} \cos x$.

(a) Indique los ceros de f.

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

(c) Se denomina A a la región delimitada por la gráfica, el eje x y el eje y, mientras que se denomina B a la región delimitada por la gráfica y el eje x. Compruebe que la razón entre el área de A y el área de B es igual a

$$\frac{e^{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}+1}\right)}{e^{\pi} + 1}$$

7.2. Sección B

Ejercicio 11. (18 puntos)

Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{75}, \quad x \geq 0 \qquad\qquad g(x) = \frac{|3x - 4|}{10}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Indique el recorrido de f y de g.

(b) Halle una expresión para la función compuesta $f \circ g(x)$, de la forma $\dfrac{ax^2 + bx + c}{3750}$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(c) (I) Halle una expresión para la función inversa $f^{-1}(x)$.
(II) Indique el dominio y el recorrido de $f^{-1}(x)$.

(d) Ahora el dominio de f y el de g quedan restringidos a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considerando los valores de f y de g en este nuevo dominio, determine cuál de las dos funciones, f y g, podría utilizarse para hallar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta X . Explique claramente las razones por las cuales ha dado esa respuesta.

(e) Utilizando esta distribución de probabilidad, calcule la media de X.

Solución:

(a) La gráfica de f es una rama de parábola con el vértice en $\left(0, \frac{1}{25}\right)$. El recorrido es el intervalo $\left[\frac{1}{25}, \infty\right)$. La función g es continua y solo toma valores positivos. Puesto que tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ y toma el valor cero en $x = \frac{4}{3}$ toma todos los valores del intervalo $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$, éste es su recorrido.

(b)
$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\frac{|3x-4|}{10}\right)$$
$$= \frac{2\frac{|3x-4|^2}{10^2} + 3}{75} = \frac{2(3x-4)^2 + 300}{7500}$$
$$= \frac{18x^2 - 48x + 332}{7500} = \frac{9x^2 - 24x + 166}{3750}$$

(c) (I) Intercambiando las variables y despejando:
$$x = \frac{2y^2 + 3}{75} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{75x - 3}{2}}$$

(II) El dominio es $\left[\frac{1}{25}, \infty\right)$. El recorrido es $[0, \infty)$.

(d) En este caso, los valores de $f(x)$ y $g(x)$ serían:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{3}{75}$	$\frac{5}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{21}{75}$	$\frac{35}{75}$

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$

$f(x)$ puede ser una función de probabilidad pues toma valores positivos que suman 1. En cambio, los valores de $g(x)$ no suman 1 y, por consiguiente, no puede ser una función de probabilidad.

(e) La media de $f(x)$ sería:
$$0 \cdot \frac{3}{75} + 1 \cdot \frac{5}{75} + 2 \cdot \frac{11}{75} + 3 \cdot \frac{21}{75} + 4 \cdot \frac{35}{75} = \frac{230}{75} = \frac{46}{15}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12.

Apartado A (12 puntos)

(a) Sabiendo que $(x+iy)^2 = -5 + 12i, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Compruebe que:

(I) $x^2 - y^2 = -5$;

(II) $xy = 6$

(b) A partir de lo anterior, halle las dos raíces cuadradas de $-5 + 12i$.

(c) Compruebe que para todo número complejo z, $(z^*)^2 = (z^2)^*$.

(d) A partir de lo anterior, escriba las dos raíces cuadradas de $-5 - 12i$.

Solución:

(a) Desarrollando $(x+iy)^2$:
$$-5 + 12i = (x+iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

E igualando las partes reales e imaginarias se obtiene:
$$x^-y^2 = -5\ ; \qquad xy = 6$$

(b) Resolviendo el sistema por sustitución $y = \frac{6}{x}$:
$$x^2 - \frac{36}{2} = -5$$
$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$
$$x^2 = 4\ ; \qquad x^2 = -9 \text{ (no válida)}$$

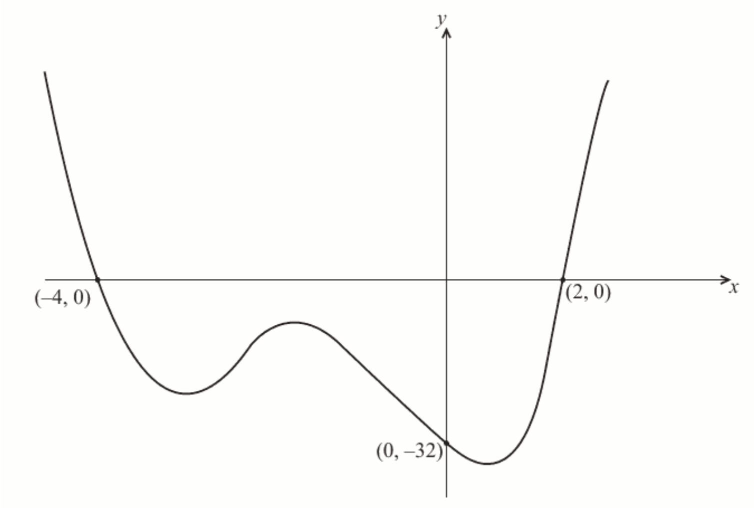
Así pues las dos raíces son $2 + 3i$ y $-2 - 3i$.

(c) Veamos que los cuadrados de dos números conjugados son también números conjugados:
$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$
$$(a-bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi \quad \Longrightarrow \quad (z^*)^2 = \left(z^2\right)^*$$

(d) De acuerdo con lo anterior, las raíces de $-5-12i$ serán $2-3i$ y $-2+3i$.

Apartado B (17 puntos)

La gráfica de una función polinómica f de grado 4 se muestra a continuación.



(a) Explique por qué, de las cuatro raíces de la ecuación $f(x)=0$, dos son reales y dos son complejas.

(b) La curva pasa por el punto $(-1,-18)$. Halle $f(x)$ de la forma

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x^2+cx+d)$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

(c) Halle las dos raíces complejas de la ecuación $f(x)=0$, expresándolas en forma cartesiana.

(d) Dibuje con precisión las cuatro raíces sobre el plano complejo (el plano de Argand).

(e) Exprese cada una de las cuatro raíces de la ecuación de la forma $re^{i\theta}$.

Solución:

(a) Un polinomio de grado 4 tiene 4 raíces reales o complejas. De la figura se desprende que el polinomio tiene dos raíces reales $x_1=-4$ y $x_2=2$. Además estas raíces son simples pues si fuesen múltiples la gráfica de la función sería tangente al eje de abscisas en alguno de esos puntos. Solamente hay dos raíces reales simples. Las otras dos raíces deben ser complejas.

(b) Puesto que tiene raíces -4 y 2, la función puede escribirse:

$$f(x)=(x+4)(x-2)(x^2+cx+d)$$

Como $f(0)=-32$ resulta $-8d=-32$ y $d=4$.
Y como $f(-1)=-18$:

$$-18=3\cdot(-3)\,(1-c+4)\;;\qquad -18=-9(5-c)\quad\Longrightarrow\quad c=3$$

La función puede escribirse:

$$f(x)=(x+4)(x-2)(x^2+3x+4)$$

(c) Resolvemos $x^2+3x+4=0$:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$$

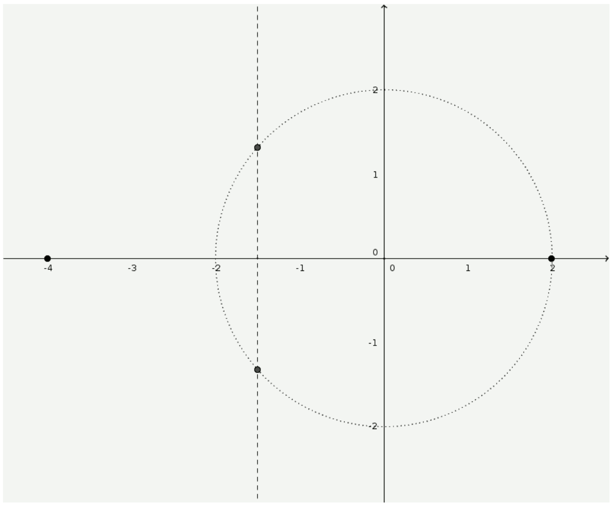
Las raíces complejas son:

$$z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\;;\qquad z_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

(d) El módulo de las raíces complejas es:

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{16}{4}}=2$$

Por consiguiente, los afijos de las raíces complejas se encuentran sobre la circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Como, además, la parte real es igual a $-\frac{3}{2}$, tenemos la siguiente representación:



(e) Las raíces reales pueden escribirse en forma exponencial como:

$$2e^{i0}\ ; \qquad 4e^{i\pi}$$

Las raíces complejas tienen módulo 2 y argumentos arcos $\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $-$ arcos $\left(-\frac{3}{4}\right)$:

$$2e^{i\ \text{arcos}\left(-\frac{3}{4}\right)}\ ; \qquad 2e^{-i\ \text{arcos}\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (13 puntos)

(a) Utilizando la definición de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

compruebe que la derivada de $\dfrac{1}{2x+1}$ es $\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$.

(b) Demuestre mediante inducción matemática que la derivada n-ésima de $(2x+1)^{-1}$ es

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$$

Solución:

(a) Aplicando la definición de derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)+1} - \frac{1}{2x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2x+1-2(x+h)-1}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-2h}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \\ &= \frac{-2}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

(b) Veamos en primer lugar que se cumple para $n = 1$. Sustituyendo en la fórmula:

$$f'(x) = (-1)^1 \frac{2^1 1!}{(2x+1)^{1+1}} = \frac{-2}{(2x+1)^2}$$

que es la derivada que hemos calculado en el apartado anterior.
Supongamos que se cumple para $n = k$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{2^k k!}{(2x+1)^{k+1}}$$

y veamos que, en ese caso, se cumple para $n = k+1$. En efecto, derivando:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k 2^k k! \frac{-(k+1)(2x+1)^k \cdot 2}{(2x+1)^{2k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2x+1)^{2k+2-k}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}} \end{aligned}$$

que es el resultado de sustituir en la fórmula n por $k+1$.
De acuerdo con el principio de inducción, la fórmula se cumple para $n \geq 1$.

♠♠♠♠

8. 2012. Segundo examen. TZ2.

8.1. Sección A

Ejercicio 1. (7 puntos)

La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.

(a) Halle el primer término y la diferencia común.

(b) Halle el menor valor de n para el cual la suma de los n primeros términos es mayor que 600.

Solución:

(a) La suma de los 16 primeros términos es:

$$212=\frac{8-4d+8+11d}{2}\,n\;;\qquad \frac{212}{8}=16+7d$$

y de aquí $d=\frac{3}{2}$ y $a_1=2$.

(b) Debe cumplirse que:

$$\frac{2+2+\frac{3}{2}(n-1)}{2}\,n>600\;;\qquad 3n^2+5n-2400>0$$

Resolviendo la inecuación resulta que debe ser $n>27{,}5$ de modo que el número de términos más pequeño que cumple la condición es $n=28$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

La variable aleatoria X tiene una distribución $\mathrm{B}(30,p)$. Sabiendo que $\mathrm{E}(X)=10$, halle:

(a) el valor de p;

(b) $\mathrm{p}(X=10)$;

(c) $\mathrm{p}(X\geq 15)$.

Solución:

(a) Puesto que $30p=10$ resulta $p=1/3$.

(b) En la distribución binomial $\mathrm{B}\left(30,\frac{1}{3}\right)$:

$$\mathrm{p}(X=10)\simeq 0{,}153$$

(c) Con la misma distribución:

$$\mathrm{p}(X\geq 15)=1-\mathrm{p}(X\leq 14)\simeq 0{,}0435$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (8 puntos)

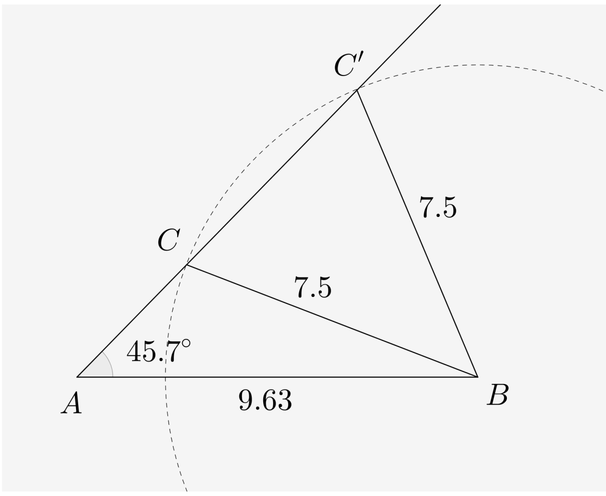
Considere un triángulo ABC, siendo $\widehat{BAC}=45{,}7°$; $AB=9,63$ cm y $BC=7,5$ cm.

(a) Por medio de un diagrama, muestre por qué existen dos triángulos que cumplen con esta información.

(b) Halle los posibles valores de AC.

Solución:

(a)



(*b*) Por el teorema del seno:

$$\frac{7{,}5}{\operatorname{sen} 45{,}7^\circ} = \frac{9{,}63}{\operatorname{sen} C} \implies \begin{cases} C = 113{,}2^\circ & B = 21{,}1^\circ \\ C' = 66{,}8^\circ & B' = 67{,}5^\circ \end{cases}$$

Con estos valores calculamos AC:

$$\frac{7{,}5}{\operatorname{sen} 45{,}7^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen} B} \implies AC \simeq 3{,}77$$

y AC':

$$\frac{7{,}5}{\operatorname{sen} 45{,}7^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen} B'} \implies AC' \simeq 9{,}68$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Quince niños y diez niñas están sentados en una sola fila.

(*a*) ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar en una sola fila, de forma que los niños y las niñas estén en dos grupos separados?

(*b*) Se escogen a dos niños y a tres niñas para que vayan al teatro. ¿De cuántas formas distintas se puede realizar esta selección?

Solución:

(*a*) $2 \cdot 15! \cdot 10! \simeq 9{,}49 \cdot 10^{18}$

(*b*) $C_{15,2} \cdot C_{10,3} = 12600$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

La variable aleatoria X tiene una distribución $\mathrm{Po}(m)$. Sabiendo que

$$\mathrm{p}(X = 5) = \mathrm{p}(X = 3) + \mathrm{p}(X = 4)$$

halle:

(*a*) el valor de m;

(*b*) $\mathrm{p}(X \geq 2)$.

Solución:

(a) Sustituyendo las probabilidades:

$$\frac{m^5e^{-m}}{5!}=\frac{m^3e^{-m}}{3!}+\frac{m^4e^{-m}}{4!}$$

Simplificamos dividiendo por e^{-m} y multiplicando por 3!:

$$\frac{m^5}{20}=m^3+\frac{m^4}{4}\quad\Longrightarrow\quad m^5-5m^4-20m^3=0\quad\Longrightarrow\quad m^3\left(m^2-5m-20\right)=0$$

Desestimando el caso $m=0$ obtenemos:

$$m^2-5m-20=0\quad\Longrightarrow\quad m=\frac{5+\sqrt{105}}{2}\simeq 7{,}62$$

El mismo valor se obtiene resolviendo con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\text{poissonpdf}(x,5)-\text{poissonpdf}(x,3)-\text{poissonpdf}(x,4)=0$$

(b) Para esta distribución:

$$\text{p}(X>2)=1-\text{p}(X\leq 1)\simeq 0{,}00578$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (8 puntos)

(a) Dibuje aproximadamente la curva

$$y=\frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}},\qquad -4\leq x\leq 4$$

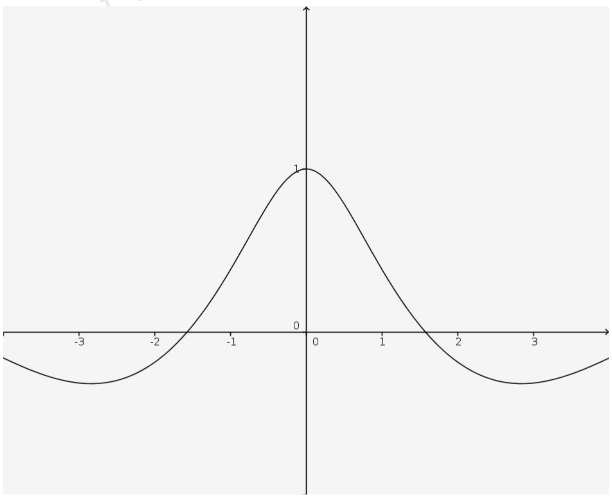
mostrando claramente las coordenadas de las intersecciones con el eje x, y todos los máximos y mínimos.

(b) Escriba la pendiente de la curva en $x=1$.

(c) Halle la ecuación de la normal a la curva en $x=1$.

Solución:

(a) Es un ejercicio de calculadora:



Hay mínimos en $(-2{,}84;-0{,}317)$ y en $(2{,}84;-0{,}317)$. Hay un máximo relativo en $(0,1)$. Las intersecciones con el eje OX son los puntos $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(b) $f'(1)\simeq -0{,}786$

(c) $y-0{,}382=\frac{1}{0{,}786}(x-1)$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}, \qquad 0 \leq x \leq a$$

(a) Halle el valor de a.

(b) Halle la media de X.

Solución:

(a) Lo mas sencillo es probar valores con la calculadora para conseguir

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Así se obtiene $a \simeq 1{,}40$.

(b) Con este valor:

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}550$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

Cada vez que una pelota bota, alcanza un 95 % de la altura lograda en el bote anterior. Inicialmente la pelota se deja caer desde una altura de 4 metros.

(a) ¿Qué altura alcanza la pelota después del cuarto bote?

(b) ¿Cuántas veces bota la pelota antes de que ya no alcance una altura de 1 metro?

(c) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?

Solución:

(a) Despues del primer bote alcanza una altura $h_1 = 4 \cdot 0{,}95 = 3{,}8$ m. Luego sigue una progresión geométrica de razón $r = 0{,}95$ de forma que

$$h_4 = 3{,}8 \cdot 0{,}95^3 \simeq 3{,}26$$

(b) Debe ocurrir

$$\begin{aligned}
&3{,}8 \cdot 0{,}95^{n-1} < 1\\
&0{,}95^{n-1} < \frac{1}{3{,}8}\\
&\ln 0{,}95^{n-1} < -\ln 3{,}8\\
&(n-1)\ln 0{,}95 < -\ln 3{,}8\\
&n-1 > -\frac{\ln 3{,}8}{\ln 0{,}95} = 26{,}03\\
&n > 1 + 26{,}03 = 27{,}03
\end{aligned}$$

Hemos cambiado el sentido de la desigualdad al dividir por $\ln 0{,}95$ que es negativo. Debe dar 28 botes.

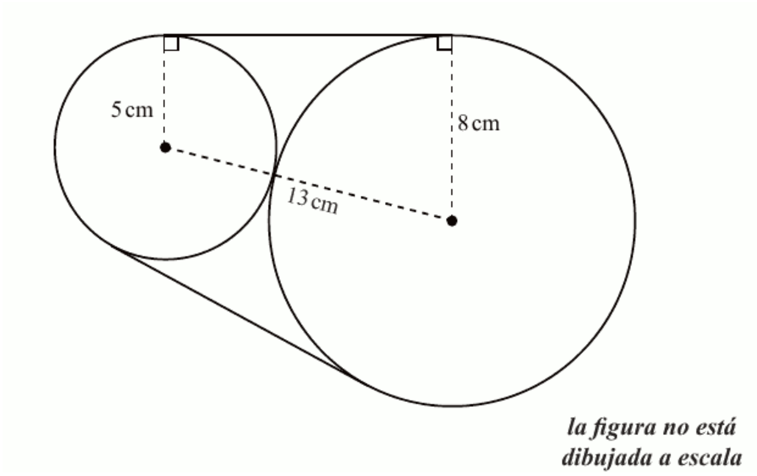
(c) La distancia total que recorre la pelota es

$$d = 4 + 2 \cdot \frac{3{,}8}{1-0{,}95} = 156 \text{ m}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (8 puntos)

Dos discos, uno de 8 cm de radio y otro de 5 cm de radio, se colocan de tal forma que se estén tocando. Se ata un trozo de cuerda alrededor de los dos discos, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



Calcule la longitud de cuerda que se necesita para rodear los discos.

Solución:

Calculamos en primer lugar la longitud del segmento de tangente. Puede calcularse por el teorema de Pitágoras:

$$T = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

El ángulo que forma la línea de los centros con el radio del círculo mayor es

$$cos\varphi = \frac{3}{13} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \simeq 1{,}34$$

y el que forma con el radio del círculo pequeño es $\pi - \varphi$.

La longitud de la cuerda debe ser igual a dos vece el segmento de tangente más la longitud de un arco de $2\pi - 2\varphi$ en el disco grande y un arco de $2\pi - 2(\pi - \varphi) = 2\varphi$ en el disco pequeño. En total

$$l = 2 \cdot 4\sqrt{10} + 8(2\pi - 2\varphi) + 5 \cdot 2\varphi \simeq 67{,}5 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

8.2. Sección B

Ejercicio 10. (14 puntos)

En un puesto del mercado se venden manzanas, peras y ciruelas.

(a) Los pesos de las manzanas siguen una distribución normal de media 200 gramos y con una desviación típica de 25 gramos.

  (I) Sabiendo que en el puesto hay 450 manzanas, ¿cuál es el número esperado de manzanas con un peso superior a 225 gramos?

  (II) Sabiendo que el 70 % de las manzanas pesa menos de m gramos, halle el valor de m.

(b) Los pesos de las peras siguen una distribución normal de media μ gramos y con una desviación típica de σ gramos. Sabiendo que el 8 % de estas peras tiene un peso superior a 270 gramos y que el 15 % tiene un peso inferior a 250 gramos, halle μ y σ.

(c) Los pesos de las ciruelas siguen una distribución normal de media 80 gramos y con una desviación típica de 4 gramos. Se cogen 5 ciruelas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas pesen más de 82 gramos?

Solución:

(a) (I) Calculamos la probabilidad de que una manzana pese más de 225 g

$$p = \text{p}(X > 225) \simeq 0{,}159$$

Sea X la variable aleatoria número de manzanas de peso mayor que 225 g- En la binomial $\mathrm{B}(450, p)$ el valor esperado es

$$\mathrm{E}(X) = 450 \cdot p \simeq 71{,}4$$

(II) Sabiendo ahora que

$$\mathrm{p}(X < m) = 0{,}70$$

con la función inversa de la función de distribución que encontramos en la calculadora encontramos $m \simeq 213$.

(b) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Conocemos las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{p}(X > 270) = 0{,}08 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(X < 270) = 0{,}92$$
$$\mathrm{p}(X < 250) = 0{,}15$$

Tipificamos la variable y obtenemos

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{270-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 \quad \Longrightarrow \quad \frac{270-\mu}{\sigma} \simeq -1{,}04$$
$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{250-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}15 \quad \Longrightarrow \quad \frac{250-\mu}{\sigma} \simeq 1{,}41$$

Obteniendo los valores con la calculadora y resolviendo el sistema resulta $\mu \simeq 258$, $\sigma \simeq 8{,}19$.

(c) Sea $X \sim \mathrm{N}(80, 4)$. Con esta distribución:

$$p = \mathrm{p}(X > 82) \simeq 0{,}309$$

El número de ciruelas que pesan más de 82 g sigue en este caso una binomial $\mathrm{B}(5, p)$ con la probabilidad p calculada anteriormente. La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(X = 3) \simeq 0{,}140$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (24 puntos)

(a) Halle los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución y el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ x + 5y - 2z = 1 \\ 16y - 6z = k \end{cases}$$

(b) Sabiendo que el sistema de ecuaciones se puede resolver, halle las soluciones en forma de ecuación vectorial de una recta, $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, donde las componentes de $\vec{b}$ son números enteros.

(c) El plano π es paralelo tanto a la recta del apartado (b) como a la recta

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

Sabiendo que el punto $(1, 2, 0)$ pertenece a π, compruebe que la ecuación cartesiana de π es $16x + 24y - 11z = 64$.

(d) El eje z corta al plano π en el punto P. Halle las coordenadas de P.

(e) Halle el ángulo entre la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{2}$$

y el plano π.

Solución:

(*a*) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 16 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 16 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, el rango de la matriz no puede ser 3. Es fácil ver que el rango es 2.

Veamos cuánto vale el rango de la matriz ampliada según los valores de k. Tomemos dos columnas independientes de la matriz de coeficientes y añadamos una columna con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 16 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 16 & k \end{vmatrix} = 8k + 32$$

El determinante se anula para $k = -4$. Entonces

– Para $k \neq -4$ el sistema es incompatible.
– Para $k = -4$ el sistema es compatible indeterminado.

(*b*) Escojamos dos ecuaciones independientes, por ejemplo las dos primeras

$$\begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ x + 5y - 2z = 1 \end{cases}$$

Tomamos $x = \lambda$ como parámetro y el sistema queda:

$$\begin{cases} -3y + z = 3 - \lambda \\ 5y - 2z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Resolviendo por cualquier método obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -18 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(*c*) La ecuación del plano como determinante es

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y-2 & -2 & 3 \\ z & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene $16x + 24y - 11z - 64 = 0$.

(*d*) Hacemos $x = y = 0$ en la ecuación del plano y obtenemos $z = -\frac{64}{3}$. El punto es $P\left(0, 0, -\frac{64}{3}\right)$.

(*e*) Los vectores directores de la recta y normal al plano son

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \end{pmatrix}$$

El ángulo agudo que forman la recta y el plano está dado por

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{122}{\sqrt{29}\sqrt{953}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \simeq 38{,}4^\circ$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (22 puntos)

Una partícula se mueve en línea recta a una velocidad de v metros por segundo. En un instante cualquiera, t segundos, $0 \leq t < \frac{3\pi}{4}$, la velocidad viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2 + 1 = 0.$$

También se sabe que $v = 1$ cuando $t = 0$.

(*a*) Halle una expresión para v en función de t.

(*b*) Dibuje aproximadamente la gráfica de v en función de t, mostrando claramente las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de todas las asíntotas.

(*c*) (I) Escriba el tiempo T para el cual la velocidad es igual a cero.

(II) Halle la distancia recorrida en el intervalo $[0, T]$.

(d) Halle una expresión para el desplazamiento s en función de t, sabiendo que $s=0$ cuando $t=0$.

(e) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, compruebe que

$$s=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1+v^2}$$

Solución:

(a) Separando las variables e integrando

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=-\,\mathrm{d}t\\
&\operatorname{artg}v=-t+C\\
&v=\operatorname{tg}(C-t)
\end{aligned}$$

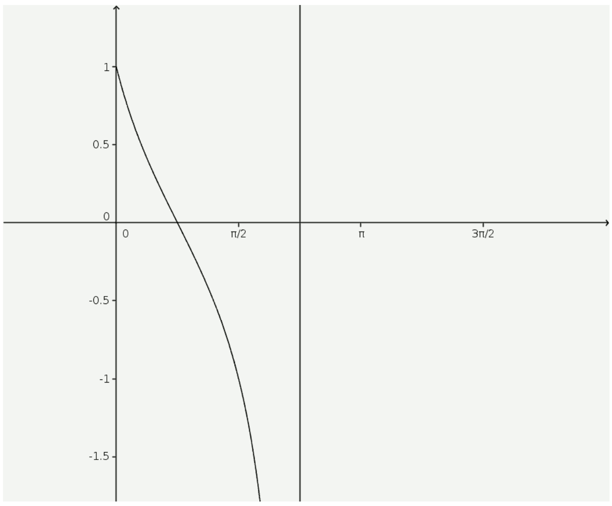
Para $t=0$, $v=1$. Entonces

$$\operatorname{tg}C=1 \quad\Longrightarrow\quad C=\frac{\pi}{4}$$

La función queda:

$$v=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$$

(b)



(c) (I) La velocidad es cero para $t=\frac{\pi}{4}$.

(II) Calculamos la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,\mathrm{d}t$$

Puede calcularse exactamente (la integral de la tangente es menos el logaritmo del coseno). La calculadora nos da 0,347.

(d) Calculamos ahora la integral

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^t v\,\mathrm{d}t=\int_0^t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^t\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}\,\mathrm{d}t\\
&=\left[\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]_0^t\\
&=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)+\frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

(e) Teniendo en cuenta:

$$1+\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}\quad\Longrightarrow\quad\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$$

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2x)$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
s &= \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + \frac{1}{2}\ln 2 \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) + \frac{1}{2}\ln 2 \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1 + v^2) + \frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{2}{1 + v^2}
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

9. 2013. Primer examen. TZ1

9.1. Section A

Ejercicio 1. (6 puntos)

(*a*) If $w = 2 + 2i$, find the modulus and argument of w.

(*b*) Given $z = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$, find in its simplest form w^4z^6.

Solución:

(*a*) El módulo es $2\sqrt{2}$ y el argumento es $\frac{\pi}{4}$.

(*b*) $w^4z^6 = 64_\pi \cdot 1_{5\pi} = 64_{6\pi} = 64$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

Consider the points $A(1,2,3)$, $B(1,0,5)$ and $C(2,-1,4)$.

(*a*) Find $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

(*b*) Hence find the area of the triangle ABC.

Solución:

(*a*)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \;; \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;; \qquad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 0 & 1 \\ \vec{\jmath} & -2 & -1 \\ \vec{k} & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(*b*) El área es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Given $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, find the matrix X, such that $AXA^{-1} = B$.

Solución:

Despejamos la matriz X:

$$X = A^{-1}BA = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

The probability density function of the random variable X is defined as

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

find $\mathrm{E}(X)$.

Solución:

El valor esperado se calcula mediante la integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(-\cos x) && \text{integrando por partes} \\
&= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

Paint is poured into a tray where it forms a circular pool with a uniform thickness of 0,5 cm. If the paint is poured at a constant rate of 4 $\mathrm{cm}^3 seg^{-1}$, find the rate of increase of the radius of the circle when the radius is 20 cm.

Solución:

Tenemos que

$$V = \pi r^2 h = 0{,}5\pi r^2$$

Puesto que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4$:

$$4 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0{,}5\pi 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi r}$$

Cuando $r = 20$ cm, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5\pi}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

The matrix A is such that $A^2 = I$, where I is the identity matrix. Use mathematical induction to prove that $(A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$, for all $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

- La igualdad se cumple evidentemente para $n = 1$.
- Supongamos que se cumple para $n = k$:

  $$(A+I)^k = 2^{k-1}(A+I)$$

  y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n = k+1$:

  $$\begin{aligned}
  (A+I)^{k+1} &= (A+I)^k(A+I) \\
  &= 2^{k-1}(A+I)(A+I) \\
  &= 2^{k-1}(A^2+2A+I)) && \text{puesto que } A^2 = I \\
  &= 2^{k-1}(2A+2I \\
  &= 2\cdot 2^{k-1}(A+I) \\
  &= 2^k(A+I)
  \end{aligned}$$

– Como consecuencia del principio de inducción, la igualdad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

A curve is defined by the equation $8y\ln x - 2x^2 + 4y^2 = 7$. Find the equation of the tangent to the curve at the point where $x = 1$ and $y > 0$.

Solución:

En primer lugar, calculamos la ordenada del punto de tangencia. Para $x = 1$ e $y > 0$:

$$-2 + 4y^2 = 7 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

Derivamos:

$$y'\ln x + \frac{1}{x}\,y - 4x + 8yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{4x - \frac{1}{x}}{8y + \ln x}$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$:

$$m = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}\,(x - 1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

The first terms of an arithmetic sequence are

$$\frac{1}{\log_2 x},\ \frac{1}{\log_8 x},\ \frac{1}{\log_{32} x},\ \frac{1}{\log_{128} x}\ \ldots$$

Find x if the sum of the first 20 terms of the sequence is equal to 100.

Solución:

Escribiendo todos los logaritmos en base 2 la suma puede escribirse:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_8 x} + \frac{1}{\log_{32} x} + \frac{1}{\log_{128} x} + \ldots \\ &= \frac{1}{\log_2 x} + \frac{3}{\log_2 x} + \frac{5}{\log_2 x} + \frac{7}{\log_2 x} + \ldots \\ &= \frac{1}{\log_2 x}\,(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots) \\ &= \frac{1}{\log_2 x}\,(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 1 + 19 \cdot 2) \\ &= \frac{1}{\log_2 x}\,(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 39) \end{aligned}$$

Como la suma es igual a 100:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{(1 + 39) \cdot 20}{2} = 100\ ; \qquad \log_2 x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (6 puntos)

Two events A and B are such that $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}7$ and $\mathrm{p}(A \mid B') = 0{,}6$. Find $\mathrm{p}(B)$.

Solución:

$$0{,}6 = \mathrm{p}(A \mid B') = \frac{\mathrm{p}(A \cap B')}{\mathrm{p}(B')} = \frac{\mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B)}{1 - \mathrm{p}(B)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}6\mathrm{p}(B)$$

Por otra parte

$$0,7 = \mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}7 - \mathrm{p}(B)$$

Igualando

$$0{,}6 - 0{,}6\mathrm{p}(B) = 0{,}7 - \mathrm{p}(B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(B) = \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (7 puntos)

(a) Find all values of x for $0{,}1 \le x \le 1$ such that $\sin(\pi x^{-1}) = 0$.

(b) Find

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \pi x^{-2} \sin(\pi x^{-1})\,\mathrm{d}x$$

showing that it takes different integer values when n is even and when n is odd.

(c) Evaluate

$$\int_{0{,}1}^{1} \left|\pi x^{-2} \sin\left(\pi x^{-1}\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) La función $\operatorname{sen} x$ se hace cero para $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\sin(\pi x^{-1}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{x} = k\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$$

Si debe cumplirse $0{,}1 \le x \le 1$ tiene que ser $k \in \mathbb{Z}^+$ y $k \le 10$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \pi x^{-2} \sin(\pi x^{-1})\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\pi}{x^2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{x}\right) \\ &= \left[\cos\frac{\pi}{x}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \\ &= \cos n\pi - \cos(n+1)\pi\end{aligned}$$

Si n es par la integral es igual a 2 y si es impar es igual a -2.

(c) Sea $f(x) = \left|\pi x^{-2} \sin\left(\pi x^{-1}\right)\right|$. Entonces

$$\int_{\frac{1}{10}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{9}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En el segundo miembro, todas las integrales son iguales a 2 y hay 9 de ellas. Por tanto

$$\int_{\frac{1}{10}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 18$$

♠♠♠♠

9.2. Section B

Ejercicio 11. (19 puntos)

(a) (I) Express $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ in the form $a\cos x - b\sin x$ where $a, b \in \mathbb{R}$.

(II) Hence solve $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1; \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$.

(b) Let $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

(I) Show that $x = 1$ is a zero of p.

(II) Hence find all the solutions of $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

(III) Express $\sin 2\theta \cos\theta + \sin^2\theta$ in terms of $\sin\theta$.

(IV) Hence solve $\sin 2\theta + \sin^2\theta = 1$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solución:

(a) (I) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}\cos x - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$

(II) Dividiendo los dos miembros de la ecuación por 2:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{3}\ ; \qquad \frac{\pi}{6} + x = \frac{5\pi}{3}$$

las soluciones son $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

(b) (I) $p(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$.

(II) Si $x = 1$ es una raíz del polinomio, $x - 1$ es un factor y podemos escribir

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(2x^2 + x - 1)$$

Igualando a cero ambos factores obtenemos las soluciones $x = 1$, $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$.

(III) Sustituyendo $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos^\theta + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= 2\operatorname{sen}\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= -2\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

(IV) Podemos escribir la ecuación:

$$2\operatorname{sen}^3\theta - \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$$

cuyas soluciones son según hemos visto $\operatorname{sen}\theta = -1$, $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$.
Las soluciones para el ángulo son $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (19 puntos)

(a) Express $4x^2 - 4x + 5$ in the form $a(x-h)^2 + k$ where $a, h, k \in \mathbb{Q}$.

(b) The graph of $y = x^2$ is transformed onto the graph of $y = 4x^2 - 4x + 5$. Describe a sequence of transformations that does this, making the order of transformations clear.

The function f is defined by

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 5}$$

(c) Sketch the graph of $y = f(x)$.

(d) Find the range of f.

(e) By using a suitable substitution show that

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}x$$

(f) Prove that

$$\int_1^{3,5} \frac{1}{4x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$$

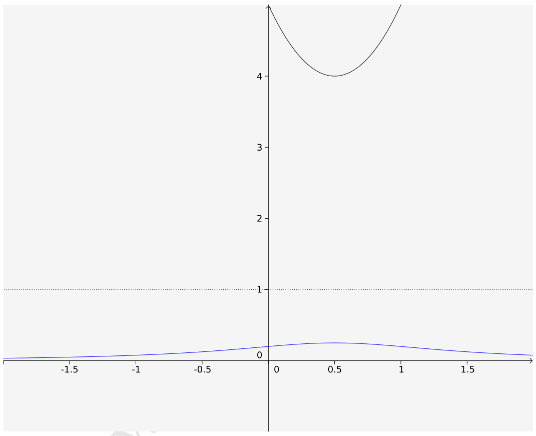
Solución:

(a) $4x^2-4x+5 = 4\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right) = 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right] = 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right] = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$

(b) Se han efectuado las siguietes transformaciones;

- Traslación en la dirección del eje OX de vector $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,
- Cambio de escala en el eje OY multiplicando la función por 4,
- Traslación en la dirección de OY de vector $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

(c)



(d) El máximo está en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. El rango de la función es el intervalo $\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

(e) Haciendo $u = x-\frac{1}{2}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x^2-4x+5} &= \int \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

(f) Teniendo en cuenta que para $x=1$, $u=\frac{1}{2}$ y para $x=3{,}5$, $u=3$:

$$\begin{aligned}\int_1^{3,5} \frac{1}{4x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{4}\Big[\operatorname{artg} u\Big]_{\frac{1}{2}}^{3}\\ &= \frac{1}{4}\left(\operatorname{artg} 3 - \operatorname{artg}\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

El resultado se obtiene teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{4}\left(\operatorname{artg} 3 - \operatorname{artg}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{artg}\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\operatorname{artg} 1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (22 puntos)

On Saturday, Alfred and Beatrice play 6 different games against each other. In each game, one of the two wins. The probability that Alfred wins any one of these games is $\frac{2}{3}$.

(*a*) Show that the probability that Alfred wins exactly 4 of the games is $\frac{80}{243}$.

(*b*) (I) Explain why the total number of possible outcomes for the results of the 6 games is 64.

(II) By expanding $(1+x)^6$ and choosing a suitable value for x, prove

$$64 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

(III) State the meaning of this equality in the context of the 6 games played.

(*c*) The following day Alfred and Beatrice play the 6 games again. Assume that the probability that Alfred wins any one of these games is still $\frac{2}{3}$.

(I) Find an expression for the probability Alfred wins 4 games on the first day and 2 on the second day. Give your answer in the form

$$\binom{6}{r}^r \left(\frac{2}{3}\right)^s \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

where the values of r, s and t are to be found.

(II) Using your answer to (*c*) (I) and 6 similar expressions write down the probability that Alfred wins a total of 6 games over the two days as the sum of 7 probabilities.

(III) Hence prove that

$$\binom{12}{6} = \binom{6}{0}^2 + \binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 + \binom{6}{3}^2 + \binom{6}{4}^2 + \binom{6}{5}^2 + \binom{6}{6}^2$$

(*d*) Alfred and Beatrice play n games. Let A denote the number of games Alfred wins. The expected value of A can be written as

$$\mathrm{E}(A) = \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r}\frac{a^r}{b^n}$$

(I) Find the values of a and b.

(II) By differentiating the expansion of $(1+x)^n$ prove that the expected number of games Alfred wins is $\frac{2n}{3}$.

Solución:

(*a*) Sea X la variable aleatoria que representa el número de juegos ganados por Alfred. Entonces $X \sim \mathrm{B}\left(6, \frac{2}{3}\right)$ y la probabilidad de que gane exactamente 4 juegos es

$$\mathrm{p}(X=4) = \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

(*b*) (I) Por la regla del producto. Cada juego puede tener dos resultados,en total para 6 juegos

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 64$$

También se puede ver como variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 6 en 6.

(II) El desarrollo de $(1+x)^6$ es

$$(1+x)^6 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{5}x^5 + \binom{6}{6}x^6$$

Dando a x el valor 1 se obtiene:

$$64 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

(III) El número de posibles resultados de las seis pruebas aparece como suma de las que Alfred gana 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6 de ellas.

(*c*) (I) La probabilidad será:

$$p = \mathrm{p}(X=4)\cdot\mathrm{p}(X=2) = \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

y, puesto que $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$:

$$p = \binom{6}{2}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

(II) Para que gane 6 juegos entre los días, debe ganar 0 un día y 6 en otro, o 1 un día y 5 en otro, etc. La probabilidad de que gane seis juegos es igual a

$$\binom{6}{0}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{1}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{2}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{3}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$
$$+\binom{6}{4}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{5}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6+\binom{6}{6}^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

(III) La probabilidad de que gane 6 de los 12 juegos es

$$\binom{12}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

Igualando ambas expresiones de la misma probabilidad se obtiene:

$$\binom{12}{6}=\binom{6}{0}^2+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2+\binom{6}{3}^2+\binom{6}{4}^2+\binom{6}{5}^2+\binom{6}{6}^2$$

(*d*) (I) El valor esperado de juegos que gana Alfred es

$$\mathrm{E}(A)=\sum_{r=0}^{n} r\cdot \mathrm{p}(A=r)=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\binom{n}{r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\binom{n}{r}\frac{2^r}{3^n}$$

Por tanto $a=2$ y $b=3$.

(II) Sea

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r\ ;\qquad \text{derivando:}\qquad n(1+x)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}rx^{r-1}$$

Entonces:

$$\mathrm{E}(A)=\sum_{r=1}^{n} r\cdot\binom{n}{r}\frac{2^r}{3^n}=\frac{2}{3^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}r2^{r-1}=\frac{2}{3^n}\cdot n3^{n-1}=\frac{2n}{3}$$

♠♠♠♠

10. 2013. Segundo examen. TZ1

10.1. Section A

Ejercicio 1. (4 puntos)

The marks obtained by a group of students in a class test are shown below.

Marks	Frequency
5	6
6	k
7	3
8	1
9	2
10	1

Given the mean of the marks is 6,5, find the value of k.

Solución:

$$\frac{30+6k+21+8+18+10}{6+k+3+1+2+1}=\frac{87+6k}{13+k}=6{,}5 \quad\Longrightarrow\quad k=5$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Find the value of k such that the following system of equations does not have a unique solution.

$$\begin{cases} kx+y+2z=4\\ -y+4z=5\\ 3x+4y+2z=1 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-18k+18$$

El determinante se anula para $k=1$. Para $k\neq 1$ el determinante es distinto de cero. En consecuencia, el rango de la matriz es 3 igual al rango de la matriz ampliada y al número de incógnitas. El sistema será compatible determinado y su solución será única.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Emily walks to school every day. The length of time this takes can be modelled by a normal distribution with a mean of 11 minutes and a standard deviation of 3 minutes. She is late if her journey takes more than 15 minutes.

(a) Find the probability she is late next Monday.

(b) Find the probability she is late at least once during the next week (Monday to Friday).

Solución:

(a) Sea X el tiempo que Emily tarda en llegar. $X \sim \mathrm{N}(11,3)$.

$$\mathrm{p}(X > 15) \simeq 0{,}0912$$

(b) Sea Y el número de días que llega tarde. $Y \sim \mathrm{B}(5,p)$ donde p es la probabilidad calculada en el apartado anterior:

$$\mathrm{p}(Y \geq 1) = 1 - \mathrm{p}(X = 0) \simeq 0{,}380$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Let $f(x) = \sin(x-1), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$. Find the volume of the solid formed when the region bounded by $y = f(x)$, and the lines $x = 0$, $y = 0$ and $y = 1$ is rotated by 2π about the y-axis.

Solución:

El volumen es igual a

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 (1 + \operatorname{arsen} y)^2 \, \mathrm{d}y \simeq 2{,}61\pi \simeq 8{,}20$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

A rectangle is drawn around a sector of a circle as shown. If the angle of the sector is 1 radian and the area of the sector is 7 cm^2, find the dimensions of the rectangle, giving your answers to the nearest millimetre.

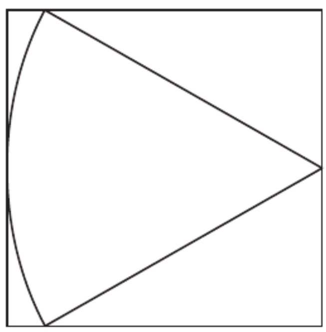


diagram not to scale

Solución:

La base del rectángulo es igual al radio. Puesto que el área del sector es 700 mm^2

$$\frac{1}{2}r^2\varphi = \frac{1}{2}r^2 = 700 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{1400} = 10\sqrt{14} \simeq 37 \text{ mm}$$

La altura del rectángulo es igual a la longitud de la cuerda correspondiente al arco del dibujo. Llamando l a esta longitud:

$$\frac{l}{2} = r \operatorname{sen} 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad l = 2 \cdot 10\sqrt{14} \operatorname{sen} 0{,}5 \simeq 36 \text{ mm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

A polynomial $p(x)$ with real coefficients is of degree five. The equation $p(x) = 0$ has a complex root $2 + i$. The graph of $y = p(x)$ has the x-axis as a tangent at $(2, 0)$ and intersects the coordinate axes at $(-1, 0)$ and $(0, 4)$. Find $p(x)$ in factorised form with real coefficients.

Solución:

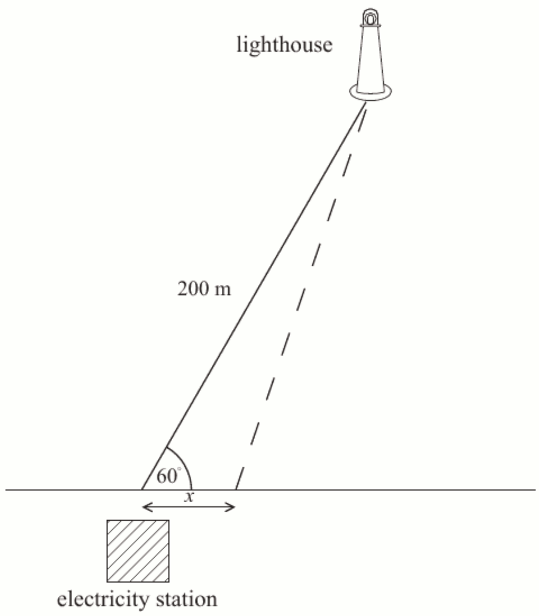
El polinomio tiene raíces complejas $x = 2 + i$ y $x = 2 - i$. Tiene una raíz real doble $x = 2$ y una raíz real simple $x = -1$. Por tanto, de acuerdo con el teorema del factor:

$$p(x) = (x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - 2)^2(x + 1) = (x^2 - 4x + 5)(x - 2)^2(x + 1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

An electricity station is on the edge of a straight coastline. A lighthouse is located in the sea 200 m from the electricity station. The angle between the coastline and the line joining the lighthouse with the electricity station is 60°. A cable needs to be laid connecting the lighthouse to the electricity station. It is decided to lay the cable in a straight line to the coast and then along the coast to the electricity station. The length of cable laid along the coastline is x metres. This information is illustrated in the diagram below.



The cost of laying the cable along the sea bed is US\$80 per metre, and the cost of laying it on land is US\$20 per metre.

(a) Find, in terms of x, an expression for the cost of laying the cable.

(b) Find the value of x, to the nearest metre, such that this cost is minimized.

Solución:

(a) La longitud de cable por el mar puede calcularse por el teorema del coseno y es igual a

$$\sqrt{40000 + x^2 - 2 \cdot 200 \cdot x \cos 60^\circ} = \sqrt{40000 + x^2 - 200x}$$

El coste es

$$f(x) = 20x + 80\sqrt{40000 + x^2 - 200x}$$

(b) El mínimo puede obtenerse con la calculadora o igualando a cero la derivada:

$$f'(x) = 20 + \frac{80(2x-200)}{2\sqrt{40000+x^2-200x}} = 0$$

En cualquier caso se obtiene $x \simeq 55$ m.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

Three boys and three girls are to sit on a bench for a photograph.

(a) Find the number of ways this can be done if the three girls must sit together.

(b) Find the number of ways this can be done if the three girls must all sit apart.

Solución:

(a) Hay cuatro modos de que las chicas estén juntas: sin chicos a su izquierda, o con uno, dos o tres chicos a su izquierda. Para cada uno de ellos hay 3! maneras de colocar a las chicas y 3! maneras de colocar a los chicos. El número total es

$$4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$$

(b) Para que no estén dos chicas juntas hay tambien 4 modos de situarlas: en las posiciones $(1,3,5)$, $(2,4,6)$, $(1,3,6)$ o $(1,4,6)$. Como en el caso anterior habrá 144 maneras de situar a los chicos y a las chicas.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

(a) Prove that the equation $3x^2+2kx+k-1=0$ has two distinct real roots for all values of $k \in \mathbb{R}$.

(b) Find the value of k for which the two roots of the equation are closest together.

Solución:

(a) El discriminante de la ecuación es $4k^2-12(k-1) = 4k^2-12k+12 = (2k-3)^2+3 > 0$. Puesto que el discriminante es positivo, el polinomio tiene dos raíces.

(b) Para que las raíces estén próximas, debe ser mínima su diferencia. En general, si Δ es discriminante:

$$x_1 - x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad \Longrightarrow \quad (x_1-x_2)^2 = \frac{\Delta}{a^2}$$

En este caso, como a (el coeficiente de x^2) no depende de k, simplemente tiene que ser mínimo el discriminante:

$$\Delta = 4k^2-12k+12 \; ; \qquad \Delta' = 8k-12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

El mínimo de la distancia entre las raíces se da para $k = \frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (7 puntos)

A ferry carries cars across a river. There is a fixed time of T minutes between crossings. The arrival of cars at the crossing can be assumed to follow a Poisson distribution with a mean of one car every four minutes. Let X denote the number of cars that arrive in T minutes.

(a) Find T, to the nearest minute, if $P(X \leq 3) = 0{,}6$.

(b) It is now decided that the time between crossings, T, will be 10 minutes. The ferry can carry a maximum of three cars on each trip. One day all the cars waiting at 13:00 get on the ferry. Find the probability that all the cars that arrive in the next 20 minutes will get on either the 13:10 or the 13:20 ferry.

Solución:

(a) Si la media de llegada de coches es una cada cuatro minutos, en T minutos la media será $T/4$. La variable X sigue entonces una distribución Po $\left(\frac{T}{4}\right)$. Entonces

$$e^{-\frac{T}{4}}\left(1+\frac{T}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{T}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{T}{4}\right)^3\right)=0{,}6$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $T\simeq 12{,}8$.
También podríamos haber resuelto con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\text{poissoncdf}(x/4,3)-0{,}6=0$$

y obtenemos el mismo resultado de una forma más sencilla.

(b) El número de coches que llegan en 10 minutos sigue una distribución $X\sim \text{Po}(2{,}5)$. Llamemos X_1 el número de coches que llegan en los primeros 10 minutos y X_2 los que llegan en los siguientes 10 minutos. La probabilidad de que entren todos en los ferrys es:

$$p=\text{p}(X_1\leq 3)\cdot\text{p}(X_2\leq 3)+\text{p}(X_1=4)\cdot\text{p}(X_2\leq 2)+\text{p}(X_1=5)\cdot\text{p}(X_2\leq 1)+\text{p}(X_1=6)\cdot\text{p}(X_2=0)$$

El resultado con tres cifras significativas es 0,668.

♠♠♠♠

10.2. Section B

Ejercicio 11. (20 puntos)

Consider the points $P(-3,-1,2)$ and $Q(5,5,6)$.

(a) Find a vector equation for the line, L_1, which passes through the points P and Q.

(b) The line L_2 has equation

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$$

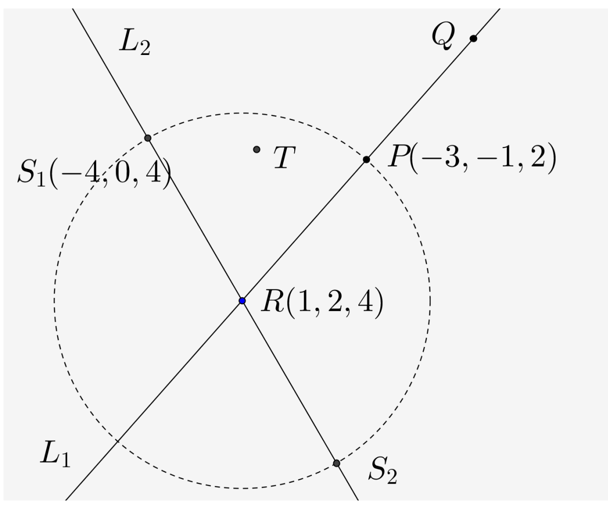
Show that L_1 and L_2 intersect at the point $R(1,2,4)$.

(c) Find the acute angle between L_1 and L_2.

(d) Let S be a point on L_2 such that $|\vec{RP}|=|\vec{RS}|$. Show that one of the possible positions for S is $S_1(-4,0,4)$ and find the coordinates of the other possible position, S_2.

(e) Find a vector equation of the line which passes through R and bisects PRS_1.

Solución:



(a) Tomando como vector director

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La ecuación resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) El punto $R(1,2,4)$ cumple ambas ecuaciones. La de L_1 para $\lambda = 1$ y la de L_2 también para $\lambda = 1$.

(c) Calculamos mediante el producto escalar de los vectores directores:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{5\cdot 4 + 2\cdot 3 + 0\cdot 2}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = \frac{26}{29}$$

(d) Vamos a calcular la ecuación de la superficie esférica de centro R y radio RP. El vector $\vec{RP}$ es

$$\vec{RP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \implies RP = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$$

La ecuación de la superficie esférica es

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 29$$

La intersección de esta superficie con la recta L_2 nos da los puntos que buscamos:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 29 \\ x = -4 + 5s \\ y = 2s \\ z = 4 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos los puntos $S_1(-4,0,4)$ y $S_2(6,4,4)$.

(e) La recta pasa por R y por $T\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$ que es el punto medio de P y S_1. Podemos tomar como vector de dirección el vector $\vec{RT}$:

$$\vec{RT} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La recta bisectora es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (21 puntos)

A particle, A, is moving along a straight line. The velocity, v_A m s^{-1}, of A t seconds after its motion begins is given by

$$v_A = t^3 - 5t^2 + 6t$$

(a) Sketch the graph of $v_A = t^3 - 5t^2 + 6t$ for $t \geq 0$, with v_A on the vertical axis and t on the horizontal. Show on your sketch the local maximum and minimum points, and the intercepts with the t-axis.

(b) Write down the times for which the velocity of the particle is increasing.

(c) Write down the times for which the magnitude of the velocity of the particle is increasing.

At $t = 0$ the particle is at point O on the line.

(d) Find an expression for the particle's displacement, x_A m, from O at time t.

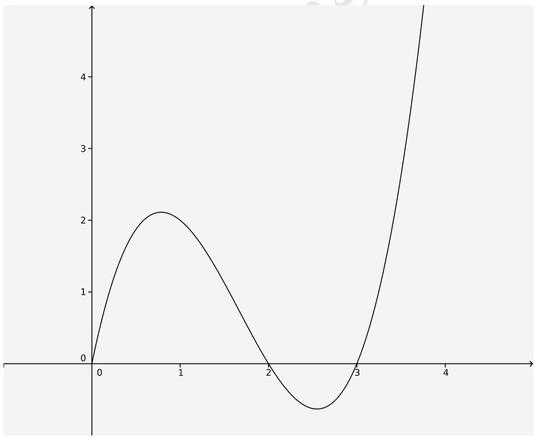
A second particle, B, moving along the same line, has position x_B m, velocity v_B m s^{-1} and acceleration, a_B m s^{-2}, where $a_B = -2v_B$ for $t \geq 0$. At $t = 0$, $x_B = 20$ and $v_B = -20$.

(e) Find an expression for v_B in terms of t.

(f) Find the value of t when the two particles meet.

Solución:

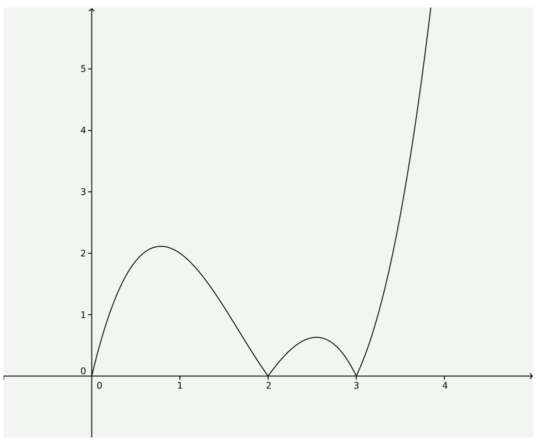
(a)



El máximo se da para $t = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \simeq 0{,}785$ y el mínimo para $t = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \simeq 2{,}55$.

(b) La velocidad está aumentando en todo momento salvo entre $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ y $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$.

(c) El módulo de la velocidad se representa en la siguiente figura



El módulo de la velocidad es creciente excepto en el intervalo $\left[\frac{5-\sqrt{7}}{3}, 2\right]$ y en $\left[\frac{5+\sqrt{7}}{3}, 3\right]$.

(*d*) La posición del móvil la obtenemos integrando la velocidad:

$$x_A = \int (t^3 - 5t^2 + 6t)\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + C$$

La constante de integración C vale cero por las condiciones iniciales:

$$x_A = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + 3t^2$$

(*e*) Calculamos la velocidad de la partícula B:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2v\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\,\mathrm{d}t\ ; \qquad \ln(-v) = -2t + C\ ; \qquad v = -e^{-2t+C} = -Ke^{-2t}$$

Puesto que la velocidad inicial es negativa, hemos tomado la primitiva $\ln(-v)$ en lugar de $\ln v$. En el instante inicial la velocidad es igual a -20. Así pues

$$v_B = -20e^{-2t}$$

La posición de la partícula B la obtenemos integrando la velocidad:

$$x_B = \int -20e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -20e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}\right) + C = 10e^{-2t} + C$$

En el instante inicial

$$20 = 10 + C \quad\Longrightarrow\quad C = 10$$

y la posición de la partícula B está dada por

$$x_B = 10\left(1 + e^{-2t}\right)$$

Para calcular el tiempo en que las partículas se encuentran basta obtener (con la calculadora) la intersección de las dos funciones de posición. Hemos obtenido $t \simeq 4,41$ s.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (19 puntos)

The function f has inverse f^{-1} and derivative $f'(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. For all functions with these properties you are given the result that for $a \in \mathbb{R}$ with $b = f(a)$ and $f'(a) \neq 0$

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(*a*) Verify that this is true for $f(x) = x^3 + 1$ at $x = 2$.

(*b*) Given that $g(x) = xe^{x^2}$, show that $g'(x) > 0$ for all values of x.

(*c*) Using the result given at the start of the question, find the value of the gradient function of $y = g^{-1}(x)$ at $x = 2$.

(*d*) (I) With f and g as defined in parts (*a*) and (*b*), solve $g \circ f(x) = 2$.

(II) Let $h(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$. Find $h'(2)$.

Solución:

(*a*) Para la función $f(x)$ tenemos

$$f(x) = x^3 + 1$$
$$f(2) = 9$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f'(2) = 12$$

y para la función inversa:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$
$$\left(f^{-1}\right)'(9) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(9-1)^2}} = \frac{1}{12}$$

Vemos que se cumple

$$f(2) = 9 \quad\Longrightarrow\quad \left(f^{-1}\right)'(9) = \frac{1}{f'(2)}$$

(b) Derivamos la función

$$g'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}2x = e^{x^2}(1+2x^2)$$

La derivada es positiva porque es producto de dos números positivos.

(c) Tenemos que calcular un número x_0 tal que $g(x_0) = 2$ pues entonces

$$\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Resolvemos la ecuación

$$xe^{x^2} = 2$$

y obtenemos $x_0 \simeq 0{,}896$. Entonces:

$$\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(x_0)} \simeq 0{,}157$$

(d) Calculamos la función compuesta:

$$(g \circ f)(x) = g(x^3+1) = (x^3+1)e^{(x^3+1)^2}$$

El resto es un ejercicio de calculadora.

(I) Resolvemos la ecuación

$$(x^3+1)e^{(x^3+1)^2} = 2$$

Llamemos a a la solución de la ecuación. Hemos obtenido $a \simeq -0{,}470$.

(II) La derivada la obtenemos también con la calculadora. Tenemos representada la función $(g \circ f)(x)$:

$$\left[(g \circ f)^{-1}\right]'(2) = \frac{1}{(g \circ f)'(a)}$$

El número $(g \circ f)'(a)$ lo obtenemos con la calculadora a partir de la gráfica de $(g \circ f)(x)$, aproximadamente es igual a 320. Sustituyendo obtenemos

$$\left[(g \circ f)^{-1}\right]'(2) \simeq 0{,}00312$$

♠♠♠♠

11. 2013. Primer examen. TZ2

11.1. Section A

Ejercicio 1. (6 puntos)

Find the exact value of

$$\int_1^2 \left((x-2)^2 + \frac{1}{x} + \sin \pi x\right)\, \mathrm{d}x$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left((x-2)^2 + \frac{1}{x} + \sin \pi x\right)\, \mathrm{d}x &= \left[\frac{(x-2)^3}{3} + \ln x - \frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_1^2 \\ &= \left(\ln 2 - \frac{1}{\pi}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi}\right) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Consider the matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Find $\det A$ and hence write down the matrix A^{-1}.

(b) Find the matrix $A^{-1}B$

Solución:

(a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\,; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (4 puntos)

Expand $(2-3x)^5$ in ascending powers of x, simplifying coefficients.

Solución:

$$\begin{aligned}(2-3x)^5 &= 2^5 - 5\cdot 2^4(3x) + 10\cdot 2^3(3x)^2 - 10\cdot 2^2(3x)^3 + 5\cdot 2(3x)^4 - (3x)^5 \\ &= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

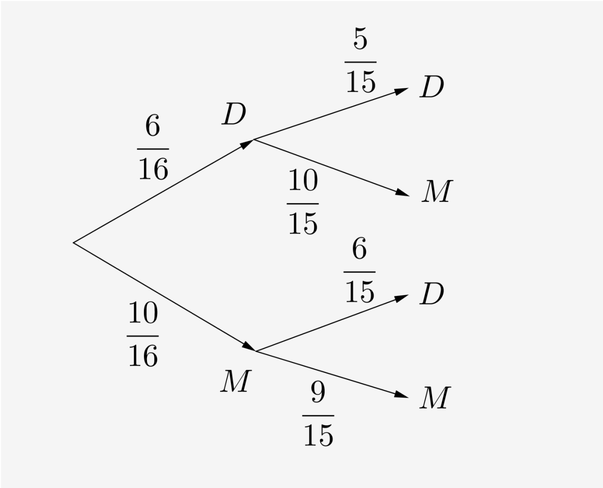
Tim and Caz buy a box of 16 chocolates of which 10 are milk and 6 are dark. Caz randomly takes a chocolate and eats it. Then Tim randomly takes a chocolate and eats it.

(a) Draw a tree diagram representing the possible outcomes, clearly labelling each branch with the correct probability.

(b) Find the probability that Tim and Caz eat the same type of chocolate.

Solución:

(a)



(b) $p = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} + \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} = \frac{120}{16 \cdot 15} = \frac{1}{2}$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (7 puntos)

The curve C is given by

$$y = \frac{x \cos x}{x + \cos x}, \text{ for } x \geq 0$$

(a) Show that

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2}, \qquad x \geq 0.$$

(b) Find the equation of the tangent to C at the point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Solución:

(a) Derivamos el cociente:

$$y' = \frac{(\cos x - x \operatorname{sen} x)(x + \cos x) - (1 - \operatorname{sen} x) x \cos x}{(x + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2}$$

(b) La pendiente es la derivada en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$m = \frac{-\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{4}} = -1$$

La ecuación de la tangente es $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

A geometric sequence has first term a, common ratio r and sum to infinity 76. A second geometric sequence has first term a, common ratio r^3 and sum to infinity 36. Find r.

Solución:

Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{a}{1-r} = 76 \;; \qquad \frac{a}{1-r^3} = 36$$

Resolviendo obtenemos $r = \frac{2}{3}$ (las soluciones que no están comprendidas entre -1 y 1 no son válidas).

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

Given the complex numbers $z_1 = 1 + 3i$ and $z_2 = -1 - i$.

(a) Write down the exact values of $|z_1|$ and $\arg(z_2)$.

(b) Find the minimum value of $|z_1 + \alpha z_2|$, where $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) $|z_1| = \sqrt{10}$, $\quad \arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$.

(b) $z_1 + \alpha z_2 = 1 - \alpha + (3 - \alpha)i$. El módulo de este número es:

$$y = |z_1 + \alpha z_2| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2}$$

Para que sea mínimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2(1-\alpha)(-1) + 2(3-\alpha)(-1)}{2\sqrt{(1-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2}} = \frac{2\alpha - 4}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2}} = 0$$

Y, por consiguiente, $\alpha = 2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

The curve C is given implicitly by the equation

$$\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y \qquad \text{for } y > 0$$

(a) Express $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of x and y.

(b) Find the value of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ at the point on C where $y = 1$ and $x > 0$.

Solución:

(a) Derivando en forma implícita:

$$\frac{2xy - x^2y'}{y^2} - 2 = \frac{y'}{y} \;; \qquad 2xy - x^2y' - 2y^2 = yy' \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{2xy - 2y^2}{x^2 + y}$$

(b) Para $y = 1$, x puede valer 0 o 2. Para $x = 2$:

$$y'(2,1) = \frac{2}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

The function f is given by

$$f(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 3^{-x}}, \qquad \text{for } x > 0.$$

(a) Show that $f(x) > 1$ for all $x > 0$.

(b) Solve the equation $f(x) = 4$.

Solución:

(a) En efecto:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3^x + 1}{3^x - 3^{-x}} && \text{Puesto que } e^{-x} > 0 \\ &> \frac{3^x + 1}{3^x} \\ &= 1 + \frac{1}{3^x} \\ &> 1 \end{aligned}$$

(b) Tenemos que resolver la ecuación:

$$\frac{3^{2x} + 3^x}{3^{2x} - 1} = 4$$

$$3^{2x} + 3^x = 4 \cdot 3^{2x} - 4$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 3^x - 4 = 0$$

$$3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \frac{4}{3}$$

Y entonces

$$x = \log_3 \frac{4}{3} = \log_3 4 - 1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (6 puntos)

(a) Given that:

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{1}{p}\right)$$

where $p \in \mathbb{Z}$, find p.

(b) Hence find the value of

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

Solución:

(a) Aplicando

$$\operatorname{artg} x + \operatorname{artg} y = \operatorname{artg} \frac{x + y}{1 - xy}$$

resulta

$$\operatorname{artg} \frac{1}{5} + \operatorname{artg} \frac{1}{8} = \operatorname{artg} \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}} = \operatorname{artg} \frac{\frac{13}{40}}{\frac{39}{40}} = \operatorname{artg} \frac{1}{3}$$

Por consiguiente $p = 3$.

(b) Aplicando el resultado anterior:

$$\operatorname{artg} \frac{1}{2} + \operatorname{artg} \frac{1}{5} + \operatorname{artg} \frac{1}{8} = \operatorname{artg} \frac{1}{2} + \operatorname{artg} \frac{1}{3} = \operatorname{artg} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

♠♠♠♠

11.2. Section B

Ejercicio 11. (21 puntos)

The vertices of a triangle ABC have coordinates given by $A(-1,2,3)$, $B(4,1,1)$ and $C(3,-2,2)$.

(a) (I) Find the lengths of the sides of the triangle.

(II) Find $\cos\widehat{BAC}$.

(b) (I) Show that $\vec{BC}\times\vec{CA}=-7\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-16\vec{k}$.

(II) Hence, show that the area of the triangle ABC is $\dfrac{1}{2}\sqrt{314}$.

(c) Find the Cartesian equation of the plane containing the triangle ABC.

(d) Find a vector equation of (AB).

The point D on (AB) is such that OD is perpendicular to BC where O is the origin.

(e) (I) Find the coordinates of D.

(II) Show that D does not lie between A and B.

Solución:

(a) (I) Tenemos los siguientes vectores:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad;\quad\vec{AC}=\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}\quad;\quad\vec{BC}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Las longitudes de los lados son:

$$AB=|\vec{AB}|=\sqrt{30}$$
$$AC=|\vec{AC}|=\sqrt{33}$$
$$BC=|\vec{BC}|=\sqrt{11}$$

(II) Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{30+33-11}{2\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{33}}=\frac{26}{3\sqrt{110}}$$

(b) (I) Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{BC}\times\vec{CA}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&-1&-4\\\vec{\jmath}&-3&4\\\vec{k}&1&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-3\\-16\end{pmatrix}=-7\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-16\vec{k}$$

(II) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{49+9+256}=\frac{1}{2}\sqrt{314}$$

(c) Tomamos $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ como vectores directores. La ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x+1&5&4\\y-2&-1&-4\\z-3&-2&-1\end{vmatrix}=0\quad\Longrightarrow\quad-7(x+1)-3(y-2)-16(z-3)=0$$

Quitando los paréntesis resulta $7x+3y+16z-47=0$.

(d) La ecuación vectorial de la recta AB es:

$$\vec{OX}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

(e) (I) Sea $D(-1+5\lambda,2-\lambda,3-2\lambda)$. Si $\vec{OD}\perp\vec{BC}$:

$$\begin{pmatrix}-1+5\lambda\\2-\lambda\\3-2\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}=0\quad\Longrightarrow\quad1-5\lambda-6+3\lambda+3-2\lambda=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda=2$$

y tenemos que el punto es $D(9,0,-1)$.

(II) Su coordenada x no está entre la de A y la de B. En la ecuación de la recta que hemos escrito obtenemos A para $\lambda = 0$, B para $\lambda = 1$ y D para $\lambda = 2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (21 puntos)

The function f is defined by $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, with domain $D = \{x : -1 \le x \le 8\}$.

(a) Express $f(x)$ in the form $A + \dfrac{B}{x+2}$, where A and $B \in \mathbb{Z}$.

(b) Hence show that $f'(x) > 0$ on D.

(c) State the range of f.

(d) (I) Find an expression for $f^{-1}(x)$.

(II) Sketch the graph of $y = f(x)$, showing the points of intersection with both axes.

(III) On the same diagram, sketch the graph of $y = f^{-1}(x)$.

(e) (I) On a different diagram, sketch the graph of $y = f(|x|)$ where $x \in D$.

(II) Find all solutions of the equation $f(|x|) = \dfrac{1}{4}$.

Solución:

(a) Haciendo la división de los dos polinomios:

$$f(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$$

(b) Derivando:

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

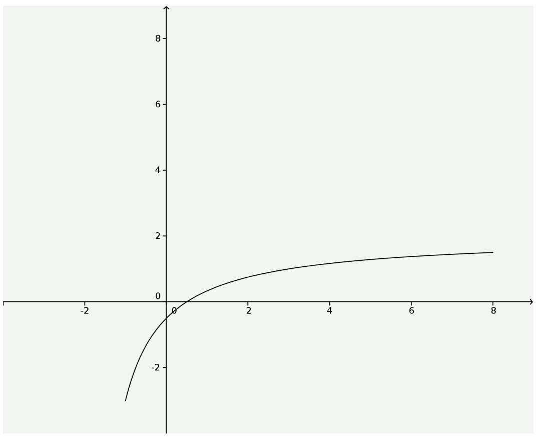
y la función es creciente.

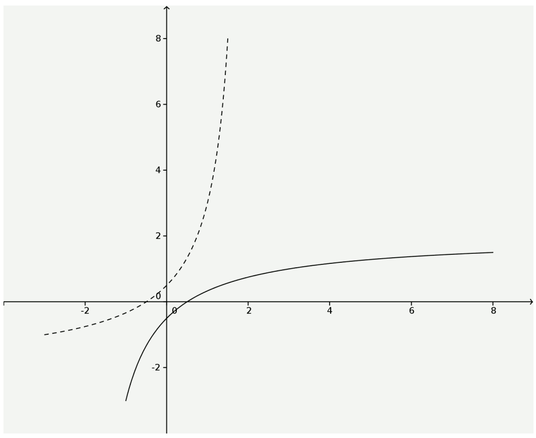
(c) Puesto que f es creciente y $f(-1) = -3$ y $f(8) = \frac{3}{2}$, el rango es el intervalo $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

(d) (I) Intercambiando las variables y despejando se obtiene:

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2}\ ; \qquad -3 \le x \le \frac{3}{2}$$

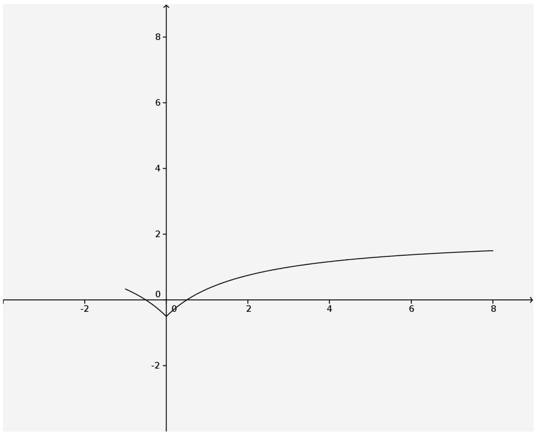
(II) Los puntos de intersección con los ejes son $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.





(III)

(e) (I)



(II) Resolvemos para $x > 0$:

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1}{4}\ ; \qquad 8x+4 = x+2\ ; \qquad 7x+6$$

Así que una solución es $x = \frac{6}{7}$. Por simetría, hay otra solución $x = -\frac{6}{7}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (18 puntos)

(a) (I) Express each of the complex numbers $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ and $z_3 = -2i$ in modulus-argument form.

(II) Hence show that the points in the complex plane representing z_1, z_2 and z_3 form the vertices of an equilateral triangle.

(III) Show that $z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2z_3^{3n}$ where $n \in \mathbb{N}$

(b) (I) State the solutions of the equation $z^7 = 1$ for $z \in \mathbb{C}$, giving them in modulus-argument form.

(II) If w is the solution to $z^7 = 1$ with least positive argument, determine the argument of $1 + w$. Express your answer in terms of π.

(III) Show that $z^2 - 2z\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + 1$ is a factor of the polynomial $z^7 - 1$. State the two other quadratic factors with real coefficients.

Solución:

(a) (I) $z_1 = 2_{30^\circ}$, $z_2 = 2_{150^\circ}$ y $z_3 = 2_{270^\circ}$.

(II) Los afijos son los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen porque los tres complejos tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en 120°.

(III) Primero calculamos

$$z_3^{3n} = (2_{270^\circ})^{3n} = (8^n)_{270^\circ \cdot 3n} = (8^n)_{90^\circ n}$$

Entonces

$$z_1^{3n} + z_2^{3n} = (2_{30^\circ})^{3n} + (2_{150^\circ})^{3n} = (8^n)_{90^\circ n} + (8^n)_{450^\circ n} = (8^n)_{90^\circ n} + (8^n)_{90^\circ n} = 2\cdot(8^n)_{90^\circ n} = 2z_3^{3n}$$

(b) (I) Las raíces séptimas de 1 son

$$1_{\frac{2k\pi}{7}}\ ; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(II) El argumento de $1 + 1_{\frac{2\pi}{7}}$ es $\frac{2\pi}{14}$. Es fácil ver por qué si se interpreta la suma vectorialmente.

(III) Multipliquemos dos de los factores correspondientes a raíces conjugadas::

$$\left(z - 1_{\frac{2\pi}{7}}\right)\left(z - 1_{-\frac{2\pi}{7}}\right) = z^2 - z\left(1_{\frac{2\pi}{7}} + 1_{-\frac{2\pi}{7}}\right) + 1 = z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{7} + 1$$

Hemos tenido en cuenta que la suma de un complejo más su conjugado es igual a dos veces la parte real. Los otros factores serán $z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{7} + 1$ y $z^2 - 2z\cos\frac{6\pi}{7} + 1$.

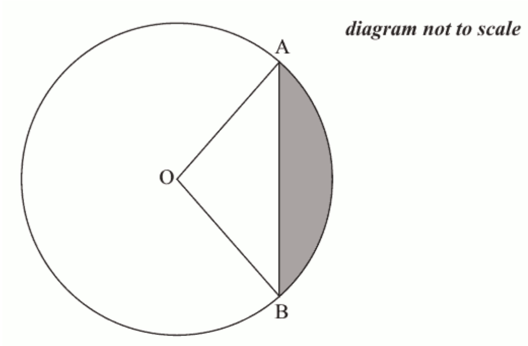
♠♠♠♠

12. 2013. Segundo examen. TZ2

12.1. Section A

Ejercicio 1. (5 puntos)

A circle of radius 4 cm, centre O, is cut by a chord $[AB]$ of length 6 cm.



(a) Find $\widehat{AOB}$, expressing your answer in radians correct to four significant figures.

(b) Determine the area of the shaded region.

Solución:

(a) Llamemos φ al ángulo:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{3}{4}\quad\Longrightarrow\quad\varphi=2\operatorname{arsen}\frac{3}{4}\simeq 1{,}696$$

(b) El área del segmento está dada por

$$S=\frac{1}{2}r^2\left(\varphi-\operatorname{sen}\varphi\right)\simeq 5{,}63\ \mathrm{cm}^2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Consider the system of equations

$$\begin{cases}0{,}1x-1{,}7y+0{,}9z=-4{,}4\\-2{,}4x+0{,}3y+3{,}2z=1{,}2\\2{,}5x+0{,}6y-3{,}7z=0{,}8\end{cases}$$

(a) Express the system of equations in matrix form.

(b) Find the solution to the system of equations.

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix}0{,}1 & -1{,}7 & 0{,}9\\-2{,}4 & 0{,}3 & 3{,}2\\2{,}5 & 0{,}6 & -3{,}7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}4\\1{,}2\\0{,}8\end{pmatrix}$$

(b) Resolviendo con la calculadora $x=$, $y=$, $z=$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

It is believed that the lifespans of Manx cats are normally distributed with a mean of 13,5 years and a variance of 9,5 years.

(a) Calculate the range of lifespans of Manx cats whose lifespans are within one standard deviation of the mean.

(b) Estimate the number of Manx cats in a population of 10000 that will have a lifespan of less than 10 years. Give your answer to the nearest whole number.

Solución:

(a) La desviación es igual a $\sqrt{9{,}5} \simeq 3{,}08$. El rango $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ es $(10{,}4; 16{,}6)$.

(b) La probabilidad de que un gato viva más de 10 años es

$$p = \mathrm{p}(X > 10) \simeq 0{,}8719$$

En la población de 10000 gatos, sea Y el número de gatos que viven más de 10 años. Entonces $Y \sim \mathrm{B}(10000, p)$. El valor esperado es:

$$\mathrm{E}(Y) = 10000 \cdot 0{,}8719 = 8719$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

(a) Find $\displaystyle\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

(b) Determine the value of m if

$$\int_0^m x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = 0{,}5 \qquad \text{where } m > 0$$

Solución:

(a) Por partes:

$$\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(b) Hay que pensar que m es menor que $\frac{\pi}{2}$ pues en ese punto hay un infinito de la función. Aplicando la regla de Barrow:

$$\Big[x \operatorname{tg} x + \ln \cos x\Big]_0^m = m \operatorname{tg} m + \ln \cos m = 0{,}5$$

Resolviendo con la calculadora se obtiene $m = 0{,}822$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

The arithmetic sequence $\{u_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ has first term $u_1 = 1{,}6$ and common difference $d = 1{,}5$. The geometric sequence $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ has first term $v_1 = 3$ and common ratio $r = 1{,}2$.

(a) Find an expression for $u_n - v_n$ in terms of n.

(b) Determine the set of values of n for which $u_n > v_n$.

(c) Determine the greatest value of $u_n - v_n$. Give your answer correct to four significant figures.

Solución:

(a) Restando la expresión del término general de ambas sucesiones:

$$u_n - v_n = 1{,}6 + 1{,}5(n-1) - 3 \cdot 1{,}2^{n-1} = 0{,}1 + 1{,}5n - 2{,}5 \cdot 3^n$$

(b) u_n siempre es menor que v_n.

(c) $u_1 - v_1 = -5{,}9$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

(a) Solve the equation $3\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 0$, where $0 \leq x \leq 180°$, expressing your answer(s) to the nearest degree.

(b) Find the exact values of $\sec x$ satisfying the equation $3\sec^4 x - 8\sec^2 x + 4 = 0$.

Solución:

(a) Despejando como en una ecuación de segundo grado:

$$\cos x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \frac{4 \pm 2}{3}$$

La solución mayor que 1 no es válida. Entonces $\cos x = \frac{2}{3}$ y $x \simeq 48°$.

(b) Resolviendo como en el apartado anterior:

$$sec^2 x = \frac{4 \pm 2}{3}$$

y encontramos $\sec^2 x = 2$ y $\sec^2 x = \frac{2}{3}$. Ahora, teniendo en cuenta que la secante es mayor o igual que 1 o menor o igual que -1:

$$\sec x = -\sqrt{2}\ ; \quad \sec x = \sqrt{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

The length, X metres, of a species of fish has the probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 0{,}5 \\ 0{,}5a(1-x) & \text{for } 0{,}5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Show that $a = 9{,}6$.

(b) Sketch the graph of the distribution.

(c) Find $P(X < 0{,}6)$.

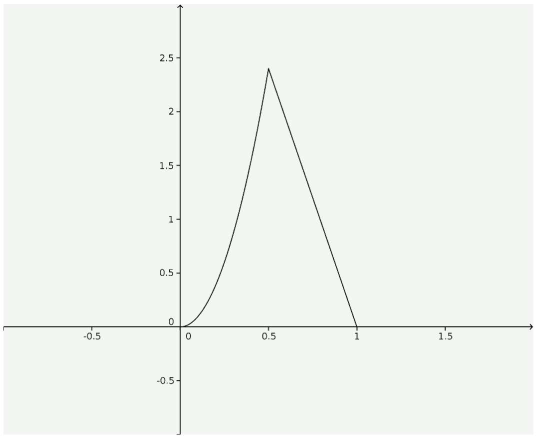
Solución:

(a) Como la suma de las probabilidades ha de ser igual a 1:

$$a\int_0^{0,5} x^2\,\mathrm{d}x + 0{,}5a\int_{0,5}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{0{,}5^3a}{3} - 0{,}5a\left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_{0,5}^{1} = \frac{0{,}5^3a}{3} + \frac{0{,}5^3a}{2} = \frac{5\cdot 0{,}5^3a}{6} = 1$$

despejando se obtiene $a = 9{,}6$.

(b)



(c)

$$p(x < 0{,}6) = 9{,}6 \int_0^{0{,}5} x^2 \, \mathrm{d}x + 0{,}5 \cdot 9{,}6 \int_{0{,}5}^{0{,}6} (1-x) \, \mathrm{d}x = 0{,}4 + 0{,}216 = 0{,}616$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

Use the method of mathematical induction to prove that $5^{2n} - 24n - 1$ is divisible by 576 for $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

- El número es múltiplo de 576 para $n = 1$.
- Supongamos que para $n = k$ también lo es:

  $$5^{2k} - 24k - 1 = \dot{576}$$

  Debemos demostrar que, en ese caso, el número que resulta de $n = k + 1$ tambien es múltiplo de 576:

  $$\begin{aligned} 5^{2(k+1)} - 24(k+1) - 1 &= 25 \cdot 5^{2k} - 24k - 25 = 25\left(\dot{576} + 24k + 1\right) - 24k - 25 \\ &= \dot{576} + (25 \cdot 24 - 24)k \\ &= \dot{576} + 576k \\ &= \dot{576} \end{aligned}$$

- De acuerdo con el principio de inducción, la propiedad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

A small car hire company has two cars. Each car can be hired for one whole day at a time. The rental charge is US$60 per car per day. The number of requests to hire a car for one whole day may be modelled by a Poisson distribution with mean 1,2.

(a) Find the probability that on a particular weekend, three requests are received on Saturday and none are received on Sunday.

(b) Over a weekend of two days, it is given that a total of three requests are received. Find the expected total rental income for the weekend.

Solución:

(a) Tenemos $X \sim \mathrm{Po}(1{,}2)$:

$$p(X = 3) \cdot p(X = 0) \simeq 0{,}0261$$

(b) Sea Y el número de coches que se solicitan en un fin de semana. Entonces $Y \sim \text{Po}(2{,}4)$ y

$$\text{p}(Y = 3) = 0{,}209$$

Si se han solicitado tres coches el fin de semana es posible que se hayan solicitado dos el sábado y uno el domingo, uno el sábado y dos el domingo, tres el sábado y ninguno el domingo o, finalmente, ninguno el sábado y tres el domingo. En los dos primeros casos se pueden atender todas las solicitudes y los ingresos serán de \$180. En los dos últimos casos solo se podrán atender dos solicitudes y los ingresos serán de \$120.

Sea X_1 el número de coches solicitados el sábado y X_2 el número de coches solicitados el domingo. Las dos variables siguen una distribución Po(1,2). Entonces:

$$\text{p}\left(X_1 = 2,\ X_2 = 1 \mid Y = 3\right) = \frac{\text{p}(X_1 = 2) \cdot \text{p}(X_2 = 1)}{\text{p}(Y = 3)} \simeq 0{,}375$$

e, igualmente, $\text{p}\left(X_1 = 1,\ X_2 = 2 \mid Y = 3\right) = 0{,}375$.

Por otra parte,

$$\text{p}\left(X_1 = 3,\ X_2 = 0 \mid Y = 3\right) = 0{,}125$$

e, igualmente, $\text{p}\left(X_1 = 0,\ X_2 = 3 \mid Y = 3\right) = 0{,}125$.

Los ingresos medios serán:

$$2 * 180 * 0{,}375 + 2 * 120 * 0{,}125 = \$165$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (6 puntos)

The acceleration of a car is $\frac{1}{40}(60 - v)$ m s^2, when its velocity is v. Given the car starts from rest, find the velocity of the car after 30 seconds.

Solución:

$$\frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{1}{40}(60 - v) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\text{d}v}{60 - v} = \frac{1}{40}\,\text{d}t$$

Integrando

$$-\ln(60 - v) = \frac{1}{40}\,t + C \quad \Longrightarrow \quad 60 - v = e^{-\frac{t}{40} - C} = Ke^{-\frac{t}{40}} \quad \Longrightarrow \quad v = 60 - Ke^{-\frac{t}{40}}$$

donde hemos llamado $K = e^{-C}$. Cuando $t = 0$ la velocidad es 0. Entonces, debe ser $K = 60$ y tenemos

$$v = 60\left(1 - e^{-\frac{t}{40}}\right)$$

Cuando $t = 30$ la velocidad es aproximadamente igual a 31,7 m s^{-1}.

♠♠♠♠

12.2. Section B

Ejercicio 11. (19 puntos)

(a) (I) Express the sum of the first n positive odd integers using sigma notation.

(II) Show that the sum stated above is n^2.

(III) Deduce the value of the difference between the sum of the first 47 positive odd integers and the sum of the first 14 positive odd integers.

(b) A number of distinct points are marked on the circumference of a circle, forming a polygon. Diagonals are drawn by joining all pairs of non-adjacent points.

(I) Show on a diagram all diagonals if there are 5 points.

(II) Show that the number of diagonals is $\frac{n(n-3)}{2}$ if there are n points, where $n > 2$.

(III) Given that there are more than one million diagonals, determine the least number of points for which this is possible.

(c) The random variable $X \sim B(n, p)$ has mean 4 and variance 3.

(I) Determine n and p.

(II) Find the probability that in a single experiment the outcome is 1 or 3.

Solución:

(a) (I) La suma de lo n primeros números impares positivos puede expresarse como

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

(II) El término enésimo vale $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. La suma de los n primeros términos es

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2$$

(III) Será $47^2 - 14^2 = 2013$ (año del examen).

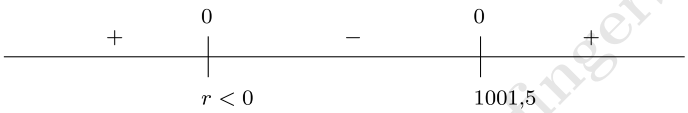
(b) (I)

(II) Desde cada punto se pueden trazar $n-3$ diagonales (a todos los demás puntos excepto a sí mismo y a los dos adyacentes. En total habrá $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Es preciso dividir por 2 para no contar la misma diagonal en los dos extremos.

(III) Tenemos la inecuación

$$\frac{n(n-3)}{2} > 1000000 \quad \Longrightarrow \quad n^2 - 3n - 2000000 > 0$$

La raíz positiva de esta ecuación es aproximadamente $1001,5$. El signo del polinomio es



El menor entero positivo para el que se cumple la condición es 1002.

(c) (I) Los parámetro de la distribución binomial cumplen el siguiente sistema:

$$\begin{cases} np = 4 \\ np(1-p) = 3 \end{cases}$$

cuya solución es $p = \frac{1}{4}$ y $n = 16$.

(II) La probabilidad es

$$\mathrm{p}(X=1) + \mathrm{p}(X=3) =$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (22 puntos)

Consider the differential equation $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos 2x$.

(a) (I) Show that the function $y = \cos x + \sin x$ satisfies the differential equation.

(II) Find the general solution of the differential equation. Express your solution in the form $y = f(x)$, involving a constant of integration.

(III) For which value of the constant of integration does your solution coincide with the function given in part (I)?

(b) A different solution of the differential equation, satisfying $y = 2$ when $x = \frac{\pi}{4}$, defines a curve C.

(I) Determine the equation of C in the form $y = g(x)$, and state the range of the function g.

(II) A region R in the xy plane is bounded by C, the x-axis and the vertical lines $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$. Find the area of R.

(III) Find the volume generated when that part of R above the line $y = 1$ is rotated about the x-axis through 2π radians.

Solución:

(a) (I) Sustituyendo la función en el primer miembro de la ecuación:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x + \cos x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$$

(II) Separando las variables:

$$y \,\mathrm{d}y = \cos 2x \,\mathrm{d}x$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$$
$$y = \sqrt{C + \operatorname{sen} 2x}$$

(III) Para $C = 1$ puesto que:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x} &= \sqrt{1 + 2\operatorname{sen} x \cos x}\\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x}\\ &= \sqrt{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}\\ &= \operatorname{sen} x + \cos x\end{aligned}$$

(b) (I) Para $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 2$. Sustituyendo:

$$2 = \sqrt{C + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{C+1} \quad\Longrightarrow\quad C = 3$$

La función es $g(x) = \sqrt{3 + \operatorname{sen} 2x}$. Su rango es $[\sqrt{2}, 2]$.

(II) Puesto que la función es siempre positiva, el área es igual a la siguiente integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 + \operatorname{sen} 2x}\,\mathrm{d}x \simeq 2{,}99$$

El valor de la integral lo hemos obtenido con la calculadora.

(III) El volumen se calcula mediante la integral

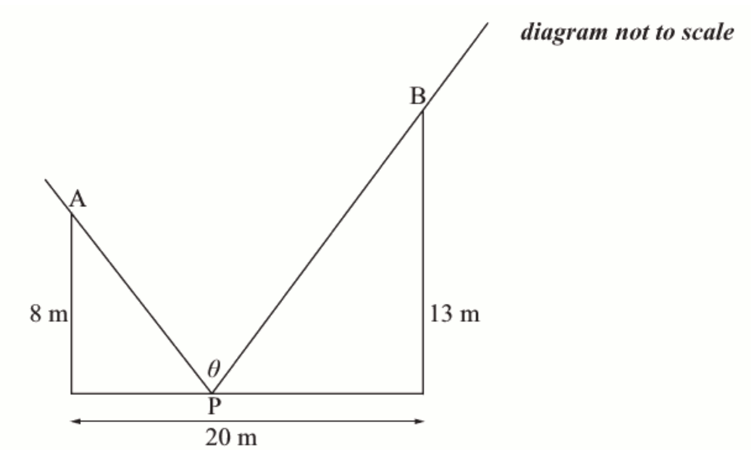
$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([g(x)]^2 - 1\right)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + \operatorname{sen} 2x\right)\,\mathrm{d}x \simeq 13{,}0$$

(el valor exacto del volumen es $\pi(\pi+1)$).

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (19 puntos)

A straight street of width 20 metres is bounded on its parallel sides by two vertical walls, one of height 13 metres, the other of height 8 metres. The intensity of light at point P at ground level on the street is proportional to the angle θ where $\theta = \widehat{APB}$, as shown in the diagram.



(a) Find an expression for θ in terms of x, where x is the distance of P from the base of the wall of height 8 m.

(b) (I) Calculate the value of θ when $x = 0$.

(II) Calculate the value of θ when $x = 20$.

(c) Sketch the graph of θ, for $0 \leq x \leq 20$.

(d) Show that

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{5\left(744 - 64x - x^2\right)}{(x^2+64)(x^2-40x+569)}$$

(e) Using the result in part (d), or otherwise, determine the value of x corresponding to the maximum light intensity at P. Give your answer to four significant figures.

(f) The point P moves across the street with speed 0,5 m s^{-1}. Determine the rate of change of θ with respect to time when P is at the midpoint of the street.

Solución

(a) El ángulo θ es igual a:

$$\theta = \pi - \operatorname{artg}\frac{8}{x} - \operatorname{artg}\frac{13}{20-x}\ ; \qquad 0 < x < 20$$

(b) (I) Teniendo en cuenta cómo se describe el ángulo θ y que cuando $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{artg} x = \dfrac{\pi}{2}$ la función en cero debe definirse:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\frac{13}{20}$$

(II) Y en $x = 20$:

$$\theta(20) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\frac{8}{20}$$

(c)

(d) Derivando y simplificando:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{1+\frac{64}{x^2}}\left(-\frac{8}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{169}{(20-x)^2}}\cdot\frac{13}{(20-x)^2}\\ &= \frac{8}{x^2+64} - \frac{13}{(20-x)^2+169}\\ &= \frac{8}{x^2+64} - \frac{13}{x^2-40x+569}\\ &= \frac{5\left(744-64x-x^2\right)}{(x^2+64)(x^2-40x+569)}\end{aligned}$$

(e) En el máximo se cumple

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 744 - 64x - x^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $x \simeq 10{,}05$.

(f) Aplicando la regla de derivación de las funciones compuestas:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

La derivada $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0{,}5$ y en $x = 10$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \simeq 0{,}0004533\ldots$. Entonces, con tres cifras significativas:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \simeq 0{,}000227 \text{ s}^{-1}$$

♠♠♠♠

13. 2014. Primer examen. TZ1.

13.1. Sección A.

Ejercicio 1. (5 puntos)

When the polynomial $3x^3+ax+b$ is divided by $(x-2)$, the remainder is 2, and when divided by $(x+1)$, it is 5. Find the value of a and the value of b.

Solución:

Sea $p(x)=3x^3+ax+b$. De acuerdo con el teorema del resto, $p(2)=2$ y $p(-1)=5$. Entonces:

$$\begin{cases} 24+2a+b=2 \\ -3-a+b=5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a=-10, \quad b=-2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

Four numbers are such that their mean is 13, their median is 14 and their mode is 15. Find the four numbers.

Solución:

9, 13, 15, 15.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Consider

$$a=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{31} 32$$

Given that $a\in\mathbb{Z}$, find the value of a.

Solución:

Pasando a logaritmos neperianos:

$$a=\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{\ln 4}{\ln 3}\cdot\frac{\ln 5}{\ln 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln 32}{\ln 31}=\frac{\ln 32}{\ln 2}=\log_2 32=5$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

The equation $5x^3+48x^2+100x+2=a$ has roots r_1 , r_2 and r_3. Given that $r_1+r_2+r_3-r_1r_2r_3=0$, find the value of a.

Solución: escribamos la ecuación:

$$5x^3+48x^2+100x+2-a=0$$

De acuerdo con las relaciones de Cardano $r_1r_2r_3=-\frac{2-a}{5}$ y $r_1+r_2+r_3=-\frac{48}{5}$.Entonces:

$$-\frac{48}{5}+\frac{2-a}{5}=0 \quad \Longrightarrow \quad a=-46$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (8 puntos)

(a) Use the identity $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ to prove that

$$\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad 0 \le x \le \pi$$

(b) Find a similar expression for $\sin\frac{1}{2}x$, $0 \le x \le \pi$.

(c) Hence find the value of

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}\right)\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Sustituyendo $\theta = \frac{x}{2}$:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \quad\Longrightarrow\quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

(b) Podemos escribir la identidad que nos dan como:

$$\cos 2\theta = 2(1-\operatorname{sen}^2\theta) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Procediendo ahora como en el apartado anterior resulta

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

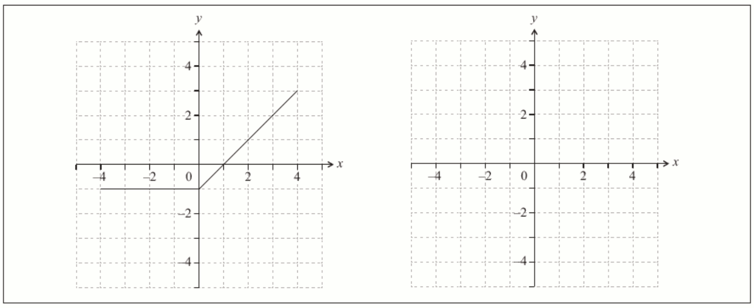
(c) Ha que tener en cuenta que en las fórmulas anteriores deberá tomarse la raíz positiva o negativa de acuerdo con el cuadrante en que se encuentre el ángulo $\frac{x}{2}$. En la integral no hay ningún problema puesto que x se encuentra en el primer cuadrante.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(2\sqrt{2}\operatorname{sen}0 - 2\sqrt{2}\cos 0\right) \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

The first set of axes below shows the graph of $y = F(x)$ for $-4 \le x \le 4$.



Let $g(x) = \displaystyle\int_{-4}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ for $-4 \le x \le 4$.

(a) State the value of x at which $g(x)$ is a minimum.

(b) On the second set of axes, sketch the graph of $y = g(x)$.

Solución:

(a) Como, según el teorema fundamental del cálculo integral $g'(x) = f(x)$, para que la función $g(x)$ tenga un mínimo, su derivada $f(x)$ debe ser cero. Esto sucede en $x = 1$.

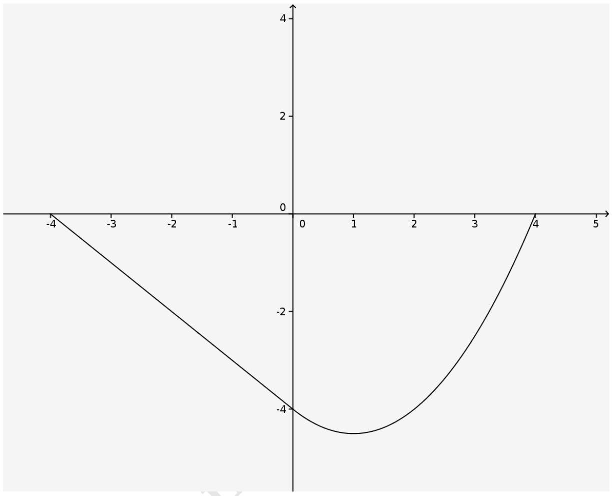
(b) Entre -4 y 0:

$$g(x) = \int_{-4}^{x} -1 \text{ d}t = \Big[-t \Big]_{-4}^{x} = -x - 4$$

Entre 0 y 4:

$$g(x) = -4 + \int_0^x (t-1) \text{ d}t = -4 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - x - 4$$

La gráfica es

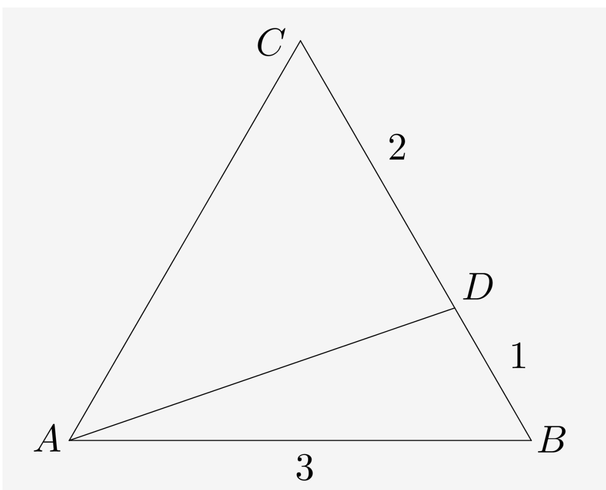


♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

The triangle ABC is equilateral of side 3 cm. The point D lies on $[BC]$ such that $BD = 1$ cm. Find $\cos \widehat{DAC}$

Solución:



Calculamos la longitud de AD por el teorema del coseno:

$$AD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 7 \implies AD = \sqrt{7} \text{ cm}$$

Ahora calculamos $\widehat{DAC}$ de nuevo por el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{DAC} = \frac{9+7-4}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

A body is moving in a straight line. When it is s metres from a fixed point O on the line its velocity, v, is given by $v = -\dfrac{1}{s^2}$, $s > 0$. Find the acceleration of the body when it is 50 cm from O.

Solución:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot v = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{-1}{s^2} = \frac{-2}{s^5}$$

Cuando $s = 0{,}5$ m, $a = 64$ m s^{-2}

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (9 puntos)

A curve has equation $\arctan x^2 + \arctan y^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of x and y.

(b) Find the gradient of the curve at the point where $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $y < 0$.

Solución

(a) Derivando:

$$\frac{2x}{1+x^4} + \frac{2yy'}{1+y^4} = 0 \implies y' = -\frac{x(1+y^4)}{y(1+x^4)}$$

(b) De la fórmula de la tangente de la suma de ángulos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

se deduce

$$\operatorname{artg}\,\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \alpha + \beta = \operatorname{artg}\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

y llamando $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$ resulta

$$\operatorname{artg} a + \operatorname{artg} b = \operatorname{artg}\frac{a+b}{1-ab}$$

Entonces

$$\operatorname{artg} x^2 + \operatorname{artg} y^2 = \frac{\pi}{4} \implies \operatorname{artg}\frac{x^2+y^2}{1-x^2y^2} = \operatorname{artg} 1 \implies \frac{x^2+y^2}{1-x^2y^2} = 1$$

Para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\frac{1}{2} + y^2}{1 - \frac{y^2}{2}} = \frac{1+2y^2}{2-y^2} = 1 \implies 1 + 2y^2 = 2 - y^2 \implies y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo el valor negativo en la fórmula de la derivada:

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{8\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (6 puntos)

Given that $\sin x + \cos x = \dfrac{2}{3}$, find $\cos 4x$.

Solución:

Puesto que:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 + \operatorname{sen} 2x \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$$

Entonces:

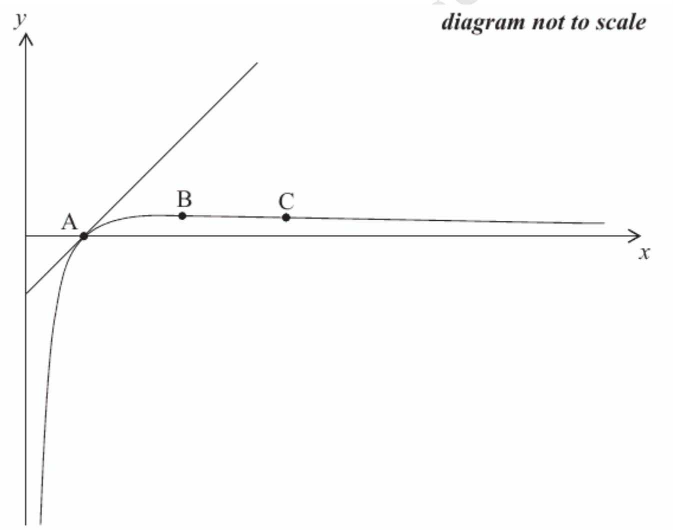
$$\cos 4x = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 2x = 1 - \frac{2 \cdot 25}{81} = \frac{31}{81}$$

♠♠♠♠

13.2. Sección B.

Ejercicio 11. (21 puntos)

Consider the function $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. The sketch below shows the graph of $y = f(x)$ and its tangent at a point A.



(a) Show that $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

(b) Find the coordinates of B, at which the curve reaches its maximum value.

(c) Find the coordinates of C, the point of inflexion on the curve.

The graph of $y = f(x)$ crosses the x-axis at the point A.

(d) Find the equation of the tangent to the graph of f at the point A.

(e) Find the area enclosed by the curve $y = f(x)$, the tangent at A, and the line $x = e$.

Solución:

(a) Derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

(b) Igualando a cero la derivada resulta:

$$\ln x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = e$$

El máximo está en $B\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

(c) Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x - 2(1-\ln x)}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

La derivada segunda se anula para

$$2\ln x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}}$$

El punto de inflexión está en $C\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

(d) El punto A tiene de coordenadas $(1,0)$. La pendiente de la tangente es la derivada en $x=1$. Puesto que $f'(1)=1$ la ecuación es $y = x-1$.

(e) El área es:

$$S = \int_1^e \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} - e$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (22 puntos)

(a) Show that the points $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(6,-\sqrt{24},\sqrt{12})$, $C(0,-\sqrt{24},\sqrt{12})$ form a square.

(b) Find the coordinates of M, the mid-point of $[OB]$.

(c) Show that an equation of the plane Π, containing the square $OABC$, is $y+\sqrt{2}z=0$.

(d) Find a vector equation of the line L, through M, perpendicular to the plane Π.

(e) Find the coordinates of D, the point of intersection of the line L with the plane whose equation is $y=0$.

(f) Find the coordinates of E, the reflection of the point D in the plane Π.

(g) (I) Find the angle $\widehat{ODA}$.

(II) State what this tells you about the solid $OABCDE$.

Solución:

(a) Basta ver que los vectores $\vec{OA}$, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CO}$ tienen la misma longitud. Además $\vec{OA}$ es perpendicular a $\vec{OC}$.

(b) Las coordenadas son $M\left(3,-\sqrt{6},\sqrt{3}\right)$ que se obtienen sumando las coordenadas de ambos puntos y dividiendo por 2.

(c) Teniendo en cuenta que:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{OC} = \begin{pmatrix}0\\-\sqrt{24}\\\sqrt{12}\end{pmatrix} = \sqrt{12}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0\\ y & 0 & -\sqrt{2}\\ z & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y + \sqrt{2}z = 0$$

(d) La ecuación vectorial de la recta es:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{6}\\\sqrt{3}\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

(e) El punto D es la solución del sistema

$$\begin{cases} x = 3\\ y = -\sqrt{6}+\lambda\\ z = \sqrt{3}+\lambda\sqrt{2}\\ y = 0\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D\left(3,0,3\sqrt{3}\right).$$

(f) Sea $E(x, y, z)$. Puesto que M es el punto medio de D y E:

$$3 = \frac{3+x}{2}\ ; \qquad -\sqrt{6} = \frac{0+y}{2}\ ; \qquad \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}+z}{2}$$

Obtenemos el punto $E\left(3, -2\sqrt{6}, -\sqrt{3}\right)$.

(g) (I) Calculamos los vectores

$$\vec{DO} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}\ ; \qquad \vec{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\cos\widehat{ODA} = \frac{18}{6\cdot 6} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{ODA} = 60^\circ$$

(II) Por el modo de obtención de los puntos y el ángulo calculado podemos decir que se trata de un octaedro.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (17 puntos)

A geometric sequence $\{u_n\}$, with complex terms, is defined by $u_{n+1} = (1+i)u_n$ and $u_1 = 3$.

(a) Find the fourth term of the sequence, giving your answer in the form $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Find the sum of the first 20 terms of $\{u_n\}$, giving your answer in the form $a \times (1 + 2^m)$ where $a \in \mathbb{C}$ and $m \in \mathbb{Z}$ are to be determined.

A second sequence $\{v_n\}$ is defined by $v_n = u_n u_{n+k}$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) (I) Show that $\{v_n\}$ is a geometric sequence.

(II) State the first term.

(III) Show that the common ratio is independent of k.

A third sequence $\{w_n\}$ is defined by $w_n = |u_n - u_{n+1}|$.

(d) (I) Show that $\{w_n\}$ is a geometric sequence.

(II) State the geometrical significance of this result with reference to points on the complex plane.

Solución:

(a) Se trata de una progresión geométrica de primer término 3 y razón $r = 1 + i = \left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$.

$$u_4 = 3r^3 = 3_{0^\circ}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)_{135^\circ} = 6\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ\right) = -6 + 6i$$

(b) Tenemos que calcular

$$S_{20} = \frac{3(1-(1+i)^{20})}{1-1-i} = \frac{3\left(1 - \left[(\sqrt{2})_{45^\circ}\right]^{20}\right)}{-i} = 3i\left(1 - (2^{10})_{900^\circ}\right) = 3i(1+2^{10})$$

(c) (I) Para ver que se trata de una progresión geométrica dividimos el término enésimo entre el anterior:

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_n\cdot u_{n+k}}{u_{n-1}\cdot u_{n-1+k}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n+k}}{u_{n+k-1}} = r\cdot r = r^2 = 2_{90^\circ} = 2i$$

(II) Sustituyendo $n = 1$:

$$v_1 = u_1\cdot u_{1+k} = 3\cdot 3r^k = 9(1+i)^k$$

(III) Ya hemos visto que la razón es $r^2 = 2i$

(d) (I) Dividimos el término enésimo entre el anterior:

$$\frac{w_n}{w_{n-1}} = \frac{|u_n - u_{n+1}|}{|u_{n-1} - u_n|} = \left|\frac{u_n(1-r)}{u_{n-1}(1-r)}\right| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = |r| = \sqrt{2}$$

(II) Las distancias entre lo términos de la progresión u_n forman a su vez una progresión geométrica, la distancia de u_1 a u_2 es $\frac{1}{\sqrt{2}}$ la distancia de u_2 a u_3, que a su vez es igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ la distancia de de u_3 a u_4 etc.

♠♠♠♠

14. 2014. Segundo examen. TZ1.

14.1. Sección A.

Ejercicio 1. (4 puntos)

One root of the equation $x^2 + ax + b = 0$ is $2 + 3i$ where $a, b \in \mathbb{R}$. Find the value of a and the value of b.

Solución:

Sustituyendo obtenemos:

$$(2+3i)^2 + a(2+3i) + b = 0$$
$$-5 + 12i + a(2+3i) + b = 0$$

Igualando a cero la parte imaginaria y la parte real resulta $a = -4$ y $b = 13$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

A student sits a national test and is told that the marks follow a normal distribution with mean 100. The student receives a mark of 124 and is told that he is at the 68th percentile. Calculate the variance of the distribution.

Solución:

Si $X \sim \mathrm{N}(100, \sigma)$ sabemos que $\mathrm{p}(X < 124) = 0{,}68$. Por consiguiente:

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{124-100}{\sigma}\right) = 0{,}68 \quad \Longrightarrow \quad \frac{24}{\sigma} \simeq 0{,}468$$

y de aquí $\sigma^2 \simeq 2630$.

También se puede resolver con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{normalcdf}(-1\mathrm{E}99, 124, 100, x) - 0{,}68 = 0$$

y se obtiene el mismo resultado.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (4 puntos)

Find the number of ways in which seven different toys can be given to three children, if the youngest is to receive three toys and the others receive two toys each.

Solución:

El pequeño puede elegir los juguetes de $C_{7,3}$ maneras y el siguiente de $C_{4,2}$ maneras. En total:

$$C_{7,3} \cdot C_{4,2} = 210$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

A system of equations is given below.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + 4y + az = 4 \end{cases}$$

(a) Find the value of a so that the system does not have a unique solution.

(b) Show that the system has a solution for any value of a.

Solución:

(a) Para que el sistema no tenga solución única, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & a \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad -3(a-1)-18=0$$

El sistema no tiene solución única para $a=-5$.

(b) Para $a=-5$ el rango de la matriz ampliada es:

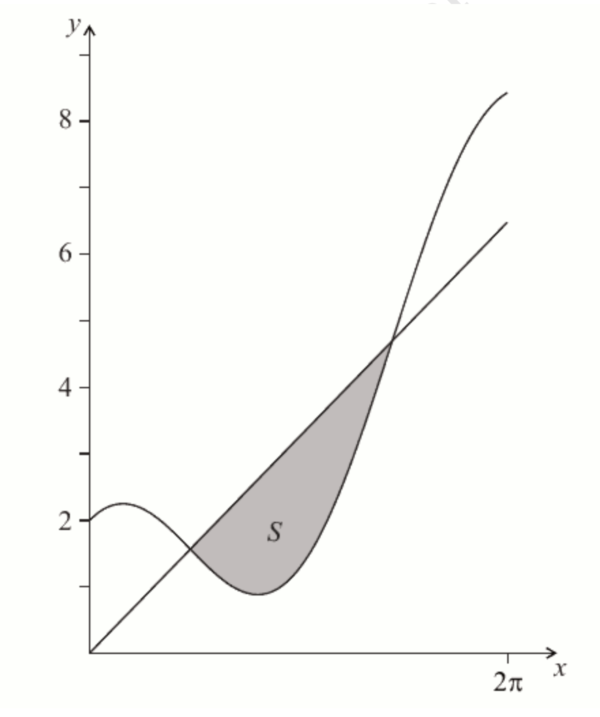
$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

El rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de coeficientes porque la cuarta columna es igual que la segunda. El sistema en este caso es compatible indeterminado. Por tanto, el sistema siempre tiene solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (8 puntos)

The shaded region S is enclosed between the curve $y=x+2\cos x$, for $0\le x\le 2\pi$, and the line $y=x$, as shown in the diagram below.



(a) Find the coordinates of the points where the line meets the curve.

(b) The region S is rotated by 2π about the x-axis to generate a solid.

(I) Write down an integral that represents the volume V of the solid.

(II) Find the volume V.

Solución:

(a) Los puntos de intersección son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x + 2\cos x \\ y = x \end{cases}$$

Los puntos de intersección son $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

(b) El volumen se calcula mediante la integral

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x^2 - (x + 2\cos x)^2)\,\mathrm{d}x = -4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos^2 x + x\cos x\right)\,\mathrm{d}x$$

Se puede integrar por partes. La calculadora da 59,2.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (10 puntos)

Let $f(x) = x(x+2)^6$.

(a) Solve the inequality $f(x) > x$.

(b) Find $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) La inecuación puede escribirse:

$$x(x-2)^6 < x$$
$$x(x-2)^6 - x < 0$$
$$x[(x-2)^6 - 1] < 0$$

Los raíces (simples) del polinomio son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. El signo del polinomio lo podemos representar por

	-1		0		3	
$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

La solución de la inecuación es $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$.

(b) Podemos integrar por partes o bien:

$$\int x(x+1)^6\,\mathrm{d}x = \int (x+1-1)(x+1)^6\,\mathrm{d}x = \int (x+1)^7\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^6\,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^8}{8} - \frac{(x+1)^7}{7} + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

Prove, by mathematical induction, that $7^{8n+3} + 2$, $n \in \mathbb{N}$, is divisible by 5.

Solución:

El resultado se cumple para $n = 0$ pues $7^3 + 2 = 345 = \dot{5}$.

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$7^{8k+3} + 2 = \dot{5}$$

y debemos demostrar que entonces, se cumple para $n = k + 1$. Es decir debemos demostrar que

$$7^{8(k+1)+3} + 2 = \dot{5}$$

En efecto:

$$7^{8(k+1)+3} + 2 = 7^{8k+3+8} + 2 = 7^{8k+3}7^8 + 2$$

Pero $7^{8k+3} = \dot{5} - 2$ por lo que la expresión anterior es igual

$$(\dot{5} - 2)7^8 + 2 = \dot{5} - 2(7^8 - 1) = \dot{5} - 2 \cdot \dot{5} = \dot{5}$$

La cifra de las unidades de 7^2 es 9 por lo que la de 7^4 será 1 y la de 7^8 será también 1. Entonces, $7^8 - 1$ es múltiplo de 5.

Por el principio de inducción, $7^{8n+3} + 2$ es múltiplo de 5 para $n \in \mathbb{N}$,

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

(a) Find the term in x^5 in the expansion of $(3x+A)(2x+B)^6$.

Mina and Norbert each have a fair cubical die with faces labelled 1, 2, 3, 4, 5 and 6; they throw it to decide if they are going to eat a cookie.

Mina throws her die just once and she eats a cookie if she throws a four, a five or a six. Norbert throws his die six times and each time eats a cookie if he throws a five or a six.

(b) Calculate the probability that five cookies are eaten.

Solución:

(a) El término en x^5 será

$$3x\cdot\binom{6}{4}(2x)^4 8^2 + A\cdot\binom{6}{5}(2x)^5 8 = (46080+1536A)x^5$$

(b) O bien Mina se come una galleta y Norbert cuatro o Mina no come ninguna y Norbert come cinco. La probabilidad es:

$$p=\frac{3}{5}\cdot\binom{6}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\cdot\binom{6}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^1\simeq 0{,}261$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

The number of birds seen on a power line on any day can be modelled by a Poisson distribution with mean 5,84.

(a) Find the probability that during a certain seven-day week, more than 40 birds have been seen on the power line.

(b) On Monday there were more than 10 birds seen on the power line. Show that the probability of there being more than 40 birds seen on the power line from that Monday to the following Sunday, inclusive, can be expressed as:

$$\frac{\mathrm{p}(X>40)+\sum_{r=11}^{40}\mathrm{p}(X=r)\mathrm{p}(Y>40-r)}{\mathrm{p}(X>10)}$$

where $X\sim\mathrm{Po}(5{,}84)$ and $Y\sim\mathrm{Po}(35{,}04)$.

Solución:

(a) El número medio de pájaros durante la semana es $7\cdot 5{,}84=40,88$. Para la distribución Po(40,88):

$$\mathrm{p}(X>40)=1-\mathrm{p}(X\leq 40)\simeq 0{,}513$$

(b) El número de pájaros que aparecen el lunes X sigue una distribución Po(5,84) y el número de pájaros que aparecen de martes a domingo Y siguen Po(35,04) ya que $6\cdot 5,84=35{,}04$.

Para que aparezcan más de 40 pájaros durante la semana debe ocurrir que aparezcan mas de 40 el lunes (y cualquier número el resto de los días) o que aparezcan r el lunes, $(10<r\leq 40)$ y más de $40-r$ los restantes días. La probabilidad que calculamos está condicionada a que hayan aparecido más de diez pájaros el lunes:

$$p=\mathrm{p}\big((X>40)\cup(X=r\cap Y>40-r):10<r\leq 40\mid X>10\big)$$

$$=\frac{\mathrm{p}(X>40)+\sum_{r=11}^{40}\mathrm{p}(X=r)\mathrm{p}(Y>40-r)}{\mathrm{p}(X>10)}$$

♠♠♠♠

14.2. Sección B.

Ejercicio 10. (21 puntos)

Let $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x-2}$.

(a) Find the equations of the horizontal and vertical asymptotes of the curve $y = f(x)$.

(b) (I) Find $f'(x)$.

(II) Show that the curve has exactly one point where its tangent is horizontal.

(III) Find the coordinates of this point.

(c) Find the equation of L_1, the normal to the curve at the point where it crosses the y-axis.

The line L_2 is parallel to L_1 and tangent to the curve $y = f(x)$.

(d) Find the equation of the line L_2.

Solución:

(a) La recta $x = \ln 2$ es una asíntota vertical puesto que para este valor de x se anula el denominador de la fracción y el límite es infinito. Además:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-2} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

La recta $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

(b) (I) La derivada es:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-2) - e^x(e^{2x}+1)}{(e^x-2)^2} = \frac{e^{3x}-4e^{2x}-e^x}{(e^x-2)^2} =$$

(II) Igualando a cero la derivada se obtiene

$$e^x = 2 \pm \sqrt{5}$$

La solución $2-\sqrt{5}$ no es válida puesto que $e^x > 0$.

(III) El único cero de la derivada es $x_0 = \ln(2+\sqrt{5})$. La ordenada del punto es

$$y_0 = \frac{(2+\sqrt{5})^2+1}{2+\sqrt{5}-2} = \frac{10+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4+2\sqrt{5}$$

(c) El punto de intersección de la curva y el eje OY es $(0,-2)$, Para $x=0$ la derivada vale -4. La ecuación de la normal es:

$$y+2 = \frac{1}{4}\,x \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{4}\,x - 2$$

(d) Hay que ver en qué punto de la curva la derivada es igual a $\frac{1}{4}$:

$$\frac{e^x(e^{2x}-4e^x-1)}{(e^x-2)^2} = \frac{1}{4}$$

Resolviendo con la calculadora obtenemos $x \simeq 1{,}46$ La ordenada correspondiente a este punto es $y \simeq 3{,}68$. La ecuación de L_2 es

$$y - 3{,}68 = \frac{1}{4}\,(x-1{,}46) \quad\Longrightarrow\quad y = 0{,}25x + 4{,}04$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (21 puntos)

A random variable X has probability density function

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Show that $5a + 2b = 2$.

Let $\mathrm{E}(X) = \mu$.

(b) (I) Show that $a = 12\mu - 30$.

(II) Find a similar expression for b in terms of μ.

Let the median of the distribution be 2.3.

(c) (I) Find the value of μ.

(II) Find the value of the standard deviation of X.

Solución:

(a) Como la suma de las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\int_2^3 (ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_2^3 = \frac{9a}{2} + 3b - 2a - 2b = \frac{5a}{2} + b = 1$$

y, por consiguiente, $5a + 2b = 2$.

(b) La media es igual a

$$\mu = \int_2^3 x(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right]_2^3 = 9a + \frac{9b}{2} - \frac{8a}{3} - 2b = \frac{19a}{3} + \frac{5b}{2}$$

Sustituyendo $b = 1 - \frac{5a}{2}$ resulta:

$$\mu = \frac{19a}{3} + \frac{5}{2} - \frac{25a}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 12\mu - 30$$

(c) Sustituyendo el valor obtenido de a en $b = 1 - \frac{5a}{2}$ resulta $b = -30\mu + 76$

(d) (I) Si la mediana es igual a 2,3 quiere decir que

$$\int_2^{2,3} (ax+b)\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]_2^{2,3} = 0{,}5$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación

$$1{,}29a + 0{,}6b = 1$$

y, mediante las relaciones que hemos obtenido anteriormente:

$$1{,}29(12\mu - 30) + 0{,}6(-30\mu + 76) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu \simeq 2{,}34$$

Con este valor podemos calcular a y b que necesitaremos en el apartado siguiente.

(II) Calculamos la media de X^2:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_2^3 x^2(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3}\right]_2^3 = \frac{65a}{4} + \frac{19b}{3}$$

La varianza es:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$$

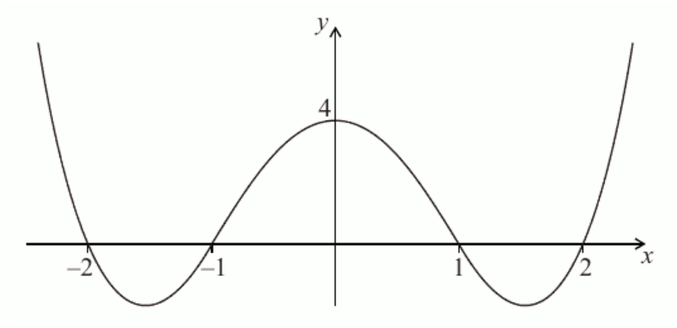
Sustituyendo los valores obtenidos, resulta para la desviación típica $\sigma \simeq 0{,}241$.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (18 puntos)

Let $f(x) = |x| - 1$.

(a) The graph of $y = g(x)$ is drawn below.



(I) Find the value of $(f \circ g)(1)$.

(II) Find the value of $(f \circ g \circ g)(1)$.

(III) Sketch the graph of $y = (f \circ g)(x)$.

(b) (I) Sketch the graph of $y = f(x)$.

(II) State the zeros of f.

(c) (I) Sketch the graph of $y = (f \circ f)(x)$.

(II) State the zeros of $f \circ f$.

(d) Given that we can denote $f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ as f^n,

(I) find the zeros of f^3;

(II) find the zeros of f^4;

(III) deduce the zeros of f^8.

(e) The zeros of f^{2n} are a_1, a_2, a_3, …, a_N.

(I) State the relation between n and N;

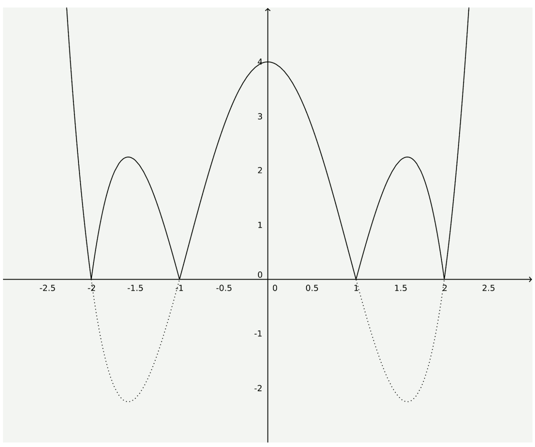
(II) Find, and simplify, an expression for $\displaystyle\sum_{r=1}^{N} |a_r|$ in terms of n.

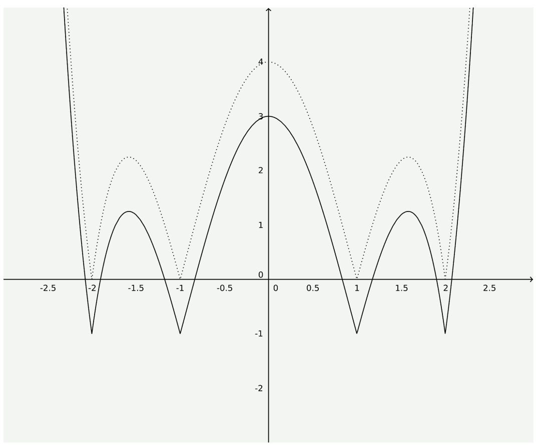
Solución:

(a) (I) $(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(0) = -1$

(II) $(f \circ g \circ g)(1) = (f \circ g)[g(1)] = (f \circ g)(0) = f[g(0)] = f(4) = 3$

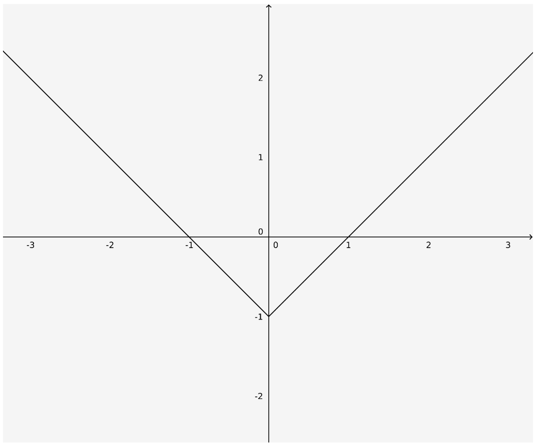
(III) $f \circ g)(x) = |g(x)| - 1$. Tenemos que representar primero $y = |g(x)|$ y después trasladar el gráfico una unidad hacia abajo:





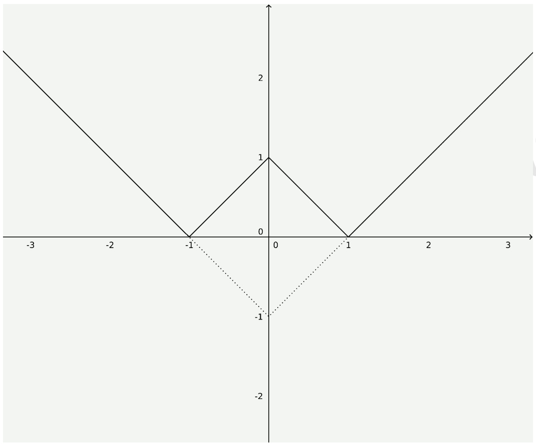
(b) (I) La función $f(x)$ puede escribirse:

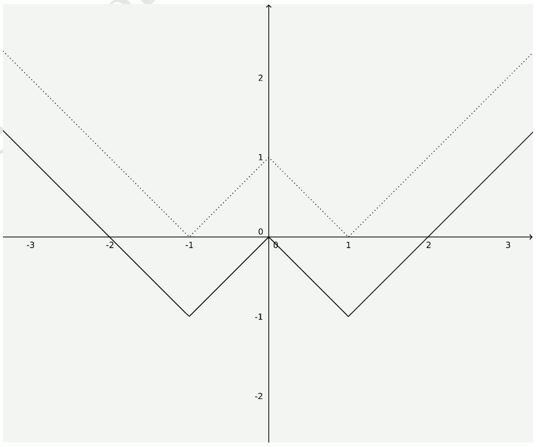
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



(II) La función $f(x)$ se hace cero en $x = \pm 1$.

(c) (I) A la función $y = f(x)$ le aplicamos el valor absoluto y después una traslación hacia abajo como se ve en las siguientes figuras:





(II) $f \circ f$ se hace cero en 0 y ± 2.

(d) (I) Los ceros de f^3 son ± 1 y ± 3.

(II) Los ceros de f^4 son 0, ± 2 y ± 4.

(III) Los ceros de f^8 serán 0, ± 2, ± 4, ± 6 y ± 8.

(e) (I) $N = 2n + 1$

(II) Teniendo en cuenta lo anterior

$$\sum_{r=1}^{N} |a_r| = 2\,(2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) = 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 4 \cdot \frac{(n+1)n}{2} = 2n(n+1)$$

♠♠♠♠

15. 2014. Primer examen. TZ2.

15.1. Sección A.

Ejercicio 1. (6 puntos)

Los sucesos A y B son tales que $\mathrm{p}(A) = \frac{2}{5}$, $\mathrm{p}(B) = \frac{11}{20}$ y $\mathrm{p}(A \mid B) = \frac{2}{11}$.

(a) Halle $\mathrm{p}(A \cap B)$.

(b) Halle $\mathrm{p}(A \cup B)$.

(c) Indique, dando una razón, si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

(a) $\mathrm{p}\,(A \cap B)) = \mathrm{p}(B)\mathrm{p}(A \mid B) = \dfrac{11}{20} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{10}$

(b) $\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{20} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{17}{20}$

(c) $\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \neq \mathrm{p}(A \cap B)$. No son independientes.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Solución:

Podemos expresar las potencias con base 2 y 3:

$$2^{3x-3} = 2^{3x}3^{3x}$$
$$2^{3x}2^{-3} = 2^{3x}3^{3x}$$
$$2^{-3} = 3^{3x}$$

Despejando

$$3x = \log_3 2^{-3} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\log_3 2^{-3} = \frac{-3}{3}\log_3 2 = -\log_3 2 = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

(a) Muestre que el siguiente sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ 3x - y + 14z = 6 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

(b) El sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los tres planos.

Solución:

(a) Calculamos los rangos de las matrices por el método de Gauss:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 14 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 2 y, por tanto, es compatible indeterminado.

(*b*) Hay dos ecuaciones independientes. Tomemos la primera y la tercera:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

Eligiendo $y = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} x = -5 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 1 = 0$ son α y β. Sin resolver la ecuación,

(*a*) Halle el valor de $\alpha^2 + \beta^2$;

(*b*) Halle una ecuación cuadrática cuyas raíces sean α^2 y β^2.

Solución:

(*a*) Por las relaciones de Cardano, las dos raíces α y β cumplen que $\alpha + \beta = -2$ y $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$. Entonces:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 + 1 = 5$$

(*b*) Puesto que $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ y $\alpha^2\beta^2 = \frac{1}{4}$, la ecuación que tiene como raíces α^2 y β^2 es:

$$x^2 - 5x + \frac{1}{4} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 4x^2 - 20x + 1 = 0$$

♠♠♠♠

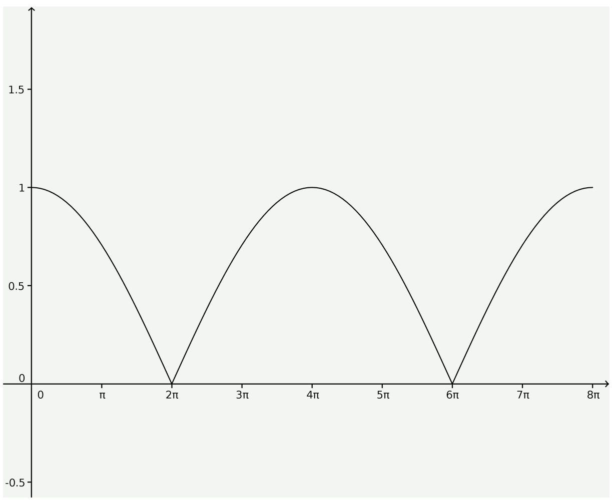
Ejercicio 5. (5 puntos)

(*a*) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \left|\cos \dfrac{x}{4}\right|$ para $0 \leq x \leq 8\pi$.

(*b*) Resuelva $\left|\cos \dfrac{x}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$ para $0 \leq x \leq 8\pi$.

Solución:

(*a*)



(b) La ecuación es equivalente a:

$$\cos\frac{x}{4}=\frac{1}{2} \implies \begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi & x=\frac{4\pi}{3}+8k\pi \\ \frac{x}{4}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi & x=\frac{20\pi}{3}+8k\pi \end{cases} ; \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\frac{x}{4}=-\frac{1}{2} \implies \begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi & x=\frac{8\pi}{3}+8k\pi \\ \frac{x}{4}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi & x=\frac{16\pi}{3}+8k\pi \end{cases} ; \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Esta es la solución general, las soluciones comprendidas entre 0 y 8π son $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{3}$ y $\frac{20\pi}{3}$.

♠♠♠♠

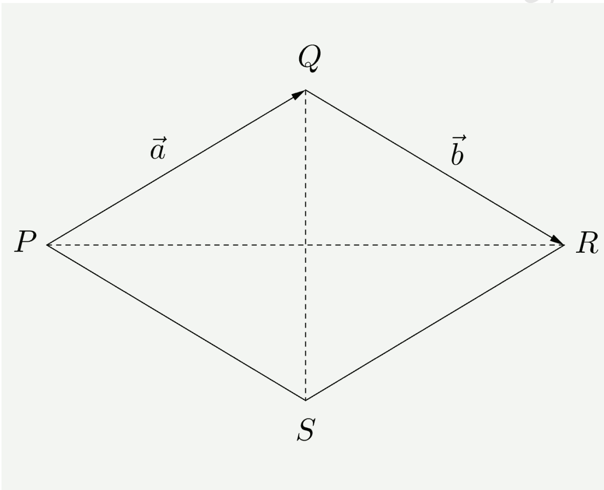
Ejercicio 6. (6 puntos)

$PQRS$ es un rombo. Sabiendo que $\vec{PQ}=\vec{a}$ y $\vec{QR}=\vec{b}$,

(a) Exprese los vectores $\vec{PR}$ y $\vec{QS}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

(b) A partir de lo anterior, muestre que las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.

Solución:



(a) $\vec{PR}=\vec{a}+\vec{b}$, $\quad \vec{QS}=\vec{b}-\vec{a}$.

(b) Veamos que el producto escalar $\vec{PR}\cdot\vec{QS}$ es cero:

$$\vec{PR}\cdot\vec{QS}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\mathbf{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$$

y, en consecuencia, las diagonales son perpendiculares.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

Considere los números complejos $u=2+3i$ y $v=3+2i$.

(a) Sabiendo que

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{10}{w}$$

exprese w de la forma $a+bi$, $\quad a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Halle w^* y expréselo de la forma $re^{i\theta}$.

Solución:

(a) despejamos w:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{10}{w}\ ;\qquad \frac{u+v}{uv}=\frac{10}{w}\quad\Longrightarrow\quad w=\frac{10uv}{u+v}$$

Sustituyendo:

$$w=\frac{10uv}{u+v}=\frac{10\cdot 13i}{5+5i}=\frac{26i}{1+i}=\frac{26i(1-i)}{2}=13i(1-i)=13+13i$$

(b)

$$w^*=13-13i=13\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

La función f viene dada por

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & x\leq 2\\ \frac{3}{4}(x-2)^2-3 & x>2\end{cases}$$

(a) Determine si f es o no continua.

(b) El gráfico de la función g se obtiene aplicando las siguientes transformaciones al gráfico de f: una simetría respecto al eje y seguida de una traslación por medio del vector $\binom{2}{0}$. Halle $g(x)$.

Solución:

(a) Para $x\neq 2$ la función $f(x)$ es continua por estar definida mediante funciones continuas. En $x=2$ calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(1-2x)=-3$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{4}(x-2)^2-3=-3$$

El límite de la función es -3 y coincide con el valor de la función. Así pues, $f(x)$ es continua en $x=2$.

(b) Aplicamos la simetría (cambiar x por $-x$) y obtenemos:

$$g_1(x)=\begin{cases}1+2x & -x\leq 2\\ \frac{3}{4}(-x-2)^2-3 & -x>2\end{cases}\qquad=\begin{cases}\frac{3}{4}(x+2)^2-3 & x<-2\\ 1+2x & x\geq -2\end{cases}$$

Ahora aplicamos la traslación sustituyendo x por $x-2$:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(x-2+2)^2-3 & x-2<-2\\ 1+2(x-2) & x-2\geq -2\end{cases}\qquad=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2-3 & x<0\\ -3+2x & x\geq 0\end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

Los tres primeros términos de una progresión geométrica son $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x$ y $4\operatorname{sen} x\cos^2 x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

(a) Halle la razón común r.

(b) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie geométrica $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+4\operatorname{sen} x\cos 2x+\dots$ es convergente.

(c) Considere

$$x=\ \arccos\frac{1}{4},\quad x>0$$

Muestre que la suma de los infinitos términos de esta serie es igual a $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Solución:

(*a*) La razón la obtenemos, por ejemplo, dividiendo el segundo término por el primero:

$$r=\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}x}=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x}=2\cos x$$

(*b*) Tiene que cumplirse

$$-1<2\cos x<1\;;\qquad -\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$$

(*c*) En este caso, la razón es

$$r=2\cos\ \operatorname{arcos}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

y el primer término

$$a_1=\operatorname{sen}\ \operatorname{arcos}\frac{1}{4}=\sqrt{1-\cos^2\ \operatorname{arcos}\frac{1}{4}}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

La suma de los términos de la progresión es:

$$S=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (7 puntos)

Utilice la sustitución $x=a\sec\theta$ para demostrar que

$$\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3}+\pi-6\right)$$

Solución:

(*a*) Si $x=a\sec\theta$:

$$\mathrm{d}x=\ \mathrm{d}\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)=\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Además, cuando $x=a\sqrt{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ y cuando $x=2a$, $\theta=\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int_{a\sqrt{2}}^{2a}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{a}{\cos^3\theta}\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}\cdot\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\frac{a}{\cos\theta}\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{a\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{a}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{1}{a}\left[\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3}+\pi-6\right)
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

15.2. Sección B

Ejercicio 11. (12 puntos)

(a) Hay dos máquinas que fabrican baterías para teléfonos móviles. Con la máquina A se fabrica el 60 % de la producción diaria, y con la máquina B se fabrica el 40 %. Al analizar el proceso se observa que, en promedio, el 2 % de las baterías que se fabrican con la máquina A son defectuosas, y el 1 % de las baterías que se fabrican con la máquina B son defectuosas.

(I) Dibuje un diagrama de árbol que muestre claramente las probabilidades respectivas.

(II) Se elige una batería al azar. Halle la probabilidad de que sea defectuosa.

(III) Se elige una batería al azar y se observa que es defectuosa. Halle la probabilidad de que se haya fabricado con la máquina A.

(b) En un paquete de siete transistores, hay tres que son defectuosos. Se eligen al azar tres transistores del paquete, sin reposición. La variable aleatoria discreta X representa el número de transistores defectuosos que se han elegido.

(I) Halle $\mathrm{p}(X = 2)$.

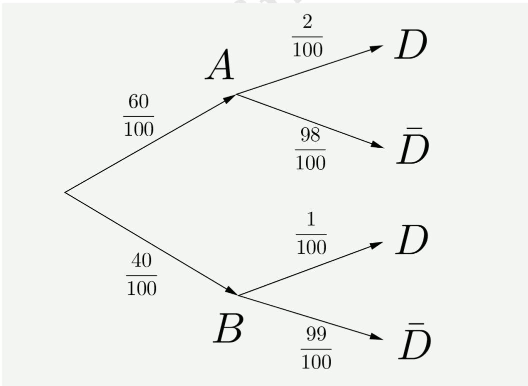
(II) Copie y complete la siguiente tabla.

x	0	1	2	3
$\mathrm{p}(X = x)$				

(III) Determine $\mathrm{E}(X)$.

Solución:

(a) (I)



(II) $\mathrm{p}(D) = \frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{160}{10000} = 0{,}016$

(III) $\mathrm{p}(A \mid D) = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{160}{10000}} = \frac{3}{4}$

(b) (I) $\mathrm{p}(X = 2) = 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$

(II)

x	0	1	2	3
$\mathrm{p}(X = x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(III) $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{4}{35} + 1 \cdot \frac{18}{35} + 2 \cdot \frac{12}{35} + 3 \cdot \frac{1}{35} = \frac{9}{7}$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (18 puntos)

Dados los puntos $A(1, 0, 4)$, $B(2, 3, -1)$ y $C(0, 1, -2)$,

(a) Halle la ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por los puntos A y B.

(b) La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

Muestre que L_1 y L_2 son alabeadas.

(c) Considere el plano Π_1 paralelo a L_1 y también a L_2. El punto C pertenece al plano Π_1. Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1.

(d) La recta L_3 tiene por ecuación vectorial

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El plano Π_2 tiene por ecuación cartesiana $x + y = 12$. El ángulo entre la recta L_3 y el plano Π_2 es igual a $60°$.

(I) Halle el valor de k.

(II) Halle el punto de intersección P de la recta L_3 y el plano Π_2.

Solución:

(a) Tomando $\vec{AB}$ como vector director:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(b) Está claro que las dos rectas no son paralelas. Para ver si se cortan o se cruzan calculamos el producto mixto $[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$ donde P y Q son puntos pertenecientes a cada una de las rectas y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores:

$$[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero, las dos rectas se cruzan.

(c) La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y-1 & 3 & 1 \\ z+2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3x - 13(y-1) - 8(z+2) = 0$$

El plano es $3x + 13y + 8z + 3 = 0$.

(d) (I) El ángulo cumple que

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{k+1}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad 6(k^2+2) = 4(k+1)^2$$

Esta ecuación tiene como única solución $k = 2$.

(II) El punto de intersección es la solución del sistema:

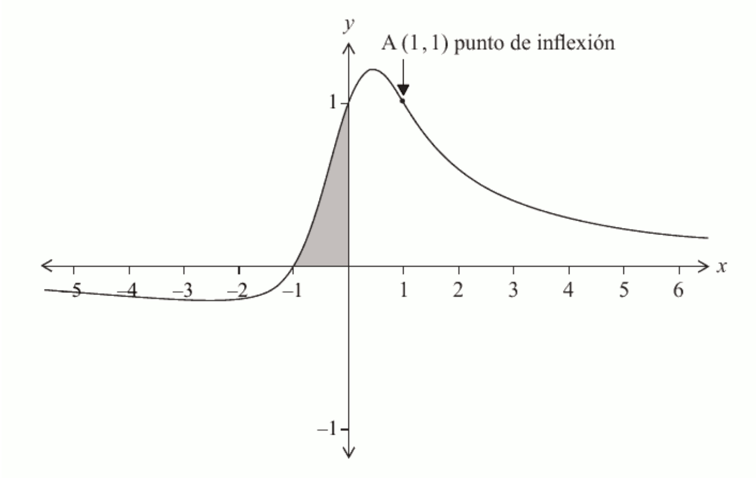
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $(9, 3, -2)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (16 puntos)

A continuación se muestra el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.



(a) Halle $f'(x)$.

(b) A partir de lo anterior, halle las coordenadas x de los puntos en los que la pendiente del gráfico de f es igual a cero.

(c) Halle $f''(x)$ expresando la respuesta de la forma $\dfrac{p(x)}{(x^2+1)^3}$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

(d) El punto $(1,1)$ es un punto de inflexión. Hay otros dos puntos de inflexión. Halle las coordenadas x de los otros dos puntos de inflexión.

(e) Halle el área de la región sombreada. Exprese la respuesta de la forma $\frac{\pi}{a} - \ln\sqrt{b}$ donde a y b son enteros.

Solución:

(a) La derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

(b) Igualando a cero la derivada:

$$-x^2-2x+1=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

Los puntos son $x_1=-1-\sqrt{2}$ y $x_2=-1+\sqrt{2}$.

(c) Derivando:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(-2x-2)(x^2+1)-2\cdot 2x(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

(d) Igualando a cero $f''(x)$:

$$2x^3+6x^2-6x-2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2(x-1)(x^2+4x+1)=0$$

Los otros puntos de inflexión están en $x_3=-2+\sqrt{3}$ y $x_4=-2-\sqrt{3}$.

(e) El área mide:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{artg}x\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{1}{2}\ln 2-\operatorname{artg}(-1) \\ &= \frac{\pi}{2}-\ln\sqrt{2} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 14. (14 puntos)

Considere las siguientes funciones:

$$h(x) = \operatorname{artg}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = h(x)$.

(b) Halle una expresión para la función compuesta $h \circ g(x)$ e indique su dominio.

(c) Sabiendo que $f(x) = h(x) + h \circ g(x)$,
 (I) halle $f'(x)$, expresando el resultado en forma simplificada;
 (II) muestre que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ para $x > 0$.

(d) Nigel indica que f es una función impar, mientras que Tom sostiene que f es una función par.
 (I) Indique quién tiene razón y justifique su respuesta.
 (II) A partir de lo anterior, halle el valor de $f(x)$ para $x < 0$.

Solución:

(a)

(b) La función compuesta es

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{0\}$.

(c) (I) La función que debemos derivar es $f(x) = \operatorname{artg} x + \operatorname{artg}\frac{1}{x}$. La derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = 0$$

 (II) Para $x > 0$ la función es continua y derivable. Puesto que la derivada es cero, de acuerdo con el teorema del valor medio, la función es constante. Calculamos el valor de la función para $x = 1$:

$$f(1) = \operatorname{artg} 1 + \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

y la función toma este valor para $x > 0$.

(d) (I) La función es impar porque es composición de funciones impares.
 (II) Vale $\frac{\pi}{2}$ para $x > 0$ y $-\frac{\pi}{2}$ para $x < 0$.

♠♠♠♠

16. 2014. Segundo examen. TZ2.

16.1. Sección A.

Ejercicio 1. (6 puntos)

(*a*) (I) Halle la suma de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 200 que son divisibles entre 7.

(II) Exprese la suma anterior utilizando notación de sumatoria.

(*b*) En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es -6. La suma de los n primeros términos de esta progresión es negativa. Halle el menor valor de n.

Solución:

(*a*) (I) El primero de ellos es $a_1 = 14$. El último es 196. Calculamos en primer lugar en número n de términos:

$$196 = 14 + 7(n-1)\ ; \qquad 7(n-1) = 182 \quad \Longrightarrow \quad n = 27$$

y la suma es

$$S = \frac{(14+196)\cdot 27}{2} = 2835$$

(II) Esta suma puede expresarse como

$$\sum_{r=1}^{27}(14 + 7(n-1)) = \sum_{r=1}^{27}(7+7n)$$

(*b*) Teniendo en cuenta $a_n = 1000 - 6(n-1) = 1006 - 6n$:

$$S_n = \frac{(1000 + 1006 - 6n)n}{2} < 0\ ; \qquad 2006 - 6n^2 < 0$$

La raíz positiva es 334,33. El menor número es $n = 335$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Los pesos, en kg, de los oseznos de un año siguen una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.

(*a*) Sabiendo que el peso correspondiente al tercer cuartil es 21,3 kg y que el peso correspondiente al primer cuartil es 17,1 kg, calcule el valor de μ y el valor de σ.

(*b*) Se toma una muestra aleatoria compuesta por 100 oseznos. Halle el número esperado de oseznos que pesan más de 22 kg.

Solución:

(*a*) Tenemos el siguiente sistema

$$\mathrm{p}(X < 17{,}1) = 0{,}25$$
$$\mathrm{p}(X < 21{,}3) = 0{,}75$$

o, tipificando la variable:

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{17{,}1-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25\ ; \qquad \frac{17{,}1-\mu}{\sigma} \simeq -0{,}674$$
$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{21{,}3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75\ ; \qquad \frac{21{,}3-\mu}{\sigma} \simeq 0{,}674$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 19{,}2$ y $\sigma \simeq 3{,}11$.

(*b*) La probabilidad de que un osezno pes más de 22 kg es

$$p = \mathrm{p}(X > 22) \simeq 0{,}184$$

Tenemos ahora una distribución de probabilidad $\mathrm{B}(100, p)$. El valor esperado es $100p \simeq 18{,}4$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Los gráficos de $y = x^2e^{-x}$ e $y = 1-2\operatorname{sen} x$ para $2 \leq x \leq 7$ se cortan en los puntos A y B. Las coordenadas x de A y B son x_A y x_B.

(a) Halle el valor de x_A y el valor de x_B.

(b) Halle el área delimitada por los dos gráficos, para $x_A \leq x \leq x_B$.

Solución:

(a) Con la calculadora obtenemos $x_A \simeq 2{,}87$ y $x_B \simeq 6{,}78$.

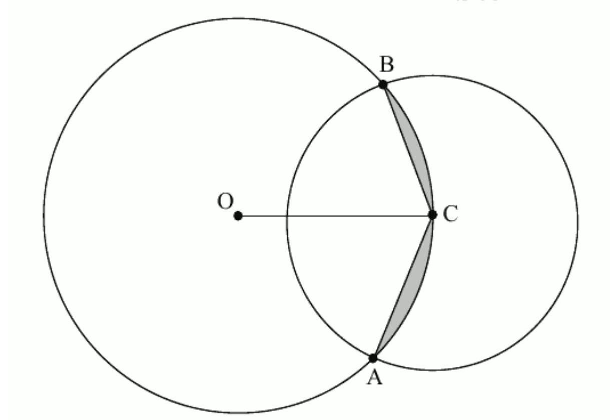
(b) También con la calculadora obtenemos

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(1 - 2\operatorname{sen} x - x^2e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \simeq 6{,}76$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) $\widehat{BOC}$;

(b) el área de la región sombreada.

Solución:

(a) Llamemos $\varphi = \widehat{BOC}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{1{,}5}{4} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 2\operatorname{arsen}\frac{1{,}5}{4} \simeq 0{,}769$$

(b) La región sombreada está formada por dos segmentos circulares de amplitud φ sobre un círculo de 4 cm de radio. El área será igual a

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\,r^2(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \simeq 1{,}18$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

Halle el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de $(x-1)^3\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)^6$.

Solución:

Si desarrollamos el segundo factor:

$$\left(\frac{1}{x}+2x\right)^6=\frac{1}{x^6}+6\,\frac{1}{x^5}\cdot 2x+\dots$$

vemos que solo presenta potencias pares de x. Por ello el término de x^{-2} estará formado por el término en x^2 del primer factor por el término en x^{-4} del segundo más el termino constante del primero por el término en x^{-2} del segundo:

$$-3x^2\cdot\binom{6}{5}\frac{1}{x^5}\,2x-1\cdot\binom{6}{4}\frac{1}{x^4}(2x)^2=(-36-60)\,\frac{1}{x^2}=-96x^{-2}$$

El coeficiente de x^{-2} es -96.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Seis clientes hacen cola en un supermercado. Cada cliente puede elegir si paga en efectivo o con tarjeta de crédito. Suponga que el que un cliente pague o no con tarjeta de crédito es independiente del método de pago elegido por otros clientes. Se sabe que el 60 % de los clientes eligen pagar con tarjeta de crédito.

(*a*) Halle la probabilidad de que:

(I) Los tres primeros clientes paguen con tarjeta de crédito y los siguientes tres paguen en efectivo.

(II) De los seis clientes, exactamente tres paguen con tarjeta de crédito.

(*b*) Hay n clientes en otra cola en el mismo supermercado. La probabilidad de que al menos un cliente pague en efectivo es mayor que 0,995. Halle el mínimo valor de n.

Solución:

(*a*) (I) $p=0{,}6^3\cdot 0{,}4^3\simeq 0{,}0138$

(II) Sea X la variable aleatoria que representa el número de clientes que paga con tarjeta de crédito. X sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(6;0{,}6)$ y

$$\mathrm{p}(X=3)\simeq 0{,}276$$

(*b*) Consideremos la distribución binomial $\mathrm{B}(n;0{,}4)$ donde n representa el número de clientes y el éxito es que el cliente pague en efectivo. Debemos encontrar el menor n que cumple:

$$\mathrm{p}(X\geq 1)>0{,}995\quad\Longrightarrow\quad 1-\mathrm{p}(X=0)>0{,}995\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{p}(X=0)<0{,}005$$

Con la calculadora vemos ue el número más pequeño que cumple la condición es $n=11$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

La función f se define de la forma $f(x)=-3+\dfrac{1}{x-2},\quad x\neq 2.$

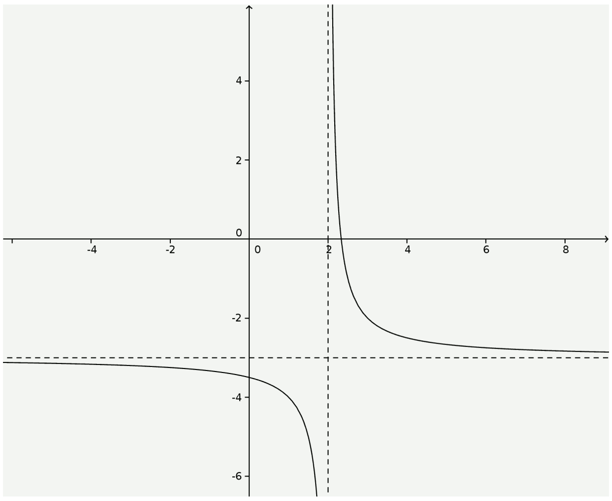
(*a*) (I) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y=f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.

(II) Escriba las ecuaciones de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

(*b*) Halle la función inversa f^{-1} e indique su dominio.

Solución:

(a)



Las asíntotas son $x = 2$ e $y = -3$. Los puntos de corte con los ejes son $A\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ y $B\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.

(b) Intercambiamos las variables y despejemos:

$$x = -3 + \frac{1}{y-2} \;;\qquad x + 3 = \frac{1}{y-2} \;;\qquad y - 2 = \frac{1}{x+3} \;;\qquad y = f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{-3\}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (4 puntos)

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media μ. Sabiendo que

$$\mathrm{p}(X = 2) + \mathrm{p}(X = 3) = \mathrm{p}(X = 5)$$

(a) halle el valor de μ;

(b) halle la probabilidad de que X esté a menos de una desviación típica de la media.

Solución:

(a) Sustituyendo las probabilidades:

$$\frac{m^5 e^{-m}}{5!} = \frac{m^2 e^{-m}}{2!} + \frac{m^3 e^{-m}}{3!}$$

Simplificamos dividiendo por e^{-m} y multiplicando por 5!:

$$m^5 = 60m^2 + 20m^3 \;;\qquad m(m^4 - 20m^2 - 60m) = 0$$

Desestimando el caso $m = 0$ obtenemos $m \simeq 5{,}55$.

También podemos resolver con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{poissonpdf}(x, 2) + \mathrm{poissonpdf}(x, 3) - \mathrm{poissonpdf}(x, 5) = 0$$

(b) En la distribución de Poisson, la media y la varianza son iguales a m. La desviación típica es entonces $\sqrt{m} \simeq 2{,}36$. La variable X debe estar comprendida entre $5{,}55 - 2{,}36$ y $5{,}55 + 2{,}36$, es decir, debe tomar los valores 4, 5, 6 o 7:

$$\mathrm{p}(X \leq 7) - \mathrm{p}(X \leq 3) \simeq 0{,}607$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (5 puntos)

Se vierte arena para formar un cono de h cm de altura y r cm de radio de la base. En todo momento, la altura es igual al radio de la base. La altura del cono va aumentando a razón de 0,5 cm min^{-1}. Halle la razón a la que se vierte la arena, en cm^3 min^{-1}, cuando la altura es igual a 4 cm.

Solución:

Si la altura es igual al radio, el volumen del cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

Derivando

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\pi\, 3h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \pi h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

Cuando $h = 4$ cm:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \pi \cdot 16 \cdot 0{,}5 = 8\pi \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

Considere la curva definida por la ecuación $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4xy^2$.

(a) Utilice la derivación implícita para hallar una expresión para $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $(1, 1)$.

Solución:

(a) Derivando y despejando y':

$$2\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2yy'\right) = 4y^2 + 4x\cdot 2yy' \qquad \text{Dividiendo por 4}$$
$$\left(x^2+y^2\right)\left(x+yy'\right) = y^2 + x\cdot 2yy'$$
$$y' = \frac{x(x^2+y^2)-y^2}{2xy - y(x^2+y^2)}$$

(b) En el punto $(1, 1)$ la derivada se hace infinita. Eso significa que la tangente en ese punto es vertical y, en consecuencia, la normal es horizontal. La ecuación de la normal será $y = 1$.

♠♠♠♠

16.2. Sección B

Ejercicio 11. (13 puntos)

La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax\cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que $a = \dfrac{2}{\pi - 2}$.

(b) Halle $\mathrm{p}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(c) Halle:

(I) la moda de X;

(II) la mediana de X.

(d) Halle $\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{8} \mid X < \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

(a) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = 1$$

Integrando por partes:

$$a\Big[x\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

y de aquí:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{2}{\pi - 2}$$

La función de distribución es entonces:

$$\mathrm{p}(X < x) = \frac{2}{\pi - 2}\Big[x\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^x = \frac{2}{\pi - 2}\,(x\operatorname{sen} x + \cos x - 1)$$

(b) Con esa función de distribución:

$$\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \simeq 0{,}460$$

(c) (I) La moda es el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos:

$$\text{moda} \simeq 0{,}860$$

(II) La mediana cumple que

$$\mathrm{p}(X < \text{med}) = 0{,}5$$

es decir, es la solución de la ecuación

$$\frac{2}{\pi - 2}\,(x\operatorname{sen} x + \cos x - 1) = 0{,}5$$

Con la calculadora obtenemos

$$\text{med} \simeq 0{,}826$$

(III) En este caso

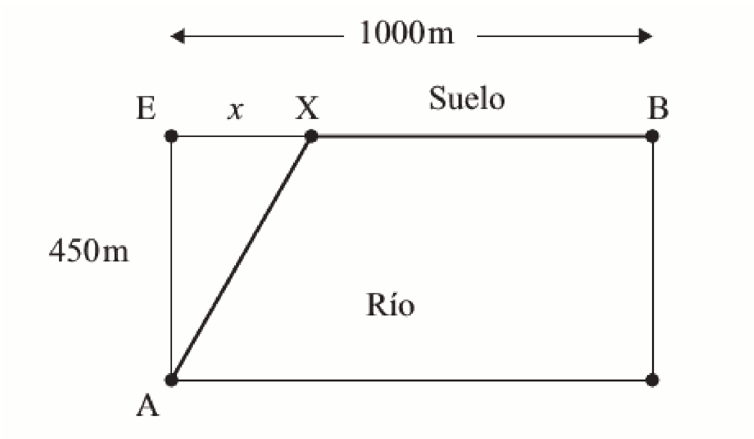
$$\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{8}\,\middle|\, X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{8}\right)}{\mathrm{p}\left(X < \frac{\pi}{4}\right)} \simeq 0{,}283$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (15 puntos)

Un grupo de ingenieros necesita instalar tuberías para conectar dos ciudades A y B que están separadas por un río de 450 metros de ancho, tal y como se muestra en la siguiente figura. Tienen previsto instalar las tuberías por debajo del río entre A y X, y por debajo del suelo entre X y B. El coste de instalar las tuberías por debajo del río es cinco veces mayor que el coste de instalar las tuberías por debajo del suelo.

Sea $EX = x$.



Sea k el coste, en dólares por metro, de instalar las tuberías por debajo del suelo.

(a) Muestre que el coste total C, en dólares, de instalar las tuberías entre A y B viene dado por

$$C = 5k\sqrt{202500 + x^2} + (1000 - x)\,k$$

(b) (I) Halle $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$.

(II) A partir de lo anterior, halle para qué valor de x el coste total es mínimo y justifique por qué este valor es un mínimo.

(c) Halle el coste total mínimo en función de k.

(d) El ángulo que forman las tuberías en el lugar en el que se unen es $AXB = \theta$. Halle θ para el valor de x calculado en el apartado (b).

(e) Por motivos de seguridad, θ tiene que ser como mínimo 120°. Dado este nuevo requisito,

(I) halle el nuevo valor de x que minimiza el coste total;

(II) halle en qué porcentaje ha aumentado el coste total mínimo.

Solución:

(a) Por el teorema de Pitágoras la longitud bajo el río es $\sqrt{450^2 + x^2}$. La longitud por la orilla es $1000 - x$. Entonces, el coste es

$$C = 5k\sqrt{450^2 + x^2} + k(1000 - x)$$

(b) (I) La derivada de esta función es

$$C'(x) = \frac{10kx}{2\sqrt{450^2 + x^2}} - k = \frac{5kx}{\sqrt{450^2 + x^2}} - k$$

(II) El coste mínimo lo calculamos igualando la derivada a cero:

$$\frac{5kx}{\sqrt{450^2 + x^2}} - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5x - \sqrt{450^2 + x^2} = 0$$

La solución de esta ecuación es $x = \frac{450}{\sqrt{24}} \simeq 91{,}9$ m. Se trata de un mínimo porque la derivada es positiva a la derecha y negativa a la izquierda de este valor.

(c) El coste mínimo lo obtenemos sustituyendo este valor de x:

$$C_{min} \simeq 3200k$$

(d) De

$$\mathrm{tg}(180 - \theta) = \frac{450}{x}$$

resulta $\theta \simeq 102°$.

(e) (I) El coste mínimo se dará cuando $\theta = 120°$ puesto que al aumentar el ángulo aumenta x y ya hemos visto que en esta región la función $C(x)$ era creciente. Entonces:

$$x = \frac{450}{\mathrm{tg}\,60°} \simeq 260 \text{ m}$$

(II) El coste para este nuevo valor de x es $C \simeq 3340k$. El incremento porcentual del coste es del 4,17 %.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (20 puntos)

Considere $z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $z \in \mathbb{C}$

(a) Utilice la inducción matemática para demostrar que $z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Sabiendo que $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 - i$,

(I) exprese u y v en forma módulo-argumental;

(II) a partir de lo anterior, halle u^3v^4.

(III) Los números complejos u y v se representan en un diagrama de Argand mediante el punto A y el punto B, respectivamente. Sitúe el punto A y el punto B en el diagrama de Argand.

(IV) El punto A se rota $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen O, convirtiéndose en el punto A'. El punto B se rota en el sentido de las agujas del reloj $\frac{\pi}{2}$ alrededor de O, convirtiéndose en el punto B'. Halle el área del triángulo $OA'B'$.

(V) Sabiendo que u y v son raíces de la ecuación $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$, donde $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ halle los valores de b, c, d y e.

Solución:

(a) La fórmula se cumple evidentemente para $n = 1$. Supongamos que se cumple para $n = k$

$$z^k = r^k (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)$$

y veamos que, en ese caso, se cumple también para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z = r^k (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \cdot r (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ &= r^{k+1} (\cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta + i(\operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \cos k\theta \operatorname{sen}\theta)) \\ &= r^{k+1} (\cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta)) \\ &= r^{k+1} (\cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta) \end{aligned}$$

y, en consecuencia, la fórmula se cumple para $n = k + 1$. Por el principio de inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) (I) $u = 2_{60^\circ}$ y $v = (\sqrt{2})_{-45^\circ}$.

(II) $u^3v^4 = 8_{180^\circ} \cdot 4_{-180^\circ} = 32_{0^\circ} = 32$.

(III)

(IV) Es fácil ver que $\widehat{A'OB'} = 75^\circ$. Entonces, el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \operatorname{sen} 75^\circ \simeq 1{,}37$$

(V) Como los coeficientes del polinomio son reales, si $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 - i$ son raíces del polinomio, también lo son $\bar{u} = 1 - \sqrt{3}i$ y $\bar{v} = 1 + i$.

La suma de las raíces es 4. Por tanto $b = -4$.

El producto de las raíces es:

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)(1 + i)(1 - i) = 4 \cdot 2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad e = 8$$

El polinomio tiene la forma $z^4 - 4z^3 + cz^2 + dz + 8$. Para calcular c y d, en lugar de seguir utilizando las relaciones de Cardano, podemos sustituir una de las raíces, por ejemplo 2_{60° y obtenemos:

$$16_{240^\circ} - 4 \cdot 8_{180^\circ} + c \cdot 4_{120^\circ} + d \cdot 2_{60^\circ} + 8 = 0$$

Igualando a cero la parte real:

$$\begin{aligned} &16 \cos 240^\circ + 32 + 4c \cos 120^\circ + 2d \cos 60^\circ + 8 = 0 \\ &-8 + 32 - 2c + d + 8 = 0 \\ &-2c + d = -32 \end{aligned}$$

E igualando a cero la parte real:

$$\begin{aligned} &16 \operatorname{sen} 240^\circ + 4c \operatorname{sen} 120^\circ + 2d \operatorname{sen} 60^\circ = 0 \\ &-16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ &2c + d = 8 \end{aligned}$$

Y, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -2c + d = -32 \\ 2c + d = 8 \end{cases}$$

se obtiene $c = 10$, $d = -12$.

♠♠♠♠

Ejercicio 14. (12 puntos)

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad v m s^{-1}, en el instante t segundos, viene dada por

$$v(t) = \frac{t}{12 + t^4}, \qquad t \geq 0.$$

(*a*) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas.

(*b*) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\displaystyle\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t$.

(*c*) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma $k \operatorname{artg}(b)$, $\quad k, b \in \mathbb{R}$.

(*d*) La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y su desplazamiento s m están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arsen}(\sqrt{s})$. Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0{,}1$ m.

Solución:

(*a*) La derivada de la función es:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{12+t^4-4t^3\cdot t}{(12+t^4)^2} = \frac{12-3t^4}{(12+t^4)^2}$$

La derivada se anula en $t=\sqrt{2}$. La función tiene un máximo en $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{16}\right)$.

(*b*) Con el cambio $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ tenemos:

$$\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{12+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\operatorname{artg}\frac{u}{\sqrt{12}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{x^2}{2\sqrt{3}} + C$$

(*c*) Calculamos la integral definida:

$$s = \int_0^6 \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right]_0^6 = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{artg} 6\sqrt{3}$$

(*d*) Teniendo en cuenta que

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot v$$

Derivando y sustituyendo v:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-s}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot \operatorname{arsen}\sqrt{s}$$

Sustituyendo $s = 0{,}1$ se obtiene $a \simeq 0{,}536\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

♠♠♠♠

17. 2015. Primer examen. TZ2.

17.1. Sección A

Ejercicio 1. A y B son dos sucesos tales que $\mathrm{p}(A) = 0{,}25$, $\mathrm{p}(B) = 0{,}6$ y $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}7$.

(a) Halle $\mathrm{p}(A \cap B)$.

(b) Determine si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

(a) $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}15$.

(b) Puesto que $\mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15 = \mathrm{p}(A \cap B)$, los sucesos son independientes.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. Desarrolle $(3 - x)^4$ en potencias ascendentes de x y simplifique la respuesta.

Solución:

$$\begin{aligned}(3-x)^4 &= 3^4 - 4 \cdot 3^3 x + 6 \cdot 3^2 x^2 - 4 \cdot 3x^3 + x^4 \\ &= 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. Halle todas las soluciones de la ecuación $\tan x + \tan 2x = 0$ donde $0° \leq x < 360°$.

Solución:

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 0$$

$$\tan x \left(1 - \tan^2 x\right) + 2\tan x = 0$$

$$\tan x \left(3 - \tan^2 x\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\tan x = 0 &\implies x = 0°, \quad x = 180° \\ \tan x = \sqrt{3} &\implies x = 60°, \quad x = 240° \\ \tan x = -\sqrt{3} &\implies x = 120°, \quad x = 300°\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. Considere la función definida mediante $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

(a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ es una función decreciente.

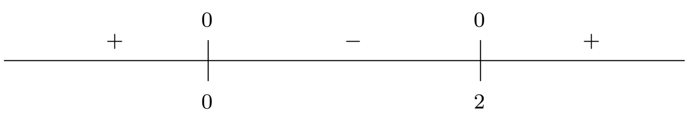
(b) En la curva $y = f(x)$ hay un punto de inflexión P. Halle las coordenadas de P.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

El signo de la derivada está dado por el siguiente esquema:

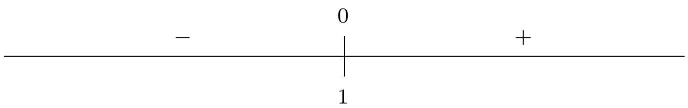


La función es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.

(*b*) La segunda derivada es:

$$f''(x) = 6x - 6$$

El signo de la segunda derivada es:



Hay un punto de inflexión en $P(1, 2)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Muestre que

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

Solución:

Integramos por partes:

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \left[\frac{x^4 \ln x}{4}\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4 \, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{16\ln 2}{4}\right) - \left[\frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

$$= 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

♠♠♠♠

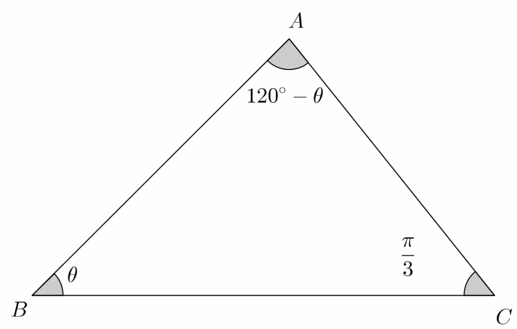
Ejercicio 6. En el triángulo ABC, $BC = \sqrt{3}$ cm, $A\hat{B}C = \theta$ y $B\hat{C}A = \frac{\pi}{3}$.

(*a*) Muestre que la longitud:

$$AB = \frac{3}{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

(*b*) Sabiendo que AB alcanza un valor mínimo, determine el valor de θ para el cual sucede esto.

Solución:



(*a*) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(120^\circ - \theta)} \quad \Longrightarrow \quad AB = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta} = \frac{3}{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

(*b*) Para que sea máximo, la derivada debe ser cero:

$$y' = \frac{-3(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2} = 0$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$$

$$-\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7.

(*a*) Halle tres raíces distintas de la ecuación $8z^3 + 27 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, en forma módulo-argumental.

(*b*) Las raíces se representan mediante los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand. Muestre que el área del triángulo es igual a $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

Solución:

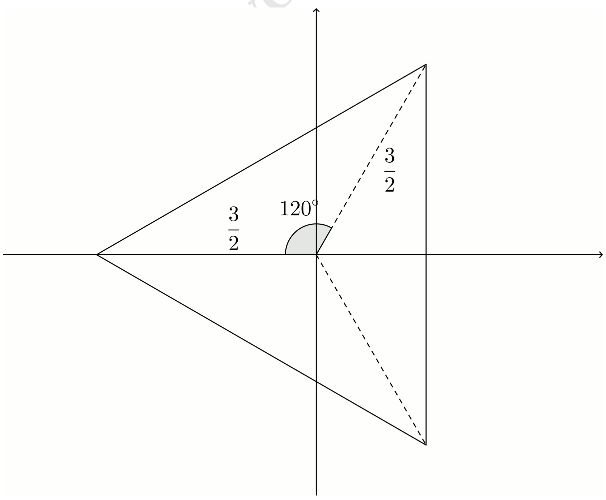
(*a*) Puesto que:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)_{180^\circ}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{60^\circ + 120^\circ K} \qquad K = 0, 1, 2$$

de modo que las tres raíces son:

$$\left(\frac{3}{2}\right)_{60^\circ}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)_{180^\circ}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)_{300^\circ}$$

(*b*) Representamos las raíces:



El área del triángulo la podemos calcular como suma de las áreas de tres triángulos isósceles:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{27}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. Utilizando la sustitución $t = \tan x$, halle

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

Exprese la respuesta de la forma $m \arctan(n \tan x) + c$ donde m y n son constantes que deberá determinar.

Solución:

Derivamos la fórmula de sustitución:

$$t = \tan x$$
$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$
$$dx = \cos^2 x\, dt$$

Hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x}\, dt \\
&= \int \frac{1}{1+\tan^2 x + \tan^2 x}\, dt \\
&= \int \frac{1}{1+2\tan^2 x}\, dt \\
&= \int \frac{1}{1+2t^2}\, dt \\
&= \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c
\end{aligned}$$

de modo que $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $n = \sqrt{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9.

(a) Indique el conjunto de valores de a para los cuales la función $x \longmapsto \log_a x$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Sabiendo que $\log_x y = 4\log_y x$, halle todas las posibles expresiones de y en función de x.

Solución:

(a) La función existe para todo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(b) Podemos pasar ambos logaritmos a la base neperiana:

$$\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}\ ; \qquad \ln_y x = \frac{\ln x}{\ln y} \qquad \Longrightarrow \qquad \log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\log_x y = \frac{4}{\log_x y} \quad &\Longrightarrow \quad (\log_x y)^2 = 4 \\
&\Longrightarrow \quad \log_x y = \pm 2 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = x^{-2} \end{cases}
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. La función f se define mediante $f(x) = \dfrac{3x}{x-2},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 2.$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes x e y.

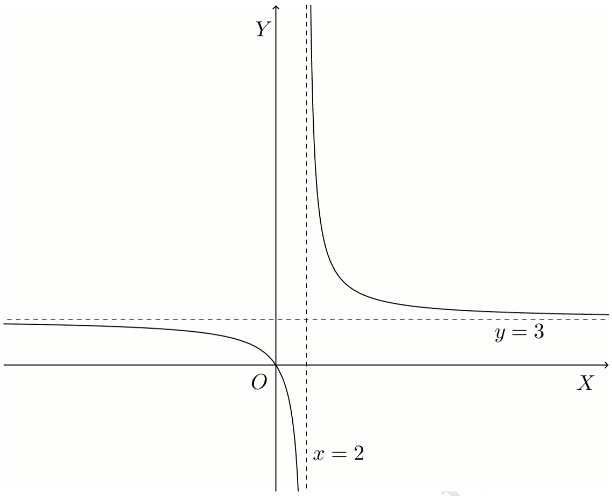
(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(c) Halle todos los valores de x para los que $f(x) = f^{-1}(x)$.

(d) Resuelva la inecuación $|f(x)| < \frac{3}{2}$.

(e) Resuelva la inecuación $f(|x|) < \frac{3}{2}$.

Solución:



(a) Las asíntotas son las rectas $x = 2$ e $y = 3$. La curva corta a los ejes en el punto $O(0, 0)$.

(b) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$\begin{aligned} y = \frac{3x}{x-2} \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{3y}{y-2} \\ &\Longrightarrow \quad x(y-2) = 3y \\ &\Longrightarrow \quad xy - 3y = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y(x-3) = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y = f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3} \end{aligned}$$

(c) Igualando las dos funciones:

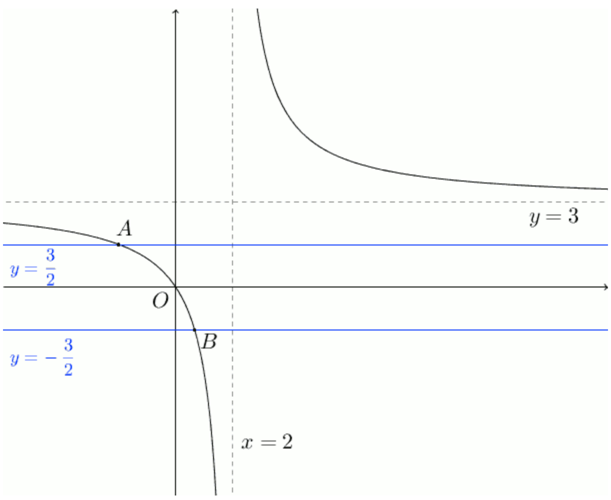
$$\frac{3x}{x-2} = \frac{2x}{x-3} \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 9x = 2x^2 - 4x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x = 0$$

Las dos funciones toman los mismos valores en $x = 0$ y en $x = 5$.

(d) La inecuación equivale a:

$$-\frac{3}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$$

Lo podemos resolver gráficamente



La parte de la curva que cumple la condición es la comprendida entre los puntos A y B es decir para $x \in \left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

(e) Se trata de una función simétrica respecto al eje de ordenadas. Para $x > 0$ la desigualdad se cumple en el intervalo $[0, 2)$. Por la simetría debe cumplirse también en $(-2, 0]$. La solución es entonces el intervalo $(-2, 2)$.
También puede expresarse la función como:

$$f(|x|) = \frac{3|x|}{|x|-2} = \begin{cases} \frac{3x}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-3x}{-x-2} = \frac{3x}{x+2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y obtener la solución por separado para $x < 0$ y para $x \geq 0$.

♠♠♠♠

17.2. Sección B

Ejercicio 11. Considere las funciones $f(x) = \tan x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$.

(a) Halle una expresión para $g \circ f(x)$; indique cuál es su dominio.

(b) A partir de lo anterior muestre que:

$$g \circ f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(c) Sea $y = g \circ f(x)$. Halle el valor exacto de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en el punto del gráfico de $y = g \circ f(x)$ en el que $x = \frac{\pi}{6}$; exprese la respuesta de la forma $a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Z}$.

(d) Muestre que el área delimitada por el gráfico de $y = g \circ f(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{6}$ es $\ln(1 + \sqrt{3})$.

Solución:

(a)

$$g \circ f(x) = g(\tan x) = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

El dominio de la función es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$

(b) Sustituyendo la tangente en función del seno y el coseno:

$$g \circ f(x) = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

(c) Derivamos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x) + (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x + \operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

Para $x=\frac{\pi}{6}$:

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)'(\frac{\pi}{6}) &= \frac{-2}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{-2}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}}\\
&= \frac{-2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-4}{2-\sqrt{3}}\\
&= \frac{-4(2+\sqrt{3})}{4-3}=-8-4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

(*d*) En la integral siguiente, el numerador es la derivada del denominador:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln|\cos x-\operatorname{sen}x|\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}\\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right|=\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}
\end{aligned}
$$

Este logaritmo es menor que cero por lo que el área es igual a:

$$
\begin{aligned}
S &= -\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}-1}\\
&= \ln\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\ln\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}\\
&= \ln(\sqrt{3}+1)
\end{aligned}
$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. La ecuación cúbica $x^3+px^2+qx+c=0$, tiene por raíces α, β y γ. Desarrollando $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ muestre que:

(*a*) (I) $p=-(\alpha+\beta+\gamma)$.

(II) $q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

(III) $c=-\alpha\beta\gamma$.

Ahora se sabe que $p=-6$ y $q=18$ para los apartados (*b*) y (*c*).

(*b*) (I) En el caso de que las tres raíces formen una progresión aritmética, muestre que una de las raíces es 2.

(II) A partir de lo anterior, determine el valor de c.

(*c*) En otro caso, las tres raíces α, β y γ forman una progresión geométrica. Determine el valor de c.

Solución:

(*a*) Desarrollando:

$$
\begin{aligned}
x^3+px^2+qx+c &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\
&= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

e igualando coeficientes resulta:

$$
\begin{aligned}
p &= -(\alpha+\beta+\gamma)\\
q &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\\
c &= -\alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

(*b*) (I) Puesto que las raíces están en progresión aritmética, las podemos representar mediante $a-d$, a y $a+d$. Entonces:

$$a-d+a+a+d=6\quad\Longrightarrow\quad 3a=6\quad\Longrightarrow\quad a=2$$

El segundo término de la progresión es igual a 2.

(II) Por otra parte puesto que $x=2$ es una raíz de $x^3-6x^2+18x+c$:

$$2^3-6\cdot2^2+18\cdot2+c=0\quad\Longrightarrow\quad c=-20$$

(c) Sean las raíces $\frac{a}{r}$, a y ar. Debe cumplirse que:

$$\frac{a}{r}+a+ar=a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=6$$

$$\frac{a}{r}\cdot a+\frac{a}{r}\cdot ar+a\cdot ar=a^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=18$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene $a=3$. Entonces:

$$c=-\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar=-a^3=-27$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13.

(a) Muestre que:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

donde $n\geq 0,\ n\in\mathbb{Z}$.

(b) A partir de lo anterior muestre que $\sqrt{2}-1<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Demuestre, utilizando la inducción matemática que:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{\sqrt{r}}>\sqrt{n}$$

para $n\geq 2\ n\in\mathbb{Z}$.

Solución:

(a) Racionalizando

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

(b) Aplicando la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}-1&=\sqrt{2}-\sqrt{1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\\&<\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(c) – Se cumple para $n=2$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{r=2}\frac{1}{\sqrt{r}}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\\&>\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

– Supongamos que se cumple para $n=h$:

$$\sum_{r=1}^{r=h}\frac{1}{\sqrt{r}}>\sqrt{h}$$

y veamos que, entonces, se cumple para $r = h+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{r=h+1} \frac{1}{\sqrt{r}} &= \sum_{r=1}^{r=h} \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} > \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} \\
&= \frac{\sqrt{h}\sqrt{h+1}+1}{\sqrt{h+1}} > \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}+1}{\sqrt{h+1}} \\
&= \frac{h+1}{\sqrt{h+1}} = \sqrt{h+1}
\end{aligned}$$

– De los dos apartados anteriores se deduce que la fórmula se cumple para $n \geq 2$.

♠♠♠♠

18. 2015. Segundo examen. TZ2.

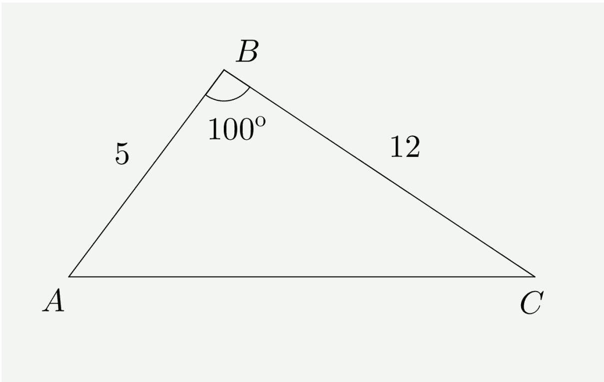
18.1. Sección A

Ejercicio 1. En el triángulo ABC, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm, $A\hat{B}C = 100°$.

(a) Halle el área del triángulo.

(b) Halle AC.

Solución:



(a) El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 100° \simeq 29{,}5 \text{ cm}^2$$

(b) Por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos 100° \quad \Longrightarrow \quad AC \simeq 13{,}8 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. De un grupo compuesto por cinco hombres y seis mujeres se eligen cuatro personas.

(a) Determine cuantos grupos posibles se pueden elegir.

(b) Determine cuántos grupos se pueden formar que estén compuestos por dos hombres y dos mujeres.

(c) Determine cuántos grupos se pueden formar en los que haya al menos una mujer.

Solución:

Se trata de un problema de combinaciones:

(a) Hay 11 personas y hay que escoger 4:

$$C_{11,4} = 330$$

(b) Los dos hombres pueden escogerse de $C_{5,2}$ y las mujeres de $C_{6,2}$ maneras. En total:

$$C_{5,2} \cdot C_{6,2} = 150$$

(c) Son todos menos los grupos formados exclusivamente por hombres. En total

$$C_{11,4} - C_{5,4} = 325$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3.

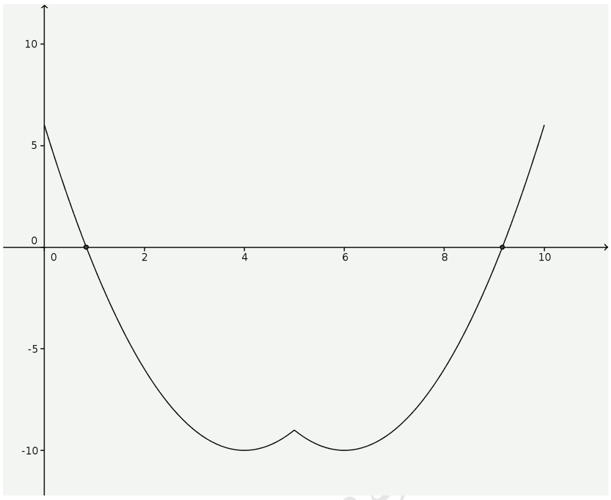
(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = (x-5)^2 - 2|x-5| - 9$, para $0 \le x \le 10$.

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación:

$$(x-5)^2 - 2|x-5| - 9 = 0$$

Solución:

(a) Puede dibujarse con la calculadora. El resultado es algo como esto:



(b) Las soluciones de la ecuación pueden obtenerse como las intersecciones de la curva del apartado anterior con el eje OX. De esta manera se obtiene:

$$x_1 = 0{,}84\ ; \qquad x_2 = 9{,}16$$

El valor exacto puede calcularse resolviendo:

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(x-5) - 9 = 0 \\ x > 5 \end{cases} \implies x = 6 + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 - 2(5-x) - 9 = 0 \\ x < 5 \end{cases} \implies x = 4 - \sqrt{10}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. A Emma le regalan un teléfono móvil nuevo para su cumpleaños y en él recibe mensajes de texto de sus amigos. Se supone que el número de mensajes de texto que Emma recibe al día sigue una distribución de Poisson de media $m = 5$.

(a) (I) Halle la probabilidad de que en un día dado Emma reciba más de 7 mensajes de texto.

(II) Determine el número esperado de días a la semana en los que Emma recibe más de 7 mensajes de texto.

(b) Halle la probabilidad de que Emma reciba menos de 30 mensajes de texto a lo largo de una semana dada.

Solución:

(a) (I) Basta aplicar la distribución de Poisson

$$\mathrm{p}(X \le 7) \simeq 0{,}867 \quad \implies \quad \mathrm{p}(X > 7) \simeq 0{,}133$$

(ii) Sea Y el número de días de la semana en los que Emma recibe más de 7 mensajes de texto. Y sigue una distribución $\mathrm{B}(7,p)$ siendo p:

$$p = \mathrm{p}(X > 7) \simeq 0{,}133$$

El valor esperado de Y es:

$$\mathrm{E}(Y) = 7 \cdot \mathrm{p}(X > 7) \simeq 0{,}934$$

(b) En este caso la distribución de Poisson tiene media 35:

$$\mathrm{p}(X < 30) \simeq 0{,}177$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Considere los vectores dados por $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ y $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ donde a y b son constantes.

Se sabe que $\vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ donde c es una constante.

(a) Halle el valor de cada una de las constantes a, b y c.

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el punto $(0,0,0)$.

Solución:

(a) Calculamos el producto vectorial e igualamos:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & a \\ \vec{\jmath} & 2 & b \\ \vec{k} & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \\ b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad b = 2\ ; \quad a = -1\ ; \quad c = 4$$

(b) El vector normal al plano es $\vec{u} \times \vec{v}$. Por tanto la ecuación es:

$$4x + 2y + 4z = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x + y + 2z = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. El gráfico de $y = \ln(5x+10)$ se obtiene a partir del gráfico de $y = \ln x$ realizando una traslación de a unidades en la dirección del eje x seguida de una traslación de b unidades en la dirección del eje y.

(a) Halle el valor de a y el valor de b.

(b) La región delimitada por el gráfico de $y = \ln(5x+10)$, el eje x y las rectas $x = e$ y $x = 2e$, se rota alrededor del eje x. Halle el volumen así generado.

Solución:

(a) Podemos escribir la función como:

$$Y = \ln(5x+10) = \ln[5(x+2)] = \ln 5 + \ln(x+2)$$

con lo que vemos que la curva $y = \ln x$ se ha trasladado -2 unidades en la dirección del eje x y $\ln 5$ unidades en la dirección del eje y. Es decir, $a = -2$ y $b = \ln 5$.

(b) El volumen es igual a la siguiente integral que podemos obtener con la calculadora:

$$V = \pi \int_e^{2e} (\ln(5x+10))^2 \; \mathrm{d}x = 31{,}6\pi$$

También puede obtenerse el valor exacto integrando por partes.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 4x + 3y + 14z = 4 \\ 2x - 2y + (\alpha+2)z = \beta - 12 \end{cases}$$

(a) Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que:

(I) El sistema no tenga solución.

(II) El sistema tenga solo una solución.

(III) El sistema tenga un número infinito de soluciones.

(b) Para el caso en el que el número de soluciones es infinito, halle la solución general del sistema de ecuaciones en forma cartesiana.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 \\ 2 & 2 & \alpha-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha-8 \end{vmatrix} = 2(\alpha-10)$$

y ya podemos decir que:

- Si $\alpha \neq 10$ el sistema es compatible determinado y tiene una sola solución.
- Si $\alpha = 10$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 14 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & \beta-12 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & \beta-12 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \beta-12 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es $2(\beta-16)$ de forma que, si $\beta \neq 16$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $\beta = 16$ el rango de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(b) Para $\alpha = 10$, $\beta = 16$ el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x+y+6z=0 \\ 4x+3y+14z=4 \end{cases}$$

Esta es la ecuación de una recta como intersección de planos. Para pasarla a forma continua buscamos una solución particular, por ejemplo $P(-2,4,0)$ y un vector director:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 4 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación queda:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{-1}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. El granjero Bill posee un terreno rectangular de 10 m por 4 m. Bill ata una cuerda a un poste de madera situado en una esquina de su terreno, y ata el otro extremo de la cuerda a su cabra Gruff.

(a) Sabiendo que la cuerda tiene una longitud de 5 m, calcule el porcentaje del terreno de Bill en el que Gruff puede pastar. Dé la respuesta aproximando al número entero más próximo.

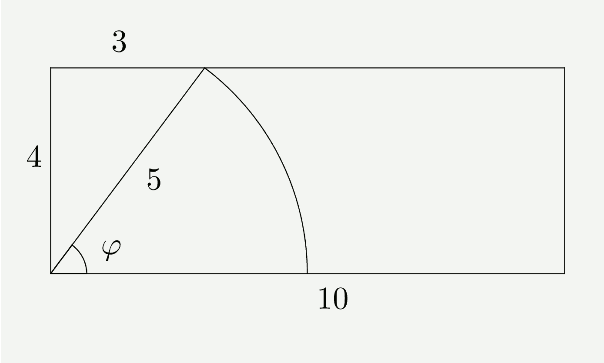
(b) Bill sustituye la cuerda de Gruff por otra que tiene una longitud a, $4 < a < 10$, de modo que ahora Gruff puede pastar exactamente en la mitad del terreno de Bill.

Muestre que a satisface la ecuación:

$$a^2 \operatorname{arsen}\left(\frac{4}{a}\right) + 4\sqrt{a^2-16} = 40$$

(c) Halle el valor de a.

Solución:



(a) El área que alcanza la cabra puede descomponerse en un triángulo y un sector, Además

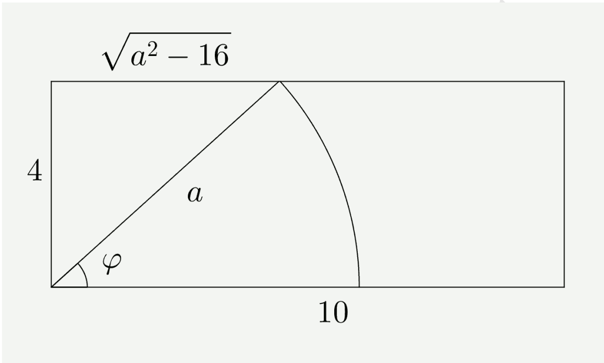
$$\cos(90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \operatorname{arsen}\frac{4}{5}$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot \operatorname{arsen}\frac{4}{5} \simeq 17{,}6$$

lo que supone un 44 % de la superficie total.

(b) En este caso, el área debe ser igual a 20:



Como en el caso anterior:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \operatorname{arsen}\frac{4}{a}$$

Entonces el área cumple:

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{a^2-16} + \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot \operatorname{arsen}\frac{4}{a} = 20 \qquad \text{o bien}$$

$$4\sqrt{a^2-16} + a^2 \operatorname{arsen}\frac{4}{a} = 40$$

(c) La ecuación se resuelve con la calculadora y resulta $a = 5{,}53$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. Natasha vive en Chicago y tiene familia en Nashville y St. Louis. Cada vez que quiere visitar a su familia, o bien va en avión o bien va en coche.

Cuando va a Nashville, la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{4}{5}$, y cuando va a St. Louis la probabilidad de que vaya en avión es $\frac{1}{3}$.

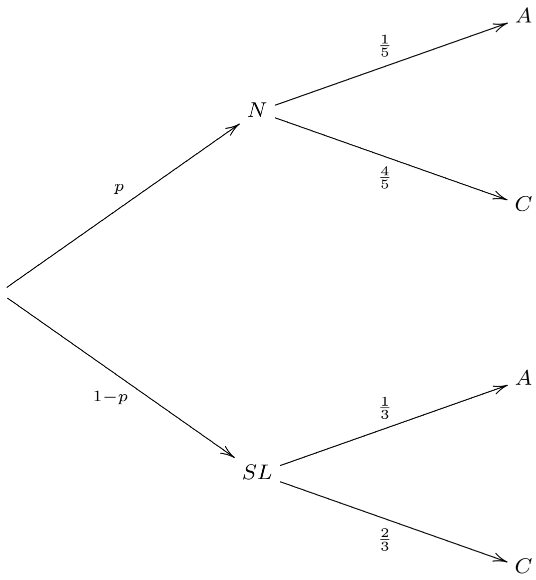
Sabiendo que cuando va a visitar a su familia la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{13}{18}$, Halle la probabilidad de que para un viaje en particular,

(a) Vaya a Nashville.

(b) Esté camino de Nashville, sabiendo que está yendo en avión.

Solución

El problema responde al siguiente esquema:



(a) Puesto que $\text{p}(C) = \frac{13}{18}$:

$$\frac{13}{18} = p \cdot \frac{4}{5} + (1-p) \cdot \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{5}{12}$$

(b) Por la fórmula de Bayes:

$$\text{p}(N|A) = \frac{\frac{5}{12}\,\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}\,\frac{1}{5} + \frac{7}{12}\,\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{7}{36}} = \frac{3}{10}$$

♠♠♠♠

18.2. Sección B

Ejercicio 10. La agricultora Suzie cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cosecha siguen una distribución normal de media 122 g y desviación típica 14,7 g.

(a) (I) Calcule el porcentaje de los nabos de Suzie que pesan entre 110 g y 130 g.

(II) Suzie tiene listos 100 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de 130 g.

(III) Halle la probabilidad de que al menos 30 de estos 100 nabos pesen más de 130 g.

(b) El agricultor Ray también cultiva nabos. Los pesos de los nabos que cultiva siguen una distribución normal de media 144 g. Ray solamente lleva al mercado aquellos nabos que pesan más de 130 g. Durante un determinado período, Ray observa que tiene que rechazar 1 de cada 15 nabos por pesar menos de lo debido.

(I) Halle la desviación típica de los nabos de Ray.

(II) Ray tiene listos 200 nabos para llevarlos al mercado. Halle el número esperado de nabos que pesan más de 150 g.

Solución:

(*a*) (I) Es una distribución normal N(122; 14,7):

$$\mathrm{p}(110 < X < 130) = 50{,}0\,\%$$

(II) Sea Y el número de nabos que pesan más de 130 g. Ahora $Y \sim \mathrm{B}(100, \mathrm{p}(X > 130))$:

$$\mathrm{p}(X > 130) = 0{,}293$$

y el número esperado será $\mathrm{E}(Y) = 0{,}293 \times 100 = 29{,}3$.

(III) Con la distribución binomial del apartado anterior:

$$p(Y \geq 30) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 29) = 0{,}478$$

(*b*) (I) Es una distribución $\mathrm{N}(144; \sigma)$ de desviación típica desconocida. Pero sabemos que:

$$\mathrm{p}(X < 130) = \frac{1}{15} \implies \mathrm{p}\left(Z < \frac{130 - 144}{\sigma}\right) = \frac{1}{15}$$

Con la función inversa de la normal obtenemos:

$$\frac{-14}{\sigma} = -1{,}50108... \implies \sigma \simeq 9{,}33$$

con tres cifras significativas.

También podemos resolver con la calculadora gráfica la ecuación:

$$\mathrm{normalcdf}(-1\mathrm{E}99, 130, 144, x) - 1/15 = 0$$

y obtener el mismo resultado.

(II) Puesto que los nabos están listos para llevarlos al mercado, pesan más de 130 g. Con el valor obtenido de la desviación, la probabilidad de que un nabo pese más de 150 g es:

$$p(X > 150 \mid X > 130) = \frac{\mathrm{p}(X > 150)}{\mathrm{p}(X > 130)} = 0{,}278579...$$

y por tanto, el número esperado de nabos que pesan más de 150 g es $200 \times 0{,}278... \simeq 55{,}7$.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. Una curva se define mediante $x^2 - 5xy + y^2 = 7$.

(*a*) Muestre que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5y - 2x}{2y - 5x}$$

(*b*) Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto $(6, 1)$.

(*c*) Halle la distancia que hay entre los dos puntos de la curva en los cuales la tangente correspondiente es paralela a la recta $y = x$.

Solución:

(*a*) Por derivación implícita:

$$2x - 5(y + xy') + 2yy' = 0$$
$$2yy' - 5xy' = 5y - 2x$$
$$y' = \frac{5y - 2x}{2y - 5x}$$

(*b*) La derivada en ese punto es:

$$y'(6, 1) = \frac{5 - 12}{2 - 30} = \frac{1}{4}$$

Entonces, la pendiente de la recta normal es $m = -4$ y su ecuación:

$$y - 1 = -4(x - 6)$$

(*c*) Los puntos de la curva que tienen tangente de pendiente 1 son la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ \dfrac{5y - 2x}{2y - 5x} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los puntos $P(1, -1)$ y $Q(-1, 1)$. Su distancia es:

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. Una partícula se mueve en línea recta. Su velocidad en $\mathrm{m\,s^{-1}}$ en el instante t segundos viene dada por $v = 9t - 3t^2,\ 0 \le t \le 5$.

En el instante $t = 0$, el desplazamiento s de la partícula desde el origen O es de 3 m.

(a) Halle el desplazamiento de la partícula cuando $t = 4$.

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico del desplazamiento/tiempo para esta partícula $0 \le t \le 5$, mostrando claramente dónde toca la curva a los ejes y las coordenadas de los puntos en los que el desplazamiento alcanza valores máximos y mínimos.

(c) Para $t > 5$ el desplazamiento de la partícula viene dado por:

$$s = a + b\cos\frac{2\pi t}{5}$$

de modo tal que s es continuo para todo $t \ge 0$.

Sabiendo que $s = 16{,}5$ para $t = 7{,}5$, halle los valores de a y b.

(d) Halle los valores t_1 y t_2 $(0 < t_1 < t_2 < 8)$ en los que la partícula vuelve al punto de partida.

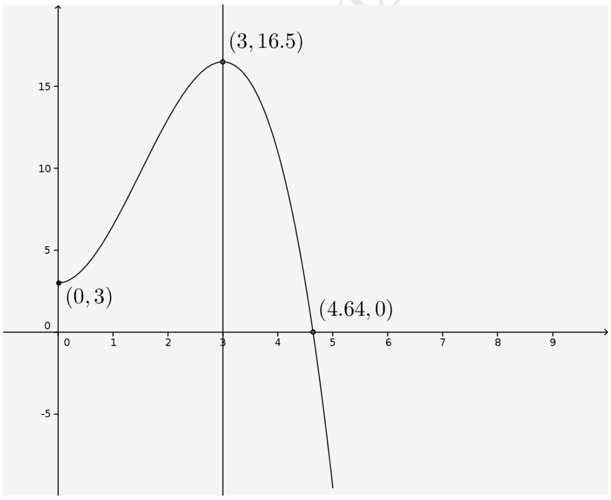
Solución:

(a) Integrando la velocidad y teniendo en cuenta que $s(0) = 3$ se obtiene:

$$s(t) = \frac{9t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} + 3 = \frac{9}{2}t^2 - t^3 + 3$$

Sustituyendo $s(4) = 11$.

(b) El gráfico de esta función entre 0 y 5 s es:



(c) Puesto que $s(5) = \frac{9}{2}25 - 125 + 3 = -9{,}5$, para que la función sea continua debe ocurrir:

$$a + b\cos\frac{2\pi 5}{5} = a + b\cos 2\pi = -9{,}5$$

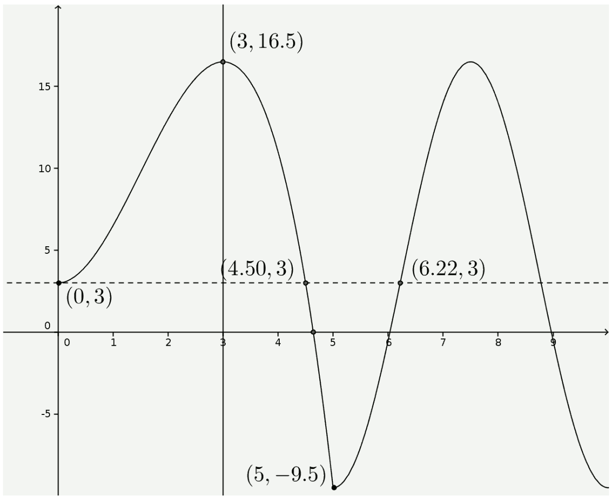
y además:

$$s(7{,}5) = a + b\cos\frac{2\pi 7{,}5}{5} = a + b\cos 3\pi = 16{,}5$$

Entonces a y b son la solución del sistema:

$$\begin{cases} a + b = -9{,}5 \\ a - b = 16{,}5 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad a = 3{,}5,\ b = -13$$

(d) Representamos la función:



y de aquí $x_1 = 4{,}50$ y $x_2 = 6{,}22$.

♠♠♠♠

Ejercicio 13. Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son:

$$L_1 : \ \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad L_2 : \ \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas.

(b) Halle el ángulo agudo que forman las rectas L_1 y L_2.

(c) (I) Halle un vector perpendicular a ambas rectas.

(II) A partir de lo anterior, determine una ecuación de la recta L_3 que es perpendicular a L_1 y L_2 y que corta a ambas rectas.

Solución:

(a) La posición relativa de las rectas depende del producto mixto $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

y, por consiguiente, se cruzan (son alabeadas).

(b) Calculamos el ángulo:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2+1+12}{\sqrt{6}\sqrt{41}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \simeq 45{,}5^\circ$$

(c) (I) Un vector perpendicular a ambos es su producto vectorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(II) El plano que contiene a L_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & -1 \\ y-2 & 10 & 1 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 23x - 5y + 14z - 41 = 0$$

El plano que contiene a L_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ y-2 & 10 & 1 \\ z-4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 21x - 10y + 8z - 33 = 0$$

La perpendicular común es la intersección de ambos planos:

$$L_3 : \begin{cases} 23x - 5y + 14z - 41 = 0 \\ 21x - 10y + 8z - 33 = 0 \end{cases}$$

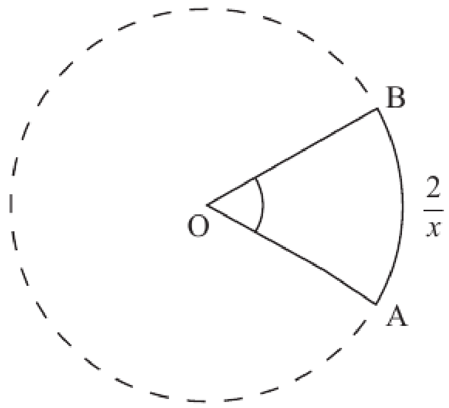
♠♠♠♠

19. 2015. Primer examen. TZ0

19.1. Section A

Ejercicio 1. (4 puntos)

La siguiente figura muestra un sector circular, donde $\widehat{AOB} = x$ radianes y la longitud del arco $AB = \frac{2}{x}$ cm. Sabiendo que el área del sector circular es igual a 16 cm^2, halle la longitud del arco AB.



Solución:

Como la longitud del arco es el radio por el ángulo en radianes tenemos que

$$\frac{2}{x} = rx \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{2}{x^2}$$

El área del sector es la mitad del arco por el radio (o la mitad del radio al cuadrado por el ángulo). así:

$$16 = \frac{1}{2}\frac{2}{x^2} \cdot \frac{2}{x}\,; \qquad x = 2$$

y la longitud del arco es 1 cm.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

Utilizando la integración por partes, halle $\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$.

Solución:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \qquad v = -\cos x$$
$$\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

(a) Escriba y simplifique el desarrollo de $(2 + x)^4$ en potencias ascendentes de x.

(b) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $(2{,}1)^4$.

Solución:

(a) $(2+x)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 x + 6\cdot 2^2 x^2 + 4\cdot 2x^3 + x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

(b) Sustituyendo x por 0,1:

$$(2{,}1)^4 = 16 + 3{,}2 + 0{,}24 + 0{,}008 + 0{,}0001 = 19{,}4481$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Considere la curva $y = \dfrac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 1.$

(a) Halle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Determine la ecuación de la normal a la curva en el punto $x = 3$ en la forma $ax + by + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Solución:

(a) Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(b) En el punto de abscisa $x_0 = 3$ la ordenada vale $y_0 = -\frac{1}{3}$.
La pendiente de la recta tangente en ese punto es:

$$m = \frac{1}{(1-3)^2} = \frac{1}{4}$$

de forma que la pendiente de la normal es -4. La ecuación de la normal es

$$y + \frac{1}{3} = -4(x-3)$$
$$3y + 1 = -4x + 12$$
$$4x + 3y - 11 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (4 puntos)

Utilice la sustitución $u = \ln x$ para hallar el valor de $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Solución:

$u = \ln x\ ;\quad \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Además, para $x = e$, $u = 1$ y para $x = e^2$, $u = 2$.

Sustituyendo

$$\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln u\Big]_1^2 = \ln 2$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Una caja contiene cuatro bolas rojas y dos bolas blancas. Darren y Marty juegan a un juego en el que cada uno, por turnos, va sacando una bola de la caja, sin reposición. El primer jugador que saque una bola blanca es el ganador.

(a) Darren es el primero en jugar. Halle la probabilidad de que sea él quien gane el juego.

Ahora se modifica el juego, de modo que la bola escogida se repone en la caja después de cada turno. Nuevamente es Darren el primero en jugar.

(b) Muestre que la probabilidad de que Darren gane no ha cambiado.

Solución:

(a) Designemos por R y B las bolas rojas y blancas y con los subíndices 1 y 2 las bolas extraídas respectivamente por Darren y Marty. La probabilidad de que gane Darren es

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{p}(B_1) + \mathrm{p}(R_1R_2B_1) + \mathrm{p}(R_1R_2R_1R_2B_1) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(b) En este caso $\mathrm{p}(R) = \frac{2}{3}$ y $\mathrm{p}(B) = \frac{1}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{p}(B_1) + \mathrm{p}(R_1R_2B_1) + \mathrm{p}(R_1R_2R_1R_2B_1) + \mathrm{p}(R_1R_2R_1R_2R_1R_2B_1) + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

Una curva viene dada por $xy = y^2 + 4$.

(a) Muestre que no hay ningún punto en el que la tangente a la curva sea horizontal.

(b) Halle las coordenadas de aquellos puntos en los que la tangente a la curva es vertical.

Solución:

(a) Derivando de forma implícita se obtiene:

$$\begin{aligned} &y + xy' = 2yy' \\ &2yy' - xy' = y \\ &y'(2y - x) = y \\ &y' = \frac{y}{2y - x} \end{aligned}$$

Según esta expresión, la derivada se anula para $y = 0$. Sin embargo no hay ningún punto de la curva con ordenada cero pues al sustituir este valor en la ecuación de la curva se obtiene $0 = 4$. No hay entonces ningún punto de tangente horizontal.

(b) La tangente es vertical cuando la derivada tiende a infinito, es decir, en este caso, cuando $2y - x = 0$. Sustituyendo $x = 2y$ en la ecuación de la curva:

$$\begin{aligned} &2y^2 = y^2 + 4 \\ &y^2 = 4 \\ &y = -2\,; \quad y = 2 \end{aligned}$$

Los puntos son $(-4, -2)$ y $(4, 2)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

(a) Muestre que $\operatorname{sen}\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$.

(b) Considere $f(x)=\operatorname{sen}(ax)$, donde a es una constante. Demuestre mediante inducción matemática que

$$f^{(n)}(x)=a^n\operatorname{sen}\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$$

donde $n\in\mathbb{Z}^+$ y $f^{(n)}(x)$ representa la n-ésima derivada de $f(x)$.

Solución:

(a) Aplicando la fórmula del seno de la suma

$$\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\cos\theta$$

(b)

- La propiedad se cumple para $n=1$ puesto que

$$f'(x)=a\cos(ax)=a\operatorname{sen}\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)$$

- Supongamos que se cumple para $n=k-1$, es decir:

$$f^{(k-1)}(x)=a^{k-1}\operatorname{sen}\left(ax+\frac{(k-1)\pi}{2}\right)$$

y veamos que, en ese caso, se cumple para $n=k$:

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x)&=a^{k-1}\cos\left(ax+\frac{(k-1)\pi}{2}\right)\cdot a\\&=a^k\operatorname{sen}\left(ax+\frac{(k-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=a^k\operatorname{sen}\left(ax+\frac{k\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

- Como consecuencia del principio de inducción, la propiedad se cumple para $n\in\mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}2x-\cos 2x=1+\operatorname{sen}x-\cos x$ para $x\in[-\pi,\pi]$.

Solución:

$$\begin{aligned}&2\operatorname{sen}x\cos x-\cos^2x+\operatorname{sen}^2x=1+\operatorname{sen}x-\cos x\\&2\operatorname{sen}x\cos x-\cos^2x+1-\cos^2x=1+\operatorname{sen}x-\cos x\\&2\operatorname{sen}x\cos x-2\cos^2x=\operatorname{sen}x-\cos x\\&2\cos x(\operatorname{sen}x-\cos x)=\operatorname{sen}x-\cos x\\&(\operatorname{sen}x-\cos x)(2\cos x-1)=0\end{aligned}$$

Y de aquí

$$\operatorname{sen}x-\cos x=0\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}$$

$$2\cos x-1=0\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{\pi}{3},\quad x=-\frac{\pi}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (6 puntos)

Una función polinómica viene dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Las raíces de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ son términos consecutivos de una progresión geométrica cuya razón común es igual a $\frac{1}{2}$ y cuyo primer término es 2.

Sabiendo que $a_{n-1} = -63$ y $a_n = 16$, halle

(a) El grado del polinomio.

(b) El valor de a_0.

Solución:

(a) De acuerdo con las relaciones de Cardano, la suma de las raíces de un polinomio es $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Entonces:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\ ; \qquad \frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{63}{16}\ ; \qquad 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{63}{64}\ ; \qquad \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64}$$

y por tanto, $n = 6$. Hay 6 raíces del polinomio y, por consiguiente, es de sexto grado.

(b) Si el polinomio es de grado par

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \frac{a_0}{a_n} \qquad \Longrightarrow \qquad a_0 = 16\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

♠♠♠♠

19.2. Sección B

Ejercicio 11. (17 puntos)

(a) Resuelva la ecuación $z^3 = 8i$, $z \in \mathbb{C}$ y dé las respuestas en la forma $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Considere los números complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$.

(I) Escriba z_1 en la forma $r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

(II) Calcule z_1z_2 y escriba el resultado en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(III) A partir de lo anterior, halle el valor de $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{12}$ en la forma $c + d\sqrt{3}$, donde $c, d \in \mathbb{Z}$.

(IV) Halle el menor valor $p > 0$ para el que $(z_2)^p$ es un número real positivo.

Solución:

(a) Las raíces cúbicas de $8i = 8_{90°}$ tienen de módulo 2 y argumento $\frac{90° + 360°k}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Es decir

$$z_1 = 2\left(\cos 30° + i\,\mathrm{sen}\,30°\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos 150° + i\,\mathrm{sen}\,150°\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2\left(\cos 270° + i\,\mathrm{sen}\,270°\right) = -2i$$

(b) (I) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$.

(II) El módulo del producto es $2\sqrt{2}$ y el argumento $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{12} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$z_1z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{2\sqrt{3} + 2}{2}i$$

(III) Dividiendo seno entre coseno

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-2}=\frac{(2\sqrt{3}+2)^2}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)}=\frac{16+8\sqrt{3}}{8}=2+\sqrt{3}$$

(IV) Para $p=12$:

$$\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^{12}=\left(2^{12}\right)_{2\pi}=2^{12}>0$$

Para $p=6$ también resulta un número real pero es negativo.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (20 puntos)

Considere la función $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ definida en el dominio $-1\le x\le 1$.

(a) Muestre que f es una función impar.

(b) Halle $f'(x)$.

(c) A partir de lo anterior, halle la coordenada x de todos los máximos o mínimos locales que haya.

(d) Halle el recorrido de f.

(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y=f(x)$, indicando claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y de todos los máximos o mínimos locales que haya.

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de $y=f(x)$ y el eje x para $x\ge 0$.

(g) Muestre que

$$\int_{-1}^{1}\left|x\sqrt{1-x^2}\right|\,\mathrm{d}x>\left|\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right|$$

Solución:

(a) Una función f es impar si $f(-x)=-f(x)$. Las gráficas de las funciones impares tienen un centro de simetría en el origen de coordenadas.

$$f(-x)=(-x)\sqrt{1-(-x)^2}=-x\sqrt{1-x^2}=-f(x)$$

(b) Aplicando la regla de derivación del producto

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c) Calculamos los ceros de la derivada:

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

$$1-x^2-x^2=0$$

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema

	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	
$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$\nexists$

Hay un mínimo para $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y un máximo relativo en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) El dominio de la función es el intervalo $[-1,1]$ y la función es continua en ese intervalo. Los valores máximo y mínimo absolutos de la función (que existen de acuerdo con el teorema de Weierstrass) o son máximos y mínimos relativos o se dan en los extremos del intervalo. Entonces, puesto que

$$f(-1)=0$$

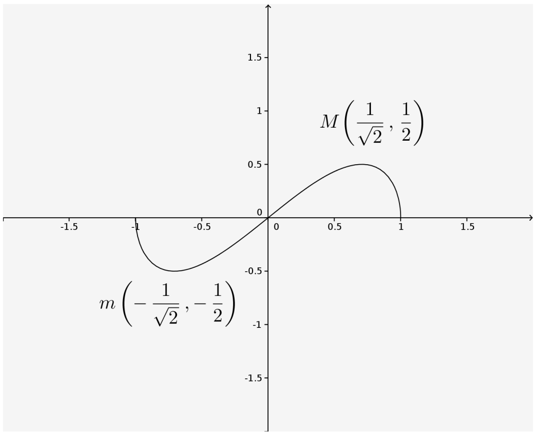
$$f(1)=0$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

el recorrido de la función es el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(*e*) La representación gráfica es la siguiente:



(*f*) El área es

$$S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(*g*) Es claro puesto que

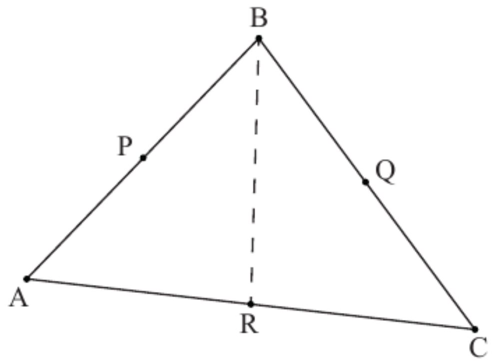
$$\int_{-1}^1 \left|x\sqrt{1-x^2}\right|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$\left|\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right| = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (23 puntos)

Considere el triángulo ABC. Los puntos P, Q y R son los puntos medios de los segmentos de recta $[AB]$, $[BC]$ y $[AC]$ respectivamente.



Sean $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ y $\vec{OC} = \vec{c}$.

(*a*) Halle $\vec{BR}$ en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

(*b*) (I) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por B y por R en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y de un parámetro λ.

(II) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por Q en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y de un parámetro μ.

(III) A partir de lo anterior, muestre que $OG = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$, sabiendo que G es el punto en el que se cortan $[BR]$ y $[AQ]$.

(c) Muestre que el segmento de recta $[CP]$ también incluye al punto G.

Las coordenadas de los puntos A, B y C son $(1,3,1)$, $(3,7,-5)$ y $(2,2,1)$ respectivamente. Un punto X es tal que $[GX]$ es perpendicular al plano ABC.

(d) Sabiendo que el tetraedro $ABCX$ tiene un volumen de 12 unidades, halle posibles coordenadas de X.

Solución:

(a) Puesto que $\vec{AB}+\vec{BR}=\vec{AR}$:

$$\vec{BR}=\vec{AR}-\vec{AB}=\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{AB}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})-(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$$

(b) (I) Tomamos como punto de la recta B y como vector director $2\vec{BR}$:

$$\vec{r}=\vec{b}+\lambda(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})$$

(II) De la misma forma, la recta que pasa por A y por Q es

$$\vec{r}=\vec{a}+\mu(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})$$

(III) En el punto de intersección se cumple

$$\begin{aligned}
&\vec{b}+\lambda(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})=\vec{a}+\mu(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})\\
&(1-\lambda-2\mu)\vec{a}-(1-\lambda-2\mu)\vec{b}+(\mu-\lambda)\vec{c}=\vec{0}\\
&(1-\lambda-2\mu)(\vec{a}-\vec{b})+(\mu-\lambda)\vec{c}=\vec{0}
\end{aligned}$$

Esta igualdad debe verificarse para cualquier triángulo. Entonces los coeficientes de los vectores deben ser cero, $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$. En este caso

$$\vec{r}=\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

(c) La ecuación de CP es:

$$\vec{r}=\vec{c}+\gamma(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$$

Para $\gamma=\frac{1}{3}$ se obtiene el punto G.

(d) El punto G es $(2,4,-1)$. Un vector perpendicular al plano ABC es

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{pmatrix}\vec{\imath} & 2 & 1\\ \vec{\jmath} & 4 & -1\\ \vec{k} & -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

El punto X está entonces sobre la recta

$$\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}$$

El volumen del tetraedro es un sexto del módulo del producto mixto $[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AX}]$. Sea $X(2+\lambda,4+\lambda,-1+\lambda$. Entonces

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & 1 & 1+\lambda\\ 4 & -1 & 1+\lambda\\ -6 & 0 & -2+\lambda\end{vmatrix}=\pm 12$$

o, como ya conocemos el producto vectorial de las dos primeras columnas

$$\begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+\lambda\\1+\lambda\\-2+\lambda\end{pmatrix}=\pm 72\ ;\qquad -6-6\lambda-6-6\lambda+12-6\lambda=\pm 72\ ;\qquad -18\lambda=\pm 72$$

que nos da $\lambda=4$ y $\lambda=-4$. Sustituyendo tenemos los puntos $X_1(6,8,3)$ y $X_2\,(-2,0,-5)$. Obsérvese que el punto G es el punto medio entre los dos.

♠♠♠♠

20. 2015. Segundo examen. TZ0

20.1. Section A

Ejercicio 1. (4 puntos)

A y B son dos sucesos tales que $\mathrm{p}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{p}(B) = 0{,}48$ y $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}818$.

(a) Halle $\mathrm{p}(A \cap B)$.

(b) A partir de lo anterior, muestre que los sucesos A y B son independientes.

Solución:

(a) $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}312$

(b) $\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = 0{,}65 \cdot 0{,}48 = 0{,}312 = \mathrm{p}(A \cap B)$. Los sucesos son independientes.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

Los tres planos cuyas ecuaciones cartesianas son $2x + 3y - z = 11$, $x + 2y + z = 3$ y $5x - y - z = 10$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

Solución:

Basta resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x - y - z = 10 \end{cases}$$

La solución es $x = \frac{17}{9}$, $y = \frac{5}{3}$ y $z = -\frac{20}{9}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

La siguiente tabla muestra los datos de los goles que han marcado los jugadores de un equipo de fútbol a lo largo de una temporada.

Goles	Frecuencia
0	4
1	k
2	3
3	2
4	3
8	1

(a) Sabiendo que la media de goles marcados por jugador es igual a 1,95 , halle el valor de k.

Ahora descubren que ha habido un error en los datos, pues no han incluido en la tabla al máximo anotador, que marcó 22 goles.

(b) (I) Halle el valor correcto de la media de goles marcados por jugador.

(II) Halle el valor correcto de la desviación típica del número de goles marcados por jugador.

Solución:

(a) La media es igual a

$$1{,}95 = \frac{0\cdot 4+1\cdot k+3\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 8}{4+k+3+2+3+1} = \frac{32+k}{13+k} \quad\Longrightarrow\quad k=7$$

(b) (I) La nueva media es

$$\bar{x} = \frac{7+6+6+12+8+22}{21} \simeq 2{,}90$$

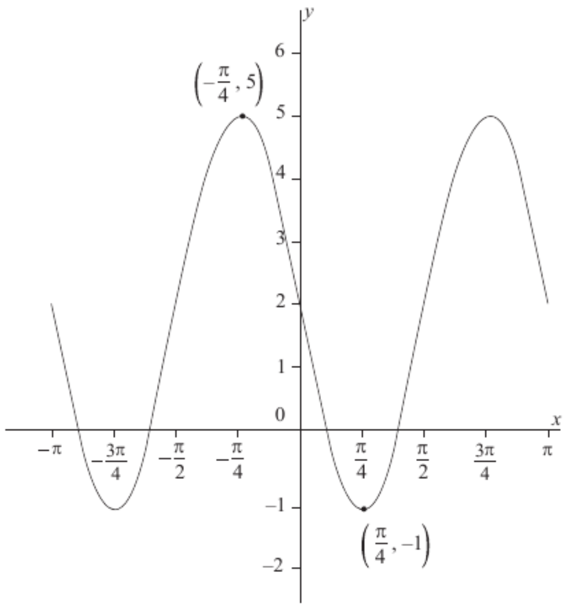
(II) La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media

$$\sigma^2 = \frac{7+12+18+48+64+22^2}{21} - \bar{x}^2 \simeq 21{,}7 \quad\Longrightarrow\quad \sigma \simeq 4{,}66$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Una función viene dada por $f(x) = A\,\mathrm{sen}(Bx)+C$, $-\pi \le x \le \pi$, donde $A, B, C \in \mathbb{Z}$. En la siguiente figura se representa el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Halle el valor de A, B y C.

(b) Resuelva $f(x) = 3$ para $0 \le x \le \pi$.

Solución:

(a) El período es π de modo que $B = 2$, la amplitud es 3, pero $A = -3$ porque se han cambiado los signos de la función ($3\,\mathrm{sen}\,2x$ sería positiva entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y negativa entre $-\frac{\pi}{4}$ y 0). La onda se ha desplazado dos unidades hacia arriba así que $C = 2$.
La función es $f(x) = -3\,\mathrm{sen}(2x)+2$.

(b) Hay dos puntos de intersección $x = 1{,}74$ y $x = 2{,}97$. Se obtienen con la calculadora.

♠♠♠♠

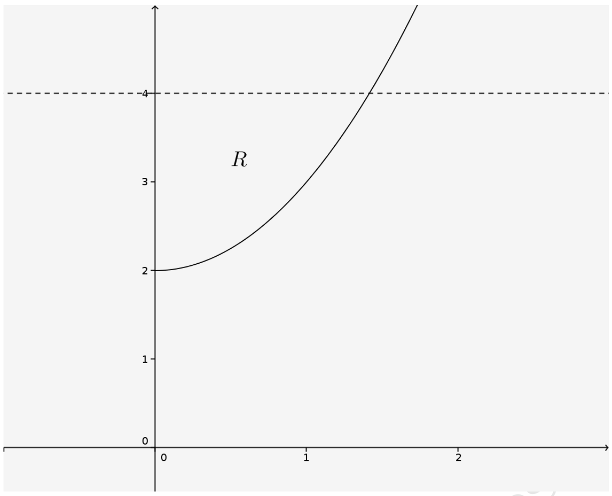
Ejercicio 5. (6 puntos)

Una función viene dada por $f(x) = x^2+2$, $x \ge 0$. La región R está delimitada por $y = f(x)$, el eje y, y la recta $y = 4$.

(*a*) (I) Exprese el área de la región R como una integral con respecto a y.
(II) Determine el área de R con una aproximación de cuatro cifras significativas.

(*b*) Halle el volumen exacto que se genera cuando la región R se rota 2π radianes alrededor del eje y.

Solución:



(*a*) (I) En la figura vemos que el área de R es

$$S = \int_2^4 x \, \mathrm{d}y = \int_2^4 \sqrt{y-2} \, \mathrm{d}y$$

(II) La calculadora da 1,886.

(*b*) El volumen es

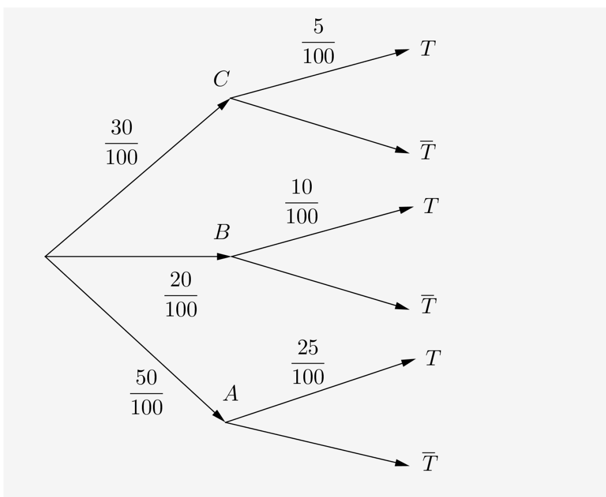
$$V = \pi \int_2^4 x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_2^4 (y-2) \, \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^2}{2} - 2y \right]_2^4 = 2\pi$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

Josie tiene tres formas de ir al colegio. Un 30 % de las veces va en coche, un 20 % de las veces va en bicicleta y un 50 % de las veces va andando. Cuando va en coche, Josie llega tarde el 5 % de las veces. Cuando va en bicicleta, llega tarde el 10 % de las veces. Cuando va andando, llega tarde el 25 % de las veces. Sabiendo que llegó a la hora, halle la probabilidad de que haya ido en bicicleta.

Solución:



$$\mathrm{p}(B \mid \overline{T}) = \frac{\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{30}{100}\cdot\frac{95}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{50}{100}\cdot\frac{75}{100}} = \frac{1800}{8400} = \frac{3}{14}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

El triángulo ABC tiene un área de 21 cm^2. Los lados AB y AC tienen una longitud de 6 cm y 11 cm, respectivamente. Halle los dos posibles valores de la longitud del lado BC.

Solución:

Puesto que el área del triángulo es

$$S = \frac{1}{2}\,AB\cdot AC\cdot \operatorname{sen} A \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen} A = \frac{2\cdot 21}{6\cdot 11} = \frac{7}{11}$$

Hay dos ángulo que tienen este valor del seno, uno agudo y otro obtuso, uno con el coseno positivo

$$\cos A = \sqrt{1-\frac{49}{121}} = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

y otro con el coseno negativo $-\frac{6\sqrt{2}}{11}$.

Ahora podemos calcular los dos valores posibles de BC por el teorema del coseno:

$$BC^2 = 6^2+11^2-2\cdot 6\cdot 11\cdot\frac{6\sqrt{2}}{11} \quad\Longrightarrow\quad BC \simeq 7{,}43 \text{ cm}$$

$$BC^2 = 6^2+11^2+2\cdot 6\cdot 11\cdot\frac{6\sqrt{2}}{11} \quad\Longrightarrow\quad BC \simeq 16{,}1 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución de probabilidad $f(x) = A\operatorname{sen}(\ln x)$, $1 \leq x \leq 5$.

(a) Halle el valor de A con una aproximación de tres cifras decimales.
(b) Halle la moda de X.
(c) Halle el valor $\mathrm{p}(X \leq 3 \mid x \geq 2)$.

Solución:

(a) Con la calculadora vemos que

$$I = \int_1^5 \operatorname{sen}\ln x \,\mathrm{d}x \simeq 3{,}09$$

Entonces, A debe valer

$$A = \frac{1}{I} \simeq 0{,}323$$

(b) Calculamos el máximo de la función de densidad. Con la calculadora obtenemos que la moda es 4,81.

(c) La probabilidad es:

$$\mathrm{p}(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}(X \geq 2)}$$

Las probabilidades las calculamos mediante integrales:

$$\mathrm{p}(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 A\operatorname{sen}\ln x\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}253$$

$$\mathrm{p}(X \geq 2) = \int_2^5 A\operatorname{sen}\ln x\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}881$$

Entonces

$$\mathrm{p}(X \leq 3 \mid x \geq 2) = \frac{\mathrm{p}(2 \leq X \leq 3)}{\mathrm{p}(X \geq 2)} \simeq 0{,}288$$

Ejercicio 9. (8 puntos)

Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O. La velocidad v, en $\mathrm{m\,s^{-1}}$, viene dada por la función $v(t) = 1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}$ donde el tiempo $t \geq 0$ se mide en segundos.

(a) Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2 > 0$ en los que la partícula cambia de sentido.

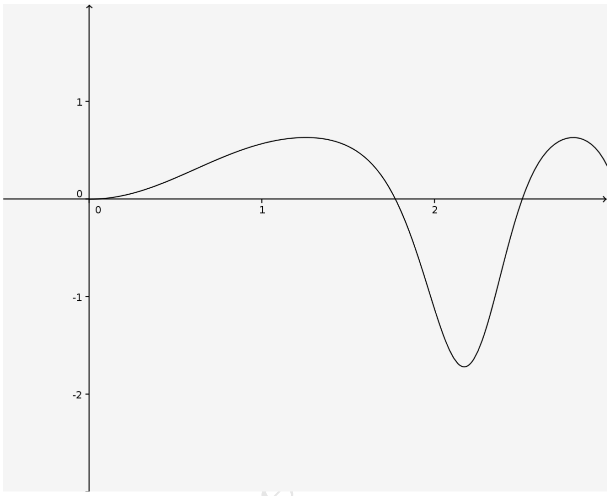
(b) (I) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.

(II) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima.

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$.

Solución:

(a) La gráfica de la velocidad es



La partícula cambia de sentido cuando la velocidad se hace cero. Estos valores son $t_1 \simeq 1{,}77$ y $t_2 = 2{,}51$ s.

(b) (I) La velocidad máxima se da para $t \simeq 1{,}25$ s.

(II) La velocidad mínima se da para $t \simeq 2{,}17$ s.

(c) Como no hay cambio de sentido, la distancia recorrida es igual al cambio en la posición:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - e^{-\operatorname{sen} t^2}\right) \,\mathrm{d}t \simeq -0{,}711$$

La distancia recorrida es aproximadamente 0,711 m.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

Ed camina en línea recta desde el punto $P(-1, 4)$ hasta el punto $Q(4, 16)$ con velocidad constante. Ed sale del punto P en el instante $t = 0$ y llega al punto Q en el instante $t = 3$, donde t se mide en horas. Sabiendo que en el instante t el vector de posición de Ed respecto al origen se puede expresar en la forma $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$

(a) Halle los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Roderick se encuentra en el punto $C(11, 9)$. Roderick quiere hacerle señas a Ed mientras este va caminando de P a Q. Roderick decide hacer señas cuando Ed pase por el punto más cercano a C.

(b) Halle el instante en el que Roderick hace señas a Ed.

Solución:

(*a*) La velocidad es:

$$\vec{v} = \frac{\vec{PQ}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$$

La posición de Ed es entonces

$$\vec{r} = \vec{OP} + t\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$$

Es decir

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\ ; \qquad \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$$

(*b*) La distancia al cuadrado entre los dos está dada por la siguiente función:

$$f(t) = \left(11 + 1 - \frac{5}{3}t\right)^2 + (9 - 4 - 4t)^2 = \left(12 - \frac{5}{3}t\right)^2 + (5 - 4t)^2$$

El mínimo lo podemos obtener derivando e igualando a cero la derivada:

$$2\left(12 - \frac{5}{3}t\right)\frac{-5}{3} + 2\,(5 - 4t)\,(-4) = 0\ ; \qquad \left(\frac{25}{9} + 16\right)t - 40 = 0$$

Aproximadamente $t = 2{,}13$ s, o, exactamente $\frac{360}{169}$ s.
El problema se podía haber resuelto también calculando la intersección de la recta PQ con la perpendicular a esta misma recta por C. Éste es el punto en que los dos personajes se encuentran más próximos. Luego se calcularía t a partir de las ecuaciones paramétricas de la recta PQ.

♠♠♠♠

20.2. Sección B

Ejercicio 11. (18 puntos)

Se realiza una encuesta en un edificio de oficinas de gran tamaño. Hallan que el 30 % de los oficinistas pesan menos de 62 kg y que el 25 % de los oficinistas pesan más de 98 kg. Los pesos de los oficinistas se pueden modelizar con una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.

(*a*) (i) Determine un sistema formado por dos ecuaciones lineales que satisfagan μ y σ.
(ii) Halle el valor de μ y σ.

(*b*) Halle la probabilidad de que un oficinista pese más de 100 kg.

En el edificio hay ascensores que llevan a los oficinistas hasta su oficina. Sabiendo que en un ascensor dado hay 10 oficinistas,

(*c*) halle la probabilidad de que haya al menos cuatro oficinistas que pesen más de 100 kg.

Sabiendo que hay 10 oficinistas en un ascensor y que al menos uno de ellos pesa más de 100 kg,

(*d*) halle la probabilidad de que haya menos de cuatro oficinistas que pesen más de 100 kg.

La llegada de los ascensores a la planta baja entre las 08 : 00 y las 09 : 00 se puede modelizar con una distribución de Poisson. En promedio llega un ascensor cada 36 segundos.

(*e*) Halle la probabilidad de que en un período cualquiera de media hora, entre las 08 : 00 y las 09 : 00, lleguen más de 60 ascensores a la planta baja.

Cada ascensor puede llevar a un máximo de 10 oficinistas. Sabiendo que en un período de media hora llegan 400 oficinistas, independientemente unos de otros,

(f) halle la probabilidad de que haya suficientes ascensores para llevarlos a todos hasta sus oficinas.

Solución:

(a) (I) Tenemos que:

$$\mathrm{p}(X < 62) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{62-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}30 \quad\Longrightarrow\quad \frac{62-\mu}{\sigma} = -0{,}5244$$

$$\mathrm{p}(X > 98) = \mathrm{p}\left(Z > \frac{98-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \quad\Longrightarrow\quad \frac{98-\mu}{\sigma} = 0{,}6745$$

Podemos escribir el sistema

$$\begin{cases} \mu = 62 + 0{,}5244\sigma \\ \mu = 98 - 0{,}6745\sigma \end{cases}$$

(II) Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 77{,}7$ kg y $\sigma \simeq 30{,}0$ kg.

(b) La probabilidad de que un oficinista pese más de 100 kg es

$$p = \mathrm{p}(X > 100) \simeq 0{,}229$$

(c) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de oficinistas en el ascensor que pesan más de 100 kg. Entonces $Y \sim \mathrm{B}(10, p)$ y

$$\mathrm{p}(Y \geq 4) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 3) = 0{,}177$$

(d) En este caso se trata de una probabilidad condicionada:

$$\mathrm{p}(Y < 4 \mid Y \geq 1) = \frac{\mathrm{p}(1 \leq Y \leq 3)}{\mathrm{p}(Y \geq 1)} \simeq 0{,}809$$

(e) Si en promedio llega un ascensor cada 36 segundos, la media de ascensores que llegan en media hora es $30 \cdot 60/36 = 50$ ascensores. Así, si A es la variable aleatoria que representa el número de ascensores que llega en media hora $A \sim \mathrm{Po}(50)$ y

$$\mathrm{p}(A > 60) = 1 - \mathrm{p}(A \leq 60) \simeq 0{,}0722$$

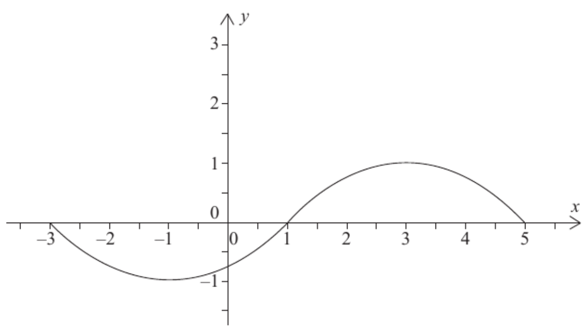
(f) Deberán llegar al menos 40 ascensores:

$$\mathrm{p}(A \geq 40) = 1 - \mathrm{p}(A \leq 39) \simeq 0{,}935$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (21 puntos)

El siguiente gráfico representa una función $y = f(x)$, donde $-3 \leq x \leq 5$. La función tiene un máximo en $(3, 1)$ y un mínimo en $(-1, -1)$.



(a) Las funciones u y v vienen dadas por $u(x) = x - 3$, $v(x) = 2x$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(I) Indique cuál es el recorrido de la función $u \circ f$.

(II) Indique cuál es el recorrido de la función $u \circ v \circ f$.

(III) Halle el mayor dominio posible de la función $f \circ v \circ u$.

(b) (I) Explique por qué la función f no tiene inversa.

(II) El dominio de f se restringe para así definir una función g que sí que tenga inversa g^{-1}. Indique cuál es el mayor dominio posible de g.

(III) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g^{-1}(x)$, mostrando claramente el punto de corte con el eje y e indicando las coordenadas de los extremos.

Considere la función que viene dada por $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+d}$, $x \neq -d$ y $d \in \mathbb{R}$

(c) (I) Halle una expresión para la función inversa $h^{-1}(x)$.

(II) Halle el valor de d para el cual la función h coincide con su inversa.

(III) Para ese valor de d, existe una función k tal que $h \circ k(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, $x \neq -1$. Halle $k(x)$

Solución:

(a) (I) La función f tiene recorrido $[-1, 1]$. La función u resta 3 unidades al resultado de aplicar f. El recorrido de $u \circ f$ será $[-4, -2]$.

(II) El recorrido de $v \circ f$ es $[-2, 2]$ y el de $u \circ v \circ f$ será $[-5, -1]$.

(III) Debe ocurrir

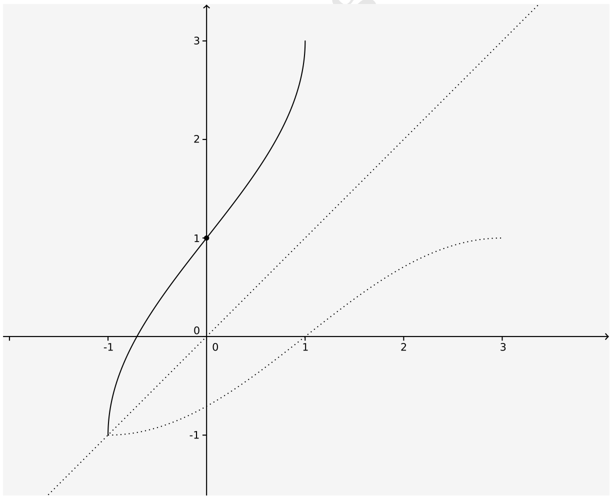
$$-3 \leq 2(x-3) \leq 5$$

En consecuencia, el dominio es $\left[\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right]$.

(b) (I) No tiene inversa porque no es inyectiva.

(II) En $[-1, 3]$ la función es inyectiva y puede definirse la función inversa.

(III) La gráfica de la función $f^{-1}(x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x)$ en $y = x$.



(c) (I) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \frac{2y-5}{y+d} \ ; \qquad x(y+d) = 2y - 5 \ ; \qquad xy - 2y = -dx - 5 \ ; \qquad y(x-2) = -dx - 5$$

y finalmente

$$y = h^{-1}(x) = \frac{-dx-5}{x-2}$$

(II) La función coincide con su inversa para $d = -2$. En este caso

$$h(x) = h^{-1}(x) = \frac{2x-5}{x-2}$$

(III) Despejamos aplicando a los dos miembros la función $h^{-1} = h$:

$$h \circ k(x) = \frac{2x}{x+1} \ ; \qquad h^{-1} \circ h \circ k(x) = h^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right) \ ; \qquad k(x) = h\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

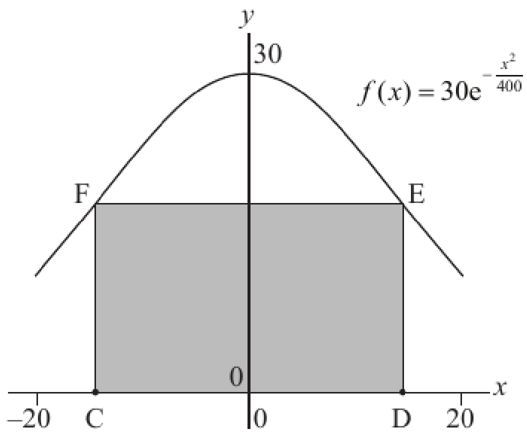
Por tanto

$$k(x) = \frac{\frac{2 \cdot 2x}{x+1} - 5}{\frac{2x}{x+1} - 2} = \frac{4x - 5x - 5}{2x - 2x - 2} = \frac{-x-5}{-2} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (21 puntos)

La siguiente figura muestra la sección transversal vertical de un edificio.



La sección transversal del tejado del edificio se puede modelizar mediante la curva

$$f(x) = 30e^{-\frac{x^2}{400}}\ ; \qquad -20 \leq x \leq 20$$

El eje x representa el nivel de la calle.

(a) Halle $f''(x)$.

(b) Muestre que la pendiente de la función del tejado es máxima para $x = -\sqrt{200}$.

La sección transversal del espacio habitable que queda bajo el tejado está modelizado por el rectángulo $CDEF$, con los puntos $C(-a, 0)$ y $D(a, 0)$, donde $0 < a \leq 20$.

(c) Muestre que el área (A) máxima del rectángulo $CDEF$ es $600\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) A la función I se la conoce como el factor de aislamiento de $CDEF$. La función se define como $I(a) = \dfrac{P(a)}{A(a)}$, donde P = perímetro y A = área del rectángulo.

(i) Halle una expresión para P en función de a.

(ii) Halle el valor de a que minimiza I.

(iii) Utilizando el valor de a hallado en el apartado (ii), calcule el porcentaje del área de la sección transversal bajo todo el tejado que no está incluido en la sección transversal del espacio habitable.

Solución:

(a) Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 30e^{-\frac{x^2}{400}} \cdot \frac{-2x}{400} \\
&= -\frac{3x}{20}\, e^{-\frac{x^2}{400}} \\
f''(x) &= -\frac{3}{20}\, e^{-\frac{x^2}{400}} + e^{-\frac{x^2}{400}}\, \frac{-2x}{400} \cdot \frac{-3x}{20} \\
&= \frac{3}{20}\, e^{-\frac{x^2}{400}} \left(\frac{x^2}{200} - 1 \right)
\end{aligned}$$

(b) Para calcular el máximo de la pendiente (de la derivada) estudiamos el signo de la derivada segunda. Ésta se anula en $-\sqrt{200}$ y en $\sqrt{200}$. El signo de f'' se representa en el siguiente esquema

x		$-\sqrt{200}$		$\sqrt{200}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

y vemos que el máximo esta en $x = -\sqrt{200}$ donde la función $f'(x)$ pasa de creciente a decreciente.

(c) La base del rectángulo es $2a$ y la altura $30e^{-\frac{a^2}{400}}$. El área es

$$S(a) = 60ae^{-\frac{a^2}{400}}$$

Para calcular el máximo igualamos la derivada a cero:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = 60e^{-\frac{a^2}{400}} + 60ae^{-\frac{a^2}{400}}\frac{-2a}{400} = 60e^{-\frac{a^2}{400}}\left(1 - \frac{a^2}{200}\right)$$

El máximo se da para $a = \sqrt{200}$ y el área es

$$S(\sqrt{200}) = 60\sqrt{200}e^{-\frac{1}{2}} = 600\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

(d) (I) Sustituyendo el perímetro y el área

$$I(a) = \frac{4a + 60e^{-\frac{a^2}{400}}}{60ae^{-\frac{a^2}{400}}} = \frac{a + 15e^{-\frac{a^2}{400}}}{15ae^{-\frac{a^2}{400}}} = \frac{1}{15}e^{\frac{a^2}{400}} + \frac{1}{a}$$

(II) Con la calculadora se obtiene el mínimo para $a \simeq 12{,}6$ m.

(III) El área del rectángulo es aproximadamente $508{,}34\ \mathrm{m}^2$ y el área total $666{,}85\ \mathrm{m}^2$. El porcentaje de la sección no habitable sobre la sección total es $23{,}8\,\%$.

21. 2016. Primer examen. TZ1.

21.1. Sección A

Ejercicio 1. (6 puntos)

The fifth term of an arithmetic sequence is equal to 6 and the sum of the first 12 terms is 45. Find the first term and the common difference.

Solución:

Puesto que l quinto término es igual a 6:

$$6 = a_1 + 4d\ ; \qquad a_1 = 6 - 4d$$

y, puesto que la suma de los 12 términos es 45:

$$45 = \frac{(a_1 + a_1 + 11d)12}{2}\ ; \qquad 6(2a_1 + 11d) = 45\ ; \qquad 4a_1 + 22d = 15$$

Sustituyendo:

$$24 - 16d + 22d = 15\ ; \qquad d = -\frac{3}{2}$$

y, de aquí, $a_1 = 12$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

At a skiing competition the mean time of the first three skiers is 34,1 seconds. The time for the fourth skier is then recorded and the mean time of the first four skiers is 35,0 seconds. Find the time achieved by the fourth skier.

Solución:

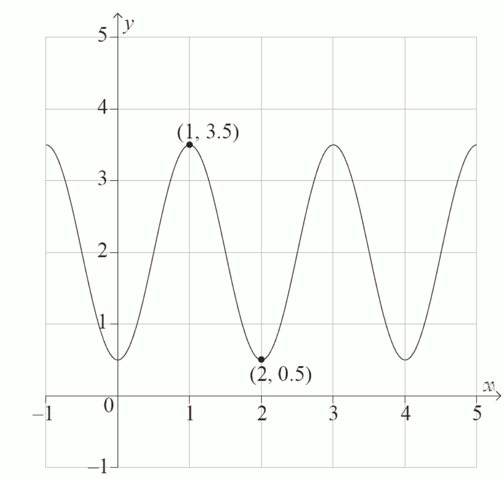
La suma de los tiempos de los tres primeros esquiadores es $34{,}1 \times 3 = 102{,}3$ s. La suma de los cuatro primeros esquiadores es $35{,}0 \times 4 = 140$.

El tiempo del cuarto esquiador debe ser $140 - 102{,}3 = 37{,}7$ s

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

The following diagram shows the curve$y = a\sin(b(x+c))+d$, where a, b, c and d are all positive constants. The curve has a maximum point at $(1, 3{,}5)$ and a minimum point at $(2, 0{,}5)$.



(*a*) Write down the value of a and the value of d.

(*b*) Find the value of b.

(*c*) Find the smallest possible value of c, given $c > 0$.

Solución:

(*a*) $a = \frac{3}{2}$, $d = 2$.

(*b*) El período de la función es igual a 2. Entonces:

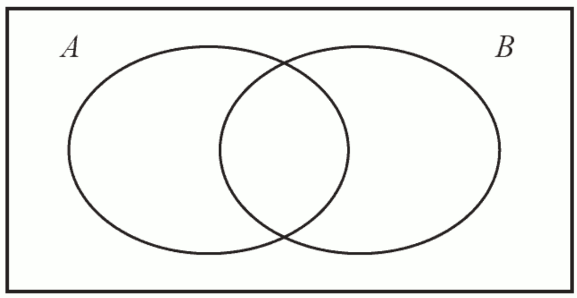
$$\frac{2\pi}{b} = 2 \implies b = \pi$$

(*c*) Si c es positivo, la gráfica se ha desplazado hacia la izquierda. En ausencia de traslación, el punto de corte con el eje de ordenadas debería ser el punto intermedio entre el mínimo y el máximo. Teniendo esto en cuenta resulta $c = \frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

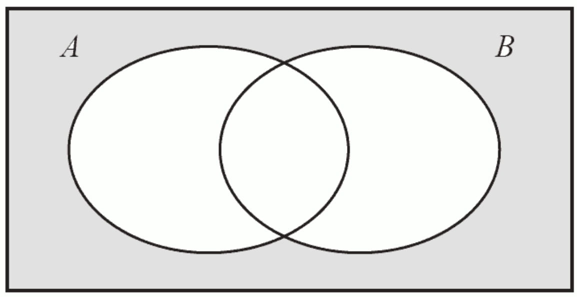
(*a*) On the Venn diagram shade the region $A' \cap B'$.



(*b*) Two events A and B are such that $\mathrm{p}(A \cap B') = 0{,}2$ and $\mathrm{p}(A \cup B) = 0{,}9$. Find $\mathrm{p}(A'|B')$.

Solución:

(*a*)



(*b*) Tenemos que:

$$\mathrm{p}(A \cap B') = \mathrm{p}(A - B) = \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}2$$

También:

$$0{,}9 = \mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(B) + 0{,}2 \implies \mathrm{p}(B) = 0{,}7$$

Entonces:

$$\mathrm{p}(A'|B') = \frac{\mathrm{p}(A' \cap B')}{\mathrm{p}(B')} = \frac{\mathrm{p}((A \cup B)')}{\mathrm{p}(B')} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

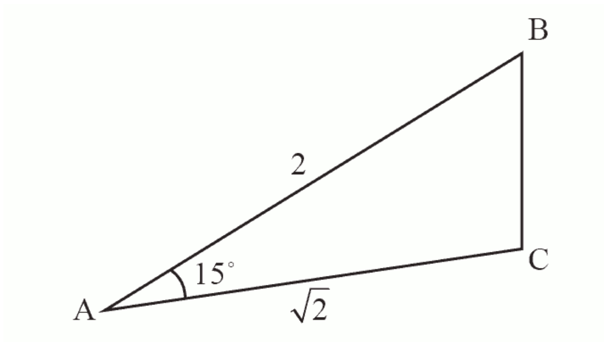
♠♠♠♠

Ejercicio 5.(8 puntos)

(a) Expand and simplify $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

(b) By writing $15°$ as $60° - 45°$ find the value of $\cos 15°$.

The following diagram shows the triangle ABC where $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}$ and $B\hat{A}C = 15°$.



(c) Find BC in the form $a + \sqrt{b}$ where $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

(a) $(1-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$

(b) $\cos(60° - 45°) = \cos 60° \cos 45° + \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(c) Aplicando el teorema del coseno:

$$BC^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2}\cos 15° = 6 - \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) = 4 - 2\sqrt{3}$$

Por consiguiente $BC = \sqrt{3} - 1$ (no puede ser igual a $1 - \sqrt{3}$ que es negativo).

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (4 puntos)

Find integer values of m and n for which

$$m - n\log_3 2 = 10\log_9 6$$

Solución:

$$\begin{aligned} m &= n\log_3 2 + 10\log_9 6 \\ &= n\log_3 2 + \frac{10\log_3 6}{\log_3 9} \\ &= n\log_3 2 + 5\log_3 6 \\ &= n\log_3 2 + 5\log_3 2 + 5\log_3 3 \\ &= 5 + (n+5)\log_3 2 \end{aligned}$$

Para que sean enteros debe ser $n = -5$, $m = 5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

(a) Sketch on the same axes the curve

$$y = \left|\frac{7}{x-4}\right|$$

and the line $y = x + 2$, clearly indicating any axes intercepts and any asymptotes.

(b) Find the exact solutions to the equation

$$x + 2 = \left|\frac{7}{x-4}\right|$$

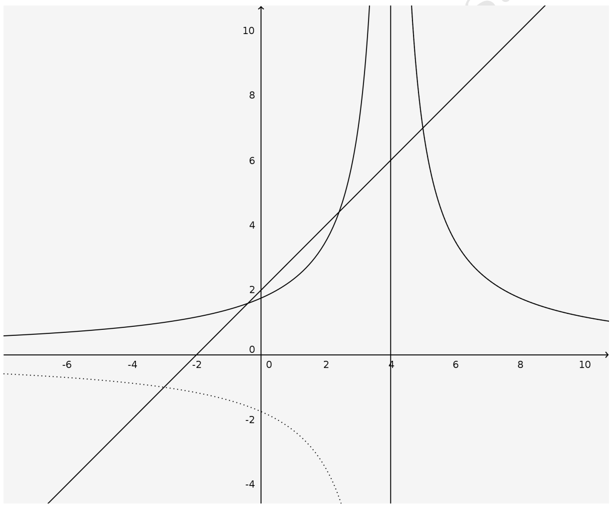
Solución:

La gráfica de la función

$$y = \frac{7}{x-4}$$

es una hipérbola con asíntota horizontal $y = 0$ y asíntota vertical $x = 4$. No tiene punto de corte con el eje de abscisas y corta al eje de ordenadas en $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$. Al aplicar valor absoluto a esta función, la rama por debajo del eje OX se refleja en ese eje, de modo que el punto de corte con el eje OY es el punto $\left(0, \frac{7}{4}\right)$.

La recta $y = x + 2$ corta a los ejes en $(-2, 0)$ y $(0, 2)$. La gráfica es la siguiente:



Los puntos de intersección de la recta y la curva son los siguientes. Para $x < 4$ son la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{4-x} \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución:

$$(x+2)(4-x) = 7\ ; \qquad x^2 - 2x - 1 = 0\ ; \qquad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Tenemos dos soluciones de la ecuación, $x = 1 - \sqrt{2}$ y $x = 1 + \sqrt{2}$.

Para $x > 4$ tenemos la ecuación:

$$x + 2 = \frac{7}{x+4}\ ; \qquad (x+2)(x-4) = 7\ ; \qquad x^2 - 2x - 15 = 0$$

que tiene como soluciones $x = -3$ y $x = 5$. La primera no es válida.

Las soluciones son $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$ y $x = 5$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (5 puntos)

O, A, B and C are distinct points such that $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ and $\vec{OC} = \vec{c}$. It is given that $\vec{c}$ is perpendicular to $\vec{AB}$ and $\vec{b}$ is perpendicular to $\vec{AC}$. Prove that $\vec{a}$ is perpendicular to $\vec{BC}$.

Solución:

Hay que ver que el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{BC} = 0$:

$$\vec{c} \perp \vec{AB} \quad \Longrightarrow \quad \vec{OC} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{OC} \cdot \vec{OB} - \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 0$$
$$\vec{b} \perp \vec{AC} \quad \Longrightarrow \quad \vec{OB} \cdot (\vec{OC} - \vec{OA}) = \vec{OB} \cdot \vec{OC} - \vec{OB} \cdot \vec{OA} = 0$$

restando ambas igualdades resulta:

$$\vec{OC} \cdot \vec{OA} - \vec{OB} \cdot \vec{OA} = 0 \; ; \qquad \vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = \vec{a} \cdot \vec{BC} = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

A curve is given by the equation $y = \sin(\pi \cos x)$.

Find the coordinates of all the points on the curve for which $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.

Solución:

La derivada es:

$$y' = \cos(\pi \cos x) \cdot (-\pi \operatorname{sen} x)$$

La derivada es cero si:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = 0 \; ; \; x = \pi \\ \cos(\pi \cos x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \pi \cos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} + k \; ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Esta última igualdad nos da dos soluciones (para $k = 0$ y $k = -1$), $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (7 puntos)

Find the x-coordinates of all the points on the curve

$$y = 2x^4 + 6x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{2}$$

at which the tangent to the curve is parallel to the tangent at $(-1, 6)$.

Solución:

La derivada de la función es:

$$y' = 8x^3 + 18x^2 + 7x - 5$$

La pendiente de la tangente en $(-1, 6)$ es:

$$y'(-1) = -8 + 18 - 7 - 5 = -2$$

Se trata entonces, de ver en qué puntos de la curva la derivada es igual a -2. Conocemos uno de ellos que es $x = -1$.

$$8x^3 + 18x^2 + 7x - 5 = -2 \; ; \qquad 8x^3 + 18x^2 + 7x - 3 = 0 \; ; \qquad (x+1)(8x^2 + 10x - 3) = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $x = \frac{1}{4}$ y $x = -\frac{3}{2}$.

♠♠♠♠

21.2. Sección B

Ejercicio 11. (21 puntos)

Two planes have equations

$$\Pi_1 : 4x + y + z = 8 \qquad \text{and} \qquad \Pi_2 : 4x + 3y - z = 0$$

(*a*) Find the cosine of the angle between the two planes in the form $\sqrt{\frac{p}{q}}$ where $p, q \in \mathbb{Z}$.

Let L be the line of intersection of the two planes.

(*b*) (I) Show that L has direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(II) Show that the point $A(1, 0, 4)$ lies on both planes.

(III) Write down a vector equation of L.

B is the point on Π_1 with coordinates $(a, b, 1)$.

(*c*) Given the vector $\vec{AB}$ is perpendicular to L find the value of a and the value of b.

(*d*) Show that $AB = 3\sqrt{2}$.

The point P lies on L and $A\hat{B}P = 45°$.

(*e*) Find the coordinates of the two possible positions of P.

Solución:

(*a*) Calculamos el coseno del ángulo que forman los vectores normales a ambos planos:

$$\cos\alpha = \frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{18}\sqrt{26}} = \frac{18}{\sqrt{18}\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{18}{26}} = \sqrt{\frac{9}{13}}$$

(*b*) (I) La recta tiene la dirección del producto vectorial de los dos vectores normales:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 4 & 4 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(II) Basta comprobar que estos números son solución de las dos ecuaciones de los planos.

(III) Puesto que conocemos un punto de la recta y un vector director, la ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(*c*) Puesto que $B(a, b, 1)$ está en el plano Π_1:

$$4a + b + 1 = 8 \; ; \qquad 4a + b - 7 = 0$$

El vector $\vec{AB}$ es

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} a - 1 \\ b \\ -3 \end{pmatrix}$$

Puesto que es perpendicular a la recta, es perpendicular a su vector director:

$$(-1)(a - 1) + 2b + 2(-3) = 0 \; ; \qquad -a + 2b - 5 = 0$$

resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones resulta $a = 1$, $b = 3$.

(*d*) Con estos valores de a y de b:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

El módulo de este vector es:

$$AB = \sqrt{0+9+9} = 3\sqrt{2}$$

(*e*) El triángulo BAP es rectángulo en A. La distancia AP es igual a $3\sqrt{2}$. El punto P se encuentra en la recta y en la superficie esférica de centro A y radio $3\sqrt{2}$. Es por tanto la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4+2\lambda \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 18 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución:

$$\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 = 18\ ;\ \lambda = \pm\sqrt{2}$$

Los puntos son $P_1(1-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2})$ y $P_2(1+\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4-2\sqrt{2})$.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (21 puntos)

(*a*) Use de Moivre's theorem to find the value of

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$$

(*b*) Use mathematical induction to prove that

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\ ; \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Let $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

(*c*) Find an expression in terms of θ for $z^n + (z^*)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ where z^* is the complex conjugate of z.

(*d*) (I) Show that $zz^* = 1$.

(II) Write down the binomial expansion of $(z+z^*)^3$ in terms of z and z^*.

(III) Hence show that $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

(*e*) Hence solve

$$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0\ ; \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Solución:

(*a*)
$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1$$

(*b*)
- El teorema se cumple para $n = 1$
- Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^k = \cos k\theta + i\operatorname{sen}k\theta$$

Debemos demostrar que, entonces, también se cumple para $n = k+1$, es decir, debemos demostrar

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^k(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \\ &= (\cos k\theta + i\operatorname{sen}k\theta)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \\ &= \cos k\theta\cos\theta - \operatorname{sen}k\theta\operatorname{sen}\theta + i(\cos k\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}k\theta\cos\theta) \\ &= \cos(k\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(k\theta+\theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta\end{aligned}$$

– Como consecuencia del principio de inducción matemática, el teorema se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

(c)
$$\begin{aligned} z^n + (z^*)^n =& (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n + (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n \\ =& \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta + \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta \\ =& 2\cos n\theta \end{aligned}$$

(d) (I) $zz^* = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

(II) $(z+z^*)^3 = z^3 + 3z^2z^* + 3zz^{*2} + z^{*3} = z^3 + 3z + 3z^* + z^{*3} = z^3 + z^{*3} + 3(z+z^*)$

(III) Por el apartado anterior:
$$(2\cos\theta)^3 = 2\cos 3\theta + 3\cdot 2\cos\theta\ ; \qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(e) Sustituyendo esta fórmula en la ecuación:
$$\begin{aligned} &4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \\ &\cos 3\theta - 2\cos^2\theta + 1 = 0 \\ &\cos 3\theta - \cos 2\theta = 0 \\ &\cos 3\theta = \cos 2\theta \end{aligned}$$

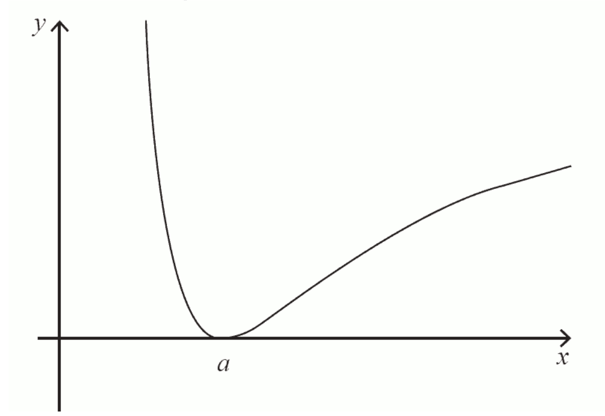
Entonces, o bien
$$3\theta = 2\theta + 2k\pi\ ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0$$

o bien
$$3\theta = 2\pi - 2\theta + 2k\pi\ ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad 5\theta = 2(k+1)\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{2\pi}{5}, \quad \theta = \frac{4\pi}{5}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13.(18 puntos)

The following diagram shows the graph of
$$y = \frac{(\ln x)^2}{x}\ ; \qquad x > 0$$



(a) Given that the curve passes through the point $(a, 0)$, state the value of a.

The region R is enclosed by the curve, the x-axis and the line $x = e$.

(b) Use the substitution $u = \ln x$ to find the area of the region R.

Let
$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad n \in \mathbb{N}$$

(*c*) (I) Find the value of I_0

(II) Prove that

$$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}\ ; \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

(III) Hence find the value of I_1.

(*d*) Find the volume of the solid formed when the region R is rotated through 2π about the x-axis.

Solución:

(*a*) $a = 1$

(*b*) Calculamos la integral con la sustitución:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2\,\mathrm{d}(\ln x) = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

El área es igual a:

$$S = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

(*c*) (I)

$$I_0 = \int_1^e \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$$

(II) Sea

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integramos por partes:

$$u = (\ln x)^n \qquad \mathrm{d}u = n(\ln x)^{n-1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad v = -\frac{1}{x}$$

Entonces:

$$I_n = \left[-\frac{(\ln x)^n}{x}\right]_1^e + nI_{n-1} = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$$

(III)

$$I_1 = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

(*d*) El volumen es

$$V = \pi\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi I_4$$

Calculemos I_4 con la fórmula de recurrencia:

$$I_4 = -\frac{1}{e} + 4I_3 = -\frac{1}{e} + 4\left(-\frac{1}{e} + 3I_2\right) = -\frac{5}{e} + 12\left(-\frac{1}{e} + 2I_1\right) = -\frac{17}{e} + 24I_1$$

Sustituyendo I_1:

$$I_4 = -\frac{17}{e} + 24\left(1 - \frac{2}{e}\right) = -\frac{65}{e} + 24$$

El volumen es:

$$V = \pi\left(24 - \frac{65}{e}\right)$$

♠♠♠♠

22. 2016. Segundo examen. TZ1.

22.1. Sección A

Ejercicio 1. (4 puntos)

The points A and B have position vectors

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \qquad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Find $\vec{OA} \times \vec{OB}$

(b) Hence find the area of the triangle OAB.

Solución:

(a) Calculamos el producto vectorial

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 1 \\ \vec{\jmath} & 2 & 0 \\ \vec{k} & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{16+16+4} = 3$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

(a) Express $x^2 + 4x - 2$ in the form $(x+a)^2 + b$ where $a, b \in \mathbb{Z}$.

(b) If $f(x) = x + 2$ and $(g \circ f)(x) = x^2 + 4x - 2$ write down $g(x)$.

Solución:

(a) $x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6$

(b) $g(x) = x^2 - 6$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

The displacement, s, in metres, of a particle t seconds after it passes through the origin is given by the expression

$$s = \ln(2 - e^{-t}) \; ; \qquad t \geq 0$$

(a) Find an expression for the velocity, v, of the particle at time t.

(b) Find an expression for the acceleration, a, of the particle at time t.

(c) Find the acceleration of the particle at time $t = 0$.

Solución:

(a)
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}}$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{-e^{-t}(2-e^{-t})-e^{-t}e^{-t}}{(2-e^{-t})^2}=\frac{-2e^{-t}}{(2-e^{-t})^2}$$

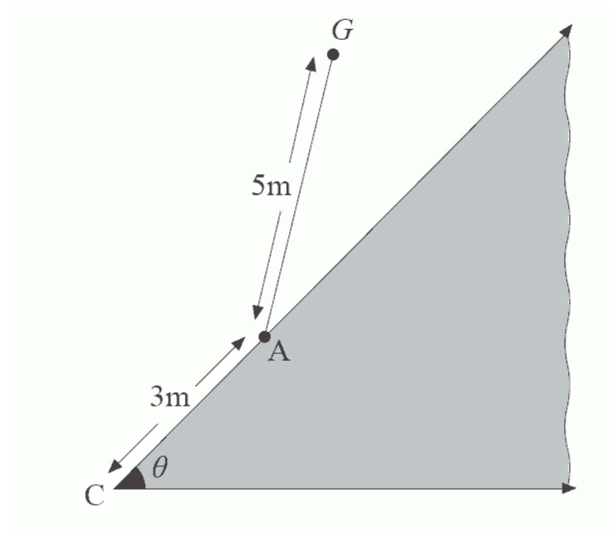
(c) Para $t=0$ la aceleración es -2 m s^{-2}.

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

The diagram below shows a fenced triangular enclosure in the middle of a large grassy field. The points A and C are 3 m apart. A goat G is tied by a 5 m length of rope at point A on the outside edge of the enclosure.

Given that the corner of the enclosure at C forms an angle of θ radians and the area of field that can be reached by the goat is 44 m^2, find the value of θ.



Solución:

La zona accesible a la cabra está compuesta de un semicírculo de radio 5 m de radio y de un sector de radio 2 m y ángulo $\pi-\theta$. Entonces:

$$44=\frac{25\pi}{2}+\frac{4(\pi-\theta)}{2}\ ;\qquad 88=29\pi-4\theta\ ;\qquad \theta=\frac{29\pi-88}{4}\simeq 0{,}777$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (7 puntos)

The function f is given by

$$f(x)=\frac{3x^2+10}{x^2-4}\ ;\qquad x\in\mathbb{R},\ x\neq 2,\ x\neq -2$$

(a) Prove that f is an even function.

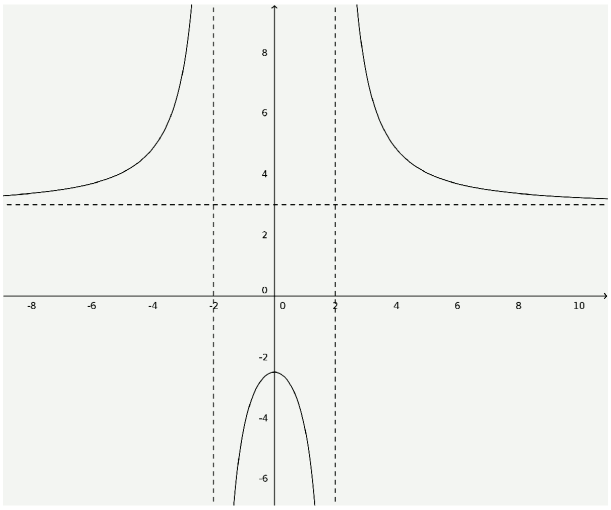
(b) (I) Sketch the graph $y=f(x)$.

(II) Write down the range of f.

Solución:

(*a*) Es evidente que $f(-x) = f(x)$ puesto que solamente aparecen potencias de x con exponente par.

(*b*) (I) Teniendo en cuenta que la función es par, que tiene asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 2$ y horizontal $y = 3$ y que la función toma valores positivos salvo en $(-2, 2)$, la gráfica es la siguiente:



(II) El rango es $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup (3, \infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

The heights of students in a single year group in a large school can be modelled by a normal distribution. It is given that 40 % of the students are shorter than 1,62 m and 25 % are taller than 1,79 m. Find the mean and standard deviation of the heights of the students.

Solución:

Sean μ y σ la media y la desviación típica de la distribución. Pasando a puntuaciones típicas tenemos que:

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{1{,}62-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40\ ; \qquad \mathrm{p}\left(Z < \frac{1{,}79-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75$$

Mediante la calculadora obtenemos:

$$\frac{1{,}62-\mu}{\sigma} = -0{,}2533\ ; \qquad \frac{1{,}79-\mu}{\sigma} = 0{,}6745$$

y resolviendo el sistema $\mu \simeq 1{,}67$ y $\sigma \simeq 0{,}183$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

It has been suggested that in rowing competitions the time T seconds, taken to complete a 2000 m race can be modelled by an equation of the form $T = aN^b$, where N is the number of rowers in the boat and a and b are constants for rowers of a similar standard.

To test this model the times for the finalists in all the 2000 m men's races at a recent Olympic games were recorded and the mean calculated.

The results are shown in the following table for $N = 1$ and $N = 2$.

N	T(seconds)
1	420,65
2	390,94

(a) Use these results to find estimates for the value of a and the value of b. Give your answers to five significant figures.

(b) Use this model to estimate the mean time for the finalists in an Olympic race for boats with 8 rowers. Give your answer correct to two decimal places.

It is now given that the mean time in the final for boats with 8 rowers was 342,08 seconds.

(c) Calculate the error in your estimate as a percentage of the actual value.

(d) Comment on the likely validity of the model as N increases beyond 8.

Solución:

(a) Sustituyendo para $n=1$ se obtiene $a=420{,}65$. Con este valor, para $N=2$:

$$b=\log_2\frac{390{,}94}{a}\simeq -0{,}10567$$

(b) Para $N=8$:

$$T=a\,8^b\simeq 337{,}67$$

(c) El error es de 1,29 %.

(d) Es probable que la fórmula se ajuste peor para valores de N mayores que 8 puesto que los coeficientes se han calculado tomando como datos los valores correspondientes a $N=1$ y $N=2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (5 puntos)

When x^2+4x-b is divided by $x-a$ the remainder is 2. Given that $a,b\in\mathbb{R}$, find the smallest possible value for b.

Solución:

Por el teorema del resto se verifica que:

$$a^2+4a-b=2\;;\qquad a^2+4a-(b+2)=0$$

Para que se pueda verificar esta igualdad es necesario que el discriminante sea mayor o igual a cero:

$$16+4(b+2)\geq 0\;;\qquad 4+b+2\geq 0\;;\qquad 6+b\geq 0$$

Por consiguiente $b\in[-6,\infty)$. El valor más pequeño que cumple esto es $b=-6$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (7 puntos)

Two distinct roots for the equation $z^4-10z^3+az^2+bz+50=0$ are $c+i$ and $2+id$ where $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $d>0$.

(a) Write down the other two roots in terms of c and d.

(b) Find the value of c and the value of d.

Solución:

(a) $c-i$ y $2-id$. Un polinomio con coeficientes reales si tiene una raíz compleja $a+bi$ también tiene su conjugada $a-bi$.

(b) Por las relaciones de Cardano, la suma de las cuatro raíces debe ser 10 y el producto debe ser 50:

$$c+i+c-i+2+id+2-id=10 \implies 2c+4=10\;;\qquad c=3$$
$$(c+i)(c-i)(2+id)(2-id)=50 \implies (c^2+1)(4+d^2)=50\;;\qquad 4+d^2=5$$

y de aquí, $d=1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (8 puntos)

Students sign up at a desk for an activity during the course of an afternoon. The arrival of each student is independent of the arrival of any other student and the number of students arriving per hour can be modelled as a Poisson distribution with a mean of λ.

The desk is open for 4 hours. If exactly 5 people arrive to sign up for the activity during that time find the probability that exactly 3 of them arrived during the first hour.

Solución:

Si λ durante una hora, 3λ es la media durante tres horas y 4λ es la media durante cuatro horas. La probabilidad que nos piden es la probabilidad de que lleguen tres la primera hora y dos durante las tres horas siguientes condicionada a que lleguen 5 en cuatro horas:

$$p = \frac{\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}\frac{(3\lambda)^2 e^{-3\lambda}}{2!}}{\frac{(4\lambda)^5 e^{-4\lambda}}{5!}} = \frac{4\cdot 5!}{1024\cdot 2!\cdot 3!} = \frac{45}{512}$$

♠♠♠♠

22.2. Sección B

Ejercicio 11. (22 puntos)

Let $f(x) = x^4 + 0{,}2x^3 - 5{,}8x^2 - x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Find the solutions of $f(x) > 0$.

(b) For the curbe $y = f(x)$

(I) Find the coordinates of both local minimum points.

(II) Find the x-coordinates of the points of inflexion.

The domain of f is now restricted to $[0, a]$.

(c) (I) Write down the largest value of a for which f has an inverse. Give your answer correct to 3 significant figures.

(II) For this value of a sketch the graphs of $y = f(x)$ and $y = f^{-1}(x)$ on the same set of axes, showing clearly the coordinates of the end points of each curve.

(III) Solve $f^{-1}(x) = 1$.

Let $g(x) = 2\sin(x-1) - 3$, $-\frac{\pi}{2} + 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$.

(d) (I) Find an expression for $g^{-1}(x)$, stating the domain.

(II) Solve $\left(f^{-1}\circ g\right)(x) < 1$.

Solución:

(a) Representando gráficamente con la calculadora encontramos la solución

$$(-\infty, -2{,}24) \cup (-1, 0{,}8) \cup (2{,}24, \infty)$$

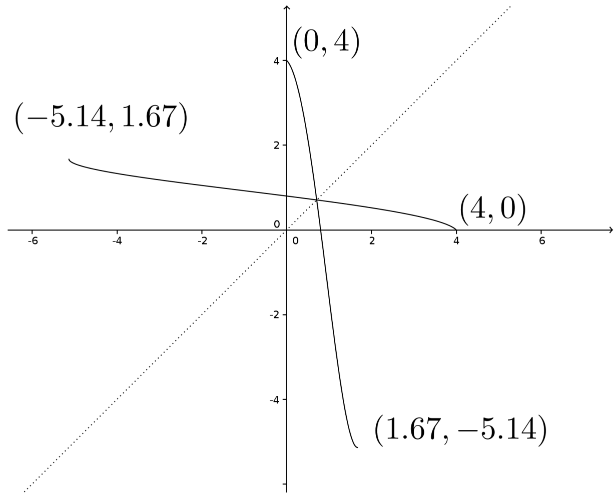
(b) (I) Asímismo con la calculadora encontramos $(-1{,}74. - 3{,}71)$ y $(1{,}67, -5{,}14)$.

(II) Para calcular los puntos de inflexión calculamos la derivada segunda:

$$y' = 4x^3 + 0{,}6x^2 - 11{,}6x - 1$$
$$y'' = 12x^2 + 1{,}2x - 11{,}6$$

los puntos de inflexión son los ceros de la derivada segunda. Se encuentran en $x = -1{,}03$ y $x = 0{,}934$.

(c) (I) $a \simeq 1{,}67$
(II)



(III) Si $f^{-1}(x) = 1$, entonces $x = f(1) = -1{,}6$

(d) (I) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = 2\sin(y-1) - 3$$

$$y = 1 + \text{ arsen}\,\frac{x+3}{2}$$

El argumento de la función arcoseno puede variar en $[-1,1]$. Entonces, en este caso $x \in [-5,-1]$

(II) Puesto que f^{-1} es decreciente:

$$\left(f^{-1} \circ g\right)(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad g(x) > f(1) = -1{,}6 \quad \Longrightarrow \quad x > 1{,}78$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función $g(x)$, la solución es $x \in \left(1{,}78,\, \frac{\pi}{2}+1\right]$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (16 puntos)

Consider the curve, C defined by the equation $y^2 - 2xy = 5 - e^x$. The point A lies on C and has coordinates $(0, a)$, $a > 0$.

(a) Find the value of a.

(b) Show that

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y - e^x}{2(y-x)}.$$

(c) Find the equation of the normal to C at the point A.

(d) Find the coordinates of the second point at which the normal found in part (c) intersects C.

(e) Given that $v = y^3$, $y > 0$, find $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ at $x = 0$.

Solución:

(a) Para $x = 0$:

$$a^2 = 5 - 1$$

y, puesto que $a > 0$, debe ser $a = 2$.

(b) Derivando:

$$2yy' - 2y - 2xy' = -e^x \;; \qquad y'(2y - 2x) = 2y - e^x \;; \qquad y' = \frac{2y - e^x}{2(y-x)}$$

(*c*) La derivada en el punto $A(0,2)$ es

$$y'(0,2)=\frac{4-1}{2(2-0)}=\frac{3}{4}$$

La pendiente de la normal será $-\frac{4}{3}$. La ecuación de la normal es:

$$y-2=-\frac{4}{3}(x-0)\ :\qquad y=-\frac{4}{3}x+2$$

(*d*) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}y^2-2xy=5-e^x\\ y=-\frac{4}{3}x+2\end{cases}$$

o bien

$$\left(-\frac{4}{3}x+2\right)^2-2x\left(-\frac{4}{3}x+2\right)=5-e^x$$

La solución es el punto $(1{,}56,-0{,}0779)$.

(*e*) Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=3y^2y'$$

Para $x=0$, $y=2$ e $y'=\frac{3}{4}$. Por tanto

$$v'=3\cdot4\cdot\frac{3}{4}=9$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (22 puntos)

Six balls numbered 1, 2, 2, 3, 3, 3 are placed in a bag. Balls are taken one at a time from the bag at random and the number noted. Throughout the question a ball is always replaced before the next ball is taken.

(*a*) A single ball is taken from the bag. Let X denote the value shown on the ball. Find $E(X)$.

(*b*) Three balls are taken from the bag. Find the probability that

(i) the total of the three numbers is 5;

(ii) the median of the three numbers is 1.

(*c*) Ten balls are taken from the bag. Find the probability that less than four of the balls are numbered 2.

(*d*) Find the least number of balls that must be taken from the bag for the probability of taking out at least one ball numbered 2 to be greater than 0,95.

(*e*) Another bag also contains balls numbered 1, 2 or 3.
Eight balls are to be taken from this bag at random. It is calculated that the expected number of balls numbered 1 is 4,8, and the variance of the number of balls numbered 2 is 1,5.

Find the least possible number of balls numbered 3 in this bag.

Solución:

(*a*) Teniendo en cuenta que $\mathrm{p}(1)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{p}(2)=\frac{2}{6}$ y $\mathrm{p}(3)=\frac{3}{6}$, el valor esperado es:

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

(*b*) (i) Para que los tres números sumen 5 es posible que sean dos 2 y un 1 o un 3 y dos 1. La probabilidad es:

$$p=3\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$$

(ii) Para que la mediana sea 1, deben al menos dos 1. El tercer número puede ser cualquiera. Hay que tener en cuenta que 112, 113 pueden salir ordenados de 3 formas y 111 de una. La probabilidad es:

$$p=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{16}{216}=\frac{2}{27}$$

(*c*) Sea Y la variable aleatoria que denota el número de doses obtenidos. Entonces $Y \sim \mathrm{B}(10, \frac{2}{6})$ y:

$$\mathrm{p}(Y < 4) = \mathrm{p}(Y \leq 3) \simeq 0{,}559$$

(*d*) Debe ocurrir que $\mathrm{p}(Y = 0) < 0{,}05$. Probando con la calculadora se ve que el primer numero para el que sucede es $n = 8$. Lo podíamos haber calculado también así:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad n > \log_{\frac{2}{3}} 0{,}05 = \frac{\ln 0{,}05}{\ln \frac{2}{3}} = 7{,}38\ldots$$

(*e*) Sean p_1, p_2 y p_3 las probabilidades de sacar 1, 2 y 3 respectivamente. Entonces:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

El valor esperado nos da la condición:

$$8p_1 = 4{,}8 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \frac{4{,}8}{8} = \frac{3}{5}$$

La varianza del número de doses en 8 extracciones es $8p_2(1 - p_2)$, así que:

$$8p_2(1 - p_2) = 1{,}5\ ; \qquad 8p_2^2 - 8p_2 + 1{,}5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2 = \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad p_2 = \frac{3}{4}$$

La solución $p_2 = \frac{3}{4}$ no es válida pues la suma de p_1 y p_2 no puede ser mayor que 1. Tenemos entonces que:

$$p_1 = \frac{3}{5}\,, \quad p_2 = \frac{1}{4}\,, \quad p_3 = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

El menor número de bolas con el número 3 es 3.

♠♠♠♠

23. 2016. Primer examen. TZ2.

23.1. Sección A

Ejercicio 1. (6 puntos)

El siguiente sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio:

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 15 \\ 2x + y - z &= 6 \end{aligned}$$

Halle las coordenadas del punto de intersección de los tres planos.

Solución:

Se resuelve el sistema y resulta el punto $(-1, 2, -6)$.

♠♠♠♠

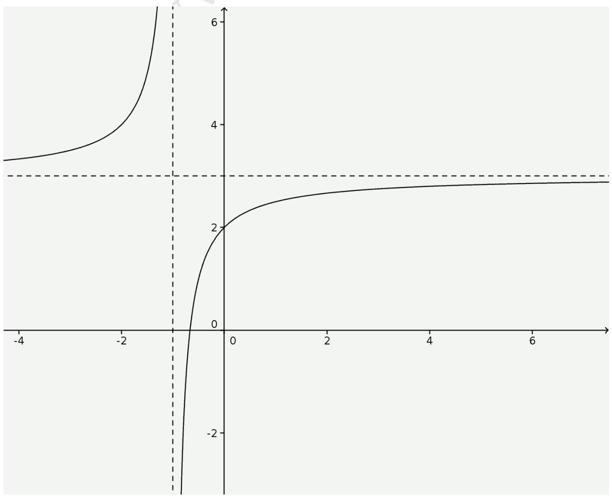
Ejercicio 2. (5 puntos)

La función f se define mediante

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}\ ; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -1$$

Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas que haya y sus ecuaciones, y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

Solución:



Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 3$. Los puntos de corte con los ejes son $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, 2)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

(*a*) Muestre que $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(b) A partir de lo anterior, halle

$$\int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{cotg}\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Solución:

(a) Basta ver la definición de ambas funciones en un triángulo rectángulo.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{cotg}\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \Big[\operatorname{artg} x\Big]_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{cotg}\alpha}\\ &= \operatorname{artg}\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{artg}\operatorname{tg}\alpha\\ &= \operatorname{artg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \operatorname{artg}\operatorname{tg}\alpha\\ &= \frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha\\ &= \frac{\pi}{2}-2\alpha\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

La función f viene dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, donde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Hayley formula la siguiente conjetura

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f'(x_2)+f'(x_1)}{2}\ ; \qquad x_1\neq x_2$$

Muestre que la conjetura de Hayley es correcta.

Solución:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{ax_2^2+bx_2+c-ax_1^2-bx_1-c}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)+b$$

Por otra parte $f'(x)=2ax+b$:

$$\frac{f'(x_2)+f'(x_1)}{2}=\frac{2ax_2+b+2ax_1+b}{2}=\frac{2a(x_2+x_1)+2b}{2}=a(x_2+x_1)+b$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (8 puntos)

Una moneda no equilibrada se lanza al aire cinco veces. En cada lanzamiento, la probabilidad de que salga cara es igual a p. Sea X el número de veces que sale cara.

(a) Halle en función de p, una expresión para $\mathrm{p}(X=4)$.

(b) (I) Determine el valor de p para el cual $\mathrm{p}(X=4)$ alcanza el valor máximo.

(II) Para este valor de p, determine el número esperado de veces que sale cara.

Solución:

(a) $X\sim \mathrm{B}(5,p)$:

$$\mathrm{p}(X=4)=\binom{5}{4}p^4(1-p)=5p^4(1-p)$$

(b) (I) Sea $f(p)$ la probabilidad de obtener cuatro caras. Derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}=20p^3(1-p)-5p^4=20p^3-25p^4=5p^3(4-5p)$$

La probabilidad es máxima para $p=\frac{4}{5}$.

(II) El número esperado de caras es

$$\mathrm{E}(X) = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (8 puntos)

Considere el desarrollo de $(1+x)^n$ en potencias ascendentes de x, donde $n \geq 3$.

(a) Escriba los cuatro primeros términos del desarrollo.

Los coeficientes de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo son términos consecutivos de una progresión aritmética.

(b) (I) Muestre que $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$.

(II) A partir de lo anterior, halle el valor de n.

Solución:

(a) $1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$.

(b) (I) Si están en progresión aritmética, la diferencia entre un término y el anterior es siempre la misma:

$$\frac{n(n-1)(n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - n$$
$$n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) = 3n(n-1) - 6n$$
$$n^3 - 9n^2 + 14n = 0$$

(II) Resolviendo la ecuación:

$$n^3 - 9n^2 + 14n = 0\ ; \qquad n((n^2 - 9n + 14) = 0$$

Las soluciones son $n = 0$, $n = 2$ y $n = 7$. a única que satisface las condiciones del problema es $n = 7$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

A B son sucesos independientes tales que $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(B) = p$, $p \neq 0$.

(a) Muestre que $\mathrm{p}(A \cup B) = 2p - p^2$.

(b) Halle $\mathrm{p}(A \mid A \cup B)$ en su forma más simple.

Solución:

(a) Si los sucesos son independientes $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = p^2$. Entonces

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = 2p - p^2$$

(b) Teniendo en cuenta que $A \cap (A \cup B) = A$:

$$\mathrm{p}(A \mid A \cup B) = \frac{\mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(A \cup B)} = \frac{p}{2p - p^2} = \frac{1}{2 - p}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

Utilice la inducción matemática para demostrar que $n(n^2 + 5)$ es divisible entre 6 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

– La propiedad se cumple para $n = 1$.

– Supongamos que se cumple para $n = k$:
$$k(k^2+5) = \dot{6}$$
y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n = k+1$:
$$\begin{aligned}(k+1)[(k+1)^2+5] &= (k+1)(k^2+2k+1+5)\\ &= (k+1)(k^2+5+2k+1)\\ &= k(k^2+5)+k(2k+1)+k^2+2k+6\\ &= \dot{6}+3k^2+3k\\ &= \dot{6}+3k(k+1)\\ &= \dot{6}\end{aligned}$$
Hemos aplicado que $3k(k+1)$ es múltiplo de 6 porque es múltiplo de 3 y, o bien k, o bien $k+1$, es un número par. Si es múltiplo de 2 y de 3 es múltiplo de 6.

– Por el principio de inducción, la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (8 puntos)

Considere la ecuación:
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}\,; \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$
Sabiendo que
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(a) Verifique que $x = \frac{\pi}{12}$ es una solución de la ecuación.

(b) A partir de lo anterior, halle otra solución para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Solución:

(a) Sustituyendo
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} + \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

(b) Teniendo en cuenta la identidad
$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = A\operatorname{sen}(x+\varphi)$$
donde $A = \sqrt{a^2+b^2}$ y φ se puede determinar por $a = A\cos\varphi$ y $b = A\operatorname{sen}\varphi$.
Teniendo esto en cuenta, escribamos la ecuación:
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{3}-1)\cos x + (\sqrt{3}+1)\operatorname{sen} x = 4\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x$$
$$(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen} x + (\sqrt{3}-1)\cos x = 2\sqrt{2}\operatorname{sen} 2x$$
En este caso
$$A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
Entonces, la ecuación la podemos escribir:
$$2\sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\varphi) = 2\sqrt{2}\operatorname{sen} 2x \implies \begin{cases} 2x = x+\varphi\,; & x = \varphi \\ 2x = \pi-(x+\varphi)\,; & 3x = \pi-\varphi \end{cases}$$
Como conocemos una solución $x = \varphi = \frac{\pi}{12}$, la otra solución es:
$$3x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \implies x = \frac{11\pi}{36}$$

♠♠♠♠

23.2. Sección B

Ejercicio 10. (18 puntos)

Una recta L tiene por ecuación

$$\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z-1\ ; \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

Un plano Π tiene por ecuación $x + y + 3z = 9$.

(a) Muestre que L no es perpendicular a Π.

(b) Sabiendo que L está contenida en el plano Π, halle el valor de p y el valor de q.

Considere ahora un caso distinto, en el que L y Π forman un ángulo agudo θ, donde $\theta = \operatorname{arsen} \frac{1}{\sqrt{11}}$.

(c) (I) Muestre que $p = -2$.

(II) Si L y Π se cortan en $z = 1$, halle el valor de q.

Solución:

(a) Si fuesen perpendiculares, el vector normal al plano y el vector director de la recta tendrían la misma dirección y, en consecuencia, sus coordenadas serían proporcionales. Es evidente que no es así.

(b) Si L está contenida en Π los vectores director de la recta y normal al plano son perpendiculares:

$$1 \cdot p + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = -5$$

Por otra parte, el punto $A(2, q, 1)$ de la recta debe estar contenido en el plano. Por tanto

$$2 + q + 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad q = 4$$

(c) (I) El ángulo entre recta y plano está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$$

Sustituyendo:

$$\operatorname{sen}\ \operatorname{arsen}\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{|p+2+3|}{\sqrt{p^2+5}\sqrt{11}}\ ; \qquad \frac{|p+5|}{\sqrt{p^2+5}} = 1\ ; \qquad (p+5)^2 = p^2+5$$

Resolviendo esta ecuación resulta $p = -2$.

(II) La ecuación de la recta en paramétricas es

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = q + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

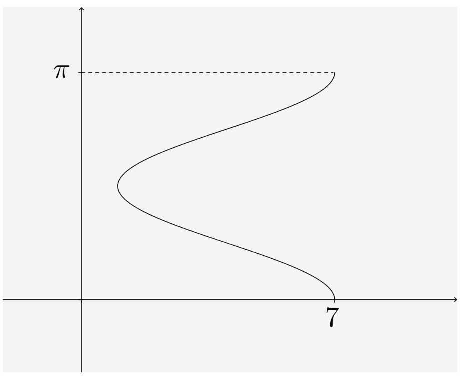
Si $z = 1$, $\lambda = 0$ y el punto de la recta es $B(2, q, 1)$. Si este punto está en el plano:

$$2 + q + 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad q = 4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (19 puntos)

El siguiente gráfico muestra la relación $x = 3\cos 2y + 4$, $0 \leq y \leq \pi$.



La curva se rota 360° alrededor del eje y para así generar el volumen de revolución V.

(a) Calcule el valor de V.

Se fabrica un contenedor que tiene esta forma, con un volumen igual a V cm^3 y una base sólida de 14 cm de diámetro. El contenedor se va llenando de agua a razón de 2 cm^3 min^{-1}. La profundidad del agua es h cm, $0 \leq h \leq \pi$.

(b) (I) Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \pi(3\cos 2h + 4)^2$, halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

(II) Halle el valor de $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ cuando $h = \frac{\pi}{4}$.

(c) (I) Halle $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}$.

(II) Halle los valores de h para los que $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

(III) Haciendo referencia explícita a la forma del contenedor, interprete $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ en los valores de h que ha hallado en el apartado (c)(II).

Solución:

(a) El volumen es

$$V = \pi \int_0^\pi x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^\pi (3\cos 2y + 4)^2 \,\mathrm{d}y$$

Si fuese un examen con calculadora el problema estaría resuelto. Pero vamos a tener que obtener la integral. Veremos que pensando un poco se simplifica bastante. Desarrollamos el cuadrado:

$$V = \pi \int_0^\pi (9\cos^2 2y + 24\cos 2y + 16) \,\mathrm{d}y$$

La función $\cos 2y$ tiene periodo π. Por tanto, la integral entre 0 y π de esta función es cero. Por otra parte, la función coseno cuadrado puede escribirse en función del ángulo doble y tenemos:

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\frac{9(1 + \cos 4y)}{2} + 16 \right) \,\mathrm{d}y$$

De nuevo, la integral de 0 a π de $\cos 4y$ es igual a cero. Tenemos que

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\frac{9}{2} + 16 \right) \,\mathrm{d}y = \pi \left[\frac{41y}{2} \right]_0^\pi = \frac{41\pi^2}{2}$$

(b) (I) Derivamos el volumen respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \pi(3\cos 2h + 4)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\pi(3\cos 2h + 4)^2}$$

(II) Sustituyendo $h = \frac{\pi}{4}$ resulta $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{8\pi}$ cm min^{-1}

(c) (I) Llamemos:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v = \frac{2}{\pi(3\cos 2h + 4)^2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{-2\pi \cdot 2(3\cos 2h + 4) \cdot (-3\,\mathrm{sen}\, 2h) \cdot 2}{\pi^2(3\cos 2h + 4)^4} \cdot \frac{2}{\pi(3\cos 2h + 4)^2} \\
&= \frac{-2\pi \cdot 2 \cdot (-3\,\mathrm{sen}\, 2h) \cdot 2}{\pi^2(3\cos 2h + 4)^3} \cdot \frac{2}{\pi(3\cos 2h + 4)^2} \\
&= \frac{48\,\mathrm{sen}\, 2h}{\pi^2(3\cos 2h + 4)^5}
\end{aligned}$$

(II) La derivada segunda se hace cero cuando $\mathrm{sen}\, 2h = 0$, o sea, para $h = 0$, $h = \frac{\pi}{2}$ y $h = \pi$.

(III) Hay mínimos en $h = 0$ y $h = \pi$ porque al ser mayor la sección del recipiente el nivel de líquido aumenta más lentamente. Por el contrario en $h = \frac{\pi}{2}$ al ser mínima la sección la variación de la altura de líquido es máxima.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (23 puntos)

Sea $w = \cos \frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\, \frac{2\pi}{7}$.

(a) Verifique que w es una raíz de la ecuación $z^7 - 1 = 0$.

(b) (I) Desarrolle $(w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6)$.

(II) A partir de lo anterior deduzca que $1+w+w^2+w^3++w^4+w^5+w^6=0$.

(c) Escriba las raíces de la ecuación $z^7-1=0$, $z \in \mathbb{C}$ en función de w y sitúe estas raíces en un diagrama de Argand.

Considere la ecuación cusdrática $z^2+bz+c=0$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Las raíces de esta ecuación son α y α^* donde α^* es el número complejo conjugado de α.

(d) (I) Sabiendo que $\alpha = w + w^2 + w^4$, muestre que $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$.

(II) Halle el valor de b y el valor de c.

(e) Utilizando los valores de b y de c que ha obtenido en el apartado (d)(II), halle la parte imaginaria de α en forma de radical irracional.

Solución:

(a) En efecto

$$\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 7\frac{2\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,7\frac{2\pi}{7} = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi = 1$$

(b) (I)

$$\begin{aligned}(w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6) &= w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7-1\\ &\quad -w-w^2-w^3-w^4-w^5-w^6\\ &= w^7-1\end{aligned}$$

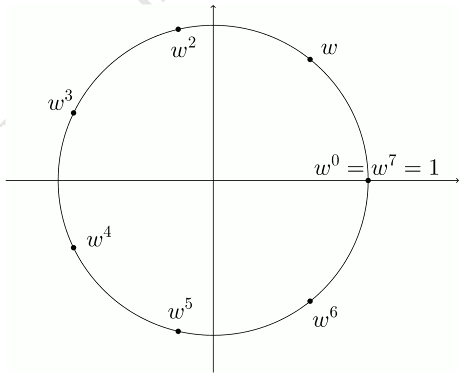
(II) Puesto que w es una raíz séptima de 1:

$w^7 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow$

$(w-1)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6) = 0 \quad \Longrightarrow$

$1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6 = 0$ puesto que $w - 1 \neq 0$

(c) Los afijos de las raíces de la unidad se encuentran sobre la circunferencia de radio 1.



En realidad estas propiedades que estamos demostrando en este problema son propiedades generales de las raíces enésimas de un número complejo:

- La suma de todas las raíces complejas de cualquier número es igual a cero.
- Todas las raíces de 1 pueden expresarse como potencias de una de ellas (en el caso de las raíces de índice primo de cualquiera de ellas). Se dice que forman un grupo cíclico.
- Si z es una raíz de 1 (o, en general, de cualquier polinomio con coeficientes reales) su conjugado también es raíz.

(d) (I) Esto es así porque w es el conjugado de w^6, w^2 es el conjugado de w^5 y w^3 es elconjugado de w^4.

(II) El coeficiente b es la suma de las raíces del polinomio cambiada de signo:

$$b = -(\alpha + \alpha^*) = -(w+w^2+w^4+w^6+w^5+w^3) = -(-1) = 1$$

El coeficiente c es igual al producto de las raíces:

$$\begin{aligned}c = \alpha\cdot\alpha^* &= (w+w^2+w^4)(w^6+w^5+w^3)\\ &= w^7+w^6+w^4+w^8+w^7+w^5+w^{10}+w^9+w^7\ ; \quad w^7=1\,, w^8=w, \quad w^9=w^2,\ w^{10}=w^3\\ &= 3+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6\\ &= 3-1=2\end{aligned}$$

(e) La ecuación es $z^2 + z + 2 = 0$. Sus raíces son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

La parte imaginaria de α es $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

♠♠♠♠

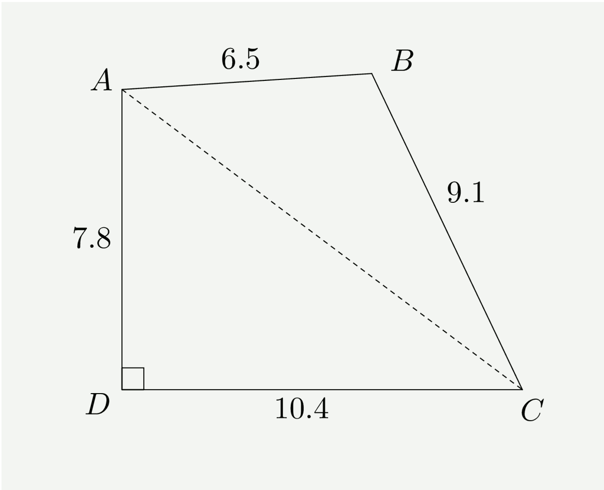
24. 2016. Segundo examen. TZ2.

24.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

$ABCD$ es un cuadrilátero en el que $AB = 6,5$; $BC = 9{,}1$; $CD = 10{,}4$; $DA = 7{,}8$ y $\widehat{CDA} = 90°$. Halle $\widehat{ABC}$, y dé la respuesta aproximando al número de grados más próximo.

Solución:



Calculamos AC por el teorema de Pitágoras y después el ángulo $\widehat{ABC}$ por el teorema del coseno:

$$AC^2 = 7{,}8^2 + 10{,}4^2$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{6{,}5^2 + 9{,}1^2 - AC^2}{2 \cdot 6{,}5 \cdot 9{,}1}$$

El ángulo es de 112°.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (7 puntos)

Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 3 y varianza igual a 2^2.

(a) Halle $\mathrm{p}(0 \leq X \leq 2)$.
(b) Halle $\mathrm{p}(|X| > 1)$.
(c) Sabiendo que $\mathrm{p}(X > c) = 0{,}44$, halle el valor de c.

Solución:

Tenemos que $X \sim \mathrm{N}(3, 2)$. En esta distribución:

(a) $\mathrm{p}(0 \leq X \leq 2) \simeq 0{,}242$
(b) $\mathrm{p}(|X| > 1) = 1 - \mathrm{p}(-1 < X < 1) \simeq 0{,}864$
(c) $\mathrm{p}(X > c) = 0{,}44 \implies \mathrm{p}(X < c) = 0{,}56$. Entonces, $c \simeq 3{,}30$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 2 \\ \ln x^2 + \ln y^3 = 7 \end{cases}$$

Solución:

El sistema equivale a

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = e^2 \\ x^2y^3 = e^7 \end{cases} \quad ; \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} y = xe^2 \\ x^2y^3 = e^7 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución resulta $x = \sqrt[5]{e}$, $y = e^2\sqrt[5]{e}$.

También podría resolverse el sistema escribiéndolo como:

$$\begin{cases} -\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x + 3\ln y = 7 \end{cases}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

La suma del segundo y el tercer término de una progresión geométrica es igual a 96. La suma de los infinitos términos de esta progresión es igual a 500. Halle los valores posibles de la razón común r.

Solución:

Llamemos a al primer término y r a la razón. Tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} ar + ar^2 = 96 \\ \frac{a}{1-r} = 500 \end{cases} \quad ; \qquad 500(1-r)r(1+r) = 96$$

Las soluciones válidas de esta ecuación son $r = 0{,}2$ y $r \simeq 0{,}885$. Hay una tercera solución menor que -1 que no es válida.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

La función f se define mediante

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,; \qquad -1 < x \leq 1.$$

Halle la función inversa f^{-1} e indique el dominio y el recorrido de dicha función.

Solución:

El dominio de la función f es el intervalo $(-1,1]$. En $x=-1$ la función tiende a infinito y en $x=1$ se hace cero. El recorrido de la función es el intervalo $[0,\infty)$.

Para calcular la inversa intercambiamos las variables:

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,; \qquad x^2 = \frac{1-y}{1+y}\,; \qquad (1+y)x^2 = 1-y$$

y despejamos

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

El dominio de esta función es el intervalo $[0,\infty)$ y el recorrido $(-1,1]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (8 puntos)

Una empresa fabrica láminas de vidrio rectangulares de 5 metros cuadrados de área. Durante el proceso de fabricación de estas láminas de vidrio aparecen defectos, que se producen a razón de 0,5 por cada 5 metros cuadrados. Se supone que el número de defectos por lámina de vidrio sigue una distribución de Poisson.

(a) Halle la probabilidad de que una lámina de vidrio elegida al azar contenga al menos un defecto.

Las láminas de vidrio que no tienen ningún defecto generan un beneficio de $5. Las láminas de vidrio que tienen al menos un defecto ocasionan una pérdida de $3.

(b) Halle el beneficio esperado, P en dólares, que se obtiene por cada lámina de vidrio.

Esta empresa también fabrica láminas de vidrio más grandes, de 20 metros cuadrados de área. La razón a la que se producen defectos sigue siendo de 0,5 por cada 5 metros cuadrados. Se elige al azar una de estas láminas de vidrio grandes,

(c) Halle la probabilidad de que no contenga ningún defecto.

Solución:

(a) Si X representa el número de defectos de la lámina $X \sim \text{Po}(0{,}5)$:

$$\text{p}(X \geq 1) = 1 - \text{p}(X = 0) \simeq 0{,}393$$

(b) El valor esperado de P es:

$$\text{E}(P) = 5\text{p}(X = 0) - 3\text{p}(X \geq 1) \simeq 1{,}85\$$$

(c) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de defectos de la lámina. Ahora $Y \sim \text{Po}(2)$.

$$\text{p}(Y = 0) \simeq 0{,}135$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

Considere la curva que viene dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 4xy$.

(a) Utilice la derivación implícita para mostrar que

$$\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

La tangente a esta curva es paralela al eje x en el punto donde $x = k$, $k > 0$.

(b) Halle el valor de k.

Solución:

(a) Derivando:

$$3x^2 + 3y^2y' = 4y + 4xy' \ ; \qquad y'(3y^2 - 4x) = 4y - 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

(b) Puesto que la pendiente de la tangente es cero:

$$4y - 3k^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3k^2}{4}$$

El punto $\left(k, \frac{3k^2}{4}\right)$ debe cumplir la ecuación de la curva:

$$k^3 + \frac{27k^6}{64} = 3k^3 \ ; \qquad \frac{27k^6}{64} = 2k^3$$

Puesto que $k > 0$, podemos dividir por k^3:

$$\frac{27k^3}{64} = 2 \ ; k^3 = \frac{128}{27} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{4\sqrt[3]{2}}{3}$$

Ejercicio 8. (6 puntos)

Una partícula se mueve de modo tal que su velocidad v m s^{-1} y su desplazamiento s m, están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{artg}(\operatorname{sen} s)$, $0 \le s \le 1$. La aceleración de la partícula es a m s^{-2}.

(a) Halle la aceleración de la partícula en función de s.

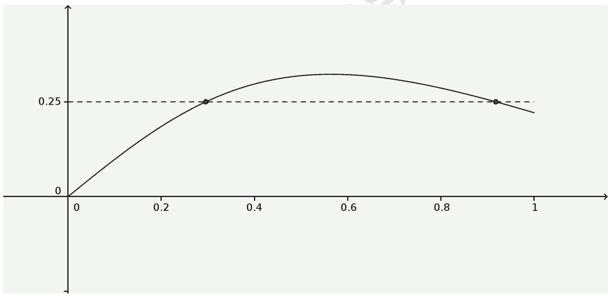
(b) Utilizando un gráfico aproximado adecuado, halle el desplazamiento de la partícula cuando su aceleración es igual a 0,25 m s^{-2}.

Solución:

(a) Obtenemos la aceleración derivando:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot v = \frac{\cos s}{1 + \operatorname{sen}^2 s} \cdot \operatorname{artg}(\operatorname{sen} s)$$

(b) La gráfica de la aceleración es



Hay dos posiciones en que la aceleración es 0,25 m s^{-2}: $s_1 \simeq 0{,}296$ m y $s_2 \simeq 0{,}918$ m.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (8 puntos)

$OACB$ es un paralelogramo en el que $\vec{OA} = \vec{a}$ y $\vec{OB} = \vec{b}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos.

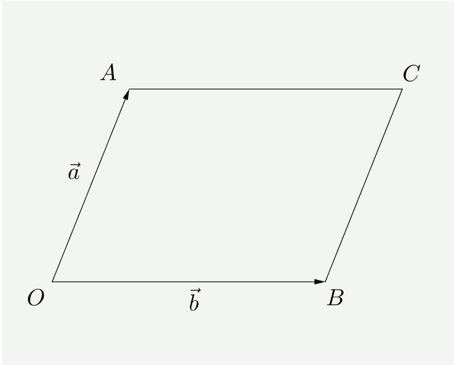
(a) Muestre que

(I) $|\vec{OC}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

(II) $|\vec{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

(b) Sabiendo que $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, demuestre que $OACB$ es un rectángulo.

Solución:



(a) $|\vec{OC}|^2 = \vec{OC}\cdot\vec{OC} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

(b) Teniendo en cuenta $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB} \implies \vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$:

$$|\vec{AB}|^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

(c) $|\vec{OC}| = |\vec{AB}| \implies |\vec{OC}|^2-|\vec{AB}|^2=0 \implies 4\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \implies \vec{a}\perp\vec{b}$
Los lados son perpendiculares y el paralelogramo es rectángulo.

♠♠♠♠

24.2. Sección B

Ejercicio 10. (15 puntos)

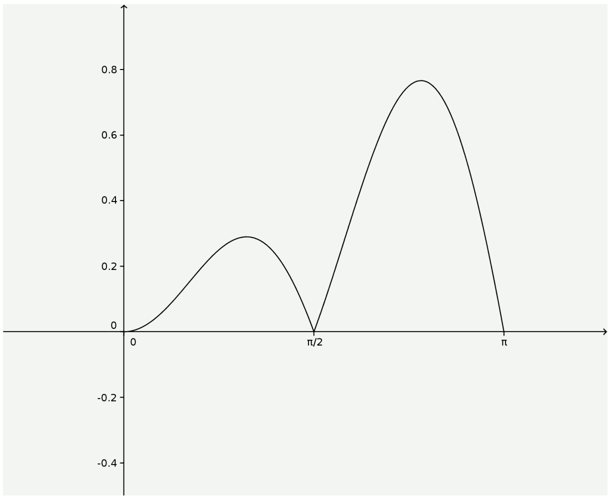
Una variable aleatoria continua T tiene la siguiente función de densidad de probabilidad f:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t|\operatorname{sen} 2t|}{\pi} & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(t)$.
(b) Utilice este gráfico aproximado para hallar la moda de T.
(c) Halle la media de T.
(d) Halle la varianza de T.
(e) Halle la probabilidad de que el valor de T esté comprendido entre la media y la moda.
(f) (I) Halle $\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ donde $0 \le T \le \frac{\pi}{2}$.
(II) A partir de lo anterior, verifique que el primer cuartil de T es $\dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

(a) Podemos obtener el gráfico con la calculadora.



(b) La moda es aproximadamente 2,46. Se obtiene con la calculadora.

(c) La media la obtenemos integrando

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\,\mathrm{d}t \simeq 2{,}04$$

El valor exacto de esta integral puede obtenerse calculando una primitiva por partes. El valor que damos lo hemos obtenido con la calculadora.

(d) Calculamos primero

$$\mathrm{E}(T^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^3 \operatorname{sen} 2t\,\mathrm{d}t \simeq 4,67$$

Entonces

$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{E}(T^2) - \mathrm{E}(T)^2 \simeq 0{,}516$$

(e)

$$p = \frac{1}{\pi}\int_{2{,}04}^{2{,}46} t|\operatorname{sen} 2t|\,\mathrm{d}t \simeq 0{,}285$$

(f) (I)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{T} t \operatorname{sen} 2t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{T} t\,\mathrm{d}(-\cos 2t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-t\cos 2t\Big]_0^{T} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{T}\cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-t\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\Big]_0^{T} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-T\cos 2T + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2T\Big]
\end{aligned}$$

(II) Para $T = \frac{\pi}{2}$:

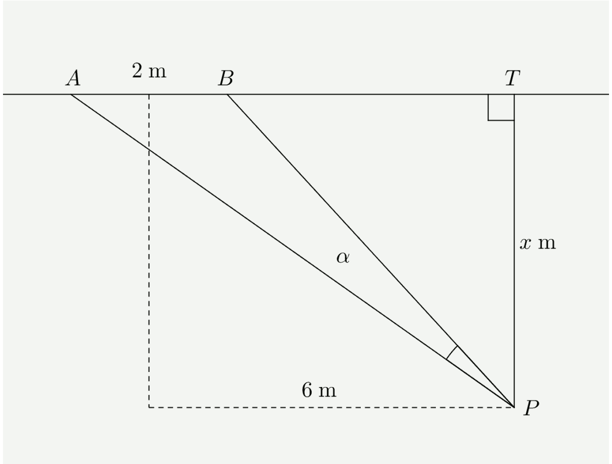
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{sen} 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) = \frac{1}{4}$$

y, por consiguiente, el primer cuartil es $\frac{\pi}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (22 puntos)

Los puntos A, B y T se encuentran sobre una línea de una cancha de fútbol sala. La portería AB, tiene 2 m de ancho. Un jugador situado en el punto P patea el balón en dirección a la portería. PT es perpendicular a la recta AB y se encuentra a 6 m de una recta paralela que pasa por el centro de AB. Sea PT igual a x metros y sea $\alpha = \widehat{APB}$, medido en grados. Suponga que el balón se desplaza por el piso.



(a) Halle el valor de α cuando $x = 10$.

(b) Muestre que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2x}{x^2+35}$$

El valor de α es máximo cuando el valor de $\operatorname{tg}\alpha$ es máximo.

(c) (I) Halle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\alpha)$.

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de α tal que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\alpha) = 0$.

(III) Halle $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\operatorname{tg}\alpha)$ y, a partir de lo anterior, muestre que el valor de α nunca supera los $10°$.

(d) Halle el conjunto de valores de x para los cuales $\alpha \geq 7°$

Solución:

(a) Por el terema de Pitágoras:

$$PB^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$

$$PA^2 = 10^2 + 7^2 = 149$$

Por el teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{125+149-4}{2\sqrt{125}\sqrt{149}} \quad\Longrightarrow\quad \alpha \simeq 8{,}43°$$

(b) Llamemos $\widehat{TPA} = \alpha_1$ y $\widehat{TPB} = \alpha_2$. Entonces $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ y

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{7}{x}-\frac{5}{x}}{1+\frac{7}{x}\frac{5}{x}} = \frac{2x}{x^2+35}$$

(c) (I)

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}x} = \frac{2(x^2+35)-2x\cdot 2x}{(x^2+35)^2} = \frac{70-2x^2}{(x^2+35)^2}$$

(II) La derivada se anula para $x = \sqrt{35}$ m.

(III) La derivada segunda es igual a:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{-4x(x^2+35)^2 - 2(x^2+35)\cdot 2x\cdot(70-2x^2)}{(x^2+35)^4}\\
&= \frac{-4x(x^2+35) - 2\cdot 2x\cdot(70-2x^2)}{(x^2+35)^3}\\
&= \frac{4x^3-420x}{(x^2+35)^3}\\
&= \frac{4x(x^2-105)}{(x^2+35)^3}
\end{aligned}$$

La derivada segunda para $x=\sqrt{35}$ es negativa. Por consiguiente α es máximo para este valor de x. El valor máximo de α es:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{35}}{35+35}=\frac{\sqrt{35}}{35}\quad\Longrightarrow\quad\alpha\simeq 9{,}59^\circ$$

Por tanto, α nunca es mayor de 10°.

(d) Representamos con la calculadora las curvas

$$y_1=\ \operatorname{artg}\frac{2x}{x^2+35}\ ;\qquad y_2=7$$

y vemos que el ángulo es mayor de 7° entre 2,55 m y 13,7 m.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (23 puntos)

Las funciones f y g se definen mediante:

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ ;\qquad g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

(a) (I) Muestre que $\dfrac{1}{4f(x)-2g(x)}=\dfrac{e^x}{e^{2x}+3}$.

(II) Utilice la sustitución $u=e^x$ para hallar

$$\int_0^{\ln 3}\frac{1}{4f(x)-2g(x)}\,\mathrm{d}x$$

Dé la respuesta en la forma $\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$, donde $a,b\in\mathbb{Z}^+$.

Sea $h(x)=nf(x)+g(x)$ donde $n\in\mathbb{R}$, $n>1$.

(b) (I) Resuelva la ecuación $h(x)=k$, donde $k\in\mathbb{R}^+$, formando para ello una ecuación cuadrática en e^x.

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que la ecuación $h(x)=k$ tiene dos soluciones reales siempre que se cumpla que $k>\sqrt{n^2-1}$ y $k\in\mathbb{R}^+$.

Sea $t(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

(c) (I) Muestre que $t'(x)=\dfrac{[f(x)]^2-[g(x)]^2}{[f(x)]^2}$ para $x\in\mathbb{R}$.

(II) A partir de lo anterior, muestre que $t'(x)>0$ para $x\in\mathbb{R}$.

Solución:

(a) (I) Sustituyendo:

$$\frac{1}{4f(x)-2g(x)}=\frac{1}{2(e^x+e^{-x})-e^x+e^{-x}}=$$

Multiplicando por e^x numerador y denominador queda finalmente

$$=\frac{e^x}{e^{2x}+3}$$

(II)

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}\frac{1}{4f(x)-2g(x)}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+3}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^3\frac{1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u\\&=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_1^3\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Barrow se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{artg}\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{artg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

(*b*) (I) Escribimos la ecuación:

$$\frac{n(e^x+e^{-x})}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=k\ ;\qquad (n+1)e^x+(n-1)e^{-x}=2k$$

Multiplicando por e^x:

$$(n+1)e^{2x}-2ke^x+n-1=0\quad\Longrightarrow\quad e^x=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-4(n+1)(n-1)}}{2(n+1)}$$

Simplificando:

$$e^x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-(n+1)(n-1)}}{n+1}\quad\Longrightarrow\quad x=\ln\frac{k\pm\sqrt{k^2-(n+1)(n-1)}}{n+1}$$

(II) La ecuación tendrá dos soluciones si el discriminante es mayor que cero, o sea, si $k^2>(n+1)(n-1)=n^2-1$. En ese caso, la fracción será positiva y tendrá sentido el logaritmo.

(*c*) (I) La función $t(x)$ es igual a

$$t(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Derivamos:

$$\begin{aligned}t'(x)&=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}\\&=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}&&\text{multiplicando y dividiendo por 4}\\&=\frac{[f(x)]^2-[g(x)]^2}{[f(x)]^2}\end{aligned}$$

(II) Esta derivada es positiva puesto que $f(x)>g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

♠♠♠♠

25. Noviembre 2016. Primer examen.

25.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Halle las coordenadas del punto de intersección de los planos definidos por las ecuaciones $x + y + z = 3$, $x - y + z = 5$, $x + y + 2z = 6$.

Solución:

Resolvamos el sistema formado por las tres ecuaciones. Por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución es el punto $(1, -1, 3)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (4 puntos)

Las caras de un dado de seis caras equilibrado están numeradas 1, 2, 2, 4, 4, 6. Sea X la variable aleatoria discreta que modeliza la puntuación que se obtiene cuando se tira el dado.

(a) Complete la siguiente tabla de la distribución de probabilidad de X.

x				
p(X)				

(b) Halle el valor esperado de X.

Solución:

(a)

x	1	2	4	6
p(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(b) $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{19}{6}$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (4 puntos)

Una función racional viene dada por

$$f(x) = a + \frac{b}{x - c}$$

donde los parámetros $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$.

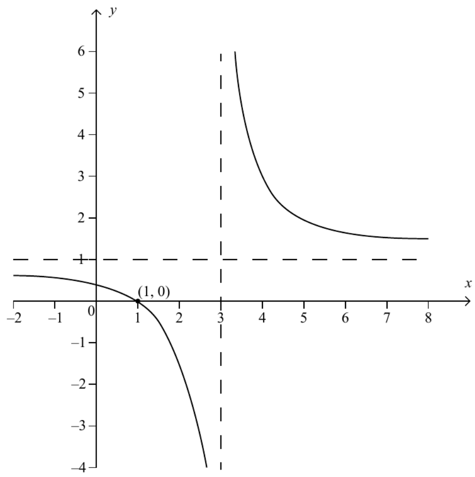
En la siguiente figura se representa el gráfico de $y = f(x)$. Utilizando la información que aparece en el gráfico,

(a) indique el valor de a y el valor de c;

(b) halle el valor de b.

Solución:

(a) $a = 1$, $c = 3$



(b) Para $x = 1$, y vale 0. Por tanto:

$$0 = 1 + \frac{b}{1-3} \quad \Longrightarrow \quad b = 2.$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

Considere los vectores $\vec{a} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

(a) Halle $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

Solución:

(a) Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 0 \\ \vec{\jmath} & -3 & -3 \\ \vec{k} & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) La ecuación del plano es:

$$12(x-1) + 2y + 3(z+1) = 0\ ; \qquad 12x + 2y + 3z - 9 = 0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

La ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + (k-1) = 0$ tiene por raíces α y β tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Sin resolver la ecuación, halle los posibles valores del número real k.

Solución:

Por las relaciones de Cardano se cumple que $\alpha + \beta = 2k$ y $\alpha\beta = k - 1$. Entonces

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \quad \Longrightarrow \quad 4k^2 = 4 + 2(k-1) \quad \Longrightarrow \quad 2k^2 - k - 1 = 0$$

y de aquí $k = 1$ y $k = -\frac{1}{2}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

La suma de los n primeros términos de una progresión $\{u_n\}$ viene dada por $S_n = 3n^2 - 2n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Escriba el valor de u_1.
(b) Halle el valor de u_6.
(c) Demuestre que $\{u_n\}$ es una progresión aritmética, indicando claramente cuál es la diferencia de la progresión.

Solución:

(a) El valor de u_1 coincide con S_1, es decir, $u_1 = 1$.
(b) El término u_6 se puede calcular como la diferencia $S_6 - S_5 = 3 \cdot 36 - 12 - 3 \cdot 25 + 10 = 31$.
(c) Un término genérico u_n vale:

$$u_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 2n - 3(n-1)^2 + 2(n-1) = 6n - 5$$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 6:

$$u_n - u_{n-1} = 6n - 5 - 6(n-1) + 5 = 6$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

Resuelva la ecuación $4^x + 2^{x+2} = 3$.

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$4^x + 2^{x+2} = 3$$
$$2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 3 = 0$$
$$2^x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

La solución $-2 - \sqrt{7}$ no es válida puesto que 2^x debe ser positivo. La unica solución es:

$$2^x = -2 + \sqrt{7}\ ; \qquad x = \log_2(-2 + \sqrt{7})$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

Considere las rectas l_1 y l_2 definidas mediante

$$l_1 :\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\ ; \qquad l_2 :\ \frac{6-x}{3} = \frac{y-2}{4} = 1 - z$$

donde a es una constante. Sabiendo que las rectas l_1 y l_2 se cortan en un punto P,

(a) halle el valor de a;
(b) determine las coordenadas del punto de intersección P.

Solución:

(a) Un punto de la primera recta es $A(-3, -2, a)$ y de la segunda el $B(6, 2, 1)$. Los vectores directores son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\ ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para que las rectas se corten, el producto mixto de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1-a & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad -108 - 20 + 16(1-a) = 0 \ ; \qquad a = -7$$

(*b*) De la primera ecuación tenemos que $x = -3 + \beta$ e $y = -2 + 4\beta$. Sustituyendo en la ecuación de la segunda recta:

$$\frac{6+3-\beta}{3} = \frac{-2+4\beta-2}{4} \ ; \qquad 36 - 4\beta = -12 + 12\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 3$$

El punto de intersección es $P(0, 10, -1)$.

♠♠♠♠

-

Ejercicio 9. (9 puntos)

Una curva viene dada por la ecuación $3x - 2y^2 e^{x-1} = 2$.

(*a*) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x e y.

(*b*) Halle las ecuaciones de las tangentes a esta curva en aquellos puntos donde la curva corta a la recta $x = 1$.

Solución:

(*a*) Derivando en forma implícita:

$$3 - 4yy'e^{x-1} - 2y^2e^{x-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3 - 2y^2e^{x-1}}{4ye^{x-1}}$$

(*b*) Si $x = 1$:

$$3 - 2y^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La pendiente de la tangente en $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es

$$m = \frac{3 - 2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y la ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$$

De la misma manera se obtiene que la ecuación de la tangente en $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es:

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (9 puntos)

Considere dos sucesos A y B definidos en el mismo espacio muestral.

(*a*) Muestre que $\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(A' \cap B)$.

(*b*) Sabiendo que $\mathrm{p}(A \cup B) = \frac{4}{9}$, $\mathrm{p}(B|A) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{p}(B|A') = \frac{1}{6}$,

(I) muestre que $\mathrm{p}(A) = \frac{1}{3}$

(II) a partir de lo anterior, halle $\mathrm{p}(B)$.

Solución:

(*a*) Puesto que $\mathrm{p}(A' \cap B) = \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(A \cup B) &= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) \\ &= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}(A' \cap B) \\ &= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(A' \cap B) \end{aligned}$$

(*b*) (I) Puesto que

$$\mathrm{p}(B|A') = \frac{1}{6} = \frac{\mathrm{p}(A' \cap B)}{\mathrm{p}(A')} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(A' \cap B) = \frac{1}{6}\,\mathrm{p}(A')$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(A \cup B) = \frac{4}{9} &= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(A' \cap B) \\ &= \mathrm{p}(A) + \frac{1}{6}\,\mathrm{p}(A') \\ &= \mathrm{p}(A) + \frac{1}{6}\,(1 - \mathrm{p}(A)) \end{aligned}$$

y, resolviendo la ecuación, resulta $\mathrm{p}(A) = \frac{1}{3}$.

(II) Puesto que

$$\mathrm{p}(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(A)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

y de

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B)\ ; \qquad \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \mathrm{p}(B) - \frac{1}{9}$$

obtenemos $\mathrm{p}(B) = \frac{2}{9}$

♠♠♠♠

25.2. Sección B

Ejercicio 11. (22 puntos)

Sea $y = e^x \operatorname{sen} x$.

(*a*) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(*b*) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2e^x \cos x$

Considere la función f, definida mediante $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$.

(*c*) Muestre que la función f alcanza un valor máximo local en $x = \frac{3\pi}{4}$.

(*d*) Halle la coordenada x del punto de inflexión del gráfico de f.

(*e*) Dibuje aproximadamente el gráfico de f, indicando claramente la posición del punto máximo local, del punto de inflexión y de los puntos de corte con los ejes.

(*f*) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de f y el eje x.

La curvatura de un gráfico en un punto cualquiera (x, y) se define como

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(g) Halle el valor de la curvatura del gráfico de f en el punto máximo local.

(h) Halle el valor de κ para $x = \frac{\pi}{2}$ y comente acerca de su significado en lo que respecta a la forma del gráfico.

Solución:

(a) Derivando el producto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right)$$

(b) Derivando de nuevo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + e^x \left(\cos x - \operatorname{sen} x\right) = 2e^x \cos x$$

(c) Basta ver que en $\frac{3\pi}{4}$ se anula la primera derivada puesto que

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$$

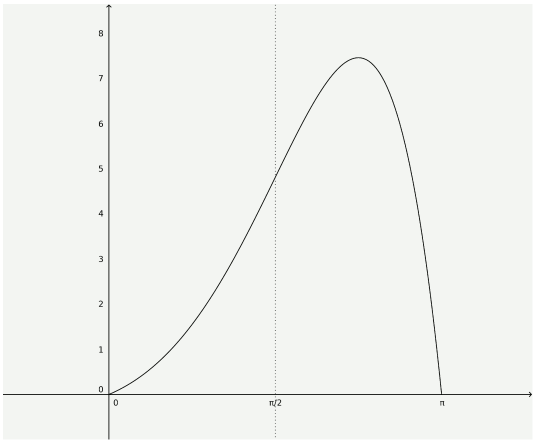
y la derivada segunda en ese punto es negativa. Por consiguiente, en $x = \frac{3\pi}{4}$ hay un máximo local.

(d) La segunda derivada se anula en $x = \frac{\pi}{2}$. El signo de la segunda derivada lo representamos en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ + & | & - \\ & \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

En $x = \frac{\pi}{2}$ la curva pasa de cóncava a convexa y es, por tanto, un punto de inflexión.

(e) La curva corta al eje OX en $x = 0$ $x = \pi$, tiene un máximo en $x = \frac{3\pi}{4}$ y un punto de inflexión en $x = \frac{\pi}{2}$:



(f) Calcularemos el área mediante una integral. Calculemos primero por partes la integral indefinida:

$$u = e^x \qquad \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \quad v = -\cos x$$

de forma que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = e^x \qquad \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \quad v = \operatorname{sen} x$$

resulta:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e^x \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$$

entonces, el área es:

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,e^x \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right)\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\,e^\pi(\operatorname{sen}\pi - \cos\pi) - \frac{1}{2}\,e^0(\operatorname{sen} 0 - \cos 0) = \frac{1}{2}\,\left(e^\pi + 1\right)$$

(*g*) En $x = \frac{3\pi}{4}$ la derivada primera es cero y la derivada segunda:

$$2e^{\frac{3\pi}{4}} \cos \frac{3\pi}{4} = 2e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$$

La curvatura en $x = \frac{3\pi}{4}$ es $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

(*h*) La curvatura en el punto de inflexión es 0. Eso significa que alrededor de ese punto la función se representa aproximadamente por una recta.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (19 puntos)

Sea ω una de las soluciones no reales de la ecuación $z^3 = 1$.

(*a*) Determine el valor de

(I) $1 + \omega + \omega^2$

(II) $1 + \omega^* + (\omega^*)^2$

(*b*) Muestre que $(\omega - 3\omega^2)(\omega^2 - 3\omega) = 13$.

Considere los números complejos $p = 1 - 3i$ y $q = x + (2x + 1)i$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(*c*) Halle los valores de x que satisfacen la ecuación $|p| = |q|$.

(*d*) Resuelva la inecuación $\operatorname{Re}(pq) + 8 < (\operatorname{Im}(pq))^2$.

Solución:

(*a*) (I) Los tres números 1, ω y ω^2 son las tres raíces cúbicas de 1 y su suma es 0. Lo podemos justificar de diversas formas. Por la simetría de los afijos de las raíces de cualquier número complejo es evidente que su suma debe ser cero. También aplicando el hecho de que forman una progresión geométrica y calculando su suma. Lo más sencillo es aplicar las relaciones de Cardano: la suma de las raíces del polinomio $z^3 - 1$ debe ser cero porque el coeficiente de z^2 en el polinomio es cero.

(II) Del apartado anterior se deduce que esa suma también es cero.

(*b*) Operando:

$$\begin{aligned}
(\omega - 3\omega^2)(\omega^2 - 3\omega) &= \omega^3 - 3\omega^2 - 3\omega^4 + 9\omega^3 && \omega^3 = 1 \\
&= 10 - 3\omega^2 - 3\omega \\
&= 10 + 3 - 3 - 3\omega - 3\omega^2 && 1 + \omega + \omega^2 = 0 \\
&= 13 - 3(1 + \omega + \omega^2) \\
&= 13
\end{aligned}$$

(*c*) Para que los módulos de p y q sean iguales debe ocurrir:

$$1 + 9 = x^2 + (2x + 1)^2 \; ; \qquad 10 = 5x^2 + 4x + 1 \; ; \qquad 5x^2 + 4x - 9 = 0$$

y obtenemos $x = 1$ y $x = -\frac{9}{5}$.

(*d*) Calculamos en primer lugar el producto pq:

$$\begin{aligned}
pq &= (1 - 3i)(x + (2x + 1)i) \\
&= x + 3(2x + 1) + (2x + 1 - 3x)i \\
&= 5x + 3 + (1 - x)i
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(pq) + 8 < (\operatorname{Im}(pq))^2 \quad &\Longrightarrow \quad 7x + 3 + 8 < (1 - x)^2 \\
&\Longrightarrow \quad 7x + 11 < x^2 - 2x + 1 \\
&\Longrightarrow \quad x^2 - 9x - 10 > 0 \\
&\Longrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (10, \infty)
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. (19 puntos)

(a) Halle el valor de:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}$$

(b) Muestre que:

$$\frac{1-\cos 2x}{2\operatorname{sen}x}\equiv\operatorname{sen}x\ ;\qquad x\neq k\pi \text{ donde } k\in\mathbb{Z}$$

(c) Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)x=\frac{1-\cos 2nx}{2\operatorname{sen}x}\ ;\qquad n\in\mathbb{Z}^+,\ k\neq k\pi \text{ donde } k\in\mathbb{Z}$$

(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x=\cos x$ en el intervalo $0<x<\pi$.

Solución:

(a) Aplicando las fórmulas de transformación en producto:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+b}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

resulta:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}\\
&\qquad=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{sen}\frac{8\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{4}+2\operatorname{sen}\frac{16\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{4}\\
&\qquad=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{sen}2\pi\cos\frac{\pi}{2}+2\operatorname{sen}4\pi\cos\frac{\pi}{2}\\
&\qquad=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado sustituyendo $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, etc.

(b) Puesto que $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$:

$$\frac{1-\cos 2x}{2\operatorname{sen}x}=\frac{1-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x}=\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x}=\operatorname{sen}x$$

(c)
- La fórmula se cumple para $n=1$ pues en ese caso tiene la forma:

$$\operatorname{sen}x=\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}x}$$

que hemos visto que es cierta.

- Supongamos la fórmula cierta para $n=k$:

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\ldots+\operatorname{sen}(2k-1)x=\frac{1-\cos 2kx}{2\operatorname{sen}x}$$

y veamos que, en ese caso, se cumple para $n=k+1$ es decir, comprobemos que:

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\ldots+\operatorname{sen}(2k+1)x=\frac{1-\cos 2(k+1)x}{2\operatorname{sen}x}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\ldots+\operatorname{sen}(2k+1)x\\
&=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\ldots+\operatorname{sen}(2k-1)x+\operatorname{sen}(2k+1)x\\
&=\frac{1-\cos 2kx}{2\operatorname{sen}x}+\operatorname{sen}(2k+1)x\\
&=\frac{1-\cos 2kx+2\operatorname{sen}(2k+1)x\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x}
\end{aligned}$$

Aplicando $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$:

$$\begin{aligned}
&=\frac{1-\cos 2kx-\cos(2k+2)x+\cos 2kx}{2\operatorname{sen}x}\\
&=\frac{1-\cos 2(k+1)x}{2\operatorname{sen}x}
\end{aligned}$$

– Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

(*d*) Utilizando de nuevo la fórmula de transformación en producto:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x \\ &2 \operatorname{sen} 2x \cos x = \cos x \\ &\cos x (2 \operatorname{sen} 2x - 1) = 0 \end{aligned}$$

y entonces:

$$\cos x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

o bien

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi, \quad 2x = \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} \pm k\pi \quad x = \frac{5\pi}{12} \pm k\pi$$

Las soluciones que cumplen las condiciones del problema son $x = \frac{\pi}{12}$ y $x = \frac{5\pi}{12}$.

♠♠♠♠

26. Noviembre 2016. Segundo examen.

26.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Una variable aleatoria X tiene la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla:

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\mathrm{p}(X=x)$	0,12	0,18	0,20	0,28	0,14	0,08

(a) Determine el valor de $\mathrm{E}(X^2)$.

(b) Halle el valor de $\mathrm{Var}(X)$.

Solución:

(a) El valor medio de los cuadrados es:

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum p_i x_i^2 = 10{,}37 \simeq 10{,}4$$

(b) La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media. La media es:

$$\mathrm{E}(X)=\sum p_i x_i = 2{,}88$$

y entonces la varianza

$$\mathrm{Var}(X)=10{,}37-2{,}88^2\simeq 2{,}08$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Halle el ángulo agudo entre los planos cuyas ecuaciones son $x+y+z=3$ y $2x-z=2$.

Solución:

Los vectores normales a los planos son:

$$\vec{n_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad;\qquad \vec{n_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

El ángulo agudo que forman está dado por:

$$\cos\alpha=\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

de donde $\alpha\simeq 75{,}0^\circ$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

Una variable aleatoria discreta X sigue una distribución de Poisson $\mathrm{Po}(\mu)$.

(a) Muestre que $\mathrm{p}(X=x+1)=\frac{\mu}{x+1}\times\mathrm{p}(X=x)$, $x\in\mathbb{N}$.

(b) Sabiendo que $\mathrm{p}(X=2)=0,241667$ y que $\mathrm{p}(X=3)=0,112777$, utilice el apartado (a) para hallar el valor de μ.

Solución:

(*a*) Las probabilidades de una distribución $\mathrm{Po}(\mu)$ están dadas por

$$\mathrm{p}(X=x)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Entonces:

$$\mathrm{p}(X=x+1)=\frac{\mu^{x+1}e^{-\mu}}{(x+1)!}=\frac{\mu\cdot\mu^x e^{-\mu}}{(x+1)x!}=\frac{\mu}{x+1}\,\mathrm{p}(X=x)$$

(*b*) Para $x=2$, la fórmula anterior se escribe:

$$\mathrm{p}(X=3)=\frac{\mu}{3}\,\mathrm{p}(X=2)\quad\Longrightarrow\quad\mu\simeq 1{,}40$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

Halle el término constante en el desarrollo de $\left(4x^2-\dfrac{3}{2x}\right)^{12}$.

Solución:

El término enésimo del desarrollo tiene la forma

$$\binom{12}{n}(4x^2)^n\left(\frac{3}{2x}\right)^{12-n}$$

El término constante cumple que $2n-12+n=0$, es decir, $n=4$.

Por tanto, el término constante es:

$$\binom{12}{4}4^4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^8=3247695$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (9 puntos)

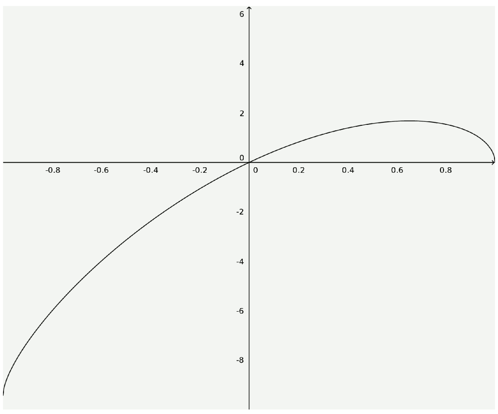
Considere la función f definida mediante $f(x)=3x\,\operatorname{arcos}(x)$, donde $-1\le x\le 1$.

(*a*) Dibuje aproximadamente el gráfico de f indicando claramente todos los puntos de corte con los ejes y las coordenadas de todos los máximos o mínimos locales que haya.

(*b*) Indique el recorrido de f.

(*c*) Resuelva la inecuación $|3x\,\operatorname{arcos}(x)|>1$.

Solución:



(*a*) La curva corta a los ejes en $(0,0)$ y en $(1,0)$. Tiene un máximo local en $(0{,}652;1{,}68)$.

(*b*) El recorrido es el intervalo $[-9{,}42;1{,}68]$.

(*c*) Mediante la calculadora gráfica obtenemos $x \in [-1, -0{,}189) \cup (0{,}254; 0{,}937)$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

Un satélite terrestre se mueve siguiendo una trayectoria definida mediante la curva $72{,}5x^2 + 71{,}5y^2 = 1$, donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ se expresan en miles de kilómetros y t es el tiempo en segundos.

Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 7{,}75 \times 10^{-5}$ cuando $x = 3{,}2 \times 10^{-3}$, halle los posibles valores de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Dé las respuestas en forma estándar (notación científica).

Solución:

Calculamos los valores de y correspondientes al valor de x que nos dan:

$$y^2 = \frac{72{,}5x^2 - 1}{71{,}5} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm 0{,}11792\ldots$$

Ahora, derivando en la ecuación de la trayectoria respecto del tiempo:

$$72{,}5 \cdot 2x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 71{,}5 \cdot 2y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{72{,}5x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{71{,}5y} = -\frac{145x}{143y} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Sustituyendo los valores de x, y y $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \simeq \pm 2{,}13 \times 10^{-6}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

El triángulo ABC es tal que $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm y $B\hat{A}C = \frac{\pi}{9}$.

(*a*) Utilice el teorema del coseno para hallar los dos posibles valores de AC.

(*b*) Halle la diferencia entre las áreas de los dos posibles triángulos ABC.

Solución:

(*a*) Por el teorema del coseno, sea $b = AC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos B\hat{A}C$$
$$9 = 16 + b^2 - 8b\cos\frac{\pi}{9}$$
$$b^2 - 8b\cos\frac{\pi}{9} + 7 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $b \simeq 6{,}43$ y $b \simeq 1{,}09$.

(*b*) El área del triángulo se puede calcular mediante:

$$S = \frac{1}{2}\,AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{1}{2}\,4 \cdot b \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{9} = 2b \operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$$

Sustituyendo los valores de b que hemos obtenido resultan los valores del área 4,40 y 0,74. Su diferencia es aproximando a tres cifras significativas 3,65.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, tal que $\mathrm{p}(X < 30{,}31) = 0{,}1180$ y $\mathrm{p}(X > 42,52) = 0,3060$.

(a) Halle μ y σ.

(b) Halle $\mathrm{p}(|X-\mu|<1,2\sigma)$.

Solución:

(a) Tenemos que:

$$\begin{cases} \mathrm{p}(X<30{,}31)=0{,}1180 \\ \mathrm{p}(X>42,52)=0,3060 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathrm{p}(X<30{,}31)=0{,}1180 \\ \mathrm{p}(X<42,52)=0,6940 \end{cases}$$

Tipificando la variable:

$$\begin{cases} \mathrm{p}(Z<\frac{30{,}31-\mu}{\sigma})=0{,}1180 \\ \mathrm{p}(Z<\frac{42{,}52-\mu}{\sigma})=0,6940 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{30{,}31-\mu}{\sigma}=-1{,}1850 \\ \frac{42{,}52-\mu}{\sigma}=0{,}5072 \end{cases}$$

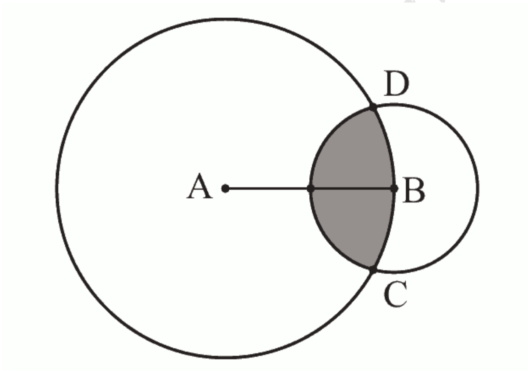
Resolviendo el sistema resulta $\mu\simeq 38{,}9$ y $\sigma\simeq 7{,}22$.

(b) Equivale a $\mathrm{p}(-1{,}2<Z<1{,}2)\simeq 0{,}770$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (8 puntos)

El diagrama muestra dos circunferencias con centros en los puntos A y B y radios $2r$ y r, respectivamente. El punto B pertenece a la circunferencia que tiene centro en A. Las circunferencias se cortan en los puntos C y D.



Sea α la medida del ángulo $C\hat{A}D$ y θ la medida del ángulo $C\hat{B}D$, ambas en radianes.

(a) Halle una expresión para el área de la zona sombreada en función de α, θ y r.

(b) Muestre que $\alpha = 4\,\mathrm{arsen}\,\frac{1}{4}$.

(c) A partir de lo anterior, halle el valor de r, sabiendo que el área de la zona sombreada es igual a 4.

Solución:

(a) Se puede expresar como la suma de las áreas de dos segmentos circulares:

$$S=\frac{1}{2}\,4r^2(\alpha-\operatorname{sen}\alpha)+\frac{1}{2}\,r^2(\theta-\operatorname{sen}\theta)$$

(b) En el triángulo isósceles ABD, los lados iguales miden $2r$ y el lado desigual mide r. El ángulo desigual es $\frac{\alpha}{2}$ de forma que se cumple:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4}=\frac{\frac{r}{2}}{2r}=\frac{1}{4} \implies \alpha=4\,\mathrm{arsen}\,\frac{1}{4}$$

(c) En el triángulo ABD el ángulo desigual es $\frac{\alpha}{2}$ y los ángulos iguales $\frac{\theta}{2}$. Entonces:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{2\theta}{2}=\pi \implies \theta=\pi-\frac{\alpha}{2}$$

La ecuación que debemos resolver es

$$4=\frac{1}{2}\,4r^2(\alpha-\operatorname{sen}\alpha)+\frac{1}{2}\,r^2(\theta-\operatorname{sen}\theta) \implies r^2=\frac{8}{4(\alpha-\operatorname{sen}\alpha)+\theta-\operatorname{sen}\theta}$$

Con los valores de α y θ que hemos obtenido la calculadora nos da $r\simeq 1{,}69$.

♠♠♠♠

26.2. Sección B

Ejercicio 10. (22 puntos)

Sea f la función definida mediante $f(x) = \frac{2-e^x}{2e^x-1} \quad x \in D$

(a) Determine D, el mayor dominio posible de f.

(b) Muestre que el gráfico de f tiene tres asíntotas e indique sus ecuaciones.

(c) Muestre que $f'(x) = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$.

(d) Utilice las respuestas dadas en los apartados (b) y (c) para justificar que f tiene una inversa e indique su dominio.

(e) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(f) Considere la región R delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y los ejes. Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando R se rota 2π alrededor del eje y.

Solución:

(a) El valor de x que anula el denominador no pertenece al dominio:

$$2e^x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

(b) La recta $x = -\ln 2$ es asíntota vertical de la curva pues

$$\lim_{x\to -\ln 2} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \infty$$

Cuando x tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

La recta $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
Cuando x tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-e^x}{2e^x-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

La recta $y = -2$ es asíntota horizontal de la curva en $-\infty$.

(c) Derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{-e^x(2e^x-1) - 2e^x(2-e^x)}{(2e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$$

(d) Puesto que la derivada es siempre negativa, la función es decreciente y, considerando las asíntotas, inyectiva. En consecuencia puede definirse la función inversa. El dominio de f^{-1} será el recorrido de la función f es decir $\mathbb{R} \setminus \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

(e) Intercambiamos las variables:

$$x = \frac{2-e^y}{2e^y-1}$$

y despejamos y:

$$x(2e^y-1) = 2 - e^y \;; \qquad e^y(2x+1) = 2 + x \;; \qquad e^y = \frac{x+2}{2x+1}$$

La función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{2x+1}$$

(f) El punto de corte de la curva con el eje OY es $(0, \ln 2)$. El volumen se calcula mediante la integral:

$$V = \pi\int_0^{\ln 2} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^{\ln 2}\left(\ln\frac{y+2}{2y+1}\right)^2\,\mathrm{d}y$$

Con la calculadora obtenemos $V \simeq 0{,}327$.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (20 puntos)

Una tienda de bombones anuncia obsequios gratuitos para aquellos clientes que reúnan tres cupones. Los cupones se introducen al azar en el 10 % de las chocolatinas que se venden en esa tienda. Kati compra algunas de estas chocolatinas y las va abriendo de una en una para ver si contienen un cupón. Sea $\mathrm{p}(X=n)$ la probabilidad de que Kati consiga su tercer cupón en la n-ésima chocolatina que abre.

(Se supone que la probabilidad de que una chocolatina dada contenga un cupón sigue siendo del 10 % durante toda la pregunta.)

(a) Muestre que $\mathrm{p}(X=3)=0,001$ y $\mathrm{p}(X=4)=0,0027$.

Se sabe que $\mathrm{p}(X=n)=\frac{n^2+an+b}{2000}\times 0{,}9^{n-3}$ para $n\geq 3$ y $n\in\mathbb{N}$.

(b) Halle el valor de las constantes a y b.

(c) Deduzca que:

$$\frac{\mathrm{p}(X=n)}{\mathrm{p}(X=n-1)}=\frac{0{,}9(n-1)}{n-3}\qquad \text{para } n>3$$

(d) (I) A partir de lo anterior, muestre que X tiene dos modas, m_1 y m_2.
(II) Indique los valores de m_1 y m_2.

La madre de Kati va a la tienda y compra x chocolatinas. Se las lleva a casa para que Kati las abra.

(e) Determine el valor mínimo de x tal que la probabilidad de que Kati reciba al menos un obsequio gratuito sea mayor que $0,5$.

Solución:

(a) En el primer caso la probabilidad de tener tres premios en las tres primeras chocolatinas es:

$$\mathrm{p}(X=3)=0,1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}001$$

En el segundo caso debe haber 2 éxitos en las tres primeras pruebas y éxito en la cuarta:

$$p(X=4)=\binom{3}{2}0{,}1^2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}0027$$

(b) La probabilidad de que los tres premios se obtengan con la enésima chocolatina es la probabilidad de obtener dos premios con las $n-1$ primeras por la probabilidad de tener premio en la enésima:

$$\mathrm{p}(X=n)=\binom{n-1}{2}0,1^2\cdot 0{,}9^{n-3}\cdot 0{,}1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^{n-3}=\frac{n^2-3n+2}{2000}\cdot 0{,}9^{n-3}$$

de donde $a=-3$ y $b=2$.
También podrían haberse obtenido a y b sustituyendo en la fórmula los valores conocidos de $\mathrm{p}(X=3$ y $\mathrm{p}(X=4)$ y resolviendo el sistema.

(c) De la fórmula anterior:

$$\frac{\mathrm{p}(X=n)}{\mathrm{p}(X=n-1)}=\frac{(n^2-3n+2)\cdot 0{,}9^{n-3}}{((n-1)^2-3(n-1)+2)\cdot 0{,}9^{n-1-3}}=\frac{(n-1)(n-2)\cdot 0{,}9^{n-3}}{(n^2-5n+6)\cdot 0{,}9^{n-4}}=\frac{(n-1)\cdot 0{,}9}{n-3}$$

(d) La sucesión $\{\mathrm{p}(X=n)\}$ es creciente si

$$\frac{\mathrm{p}(X=n)}{\mathrm{p}(X=n-1)}>1\quad\Longrightarrow\quad\frac{(n-1)\cdot 0{,}9}{n-3}>1\quad\Longrightarrow\quad(n-1)\cdot 0{,}9>n-3\quad\Longrightarrow\quad n<21$$

Ademas la sucesión es decreciente si

$$\frac{\mathrm{p}(X=n)}{\mathrm{p}(X=n-1)}<1\quad\Longrightarrow\quad\frac{(n-1)\cdot 0{,}9}{n-3}<1\quad\Longrightarrow\quad(n-1)\cdot 0{,}9>n-3\quad\Longrightarrow\quad n>21$$

Por otra parte:

$$\frac{\mathrm{p}(X=n)}{\mathrm{p}(X=n-1)}=1\quad\Longrightarrow\quad\frac{(n-1)\cdot 0{,}9}{n-3}=1\quad\Longrightarrow\quad(n-1)\cdot 0{,}9=n-3\quad\Longrightarrow\quad n=21$$

Entonces $n=20$ y $n=21$ son las dos modas.

(*e*) Sea Y el número de chocolatinas premiadas. Y sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(x; 0{,}1)$. Debe ocurrir que:

$$\mathrm{p}(Y \geq 3) > 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(Y \leq 2) < 0{,}5$$

Mediante la calculadora formamos la tabla binomcdf $\left(x, \frac{1}{10}, 2\right)$. Vemos que el primer valor para el que se verifica la desigualdad es $x = 27$.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (18 puntos)

El día que nació, el 1 de enero de 1998, los abuelos de Mary invirtieron $\$x$ en una cuenta de ahorro. A partir de ese momento, fueron depositando $\$x$ todos los meses, el primer día del mes. La cuenta ofrecía un tipo de interés fijo del $0,4\,\%$ mensual. El interés se calculaba el último día de cada mes y se añadía a la cuenta. Sea $\$A_n$ la cantidad que hay en la cuenta de Mary el último día del mes n-ésimo, justo después de que se haya añadido el interés.

(*a*) Halle una expresión para A_1 y muestre que $A_2 = 1,004^2 x + 1,004x$.

(*b*) (I) Escriba una expresión similar para A_3 y otra para A_4.

(II) A partir de lo anterior, muestre que la cantidad que había en la cuenta de Mary la víspera del día que cumplió 10 años viene dada por $251(1,004^{120} - 1)x$.

(*c*) Escriba, en función de x, una expresión para A_n en la víspera del día que Mary cumplió 18 años, donde se muestre claramente el valor de n.

(*d*) Los abuelos de Mary querían que en su cuenta hubiera al menos $20000 la víspera del día que cumpliera 18 años. Determine el valor mínimo del depósito mensual $\$x$ que se requiere para conseguir este objetivo. Dé la respuesta aproximando al número entero de dólares más próximo.

(*e*) Inmediatamente después de cumplir 18 años, Mary decide invertir $15000 de este dinero en una cuenta del mismo tipo, obteniendo un $0,4\,\%$ de interés mensual. Todos los años, retira $1000 el día de su cumpleaños, para comprarse un obsequio. Determine cuánto tiempo transcurrirá antes de que no quede dinero en la cuenta.

Solución:

(*a*) Al final del primer mes tendrá la cantidad más los intereses:

$$A_1 = x + \frac{0{,}4}{100}\,x = 1{,}004x$$

Cada mes la cantidad se multiplica por 1,004, la cantidad puesta al comienzo del primer mes se habrá multiplicado dos veces y la impuesta al comienzo del segundo mes se habrá multiplicado una vez:

$$A_2 = 1{,}004^2 x + 1{,}004x$$

(*b*) (I) $A_3 = 1{,}004^3 x + 1{,}004^2 x + 1{,}004x$

(II) $A_4 = 1{,}004^4 x + 1{,}004^3 x + 1{,}004^2 x + 1{,}004x$

(*c*) Han pasado 120 meses:

$$A_{120} = 1{,}004^{120} x + 1{,}004^{119} x + \ldots + 1{,}004x$$

Sumando como una progresión geométrica:

$$A_{120} = \frac{1{,}004 - 1{,}004^{120} \cdot 1{,}004}{1 - 1{,}004} \cdot x = \frac{1{,}004(1{,}004^{120} - 1)}{1{,}004 - 1} \cdot x = 251(1{,}004^{120} - 1)x$$

(*d*) Han pasado $18 \cdot 12 = 216$ meses. Debe cumplirse que

$$251(1{,}004^{216} - 1)x > 2000 \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{20000}{251(1{,}004^{216} - 1)} = 58,2\ldots$$

El número entero más próximo es 58.

(*e*) Cada año la cantidad se multiplica por $r = 1{,}004^{12}$ y se le resta 1000. Así:

$$a_1 = 15000r - 1000$$

$$a_2 = (15000r - 1000)r - 1000 = 15000r^2 - 1000r - 1000$$

$$a_3 = (15000r^2 - 1000r - 1000)r - 1000 = 15000r^3 - 1000r^2 - 1000r - 1000$$

y, en general:

$$a_n = 15000r^n - 1000(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = 15000r^n - 1000 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Los términos de esta sucesión se hacen negativos a partir de $n = 28$.

♠♠♠♠

27. 2017. Primer examen. TZ1.

27.1. Sección A

Ejercicio 1. (4 puntos)

Find the solution of $\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$.

Solución:

$$\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$$
$$\log_2 x - \log_2 5 - \log_2 3 = 2$$
$$\log_2 \frac{x}{15} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{15} = 2^2\ ; \qquad x = 60$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

Consider the complex numbers $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$ and $w = \frac{z_1}{z_2}$.

(*a*) By expressing z_1 and z_2 in modulus-argument form write down:

(I) the modulus of w;

(II) the argument of w.

(*b*) Find the smallest positive integer value of n , such that w^n is a real number.

Solución:

(*a*) Tenemos que $z_1 = 2_{60^\circ}$ y $z_2 = (\sqrt{2})_{45^\circ}$. Entonces, el módulo de w es $\sqrt{2}$ y su argumento 15°.

(*b*) Para que w^n sea real, su argumento debe ser 0°, 180 o un ángulo que difiere de estos en un número entero de vueltas. El valor más pequeño de n será 12 de forma que el argumento de w^{12} sea 180°.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Solve the equation $\sec^2 x + 2\tan x = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

Solución:

Puesto que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 0$$
$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$$
$$(\operatorname{tg} x + 1)^2 = 0$$
$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

Three girls and four boys are seated randomly on a straight bench. Find the probability the girls sit together and the boys sit together.

Solución:

Los siete pueden sentarse de 7! maneras. Si han se estar juntos los chicos y las chicas hay $2 \cdot 3! \cdot 4!$ maneras de hacerlo. El factor 2 se debe a que pueden estar las chicas a la derecha de los chicos o a la izquierda. La probabilidad es:

$$p = \frac{2 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{35}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (puntos)

$ABCD$ is a parallelogram, where $\vec{AB} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ and $\vec{AD} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

(a) Find the area of the parallelogram $ABCD$.

(b) By using a suitable scalar product of two vectors, determine whether $A\hat{B}C$ is acute or obtuse.

Solución:

(a) Calculemos el producto vectorial $\vec{AB} \times \vec{AD}$:

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 4 \\ \vec{\jmath} & 2 & -1 \\ \vec{k} & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial:

$$S = \sqrt{1 + 100 + 49} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

(b) Calculamos el producto escalar $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -12$$

Puesto que el producto escalar es negativo, el ángulo $B\hat{A}D$ es obtuso. El ángulo $A\hat{B}C$ es el suplementario y, por consiguiente, es agudo.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (puntos)

Consider the graphs of $y = |x|$ and $y = -|x| + b$, where $b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Sketch the graphs on the same set of axes.

(b) Given that the graphs enclose a region of area 18 square units, find the value of b.

Solución:

(a)

(b) Puesto que la diagonal del cuadrado es igual a b (positivo):

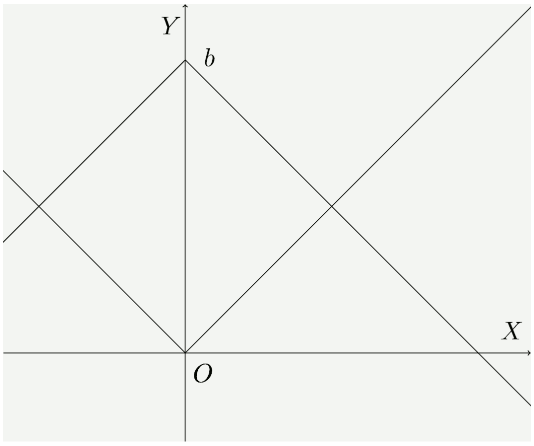
$$18 = \frac{b^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad b = 6$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

An arithmetic sequence $u_1, u_2, u_3, \ldots$ has $u_1 = 1$ and common difference $d \neq 0$. Given that u_2, u_3 and u_6 are the first three terms of a geometric sequence:

(a) find the value of d.



(b) Given that $u_N = -15$, determine the value of $\sum_{r=1}^{N} u_r$.

Solución:

(a) Los números u_2, u_3 y u_6 pueden escribirse como $1+d$, $1+2d$ y $1+5d$. Puesto que son los tres primeros términos de una progresión geométrica:

$$\frac{1+2d}{1+d} = \frac{1+5d}{1+2d} \quad \Longrightarrow \quad d = 2$$

(b) Si $u_N = -15$:

$$-15 = 1 - 2(N-1) \quad \Longrightarrow \quad N = 9$$

y la suma de los 9 primeros términos de la progresión es:

$$S_9 = \frac{1-15}{2} \cdot 9 = -63$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

Use the method of mathematical induction to prove that $4^n + 15n - 1$ is divisible by 9 for $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

(a) – La propiedad se cumple para $n = 1$:

$$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 = \dot{9}$$

– Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$4^k + 15k - 1 = \dot{9}$$

Debemos demostrar que, en ese caso, también se cumple para $n = k+1$, es decir, tenemos que demostrar que:

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = \dot{9}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 \\ &= 4 \cdot (\dot{9} - 15k + 1) + 15(k+1) - 1 \\ &= \dot{9} - 45k + 18 \\ &= \dot{9} \end{aligned}$$

– por el principio de inducción matemática, la propiedad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (5 puntos)

Find $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

Solución:

Integrando por partes:

$$u = \operatorname{arsen} x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

resulta:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{arsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arsen} x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

27.2. Sección B

Ejercicio 10. (15 puntos)

The continuous random variable X has a probability density function given by

$$F(X) = \begin{cases} k \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) & 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Find the value of k.

(b) By considering the graph of f write down

(I) the mean of X;

(II) the median of X;

(III) the mode of X.

(c) (I) Show that $\mathrm{p}(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{4}$;

(II) Hence state the interquartile range of X.

(d) Calculate $\mathrm{p}(X \leq 4 | X \geq 3)$.

Solución:

(a) Debe cumplirse que:

$$1 = k\int_0^6 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{6}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{6k}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\right]_0^6 = \frac{12k}{\pi}$$

Por tanto $k = \frac{\pi}{12}$.

(b) Por la simetría de la función, la media, la mediana y la moda son iguales a 3.

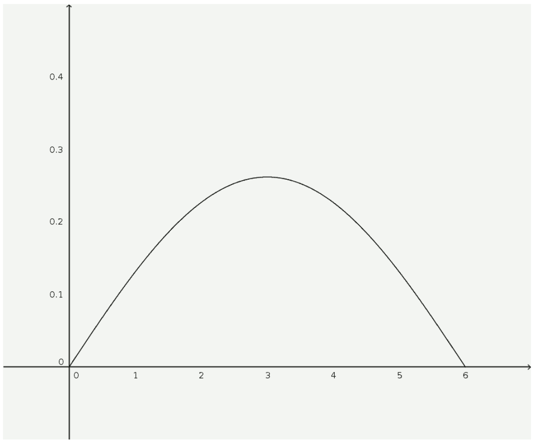
(c) (I) La probabilidad que nos piden es igual a

$$\mathrm{p}(0 \leq X \leq 2) = \frac{\pi}{12}\int_0^2 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-6\pi}{12\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(II) Por la simetría de la función:

$$\mathrm{p}(0 \leq X \leq 4) = \frac{3}{4}$$

El primer cuartil es 2, el tercer cuartil es 4 y el rango intercuartílico es 2.



(*d*) Dada la simetría de la función y los resultados que hemos obtenido en el apartado anterior, la probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(X \leq 4 | X \geq 3) = \frac{\mathrm{p}(3 \leq X \leq 4)}{\mathrm{p}(X \geq 3)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

♠♠♠♠

.

Ejercicio 11. (17 puntos)

(*a*) (I) Express $x^2 + 3x + 2$ in the form $(x+h)^2 + k$.
(II) Factorize $x^2 + 3x + 2$.

Consider the function

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq -2,\ x \neq -1$$

(*b*) Sketch the graph of $f(x)$, indicating on it the equations of the asymptotes, the coordinates of the y-intercept and the local maximum.

(*c*) Show that

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

(*d*) Hence find the value of p if $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(p)$.

(*e*) Sketch the graph of $y = f(|x|)$.

(*f*) Determine the area of the region enclosed between the graph of $y = f(|x|)$, the x-axis and the lines with equations $x = -1$ and $x = 1$.

Solución:

(*a*) $x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

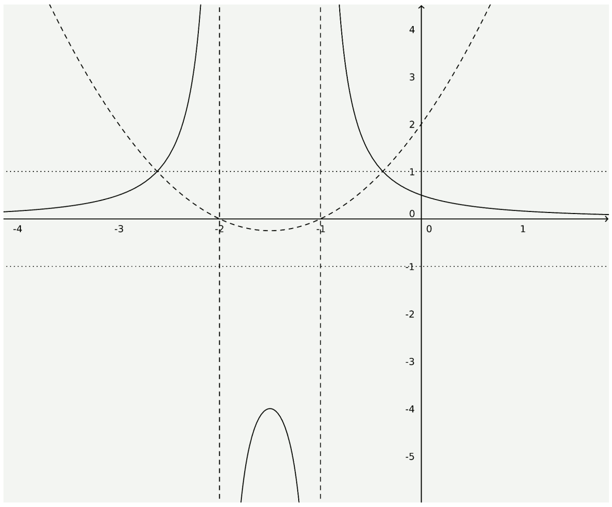
(*b*) Las asíntotas son $x = -1$, $x = -2$ e $y = 0$. La curva corta al eje OY en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. El máximo local está en $\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$.

(*c*) Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{x^2 + 3x + 2}$$

Identificando coeficientes resulta $A = 1$ y $B = -1$. Por consiguiente:

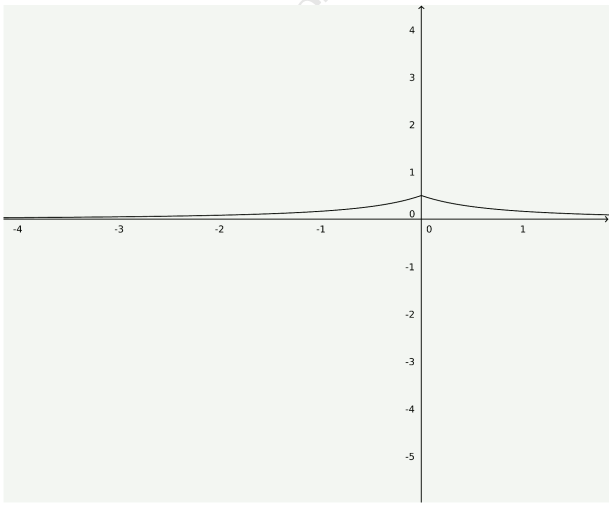
$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$



(*d*) Integrando:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^1\\ &= \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + 2\\ &= \ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Por consiguiente, $p = \frac{4}{3}$.



(*e*)

(*f*) Por la simetría:

$$\int_{-1}^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Entonces;

$$S = 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{4}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (18 puntos)

Consider the polynomial $P(z) = z^5 - 10z^2 + 15z - 6$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Write down the sum and the product of the roots of $P(z) = 0$.
(b) Show that $(z - 1)$ is a factor of $P(z)$.

The polynomial can be written in the form $P(z) = (z - 1)^3(z^2 + bz + c)$

(c) Find the value of b and the value of c.
(d) Hence find the complex roots of $P(z) = 0$.

Consider the function $q(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

(e) (I) Show that the graph of $y = q(x)$ is concave up for $x > 1$.
(II) Sketch the graph of $y = q(x)$ showing clearly any intercepts with the axes.

Solución:

(a) De acuerdo con las relaciones de Cardano, la suma depende del coeficiente de z^4 y el producto del término independiente. En este caso la suma es 0 y el producto 6.

(b) Basta ver que $P(1) = 0$:
$$P(1) = 1^5 - 10 \cdot^2 + 15 \cdot 1 - 6 = 1 - 10 + 15 - 6 = 0$$

(c) Dividiendo tres veces por $z - 1$ mediante la regla de Ruffini:

	1	0	0	−10	15	−6
1		1	1	1	−9	6
	1	1	1	−9	6	0
1		1	2	3	−6	
	1	2	3	−6	0	
1		1	3	6		
	1	3	6	0		

obtenemos
$$P(z) = (z - 1)^3(z^2 + 3z + 6) \quad \Longrightarrow \quad b = 3, \quad c = 6$$

(d) Calculamos las raíces complejas del polinomio de segundo grado:
$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$$
Las raíces del polinomio son $z = 1$ (triple), $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$ $z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

(e) (I) Calculamos las derivadas de $q(x)$: Las derivadas de esta función son:
$$q(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$$
$$q'(x) = 5x^4 - 20x + 15$$
$$q''(x) = 20x^3 - 20$$
La segunda derivada solamente tiene una raíz real $x = 1$. El signo de la segunda derivada está representado en el siguiente esquema:

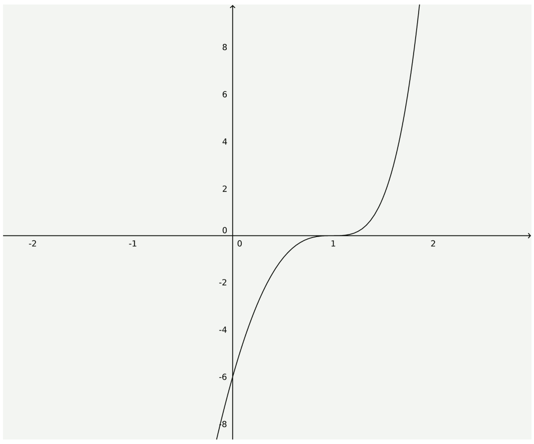
$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & | & + \\ \hline & 1 & \end{array}$$

Para $x > 1$ la segunda derivada es positiva y, en consecuencia, la función es cóncava.

(II) La derivada de $q(x)$ puede escribirse factorizada como
$$q'(x) = 5x^4 - 20x + 15 = 5(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$$
La derivada tiene una sola raíz $x = 1$ (doble). El signo de la derivada está representado por:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ + & | & + \\ \hline & 1 & \end{array}$$

La función es siempre creciente. El único punto en el que se anula la derivada es en $x = 1$ pero ya sabemos que se trata de un punto de inflexión.


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-2
-1
0
1
2

♠♠♠♠

28. 2017. Segundo examen. TZ1.

28.1. Sección A

Ejercicio 1. (6 puntos)

Consider two events A and B such that $\mathrm{p}(A)=k$, $\mathrm{p}(B)=3k$, $\mathrm{p}(A\cap B)=k^2$ and $\mathrm{p}(A\cup B)=0{,}5$.

(a) Calculate k

(b) Find $\mathrm{p}(A'\cap B)$.

Solución:

(a) Puesto que

$$\mathrm{p}(A\cup B)=\mathrm{p}(A)+\mathrm{p}(B)-\mathrm{p}(A\cap B)$$

Sustituyendo:

$$0{,}5=k+3k-k^2 \quad\Longrightarrow\quad k^2-4k+0,5=0$$

Resolviendo la ecuación resulta $k\simeq 0{,}129$.

(b) $\mathrm{p}(A'\cap B)=\mathrm{p}(B)-\mathrm{p}(A\cap B)=3k-k^2\simeq 0{,}371$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (7 puntos)

The curve C is defined by equation $xy-\ln y=1$, $y>0$.

(a) Find $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of x and y.

(b) Determine the equation of the tangent to C at the point $\left(\frac{2}{e},e\right)$.

Solución:

(a) Derivando en forma implícita:

$$y+xy'-\frac{y'}{y}=0\,; \qquad y^2+xyy'-y'=0 \quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{y^2}{1-xy}$$

(b) La pendiente de la tangente es:

$$m=\frac{e^2}{1-\frac{2e}{e}}=-e^2$$

y su ecuación:

$$y-e=-e^2\left(x-\frac{2}{e}\right) \qquad \text{o bien} \qquad y=-e^2x+3e$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

The coefficient of x^2 in the expansion of

$$\left(\frac{1}{x}+5x\right)^8$$

is equal to the coefficient of x^4 in the expansion of $(a+5x)^7$, $a\in\mathbb{R}$. Find the value of a.

Solución:

Consideremos el término enésimo del primer desarrollo:

$$T_n = \binom{8}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n (5x)^{8-n}$$

Si x debe tener exponente 2:

$$8-n-n=2\ ; \qquad 8-2n=2\ ; \qquad n=3$$

El coeficiente de x^2 es

$$\binom{8}{3}5^5$$

El coeficiente de x^4 en el segundo desarrollo es:

$$\binom{7}{4}5^4a^3 = \binom{7}{3}5^4a^3$$

Igualando ambos coeficientes:

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}5^5 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}5^4\,a^3 \quad\Longrightarrow\quad a=2$$

♠♠♠♠

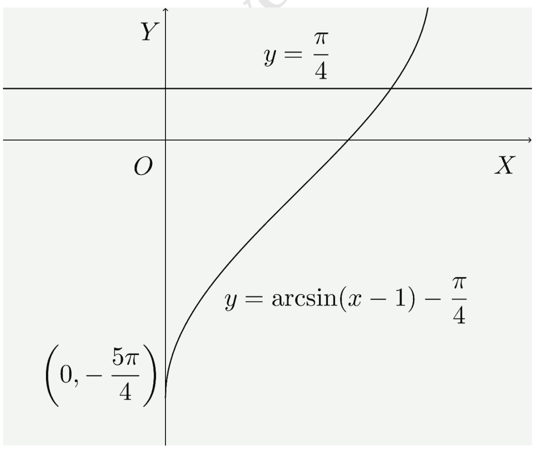
Ejercicio 4. (6 puntos)

The region A is enclosed by the graph of $y = 2\arcsin(x-1) - \frac{\pi}{4}$, the y-axis and the line $y = \frac{\pi}{4}$.

(a) Write down a definite integral to represent the area of A.

(b) Calculate the area of A.

Solución:



(a) La curva corta al eje de ordenadas en el punto:

$$y_0 = 2\text{ arsen}\,(-1) - \frac{\pi}{4} = 2\,\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

Despejamos x:

$$2\text{ arsen}\,(x-1) = y + \frac{\pi}{4}\ ; \qquad \text{arsen}\,(x-1) = \frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}\ ; \qquad x-1 = \text{sen}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$$

y, finalmente:

$$x = 1 + \text{sen}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$$

El área se puede calcular mediante la integral:

$$S = \int_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \text{sen}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right)\,\mathrm{d}y$$

(b) Con la calculadora se obtiene un área de $3,30$ unidades.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

When carpet is manufactured, small faults occur at random. The number of faults in Premium carpets can be modelled by a Poisson distribution with mean 0,5 faults per 20 m^2. Mr Jones chooses Premium carpets to replace the carpets in his office building. The office building has 10 rooms, each with the area of 80 m^2.

(a) Find the probability that the carpet laid in the first room has fewer than three faults.

(b) Find the probability that exactly seven rooms will have fewer than three faults in the carpet.

Solución:

(a) Sea X el número de defectosen la alfombra de la habitación. La variable X sigue la distribución Po(2). La probabilidad de que la alfombra tenga menos de 3 fallos es:

$$p = \mathrm{p}(X \leq 2) \simeq 0{,}677$$

(b) Sea Y el número de habitaciones en que la alfombra tiene menos de tres fallos, Y sigue una binomial B$(10; p)$. La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(Y = 7) \simeq 0{,}263$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

Consider the graph of $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, where $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

(a) Write down the equations of the vertical asymptotes of the graph.

The graph is reflected in the y-axis, then stretched parallel to the y-axis by a factor 2, then translated by

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) Give the equation of the transformed graph.

Solución:

(a) Las asíntotas son:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \;; \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Teniendo en cuenta los valores que puede tomar x damos a k los valores -1, 0 y 1 y obtenemos las asíntotas $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$.

(b) Por la reflexión en el eje y (cambiar x por $-x$) obtenemos la función:

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

El cambio de escala produce:

$$y = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

y la traslación:

$$y = -3 + 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -3 + 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

o bien:

$$y = -3 + 2\operatorname{cotg} x$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

Find the Cartesian equation of plane Π containing the points $A(6,2,1)$ and $B(3,-1,1)$ and perpendicular to the plane $x+2y-z-6=0$.

Solución:

Pueden tomarse como vectores directores del plano el vector $\vec{AB}$ y el vector normal al plano dado:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad;\qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-6 & 1 & 1\\ y-2 & 1 & 2\\ z-1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$$

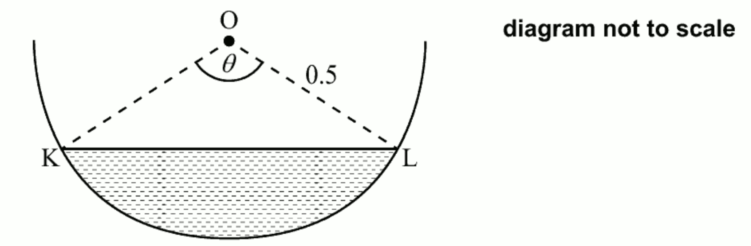
y desarrollando el determinante:

$$-(x-6)+y-2+z-1=0\,;\qquad -x+y+z+3=0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

A water trough which is 10 metres long has a uniform cross-section in the shape of a semicircle with radius 0,5 metres. It is partly filled with water as shown in the following diagram of the cross-section. The centre of the circle is O and the angle KOL is θ radians.



(a) Find an expression for the volume of water $V(\,\mathrm{m}^3)$ in the trough in terms of θ.

The volume of water is increasing at a constant rate of 0,0008 $\mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

(b) Calculate $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ when $\theta=\frac{\pi}{3}$

Solución:

(a) El volumen de agua es igual al área del segmento por 10:

$$V=\frac{1}{2}\,0{,}5^2\,(\theta-\operatorname{sen}\theta)\cdot 10=1{,}25\,(\theta-\operatorname{sen}\theta)$$

(b) Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=1{,}25\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

Sustituyendo $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ y $\cos\theta$:

$$0{,}0008=1{,}25\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1{,}25}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{0{,}0016}{1,25}=0{,}00128\ \mathrm{s}^{-1}$$

♠♠♠♠

28.2. Sección B

Ejercicio 9. (8 puntos)

The times taken for male runners to complete a marathon can be modelled by a normal distribution with a mean 196 minutes and a standard deviation 24 minutes.

(a) Find the probability that a runner selected at random will complete the marathon in less than 3 hours.

It is found that 5 % of the male runners complete the marathon in less than T_1 minutes.

(b) Calculate T_1.

The times taken for female runners to complete the marathon can be modelled by a normal distribution with a mean 210 minutes. It is found that 58 % of female runners complete the marathon between 185 and 235 minutes.

(c) Find the standard deviation of the times taken by female runners.

Solución:

(a) Sea $X \sim \mathrm{N}(196, 24)$:

$$\mathrm{p}(X < 180) \simeq 0{,}252$$

(b) $\mathrm{p}(X < T_1) = 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad T_1 \simeq 157$

(c) Sea $Y \sim \mathrm{N}(210, \sigma)$. En este caso:

$$\mathrm{p}(185 < Y < 235) = 0{,}58 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(Y < 235) = 0{,}79$$

Tipificando la variable:

$$\mathrm{p}\left(Z < \frac{235 - 210}{\sigma}\right) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{25}{\sigma}\right) = 0{,}79$$

Esto nos da

$$\frac{25}{\sigma} = 0{,}806 \quad \Longrightarrow \quad \sigma \simeq 31{,}0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (15 puntos)

In triangle PQR, $PR = 12$ cm, $QR = p$ cm, $PQ = r$ cm and $Q\hat{P}R = 30°$.

(a) Use the cosine rule to show that $r^2 - 12\sqrt{3}r + 144 - p^2 = 0$.

Consider the possible triangles with $QR = 8$ cm.

(b) Calculate the two corresponding values of PQ.

(c) Hence, find the area of the smaller triangle.

Consider the case where p, the length of QR is not fixed at 8 cm.

(d) Determine the range of values of p for which it is possible to form two triangles.

Solución:

(a) Por el teorema del coseno:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2 \cdot PQ \cdot PR \cos Q\hat{P}R \quad \Longrightarrow \quad p^2 = r^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot r \cos 30°$$

y sustituyendo $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ resulta $r^2 - 12\sqrt{3}r + 144 - p^2 = 0$.

(b) Si $p = 8$, los posibles valores son:

$$r = \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{144 \cdot 3 - 4 \cdot (144 - 8^2)}}{2} = \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot 8^2 - 144}}{2} = 6\sqrt{3} \pm \sqrt{28} = 6\sqrt{3} \pm 2\sqrt{7}$$

(*c*) El área más pequeña será:

$$S = \frac{1}{2}12(6\sqrt{3} - 2\sqrt{7})\,\mathrm{sen}\,30^\circ \simeq 15{,}3\ \mathrm{cm}^2$$

(*d*) Para un valor cualquiera $QR = p$ las soluciones de la ecuación de segundo grado $r^2 - 12\sqrt{3}r + 144 - p^2 = 0$ son:

$$r = \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{144 \cdot 3 - 4 \cdot (144 - p^2)}}{2} = \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot p^2 - 144}}{2} = 6\sqrt{3} \pm \sqrt{p^2 - 36}$$

Para que el discriminante sea mayor que cero debe ser $p > 6$ y para que las dos soluciones sean positivas, el término independiente de la ecuación debe ser positivo, $144 - p^2 > 0$, es decir, $p < 12$.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (9 puntos)

Xavier, the parachutist, jumps out of a plane at a height of h metres above the ground. After free falling for 10 seconds his parachute opens.

His velocity, v m s^{-1}, t seconds after jumping from the plane, can be modelled by the function

$$v(t) = \begin{cases} 9{,}8t & 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{98}{\sqrt{1+(t-10)^2}} & t > 10 \end{cases}$$

(*a*) Find his velocity when $t = 15$.

(*b*) Calculate the vertical distance Xavier travelled in the first 10 seconds.

His velocity when he reaches the ground is 2,8 m s^{-1}.

(*c*) Determine the value of h.

Solución:

(*a*) Aplicando la fórmula de la velocidad:

$$v(15) = \frac{98}{\sqrt{1 + (15-1)^2}} = \frac{98}{\sqrt{26}} \simeq 19{,}2\ \mathrm{m\ s}^{-1}$$

(*b*) La distancia recorrida se obtiene integrando la velocidad:

$$s = \int_0^{10} 9{,}8t\ \mathrm{d}t = 490\ \mathrm{m}$$

(*c*) El tiempo que tarda en llegar al suelo es la solución de la ecuación:

$$2{,}8 = \frac{98}{\sqrt{1 + (t-10)^2}}$$

Resolvemos la ecuación y resulta $t = 44{,}985\ldots$. La altura será la distancia recorrida para ese valor del tiempo:

$$h = 490 + \int_{10}^{44{,}985} \frac{98}{\sqrt{1 + (t-10)^2}}\ \mathrm{d}t \simeq 906\ \mathrm{m}$$

♠♠♠♠

29. 2017. Primer examen. TZ2.

29.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Hallar el término independiente del desarrollo del binomio $\left(2x^2+\dfrac{1}{2x^3}\right)^{10}$.

Solución:

El término enésimo del desarrollo es:

$$T_n=\binom{10}{n}\left(2x^2\right)^n\left(\frac{1}{2x^3}\right)^{10-n}$$

El término independiente cumple que:

$$2n-3(10-n)=0\quad\Longrightarrow\quad n=6$$

Así que:

$$T_6=\binom{10}{6}2^6\,\frac{1}{2^4}=840$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

La función f se define mediante $f(x)=2x^3+5,\ -2\leq x\leq 2$.

(a) Escriba el recorrido de f.

(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(c) Escriba el dominio y el recorrido de f^{-1}.

Solución:

(a) Puesto que $f'(x)=6x^2>0$ la función es creciente. Puesto que además es continua, toma todos los valores comprendidos entre su valor más pequeño $f(-2)=-11$ y su valor más grande $f(2)=21$. El recorrido es el intervalo cerrado $[-11,21]$.

(b) Intercambiamos las variables:

$$x=2y^3+5$$

y despejamos:

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$$

(c) El dominio es $[-11,21]$ y el recorrido $[-2,2]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Los términos 1°, 4° y 8° de una progresión aritmética cuya diferencia común es d, $d\neq 0$, son los tres primeros términos de una progresión geométrica cuya razón común es r. Sabiendo que el primer término de ambas progresiones es 9, halle:

(a) El valor de d.

(b) El valor de r.

Solución:

(*a*) Sean los tres términos 9, $9+3d$ y $9+7d$. Puesto que forman una progresión geométrica:

$$\frac{9+3d}{9}=\frac{9+7d}{9+3d}$$

resolviendo la ecuación:

$$81+54d+9d^2=81+63d\,;\qquad 9d^2-9d=0\quad\Longrightarrow\quad d=1$$

(*b*) La razón es:

$$r=\frac{9+3d}{9}=\frac{4}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (7 puntos)

Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. El desplazamiento s metros, en el instante t segundos viene dado por $s=t+\cos 2t$, $t\geq 0$. Sean t_1 y t_2 las dos primeras veces que la partícula está en reposo, donde $t_1<t_2$.

(*a*) Halle t_1 y t_2.

(*b*) Halle el desplazamiento de la partícula cuando $t=t_1$.

Solución:

(*a*) La velocidad de la partícula se obtiene derivando:

$$v=1-2\operatorname{sen}2t$$

Si la partícula está en reposo, su velocidad es igual a cero:

$$1-2\operatorname{sen}2t=0$$

$$\operatorname{sen}2t=\frac{1}{2}$$

$$2t=\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad\text{o}\quad 2t=\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\qquad k\in\mathbb{N}$$

$$t=\frac{\pi}{12}+k\pi\quad\text{o}\quad t=\frac{5\pi}{12}+k\pi$$

Para $k=0$ obtenemos $t_1=\frac{\pi}{12}$ y $t_2=\frac{5\pi}{12}$.

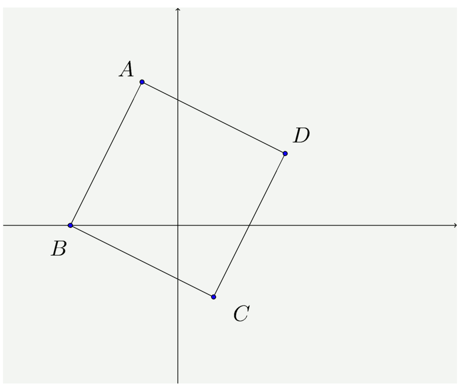
(*b*) El desplazamiento para $t=t_1$ es:

$$s\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (4 puntos)

En el siguiente diagrama de Argand, el punto A representa el número complejo $-1+4i$ y el punto B representa el complejo $-3+0i$. La forma de $ABCD$ es un cuadrado. Determine los números complejos que representan los puntos C y D.



Solución:

Método 1.

El vector $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. El vector $\vec{AD}$ es perpendicular a este y tiene el mismo módulo. Puede ser:

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por coherencia con el diagrama debe ser $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El punto C representa el complejo $1 - 2i$ y el punto D representa el complejo $3 + 2i$.

Método 2.

Un giro de centro c y ángulo φ se expresa mediante complejos por:

$$z' = c + (z - c)e^{i\varphi}$$

El punto C lo podemos obtener girando A un ángulo de $-90°$ alrededor de B:

$$z_C = -3 + (-1 + 4i + 3)(-i) = -3 - (2 + 4i)i = 1 - 2i$$

El punto D lo obtenemos girando B un ángulo de $90°$ alrededor de A:

$$z_D = -1 + 4i + (-3 + 1 - 4i)i = -1 + 4i + (-2 - 4i)i = 3 + 2i$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

(a) Utilizando la sustitución $x = \tan\theta$, muestre que:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Si $x = \tan\theta$, cuando $x = 0$, $\theta = 0$ y cuando $x = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Además:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Entonces:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(b) Con la fórmula trigonométrica:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\theta)$$

resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

(a) La variable aleatoria X sigue la distribución de Poisson $\mathrm{Po}(m)$. Sabiendo que $\mathrm{p}(X > 0) = \frac{3}{4}$, halle el valor de m en la forma $\ln a$ donde a es un número entero.

(b) La variable aleatoria Y sigue la distribución de Poisson $\mathrm{Po}(2m)$. Halle $\mathrm{p}(Y > 1)$ en la forma $\frac{b-\ln c}{c}$, donde b y c son números enteros.

Solución:

(a) La función de probabilidad de la distribución $\mathrm{Po}(m)$ es:

$$\mathrm{p}(X = k) = \frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

Puesto que $\mathrm{p}(k = 0) = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{m^0 e^{-m}}{0!} = e^{-m} \qquad \Longrightarrow \qquad -m = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

Por tanto $m = \ln 4$.

(b) Calculemos las probabilidades de 0 y 1:

$$\mathrm{p}(Y = 0) = \frac{(2m)^0 e^{-2m}}{0!} = e^{-2m} = (e^m)^{-2} = \left(e^{\ln 4}\right)^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

$$\mathrm{p}(Y = 1) = \frac{2me^{-2m}}{1!} = 2me^{-2m} = \frac{2\ln 4}{16} = \frac{\ln 16}{16}$$

Entonces:

$$\mathrm{p}(Y > 1) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{\ln 16}{16} = \frac{15 - \ln 16}{16}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (9 puntos)

Demuestre mediante inducción matemática que:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

Solución:

- Se cumple para $n = 3$ puesto que $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$.
- Supongamos que la fórmula se cumple para $n = k$, es decir

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k-1}{2} = \binom{k}{3}$$

Debemos demostrar que entonces también se cumple para $n = k + 1$, o sea, debemos demostrar:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{3}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k-1}{2} + \binom{k}{2} \\ &= \binom{k}{3} + \binom{k}{2} \\ &= \binom{k+1}{3}\end{aligned}$$

En el último paso se ha aplicado la propiedad delos números combinatorios que se utiliza en la construcción del triángulo de Pascal.
- Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \geq 3$.

♠♠♠♠

29.2. Sección B

Ejercicio 9. (17 puntos)

Considere la función f definida por $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$ donde a es una constante positiva.

(a) Dibuje aproximadamente las siguientes curvas en sistemas de ejes separados, mostrando todos los cortes con los ejes x e y, los máximos, los mínimos y las asíntotas que haya:

(I) $y = f(x)$ (II) $y = \frac{1}{f(x)}$ (III) $y = \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

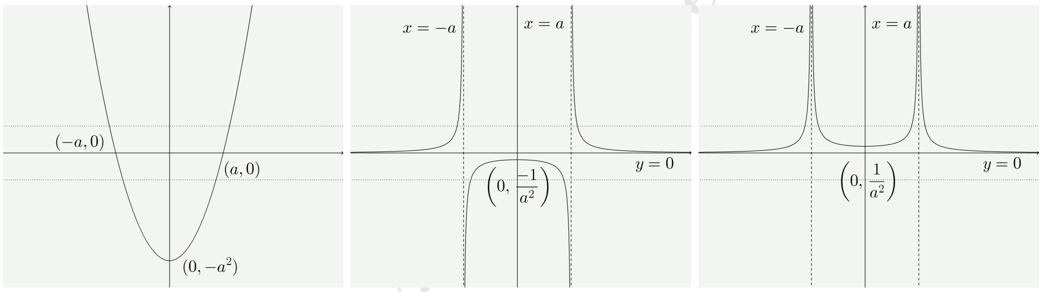
(b) Halle $\displaystyle\int f(x)\cos x \, \mathrm{d}x$

La función g se define mediante $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ para $|x| > a$.

(c) Hallando $g'(x)$, explique por qué g es una función creciente.

Solución:

(a) Las gráficas son las siguientes:



(b) Calcularemos la integral por partes:

$$\int (x^2 - a^2)\cos x \, \mathrm{d}x = \int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x - a^2 \int \cos x \, \mathrm{d}x$$

Haciendo:

$$\begin{aligned} u &= x^2 & \mathrm{d}u &= 2x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos x \, \mathrm{d}x & v &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - a^2)\cos x \, \mathrm{d}x &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x - a^2 \operatorname{sen} x \\ &= (x^2 - a^2)\operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - a^2)\cos x \, \mathrm{d}x &= (x^2 - a^2)\operatorname{sen} x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x\right) \\ &= (x^2 - a^2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C \\ &= (x^2 - a^2 - 2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C \end{aligned}$$

(c) Calculamos la derivada de $g(x) = x\sqrt{x^2 - a^2}$:

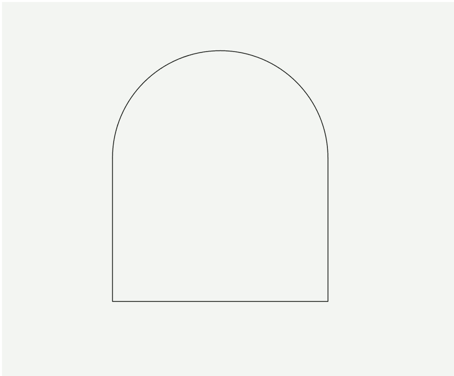
$$g'(x) = \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Para todo x en el dominio de g la derivada es positiva y, en consecuencia, la función es creciente.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (11 puntos)

Una ventana se ha construido con forma de rectángulo con un semicírculo de radio r metros situado en la parte superior, como se muestra en la figura. El perímetro de la ventana es constante e igual a P metros.



(*a*) (I) Halle el área de la ventana en función de P y r.
(II) Halle la anchura de la ventana en función de P cuando el área alcanza un valor máximo y justifique por qué se trata de un máximo.

(*b*) Muestre que en este caso la altura del rectángulo es igual al radio del semicírculo.

Solución:

(*a*) (I) Llamemos h a la altura del rectángulo. La base es igual a $2r$. Entonces:

$$P = \pi r + 2h + 2r \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{P - 2r - \pi r}{2}$$

El área de la ventana es igual a:

$$S = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{2r(P - 2r - \pi r)}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2Pr - 4r^2 - \pi r^2}{2}$$

(II) Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{2P - 8r - 2\pi r}{2} = P - r(4 + \pi)$$

En el máximo la derivada es cero:

$$P - r(4 + \pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{P}{4 + \pi}$$

Se trata de un máximo porque a la izquierda de este valor la derivada es positiva y a la derecha es negativa. La función en ese punto pasa de creciente a decreciente.
La anchura de la ventana es:

$$2r = \frac{2P}{4 + \pi}$$

(*b*) Sustituyendo $P = (4 + \pi)r$, la altura del rectángulo es:

$$h = \frac{P - 2r - \pi r}{2} = \frac{(4 + \pi)r - 2r - \pi r}{2} = \frac{4r - 2r}{2} = r$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (22 puntos)

(*a*) Resuelva $2\,\mathrm{sen}(x + 60°) = \cos(x + 30°)$, $0 \leq x \leq 180°$.

(*b*) Muestre que $\mathrm{sen}\,105° + \cos 105° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(*c*) Sea $z = 1 - \cos 2\theta - i\,\mathrm{sen}\,2\theta$, $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

(I) Halle en función de θ el módulo y el argumento de z. Exprese cada respuesta en su forma más simple.

(II) A partir de lo anterior, halle las raíces cúbicas de z en forma modulo-argumental.

Solución:.

(a) Desarrollando el seno y el coseno de la suma de ángulos:

$$\begin{aligned}
&2\left(\operatorname{sen} x\cos 60^\circ+\cos x\operatorname{sen} 60^\circ\right)=\cos x\cos 30^\circ-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 30^\circ\\
&2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\\
&\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\\
&3\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=0
\end{aligned}$$

Dividiendo por $\cos x$ (que no puede ser cero):

$$\begin{aligned}
&3\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0\\
&\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

y, por consiguiente $x=150^\circ$.

(b) Teniendo en cuenta que $105^\circ=60^\circ+45^\circ$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 105^\circ+\cos 105^\circ&=\operatorname{sen}(60^\circ+45^\circ)+\cos(60^\circ+45^\circ)\\
&=\operatorname{sen} 60\cos 45^\circ+\operatorname{sen} 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\operatorname{sen} 60^\circ\operatorname{sen} 45^\circ\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(c) (I) El módulo de z es igual a:

$$|z|=\sqrt{(1-\cos 2\theta)^2+\operatorname{sen}^2 2\theta}=\sqrt{1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta+\operatorname{sen}^2 2\theta}=\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$1-\cos 2\theta=1-\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=2\operatorname{sen}^2\theta$$

resulta:

$$|z|=\sqrt{4\operatorname{sen}^2\theta}=2\operatorname{sen}\theta$$

El argumento de z cumple que:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\operatorname{sen} 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta}=-\operatorname{cotg}\theta=\operatorname{cotg}(\pi-\theta)$$

Esto quiere decir que φ y $\pi-\theta$ son complementarios:

$$\varphi+\pi-\theta=\frac{\pi}{2}\quad\Longrightarrow\quad\varphi=\theta-\frac{\pi}{2}$$

(II) El módulo de las raíces es $\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}$ y los argumentos:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{\theta}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\theta-\pi}{6}\\
&\alpha_2=\alpha_1+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta-\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta+3\pi}{6}\\
&\alpha_3=\alpha_2+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta+3\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\theta+7\pi}{6}
\end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\left(\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}\right)_{\frac{2\theta-\pi}{6}}\quad;\qquad\left(\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}\right)_{\frac{2\theta+3\pi}{6}}\quad;\qquad\left(\sqrt[3]{2\operatorname{sen}\theta}\right)_{\frac{2\theta+7\pi}{6}}$$

♠♠♠♠

30. 2017. Segundo examen. TZ2.

30.1. Sección A

Ejercicio 1. (4 puntos)

En un club de golf hay 75 jugadores que participan en un torneo de golf. En la siguiente tabla se muestran las puntuaciones que han obtenido en el 18° hoyo:

Puntuación	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	3	15	28	17	9	3

(a) Se elige al azar uno de los jugadores. Halle la probabilidad de que la puntuación de este jugador fuera de 5 o más.

(b) Calcule la media de las puntuaciones.

Solución:

(a) Si llamamos X a la variable aleatoria puntuación obtenida por un jugador elegido al azar:

$$\mathrm{p}\,(X \geq 5) = \frac{17+9+3}{75} = \frac{29}{75}$$

(b) La media es:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{2\cdot 3+3\cdot 15+4\cdot 28+5\cdot 17+6\cdot 9+7\cdot 2}{75} \simeq 4{,}31$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (9 puntos)

Considere la curva definida por la ecuación $4x^2+y^2=7$.

(a) Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

(b) Halle el volumen del sólido que se forma cuando la región delimitada por la curva, el eje x para $x \geq 0$ y el eje y para $y \geq 0$ se rota 2π alrededor del eje x.

Solución:

(a) Calculemos la derivada en el punto:

$$8x+2yy'=0\ ; \qquad y' = \frac{-8x}{2y} = -\frac{4x}{y}$$

La pendiente de la tengente en el punto es:

$$m = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

y la pendiente de la normal:

$$\frac{-1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

La ecuación de la normal es:

$$y-\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(x-1)$$

(b) Para $y=0$, $x=\frac{\sqrt{7}}{2}$. El volumen es:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{7}}{2}} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{7}}{2}} \left(7-4x^2\right)\,\mathrm{d}x = \pi\left[7x-\frac{4x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \pi\left(\frac{7\sqrt{7}}{2}-\frac{7\sqrt{7}}{6}\right) = \frac{7\sqrt{7}\pi}{3}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (7 puntos)

Una máquina elabora paquetes de galletas. Los pesos X, en gramos, de los paquetes de galletas se pueden modelizar por una distribución normal, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Un paquete de galletas se considera que tiene un peso insuficiente si pesa menos de 250 gramos.

(a) Sabiendo que $\mu = 253$ y $\sigma = 1{,}5$, halle la probabilidad de que un paquete de galletas elegido al azar tenga un peso insuficiente.

El fabricante decide que la probabilidad de que un paquete tenga un peso insuficiente debería ser igual a 0,002. Para conseguirlo se aumenta μ mientras que σ no cambia.

(b) Calcule el nuevo valor de μ con una aproximación de dos lugares decimales.

El fabricante está contento con la decisión de que la probabilidad de que un paquete tenga un peso insuficiente sea igual a 0,002, pero está descontento con la manera en que ha logrado. Para ello, se ajusta la máquina para reducir σy hacer que μ sea igual a 253.

(c) Calcule el nuevo valor de σ.

Solución:

(a) Con al calculadora obtenemos:

$$\mathrm{p}\,(X < 250) \simeq 0{,}0228$$

(b) Ahora $X \sim N\,(\mu, 1{,}5)$:

$$\mathrm{p}(X < 250) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{250-\mu}{1{,}5}\right) = 0{,}002$$

$$\frac{250-\mu}{1{,}5} = -2{,}878\dots$$

$$\mu \simeq 254{,}32$$

(c) En este caso $X \sim N\,(253, \sigma)$:

$$\mathrm{p}(X < 250) = \mathrm{p}\left(Z < \frac{250-253}{\sigma}\right) = 0{,}002$$

$$\frac{-3}{\sigma} = -2{,}878\dots$$

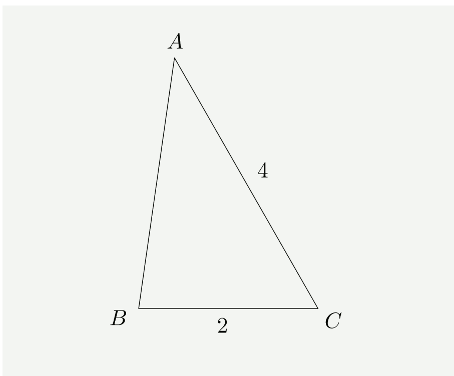
$$\sigma \simeq 1{,}04$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

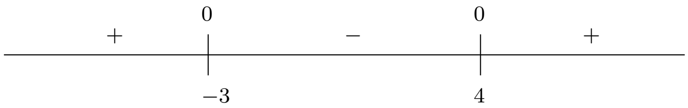
(a) Halle el conjunto de valores de k que satisfacen la inecuación $k^2 - k - 12 < 0$.

(b) El triángulo ABC se muestra en la siguiente figura. Sabiendo que $\cos B < \frac{1}{4}$, halle el rango de posibles valores de AB.



Solución:

(a) las raíces del polinomio son $k = -3$ y $k = 4$. El esquema de signos es el siguiente:



La solución es $k \in (-3, 4)$.

(b) Llamemos $x = AB$. Por el teorema del coseno:

$$\cos B = \frac{4 + x^2 - 16}{2 \cdot 2 \cdot x} = \frac{x^2 - 12}{4x}$$

Por tanto, debe cumplirse:

$$\frac{x^2 - 12}{4x} < \frac{1}{4}$$

El ángulo B puede ser obtuso. Debe cumplirse también:

$$\frac{x^2 - 12}{4x} > -1$$

Resolviendo con la calculadora (o sin ella) se obtiene $x \in (2, 4)$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (9 puntos)

A John le gusta salir a navegar todos los días. Para ayudarle a decidir si es seguro o no salir a navegar, cada día de julio lo califica como ventoso o como tranquilo. Si un día dado del mes de julio es tranquilo, la probabilidad de que el día siguiente sea tranquilo es igual a 0,9. Si un día dado del mes de julio es ventoso, la probabilidad de que el día siguiente sea tranquilo es de 0,3. El pronóstico del tiempo para el 1 de julio predice que la probabilidad de que sea un día tranquilo es de 0,8.

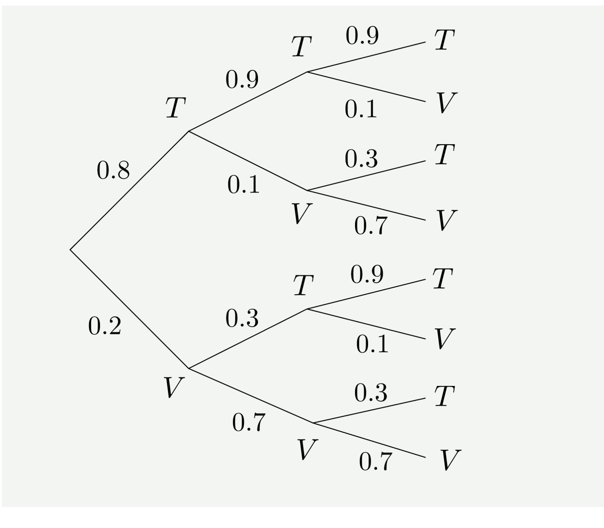
(a) Dibuje un diagrama de árbol que represente esta información para los tres primeros días de julio.

(b) Halle la probabilidad de que el 3 de julio sea un día tranquilo.

(c) Halle la probabilidad de que el 1 de julio fuera un día tranquilo, sabiendo que el 3 de julio es un día ventoso.

Solución:

(a) El diagrama sería el siguiente:



(b) $\mathrm{p}(T_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}768$

(c) La probabilidad de que el día 3 fuera ventoso es:

$$\mathrm{p}(V_3) = 1 - 0{,}768 = 0{,}232$$

La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(T_1 \mid V_3) = \frac{\mathrm{p}(T_1 \cap V_3)}{\mathrm{p}(V_3)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}232} \simeq 0{,}552$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (5 puntos)

Sabiendo que:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)\right) = \frac{1}{2}\,(\log_{10} p + \log_{10} q) \;; \qquad p > 0,\; q > 0$$

halle p en función de q.

Solución:

Aplicando la propiedad del logaritmo del producto y de la raíz:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)\right) = \frac{1}{2}\,(\log_{10} p + \log_{10} q)$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q)\right) = \log_{10}\sqrt{pq}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(p+2q) = \sqrt{pq}$$

Elevando al cuadrado:

$$(p+2q)^2 = 8pq$$

$$p^2 + 4pq + 4q^2 = 8pq$$

$$p^2 - 4pq + 4q^2 = 0$$

$$(p-2q)^2 = 0$$

y de aquí:

$$p - 2q = 0 \quad\Longrightarrow\quad p = 2q$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (4 puntos)

Sabiendo que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \neq 0$, demuestre que $\vec{a} + \vec{c} = s\vec{b}$, donde s es un escalar.

Solución:

Por la propiedad anticonmutativa del producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \quad\Longrightarrow\quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} \quad\Longrightarrow\quad \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} = \vec{0}$$

y por la propiedad distributiva:

$$(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

Si el producto vectorial es cero, los dos vectores $\vec{a} + \vec{c}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección. En consecuencia son dependientes y existe un número s tal que $\vec{a} + \vec{c} = s\vec{b}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (6 puntos)

En una convocatoria de exámenes de prueba, un alumno de un colegio tiene que hacer 18 exámenes incluido el de Física, el de Química y el de Biología. No le está permitido hacer consecutivamente dos de estos tres exámenes.No existe ninguna otra limitación relativa al orden en el que puede hacer el resto de los exámenes.

Halle el número de órdenes distintos en los que se pueden hacer estos 18 exámenes.

Solución:

Método 1

Los 18 exámenes se pueden ordenar de 18! maneras diferentes. Debemos contar en cuántas de estas aparecen consecutivamente dos de las tres asignaturas señaladas.

Las dos asignaturas consecutivas se pueden ordenar de 6 maneras diferentes y hay 17 días en que se podría hacer la primera. Las 16 asignaturas restantes se podrían ordenar de 16! maneras diferentes. Podríamos pensar entonces, que el número de maneras de poner las dos asignaturas de forma consecutiva es:

$$17 \cdot 6 \cdot 16!$$

pero en ese caso, las permutaciones en las que aparecen las tres asignaturas de forma consecutiva las contaríamos dos veces. Por ejemplo, si se realizan seguidos los exámenes FQB lo contaríamos como una permutación en la que están seguidos F y Q y también Q y B. Debemos quitar por tanto aquellas permutaciones en que aparecen en forma consecutiva las tres asignaturas. El número de estas permutaciones es:

$$16 \cdot 6 \cdot 15!$$

En total el número de permutaciones válidas es:

$$18! - 17 \cdot 6 \cdot 16! + 16 \cdot 6 \cdot 15! \simeq 4{,}39 \cdot 10^{15}$$

Método 2

Otra manera de resolver este problema sería la siguiente. Representemos mediante un símbolo cualquiera los exámenes de las 15 asignaturas que no son Física, Química o Biología:

$$\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$$

Algunas posiciones de los exámenes que no pueden ir seguidos serían por ejemplo:

$$\bigcirc\ F \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ Q \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ B \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$$
$$Q \bigcirc\ F \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ B \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$$
$$\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ Q \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ F \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ B$$

En total, tenemos 16 posiciones de las que debemos escoger 3. Además tenemos 3! modos de disponer estos 3 exámenes y 15! maneras de disponer los restantes. El número de disposiciones posibles es:

$$C_{16,3} \cdot 3! \cdot 15! \simeq 4{,}39 \cdot 10^{15}$$

♠♠♠♠

30.2. Sección B

Ejercicio 9. (22 puntos)

Los puntos A, B y C tienen los siguientes vectores de posición con respecto al origen O:

$$\vec{OA} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$$
$$\vec{OB} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$
$$\vec{OC} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

(a) Halle la ecuación vectorial de la recta BC.

(b) Determine si las rectas OA y BC se cortan o no.

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1 que pasa por C y es perpendicular a $\vec{OA}$.

(d) Muestre que la recta BC pertenece al plano Π_1.

El plano Π_2 contiene los puntos O, A y B y el plano Π_2 contiene los puntos O, A y C.

(e) Verifique que $2\vec{\jmath}+\vec{k}$ es perpendicular al plano Π_2.

(f) Halle un vector que sea perpendicular al plano Π_3.

(g) Halle el ángulo agudo entre los planos Π_2 y Π_3.

Solución:

(a) Tomamos como vector director $\vec{BC}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculamos el producto mixto formado por los dos vectores directores $\vec{OA}$ y $\vec{BC}$ y el vector que tiene como origen y extremo un punto de cada recta $\vec{OC}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{las rectas se cruzan}$$

Las dos rectas no se cortan.

(c) Tomamos como vector normal el vector $\vec{OA}$:

$$2(x-1)+(y-3)-2(z-3)=0\ ; \qquad 2x+y-2z+1=0$$

(d) Puesto que el punto C está en Π_1 basta comprobar que también B está en Π_1:

$$2\cdot 2-1-2\cdot 2+1=0 \quad\Longrightarrow\quad B\in\Pi_1$$

Puesto que tienen un punto en común, no son paralelos. Podríamos comprobarlo también viendo que el vector director de la recta y el normal al plano son perpendiculares. En efecto, multiplicando escalarmente estos vectores:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=0$$

(e) Calculamos la ecuación del plano Π_2:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z & -2 & 2 \end{vmatrix}=0\ ; \qquad -8y-4z=0$$

Simplificando la ecuación resulta $2y+z=0$ y vemos que $2\vec{\jmath}+\vec{k}$ es un vector perpendicular al plano.

(f) Calculemos la ecuación de Π_3:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 3 \\ z & -2 & 3 \end{vmatrix}=0\ ; \qquad 9x-8y+5z=0$$

Un vector perpendicular a este plano es:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(g) El coseno del ángulo es:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}|}{|\vec{n_2}||\vec{n_3}|}=\frac{|-16+5|}{\sqrt{5}\sqrt{170}}=\frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{170}}$$

y de aquí $\alpha\simeq 67{,}8^\circ$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (15 puntos)

(*a*) Una variable aleatoria continua X tiene la función de densidad de probabilidad f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} + b & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

Se sabe que $\mathrm{p}(X \geq 2) = 0{,}75$.

(*a*) Muestre que $a = 32$ y $b = \frac{1}{12}$.
(*b*) Halle $\mathrm{E}(X)$.
(*c*) Halle $\mathrm{Var}(X)$.
(*d*) Halle la mediana de X.

Se realizan 8 observaciones independientes de X y la variable aleatoria Y es el número de observaciones tales que $X \geq 2$.

(*e*) Halle $\mathrm{E}(Y)$.
(*f*) Halle $\mathrm{p}(Y \geq 3)$.

Solución:

(*a*) Basta comprobar que:

$$\int_0^4 \left(\frac{x^2}{32} + \frac{1}{12}\right)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{y} \qquad \int_2^4 \left(\frac{x^2}{32} + \frac{1}{12}\right)\,\mathrm{d}x = 0{,}75$$

Se pueden hacer las integrales calculando la primitiva o verificar estos resultados con la calculadora.

(*b*) También mediante la calculadora obtenemos:

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^4 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\frac{x^3}{32} + \frac{x}{12}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \simeq 2{,}67$$

(*c*) Para calcular la varianza primero calculamos la integral

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^4 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{32} + \frac{x^2}{12}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{368}{45} \simeq 8{,}18$$

La varianza es:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \simeq 1{,}07$$

(*d*) La mediana m cumple que:

$$\int_0^m \left(\frac{x^2}{32} + \frac{1}{12}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

es decir:

$$\frac{m^3}{96} + \frac{m}{12} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m^3 + 8m - 48 = 0$$

Con la calculadora obtenemos $m \simeq 2{,}91$

(*e*) Ahora $Y \sim \mathrm{B}(8; 0{,}75)$:

$$\mathrm{E}(Y) = 8 \cdot 0{,}75 = 6$$

(*f*) Mediante la calculadora:

$$\mathrm{p}(Y \geq 3) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 2) \simeq 0{,}996$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (13 puntos)

Sea $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, donde a y b son números enteros positivos.

(*a*) Sabiendo que $x^2 - 1$ es un factor de $f(x)$, halle el valor de a y el valor de b.

(*b*) Factorice $f(x)$, expresándolo como producto de factores lineales.

(*c*) Dibuje aproximadamente el gráfico de $f(x)$, y rotule todos los puntos máximos, los puntos mínimos y los puntos de corte con los ejes x e y.

(*d*) Utilizando este gráfico, indique el rango de valores de c para los cuales $f(x) = c$ tiene exactamente dos raíces reales distintas.

Solución:

(*a*) Si $x^2 - 1$ es un factor, $x = -1$ y $x = 1$ son raíces del polinomio. Por tanto:

$$3 + a + b - 7 - 4 = 0$$
$$3 - a + b + 7 - 4 = 0$$

resolviendo el sistema resulta $a = 7$ y $b = 1$.

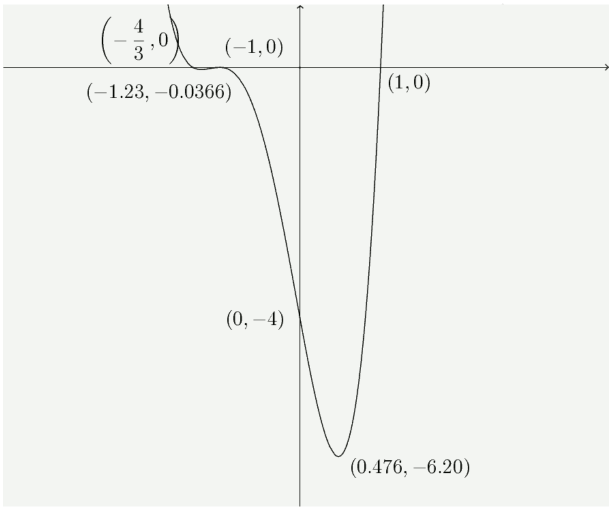
(*b*) Dividiendo por $x^2 - 1$ obtenemos:

$$f(x) = (x^2 - 1)\left(3x^2 + 7x + 4\right)$$

El polinomio $3x^2 + 7x + 4$ tiene como raíces $x = -1$ y $x = -\frac{4}{3}$. La factorización resulta:

$$f(x) = (x^2 - 1)\left(3x^2 + 7x + 4\right) = (x - 1)(x + 1)3(x + 1)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (x + 1)^2(x - 1)(3x + 4)$$

(*c*) Podemos hacer la representación y obtener los puntos que nos piden con ayuda de la calculadora:



(*d*) La recta horizontal $y = c$ debe cortar a la curva en dos puntos. Esto sucederá para:

$$c \in (-6{,}20; -0{,}0366) \cup (0, \infty)$$

♠♠♠♠

31. Noviembre 2017. Primer examen.

31.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Resuelva la ecuación $\log_2(x+3)+\log_2(x-3)=4$.

Solución:

$$\begin{aligned}
&\log_2(x+3)+\log_2(x-3)=4\\
&\log_2(x+3)(x-3)=4\\
&x^2-9=2^4\\
&x^2=25
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene $x=-5$ y $x=5$. Solamente esta última solución es válida pues para $x=-5$, $\log_2(x+3)$ y $\log_2(x-3)$ son logaritmos de números negativos.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

Sean los puntos $A(0,3,-6)$ y $B(6,-5,11)$. El plano Π está definido por la ecuación $4x-3y+2z=20$.

(a) Halle una ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos A y B.

(b) Halle las coordenadas del punto de intersección de la recta L y el plano Π.

Solución:

(a) Calculamos el vector $\vec{AB}$ que será el vector director de la recta:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}6\\-8\\17\end{pmatrix}$$

La ecuación vectorial es:

$$\vec{OX}=\begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\-8\\17\end{pmatrix}$$

(b) El punto de intersección es la solución del sistema:

$$\begin{cases}4x-3y+2z=20\\x=6\lambda\\y=3-8\lambda\\z=-6+17\lambda\end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $\left(3,-1,\frac{5}{2}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

Considere el polinomio $q(x)=3x^3-11x^2+kx+8$.

(a) Sabiendo que $(x-4)$ es uno de los factores de $q(x)$, halle el valor de k.

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, factorice $q(x)$ como producto de factores lineales.

Solución:

(a) Si $x-4$ es un factor del polinomio, $x=4$ es una raíz y por tanto:

$$3\cdot 4^3-11\cdot 4^2+4k+8=0\ ;\qquad 48-44+k+2=0\quad\Longrightarrow\quad k=-6$$

(b) Dividiendo el polinomio entre $x-4$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -11 & -6 & 8\\ 4 & & 12 & 4 & -8\\ \hline & 3 & 1 & -2 & 0\end{array}$$

Entonces:

$$3x^3-11x^2-6x+8=(x-4)(3x^2+x-2)=(x-4)(x+1)(3x-2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (4 puntos)

Halle el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^7$.

Solución:

El término de x^8 tiene la forma:

$$\binom{7}{k}(x^2)^k\left(\frac{-2}{x}\right)^{7-k}$$

Debe cumplirse que

$$2k-7+k=8\quad\Longrightarrow\quad k=5$$

Sustituyendo

$$\binom{7}{5}x^{10}\left(\frac{-2}{x}\right)^2=84x^8$$

El coeficiente de x^8 es 84.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que en el instante t segundos $(t\geq 0)$, su velocidad v, en $\mathrm{m\,s^{-1}}1$, viene dada por $v=10te^{-2t}$. Halle la distancia exacta que recorre la partícula en el primer medio segundo.

Solución:

Calculamos la distancia integrado la velocidad:

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}10te^{-2t}\,\mathrm{d}t=10\int_0^{\frac{1}{2}}te^{-2t}\,\mathrm{d}t$$

Integramos por partes:

$$\begin{array}{ll} u=t & \mathrm{d}u=\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v=e^{-2t}\,\mathrm{d}t & v=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\end{array}$$

y resulta:

$$s=10\Big[-\frac{1}{2}te^{-2t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+10\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-2t}\,\mathrm{d}t=10\Big[-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=10\left(-\frac{1}{2e}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2}-\frac{5}{e}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (9 puntos)

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de

$$y = \frac{1-3x}{x-2}$$

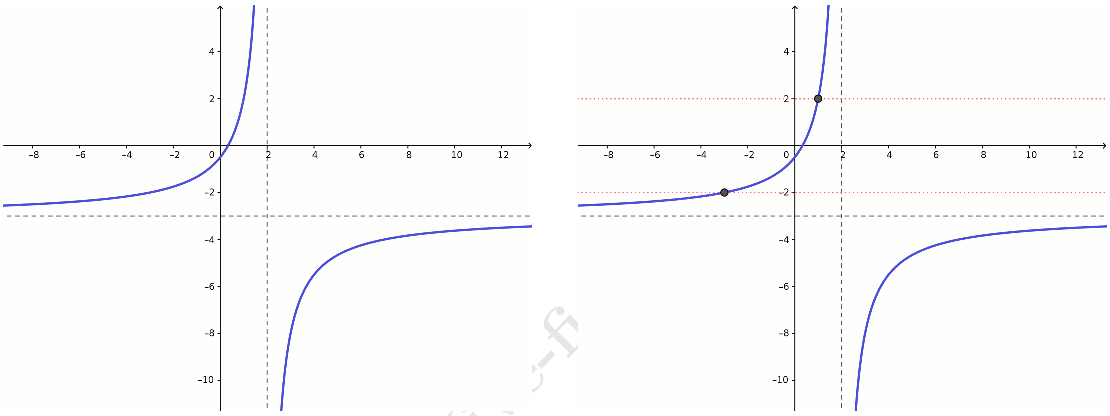
mostrando claramente todas las asíntotas e indicando las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la inecuación

$$\left|\frac{1-3x}{x-2}\right| < 2$$

Solución:

(a) Las asíntotas son las rectas $x = 2$ e $y = -3$. Los puntos de corte con los ejes son $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.



(b) Si el valor absoluto es menor que 2 el valor de la función está comprendido entre -2 y 2. Esto sucede para $x \in (-3, 1)$.

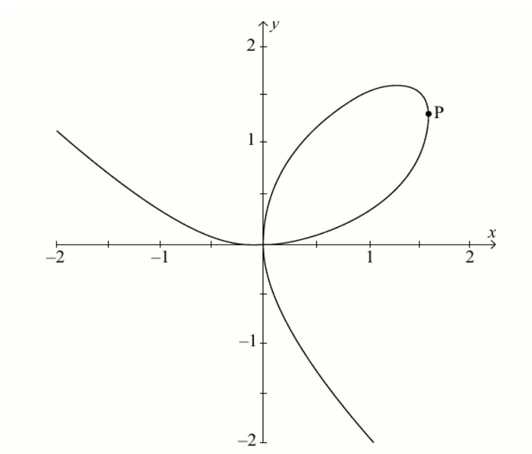
♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

La siguiente figura muestra la hoja de Descartes, una curva que está definida por la ecuación

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

.



Determine las coordenadas exactas del punto P de la curva en el que la recta tangente es paralela al eje y.

Solución:

Derivamos en forma implícita:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(y + xy') = 0 \;; \qquad x^2 - y = (x - y^2)y' \;; \qquad y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

La tangente es paralela al eje y cuando la derivada es infinita, es decir, cuando $x = y^2$. Sustituyendo en la ecuación de la curva:

$$y^6 + y^3 - 3y^3 = 0 \;; \qquad y^3(y^3 - 2) = 0 \;; \qquad y = 0,\; y = \sqrt[3]{2}$$

Puesto que la ordenada de P es distinta de cero, sus coordenadas son $P(\sqrt[3]{4},\, \sqrt[3]{2})$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

Determine las raíces de la ecuación $(z + 2i)^3 = 216i$, $z \in \mathbb{C}$, y dé las respuestas en la forma $z = a\sqrt{3} + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Solución:

Despejando z:

$$z = \sqrt[3]{216i} - 2i$$

Las raíces cúbicas de $216i$ son 6_{30°, 6_{150° y 6_{270°. Entonces las raíces son:

$$z_1 = 6\,(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) - 2i = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 2i = 3\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 6\,(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) - 2i = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 2i = -3\sqrt{3} + i$$

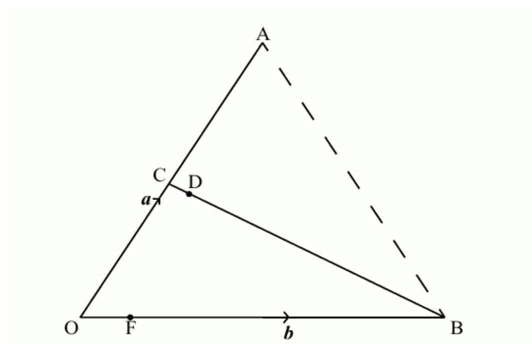
$$z_3 = 6\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) - 2i = 6\,(0 - i) - 2i = -8i$$

♠♠♠♠

Sección B

Ejercicio 9. (18 puntos)

En la siguiente figura $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$. C es el punto medio de OA y $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{6}\,\overrightarrow{FB}$.



(a) Halle en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

(I) $\overrightarrow{OF}$

(II) $\overrightarrow{AF}$

Se sabe también que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AF}$ y que $\overrightarrow{CD} = \mu\overrightarrow{CB}$, donde λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) Halle una expresión para

(I) $\overrightarrow{OD}$ en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y λ,

(II) $\overrightarrow{OD}$ en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y μ.

(c) Muestre que $\mu = \frac{1}{13}$, y halle el valor de λ.

(d) Deduzca una expresión para $\overrightarrow{CD}$ en funciones únicamente de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

(e) Sabiendo que área $\Delta OAB = k$ área ΔCAD, halle el valor de k.

Solución:

(a) (I) Puesto que $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{FB}$ y $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{7}\boldsymbol{b}$$

(II) Se verifica que

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{7}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \boldsymbol{a} + \lambda\overrightarrow{AF}\\ &= \boldsymbol{a} + \lambda\left(\frac{1}{7}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right)\\ &= (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \frac{\lambda}{7}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \mu\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \mu\left(\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(c) De las expresiones anteriores se sigue que:

$$\begin{cases}1-\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}\\ \frac{\lambda}{7} = \mu\end{cases} \implies \begin{cases}2\lambda - \mu = 1\\ \lambda = 7\mu\end{cases}$$

y, de aquí, $\lambda = \frac{7}{13}$, $\mu = \frac{1}{13}$.

(d) Sustituyendo los valores de λ y μ:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\\ &= (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \frac{\lambda}{7}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\\ &= \frac{6}{13}\boldsymbol{a} + \frac{1}{13}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\\ &= -\frac{1}{26}\boldsymbol{a} + \frac{1}{13}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(e) Las áreas están dadas por:

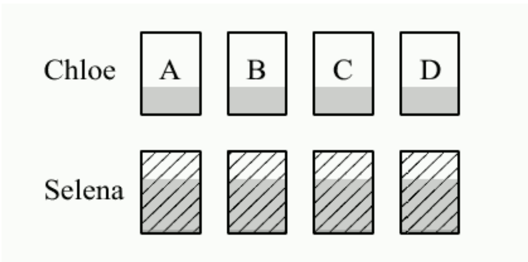
$$\begin{aligned}
\text{área}\,\Delta OAB &= \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right| \\
\text{área}\,\Delta CAD &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CD}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\frac{7}{13}\left(\frac{1}{7}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)\right| && \text{teniendo en cuenta que } \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\vec{0} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13}\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|
\end{aligned}$$

de modo que $k = 26$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (11 puntos)

Chloe y Selena juegan a un juego en el que cada una tiene cuatro cartas donde aparecen las letras mayúsculas A, B, C y D. Chloe coloca sus cartas boca arriba en la mesa en el orden A, B, C, D, tal y como muestra la siguiente figura.



Selena baraja sus cartas y las coloca boca abajo en la mesa. A continuación las va dando la vuelta, de una en una, para ver si su carta coincide con la carta de Chloe que está situada justo encima de la suya. Chloe gana si no hay ninguna coincidencia; en caso contrario es Selena quien gana.

(a) Muestre que la probabilidad de que Chloe gane el juego es igual a $\frac{3}{8}$.

Chloe y Selena repiten el juego una y otra vez; en total juegan 50 veces. Sea X la variable aleatoria discreta que representa el número de veces que Chloe gana.

(b) Determine
- (I) La media de X,
- (II) La varianza de X.

Solución:

(a) Las permutaciones de cuatro letras son:
ABCD, **ABDC**, **ACBD**, **ACDB**, **ADBC**, **ADCB**, **BACD**, BADC, **BCAD**,BCDA, BDAC, **BDCA**
CABD, CADB, **CBAD**, **CBDA**, CDAB,CDBA, DABC, **DACB**, **DBAC**, **DBCA**, DCAB, DCBA
Chloe gana si no hay coincidencias. La probabilidad es:

$$p = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(b) La variable aleatoria X sigue una distribución binomial $\mathrm{B}\left(50, \frac{3}{8}\right)$:
- (I) La media es:

$$\mathrm{E}(X) = 50\cdot\frac{3}{8} = \frac{75}{4}$$

(II) La varianza es

$$\operatorname{Var}(X) = 50 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{375}{32}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (21 puntos)

Considere la función $f_n(x) = (\cos 2x)(\cos 4x)\ldots(\cos 2^n x),\ n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Determine si f_n es una función impar o par, y justifique su respuesta.

(b) Utilizando la inducción matemática, demuestre que

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}x}{2^n \operatorname{sen} 2x}, \quad x \neq \frac{m\pi}{2} \quad \text{donde } m \in \mathbb{Z}$$

(c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión para la derivada de $f_n(x)$ con respecto a x.

(d) Muestre que, para $n > 1$, la ecuación de la tangente a la curva $y = f_n(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$ es $4x - 2y - \pi = 0$.

Solución:

(a) Es una función par puesto que es un producto de funciones pares (la función coseno es par).

(b) – La fórmula se cumple para $n = 1$ puesto que

$$\frac{\operatorname{sen} 4x}{2 \operatorname{sen} 2x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{2 \operatorname{sen} 2x} = \cos 2x = f_1(x)$$

– Supongamos que se cumple la fórmula para $n = k$:

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}x}{2^k \operatorname{sen} 2x}$$

y demostremos que, en ese caso, se cumple también para $n = k + 1$ es decir que

$$f_{k+1}(x) = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+2}x}{2^{k+1} \operatorname{sen} 2x}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f_k(x)(\cos 2^{k+1}x) \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}x}{2^k \operatorname{sen} 2x}(\cos 2^{k+1}x) \\ &= \frac{1}{2^k \operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} 2^{k+1}x \cos 2^{k+1}x \\ &= \frac{1}{2^{k+1} \operatorname{sen} 2x} \cdot \operatorname{sen} 2^{k+2}x \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2^{k+2}x}{2^{k+1} \operatorname{sen} 2x} \end{aligned}$$

– Por el principio de inducción la fórmula se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$

(c) Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1} \cos 2^{n+1}x \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x \operatorname{sen} 2^{n+1}x}{\operatorname{sen}^2 2x}$$

(d) Para $x = \frac{\pi}{4}$ el valor de la función es:

$$f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{2^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 2^{n-1}\pi}{2^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = 0$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1} \cos 2^{n+1}\frac{\pi}{4} \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} - 2 \cos 2\frac{\pi}{4} \operatorname{sen} 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}^2 2\frac{\pi}{4}} = 2 \cos 2^{n-1}\pi$$

y, para $n > 1$, $m = 2$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 0 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ ; \qquad y = 2x - \frac{\pi}{2} \ ; \qquad 4x - 2y - \pi = 0$$

♠♠♠♠

32. Noviembre 2017. Segundo examen.

32.1. Sección A

Ejercicio 1. (4 puntos)

En un supermercado del barrio venden cajas de fruta variada. La caja A contiene 2 plátanos, 3 kiwis y 4 melones, y cuesta \$6,58.
La caja B contiene 5 plátanos, 2 kiwis y 8 melones, y cuesta \$12,32.
La caja C contiene 5 plátanos y 4 kiwis, y cuesta \$3,00.

Halle el costo de cada tipo de fruta.

Solución:

Llamemos x el precio de los plátanos, y el de los kiwis y z el de los melones. Podemos plantear entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=6{,}58 \\ 5x+2y+8z=12{,}32 \\ 5x+4y=3{,}00 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x=0{,}36$, $y=0{,}30$ y $z=1{,}24$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

Sean los sucesos A y B tales que $\mathrm{p}(A\cup B)=0{,}95$, $\mathrm{p}(A\cap B)=0{,}6$ y $\mathrm{p}(A|B)=0{,}75$.

(a) Halle $\mathrm{p}(B)$.
(b) Halle $\mathrm{p}(A)$.
(c) A partir de lo anterior, muestre que los sucesos A' y B son independientes.

Solución:

(a) Puesto que $\mathrm{p}(A|B)=0{,}75$:

$$\frac{\mathrm{p}(A\cap B)}{\mathrm{p}(B)}=0{,}75\ ; \qquad \mathrm{p}(B)=\frac{\mathrm{p}(A\cap B)}{0{,}75}=\frac{0{,}60}{0,75}=\frac{4}{5}=0{,}80$$

(b) Por la regla de la suma:

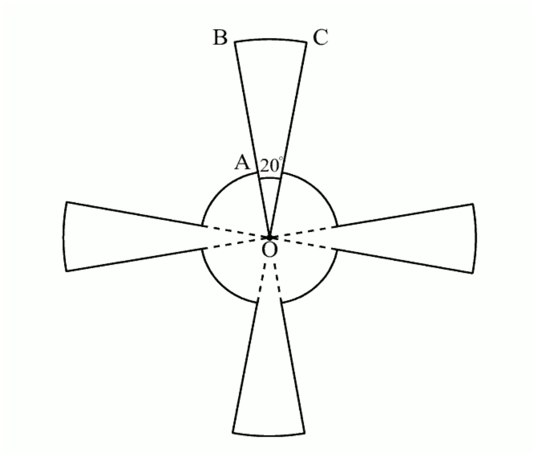
$$\mathrm{p}(A\cup B)=\mathrm{p}(A)+\mathrm{p}(B)-\mathrm{p}(A\cap B)\ ; \qquad \mathrm{p}(A)=0{,}95-0{,}80+0{,}60=0{,}75$$

(c) Puesto que $\mathrm{p}(A)=\mathrm{p}(A|B)$ los sucesos A y B son independientes. Entonces también lo son A' y B.

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (4 puntos)

La figura muestra un colgante metálico compuesto por cuatro sectores circulares iguales de un círculo grande de radio $OB=9$ cm y cuatro sectores circulares iguales de un círculo más pequeño de radio $OA=3$ cm. El ángulo $BOC=20°$.



Hallar el área del colgante.

Solución:

La superficie es equivalente a la de un sector de radio OB y ángulo $80°$ y la de otro sector de radio OA y ángulo $360° - 80° = 280°$. Es decir

$$S = \frac{1}{2}9^2\frac{80\pi}{180} + \frac{1}{2}3^2\frac{280\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{81 \cdot 80 + 9 \cdot 280}{180} = 25\pi$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Se sabe que una de cada cinco tazas de café contiene más de 120 mg de cafeína. También se sabe que tres de cada cinco tazas de café contienen más de 110 mg de cafeína.

Suponiendo que el contenido de cafeína que hay en el café se modeliza mediante una distribución normal, halle la media y la desviación típica del contenido de cafeína que hay en el café.

Solución:

Sea X la cantidad de cafeina en una taza de café. Sabemos que $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ y, además

$$\mathrm{p}\,(X > 120) = \frac{1}{5}$$
$$\mathrm{p}\,(X > 110) = \frac{3}{5}$$

Tipificando la variable:

$$\mathrm{p}\left(Z > \frac{120-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{5}\,; \qquad \mathrm{p}\left(Z < \frac{120-\mu}{\sigma}\right) = \frac{4}{5}\,; \qquad \frac{120-\mu}{\sigma} = 0{,}84162\ldots$$
$$\mathrm{p}\left(Z > \frac{110-\mu}{\sigma}\right) = \frac{3}{5}\,; \qquad \mathrm{p}\left(Z < \frac{110-\mu}{\sigma}\right) = \frac{2}{5}\,; \qquad \frac{110-\mu}{\sigma} = -0{,}253347\ldots$$

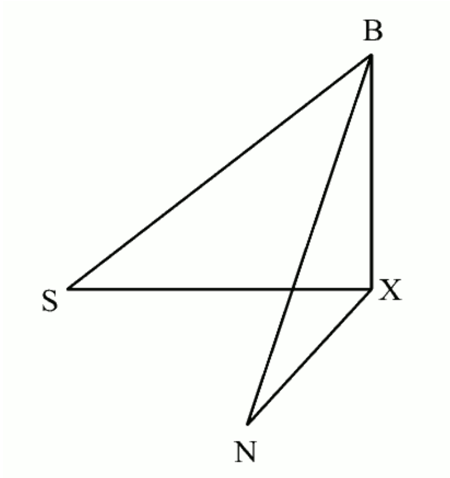
y obtenemos $\mu = 112$, $\sigma = 9{,}13$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

Barry está en la parte superior de un acantilado, a 80 m sobre el nivel del mar, y observa dos yates que hay en el mar.
El "Seaview" (S) lo observa con un ángulo de depresión de 25°.
El "Nauti Buoy" (N) lo observa con un ángulo de depresión de 35°.

El siguiente diagrama tridimensional representa a Barry y a los dos yates, situados en S y en N.
X está situado en la base del acantilado y el ángulo $SXN = 70°$.



Halle la distancia que separa a los dos yates, con una aproximación de 3 cifras significativas.

Solución:

$$SX = \frac{80}{\operatorname{tg} 25^\circ}$$
$$NX = \frac{80}{\operatorname{tg} 35^\circ}$$
$$SN^2 = SX^2 + NX^2 - 2 \cdot SX \cdot NX \cdot \cos 70^\circ$$

Haciendo las operaciones resulta $SN \simeq 171$ m

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

El número de plátanos que come Lucca a lo largo de un día cualquiera sigue una distribución de Poisson de media 0,2.

(a) Halle la probabilidad de que Lucca, a lo largo de un día concreto, haya comido al menos un plátano.
(b) Halle el número esperado de semanas al año en las que Lucca no come ningún plátano.

Solución:

(a) Sea X el número de plaanos que come Lucca en un día, $X \sim \mathrm{Po}(0{,}2)$. Calculamos:

$$\mathrm{p}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{p}(X = 0) = 0{,}181$$

(b) La media en una semana es $0{,}2 \cdot 7 = 1{,}4$. Llamemos Y el número de plátanos que come Lucca en una semana. Entonces $Y \sim \mathrm{Po}(1{,}4)$. La probabilidad de que no coma ningún plátano en una semana es

$$p = \mathrm{p}(Y = 0) = 0{,}246596\ldots$$

Llamemos Z al número de semanas en un año en que Lucca no come ningún plátano. Entonces $Z \sim \mathrm{B}(52, p)$. El valor esperado de Z es

$$52 \cdot p \simeq 12{,}8$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

En la ecuación cuadrática $7x^2 - 8x + p = 0$, ($p \in \mathbb{Q}$), una de las raíces es tres veces mayor que la otra raíz. Halle el valor de p.

Solución:

Sea las raíces r y $3r$. La suma de las dos raíces es $4r$. Por las relaciones de Cardano:

$$4r = \frac{8}{7}$$

de forma que las raíces son $\frac{2}{7}$ y $\frac{6}{7}$. Su producto es $\frac{12}{49}$ y, de nuevo, por las relaciones de Cardano:

$$\frac{p}{7} = \frac{12}{49} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{12}{7}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

Utilizando la sustitución $x^2 = 2\sec\theta$, muestre que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-4}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arcos}\left(\frac{2}{x^2}\right) + c$$

Solución:

Derivamos:

$$x^2 = 2\sec\theta \;; \qquad 2x\,\mathrm{d}x = 2\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \;; \qquad \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen}\theta}{x\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Además:

$$\sqrt{x^4-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{\sec^2\theta - 1} = 2\operatorname{tg}\theta$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-4}} &= \int \frac{1}{x\cdot 2\operatorname{tg}\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{x\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\sec\theta\cos^2\theta\operatorname{tg}\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\theta + C \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{arsec}\,\frac{x^2}{2} + C & \text{puesto que } \mathrm{arsec}\,x = \mathrm{arcos}\,\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{arcos}\,\frac{2}{x^2} + C
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 9. (6 puntos)

Doce alumnos tienen que presentarse a un examen sobre combinatoria avanzada. El aula donde hacen el examen tiene tres filas de cuatro pupitres cada una, y el profesor encargado de supervisar el examen (el supervisor) se sitúa en la parte delantera del aula, como se muestra en el siguiente diagrama.

SUPERVISOR

Pupitre 1	Pupitre 2	Pupitre 3	Pupitre 4
Pupitre 5	Pupitre 6	Pupitre 7	Pupitre 8
Pupitre 9	Pupitre 10	Pupitre 11	Pupitre 12

(a) Halle el número de maneras en que pueden sentarse los doce alumnos en esta aula.

Se sospecha que dos de los alumnos, Helen y Nicky, hicieron trampas en un examen previo.

(b) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos, sabiendo que Helen y Nicky tienen que sentarse uno directamente detrás del otro (sin pupitres de por medio). Por ejemplo, Pupitre 5 y Pupitre 9.

(c) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos si Helen y Nicky no deben sentarse uno al lado del otro en la misma fila.

Solución:

(a) El número de posibles posiciones de los alumnos es $12! = 479001600$

(b) Helen y Nicky pueden elegir entre 8 parejas de pupitres. Entonces, el número de posibles disposiciones es

$$8 \cdot 2 \cdot 10! = 58060800$$

(c) Ahora Helen y Nicky pueden elegir sus pupitres de $C_{12,2} - 9 = 57$ maneras, todas las combinaciones de 12 tomadas de dos en dos menos las 9 parejas prohibidas. Las disposiciones posibles son:

$$57 \cdot 2 \cdot 10! = 413683200$$

♠♠♠♠

32.2. Sección B

Ejercicio 10. (17 puntos)

Considere la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}\,, \qquad 0 < x < \pi$$

(a) (I) Muestre que la coordenada x del punto mínimo de la curva $y = f(x)$ satisface la ecuación $\tan x = 2x$.

(II) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ es una función decreciente.

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, mostrando claramente el punto mínimo y todo comportamiento asintótico.

(c) Halle las coordenadas del punto del gráfico de f en el cual la normal al gráfico es paralela a la recta $y = -x$.

Considere la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

(d) Ahora se rota esta región 2π radianes alrededor del eje x. Halle el volumen de revolución.

Solución:

(a) (I) En el mínimo se anula la derivada de forma que:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} x - \sqrt{x}\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

Entonces:

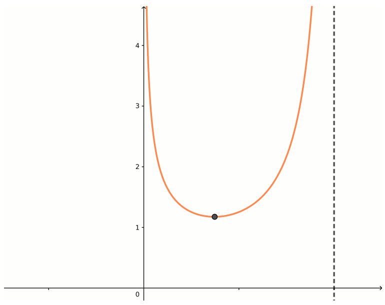
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} x - \sqrt{x}\cos x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen} x - 2x\cos x = 0$$

Si se cumple esta ecuación, $\cos x$ no puede ser igual a cero. Dividiendo la igualdad por $\cos x$ resulta:

$$\operatorname{tg} x - 2x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg} x = 2x$$

(II) La derivada se anula en $x \simeq 1{,}17$. La derivada es negativa y, en consecuencia, la función es decreciente en el intervalo $(0, 1{,}17)$.

(b)



Hay dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = \pi$. El mínimo se encuentra en un punto cuyas coordenadas aproximadas son $(1{,}17, 1{,}17)$.

(c) Si la normal tiene pendiente igual a -1 la tangente debe tener pendiente 1 y, por consiguiente, la derivada debe ser igual a 1:

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} x - \sqrt{x}\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1\ ; \qquad \operatorname{sen} x - 2x\cos x = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}^2 x$$

Resolviendo la ecuación con la calculadora obtenemos el punto 1,96. Calculando $f(1{,}96)$ obtenemos el punto $(1{,}96, 1{,}51)$.

(d) El volumen se obtiene mediante la integral:

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x \simeq 2{,}68$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (18 puntos)

Considere la función $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} x - 9$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

(a) (I) Determine una expresión para $f'(x)$ en función de x.

(II) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f'(x)$ para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

(III) Halle la coordenada x del punto (o de los puntos) de inflexión del gráfico de $y = f(x)$, rotulándolo(s) claramente en el gráfico de $y = f'(x)$.

(b) Sea $u = \operatorname{tg} x$.

(I) Exprese $\operatorname{sen} x$ en función de u.

(II) Exprese $\operatorname{sen} 2x$ en función de u.

(III) A partir de lo anterior, muestre que $f(x) = 0$ se puede expresar como $u^3 - 7u^2 + 15u - 9 = 0$.

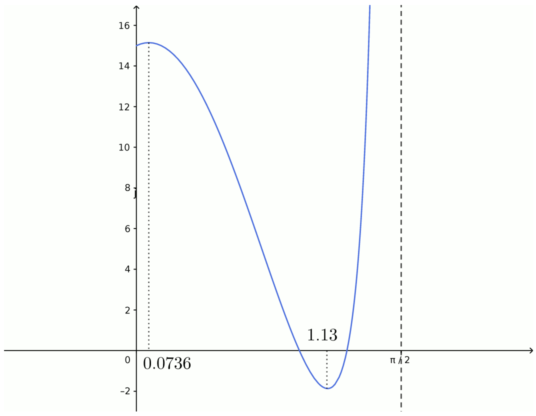
(c) Resuelva la ecuación $f(x) = 0$, y dé las respuestas en la forma $\operatorname{artg} k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Solución:

(a) (I) Calculemos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 2\operatorname{sen} x\cos x + 7 \cdot 2\cos 2x + 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ &= 4\operatorname{sen} x\cos x + 14\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x + 1 \end{aligned}$$

(II)



(III) En los puntos de inflexión la segunda derivada es cero y la gráfica de la primera derivada tiene tangente horizontal. Los puntos de inflexión están en $x = 0{,}0736$ y $x = 1{,}13$.

(b) (I) Teniendo en cuenta que $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$:

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 1 + \frac{1}{u^2} = \frac{u^2+1}{u^2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+1}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

(II) Puesto que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$:

$$\sec^2 x = 1 + u^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{2u}{u^2+1}$$

(III) A partir de lo anterior:

$$2\operatorname{sen}^2 x + 7 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} x - 9 = 0$$

$$\frac{2u^2}{u^2+1} + \frac{14u}{u^2+1} + u - 9 = 0$$

$$2u^2 + 14u + (u-9)(u^2+1) = 0$$

$$u^3 - 7u^2 + 15u - 9 = 0$$

(c) A partir de la ecuación anterior, factorizamos el polinomio:

$$u^3 - 7u^2 + 15u - 9 = 0$$

$$(u-1)(u^2 - 6u + 9) = 0$$

$$u = 1\,; \quad u = 3$$

Entonces $x = \operatorname{artg} 1$, $x = \operatorname{artg} 3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 12. (15 puntos)

Phil quiere comprarse una casa y le pide al banco un préstamo de \$150 000 a una tasa de interés anual del 3,5 %. El interés se calcula al final de cada año y se va añadiendo a la deuda pendiente.

(a) Halle la cantidad de dinero que Phil deberá al banco cuando hayan transcurrido 20 años. Dé la respuesta aproximando al número entero de dólares más cercano.

Para devolver el préstamo, Phil deposita al final de cada año $\$P$ en una cuenta de ahorro que paga una tasa de interés anual del 2 % . Phil realiza el primer depósito al final del primer año (contando a partir del momento en que le conceden el préstamo).

(b) Muestre que, al cabo de 20 años, el valor total de los ahorros de Phil será de

$$\frac{(1{,}02^{20} - 1)P}{(1{,}02 - 1)}$$

(c) Sabiendo que el objetivo de Phil es tener la casa en propiedad al cabo de 20 años, halle el valor de P, aproximado al número entero de dólares más cercano.

David va a otro banco y realiza un único depósito de $\$Q$. En ese banco la tasa de interés anual es del 2,8 %.

(d) (I) David quiere ir sacando de su cuenta \$5000 al final de cada año, durante un período de n años. Muestre que la expresión correspondiente al valor mínimo de Q es

$$\frac{5000}{1{,}028}+\frac{5000}{1{,}028^2}+\cdots+\frac{5000}{1{,}028^n}$$

(II) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el mínimo valor de Q que le permitiría a David sacar \$5000 de su cuenta todos los años de manera indefinida. Dé la respuesta aproximada al número entero de dólares más cercano.

Solución:

(a) Al cabo de 20 años deberá:

$$150000(1+0{,}035)^{20}=298468$$

(b) Al final del primer año tiene P dólares, al final del segundo año $P(1+0{,}02)+P$, al final del tercer año, $P(1+0{,}02)^2+P(1+0{,}02)+P$, etc. Al final del año 20 tendrá:

$$P\cdot 1{,}02^{19}+P\cdot 1{,}02^{18}+\ldots+P\cdot 1{,}02+P=P(1+1{,}02+1{,}02^2+\cdots+1{,}02^{19})$$

Y sumando la progresión geométrica resulta:

$$=P\cdot\frac{1{,}02^{19}\cdot 1{,}02-1}{1{,}02-1}=P\cdot\frac{1{,}02^{20}-1}{1{,}02-1}$$

(c) Igualando lo que ha ahorrado y lo que debe Phil:

$$P\cdot\frac{1{,}02^{20}-1}{1{,}02-1}=298468\quad\Longrightarrow\quad P\simeq 12284$$

(d) Al final del primer año, David tendrá:

$$1{,}028Q-5000$$

Al final del segundo

$$1{,}028(1{,}028Q-5000)-5000=1{,}028^2Q-5000\cdot(1+1{,}28)$$

Al final del tercero:

$$1{,}028^3Q-5000\cdot(1+1{,}28+1{,}28^2)$$

Al cabo de n años:

$$1{,}028^nQ-5000\cdot\left(1+1,28+1{,}28^2+\cdots+1{,}28^{n-1}\right)$$

Si esta cantidad es cero:

$$Q=\frac{5000}{1{,}028^n}\left(1+1,28+1{,}28^2+\cdots+1{,}28^{n-1}\right)=\frac{5000}{1{,}028}+\frac{5000}{1{,}028^2}+\cdots+\frac{5000}{1{,}028^n}$$

(e) Cuando n tiende a infinito, sumamos la progresión geométrica:

$$Q=5000\cdot\frac{\frac{1}{1{,}028}}{1-\frac{1}{1{,}028}}=5000\cdot\frac{1}{1{,}028-1}=178571{,}428\ldots$$

Si redondeamos a los dólares, la cantidad mínima debe ser 178572 dólares.

♠♠♠♠

33. 2018. Primer examen. TZ1.

33.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Let $f(x) = x^4 + px^3 + qx + 5$ where p, q are constants. The remainder when $f(x)$ is divided by $(x+1)$ is 7, and the remainder when $f(x)$ is divided by $(x-2)$ is 1. Find the value of p and the value of q.

Solución:

De acuerdo con el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x = -1$ es 7 y el valor numérico para $x = 2$ es 1. Entonces:

$$\begin{cases} (-1)^4 + (-1)^3 p + (-1)q + 5 = 0 \\ 2^4 + 2^3 p + 2q + 5 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resulta $p = -3$, $q = 2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (7 puntos)

Let $y = \sin^2\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$

(b) Hence find the values of θ for which $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 2y$.

Solución:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$

(b) Tenemos que resolver la ecuación:

$$2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$
$$\mathrm{sen}\,\theta(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = 0$$
$$\mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta = 0\,;\quad \theta = \pi$$
$$\cos\theta = \mathrm{sen}\,\theta; \quad \mathrm{tg}\,\theta = 1 \quad\Longrightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Two unbiased tetrahedral (four-sided) dice with faces labelled 1, 2, 3, 4 are thrown and the scores recorded. Let the random variable T be the maximum of these two scores. The probability distribution of T is given in the following table.

t	1	2	3	4
$\mathrm{p}(T=t)$	$\frac{1}{16}$	a	b	$\frac{7}{16}$

(a) Find the value of a and the value of b.

(b) Find the expected value of T.

Solución:

(a) Hay dieciséis resultados posibles igualmente probables. La probabilidad $\mathrm{p}(T=2)$ de que el valor más alto sea 2 es $\frac{3}{16}$ pues hay tres casos favorables $(1,2)$, $(2,1)$ y $(2,2)$. Así que $a = \frac{3}{16}$. De forma similar se puede ver que $b = \frac{5}{16}$.

(*b*) El valoe esperado de T es:

$$\mathrm{E}(T) = 1 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Given that

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 10 \qquad \text{and} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$$

find

(*a*) $\displaystyle\int_{-2}^{0} (f(x)+2)\ \mathrm{d}x$

(*b*) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x+2)\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) Por las propiedades de la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\,; \qquad 10 = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + 12 \quad\Longrightarrow\quad \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$$

Entonces:

$$\int_{-2}^{0} (f(x)+2)\ \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x = -2 + 2\Big[x\Big]_{-2}^{0} = -2 + 2\cdot 2 = 2$$

(*b*) Mediante el cambio de variable $x+2=t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $x=-2 \Rightarrow t=0$, $x=0 \Rightarrow t=2$:

$$\int_{-2}^{0} f(x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = 12$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

Solve $(\ln x)^2 - (\ln 2)(\ln x) < 2(\ln 2)^2$.

Solución:

la inecuación es equivalente a:

$$(\ln x)^2 - (\ln 2)(\ln x) - 2(\ln 2)^2 < 0$$

o bien, llamando $u = \ln x$,

$$u^2 - u\ln 2 - 2\ln^2 2 < 0$$

Los ceros de este polinomio en u son

$$\frac{\ln 2 \pm 3\ln 2}{2}\,; \qquad u_1 = -\ln 2\,, \quad u_2 = 2\ln 2$$

La solución de la inecuación es:

$$u \in (-\ln 2, 2\ln 2)$$

es decir

$$\ln x \in (-\ln 2, 2\ln 2) \quad\Longrightarrow\quad x \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Use the principle of mathematical induction to prove that

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}},\qquad \text{where } n\in\mathbb{Z}^+.$$

Solución:

- La fórmula se cumple para $n=1$ puesto que en ese caso el primer y el segundo miembro de la igualdad son iguales a 1.
- Supongamos que se cumple para $n=k$:

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=4-\frac{k+2}{2^{k-1}}$$

Debemos demostrar que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$, es decir que:

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=4-\frac{k+3}{2^k}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ =4-\frac{k+2}{2^{k-1}}+(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ =4-\frac{2k+4}{2^k}+\frac{1}{2^k}\\ =4-\frac{2k+3}{2^k}\end{aligned}$$

- Por el principio de inducción, la fórmula se cumple para $n\in\mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (9 puntos)

Let $y=\arccos\dfrac{x}{2}$.

(*a*) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(*b*) Find $\displaystyle\int_0^1 \arccos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) La derivada es:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$$

(*b*) Integramos por partes

$$\begin{aligned}u&=\arccos\frac{x}{2} & \mathrm{d}u&=\frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v&=\mathrm{d}x & v&=x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\arccos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x&=\left[x\arccos\frac{x}{2}\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &=\left[x\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (5 puntos)

Let $a = \sin b$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Find, in terms of b, the solutions of $\sin 2x = -a$, $0 \le x \le \pi$.

Solución:

Sustituyendo resulta:

$$\operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} b\,; \qquad \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(-b)$$

Si los dos ángulos tienen el mismo seno, o son iguales o supementarios:

$$\begin{aligned} 2x = -b + 2k\pi \quad &\Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2} + k\pi \\ 2x = \pi + b + 2k\pi \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{b}{2} + k\pi \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Las soluciones comprendidas entre 0 y π son

$$x = \pi - \frac{b}{2} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{\pi}{2} + \frac{b}{2}$$

♠♠♠♠

33.2. Section B

Ejercicio 9. (17 puntos)

Let $f(x) = \dfrac{2 - 3x^5}{2x^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

(a) The graph of $y = f(x)$ has a local maximum at A. Find the coordinates of A.

(b) (I) Show that there is exactly one point of inflexion, B, on the graph of $y = f(x)$.

(II) The coordinates of B can be expressed in the form $B(2^a, b \times 2^{-3a})$, where $a, b \in \mathbb{Q}$. Find the value of a and the value of b.

(c) Sketch the graph of $y = f(x)$ showing clearly the position of the points A and B.

Solución:

(a) Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{-15x^4 \cdot 2x^3 - 6x^2(2 - 3x^5)}{4x^6} = \frac{-3x^5 - 3}{x^4}$$

La derivada se anula para $x = -1$. Para $x < -1$ la derivada es positiva y para $x > -1$ es negativa. La función pasa de creciente a decreciente y, por consiguiente, en $x = -1$ hay un máximo local. Las coordenadas del máximo son $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$.

(b) (I) Calculemos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-15x^4 \cdot x^4 - 4x^3 \cdot (-3x^5 - 3)}{x^8} = \frac{-3x^5 + 12}{x^5}$$

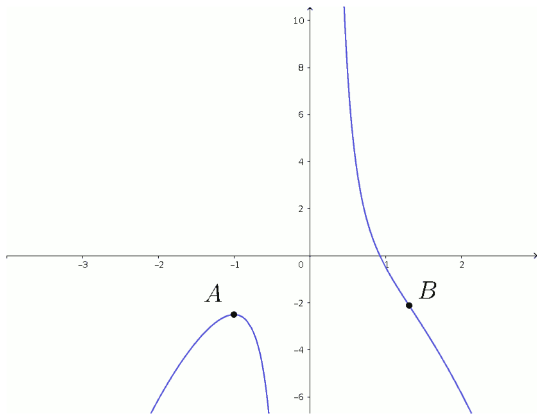
La derivada segunda se anula en $x = \sqrt[5]{4}$. Además, cambia de signo en ese punto luego se trata de un punto de inflexión. No hay mas ceros de la segunda derivada y, por consiguiete no hay más puntos de inflexión.

(II) Ya hemos visto que la abscisa del punto de inflexión es $\sqrt[5]{4} = 2^{\frac{2}{5}}$. Calculemos su ordenada:

$$y = \frac{2 - 3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2^{\frac{6}{5}}} = -5 \cdot 2^{-\frac{2}{5} \cdot 3}$$

Así pues, $a = \frac{2}{5}$ y $b = -5$.

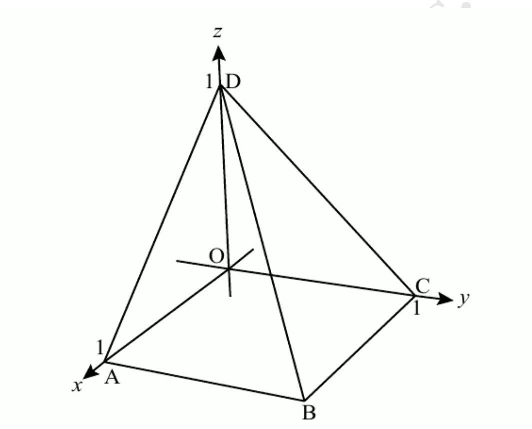
(III) Teniendo en cuenta los puntos encontrados y la asíntota $x = 0$ el gráfico es:



♠♠♠♠

Ejercicio 10. (19 puntos)

The following figure shows a square based pyramid with vertices at $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$ and $D(0,0,1)$.



(a) Find the Cartesian equation of the plane Π_1, passing through the points A, B and D.

The Cartesian equation of the plane Π_2, passing through the points B, C and D, is $y+z=1$.

(b) Find the angle between the faces ABD and BCD.

The plane Π_3 passes through O and is normal to the line BD.

(c) Find the Cartesian equation of Π_3.

Π_3 cuts AD and BD at the points P and Q respectively.

(d) Show that P is the midpoint of AD.

(e) Find the area of the triangle OPQ.

Solución:

(*a*) Los vectores directores del plano son:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad;\qquad \vec{AD}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 0 & -1\\ y & 1 & 0\\ z & 0 & 1\end{vmatrix}=0\;;\qquad x+z-1=0$$

(*b*) Los vectores normales a las caras son:

$$\vec{n_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad;\qquad \vec{n_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

El ángulo que forman estos dos vectores:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\qquad\Longrightarrow\qquad\varphi=60^\circ$$

Las dos caras es obtuso y es el suplementario del que forman los planos es decir, un ángulo de 120°.

(*c*) El vector $\vec{BD}$ es:

$$\vec{BD}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

El plano que nos piden tiene por ecuación $x+y-z=0$.

(*d*) La ecuación de la recta AD es:

$$\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}$$

Su intersección con el plano Π_3 es la solución del sistema:

$$\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\\ x+y-z=0\end{cases}$$

Cuya solución es $P\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, que es el punto medio de AD.

(*e*) La ecuación de la recta BD es:

$$\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

Las coordenadas del punto Q son la solución del sistema:

$$\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda\\ x+y-z=0\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad Q\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Entonces, el área del triángulo OPQ es:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{OP}\times\vec{OQ}|\;;\qquad \vec{OP}\times\vec{OQ}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \vec{\jmath} & 0 & \frac{1}{3}\\ \vec{k} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Haciendo las operaciones resulta:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (14 puntos)

Consider $w = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(a) (I) Express w^2 and w^3 in modulus-argument form.
(II) Sketch on an Argand diagram the points represented by w^0, w^1, w^2 and w^3.

These four points form the vertices of a quadrilateral, Q.

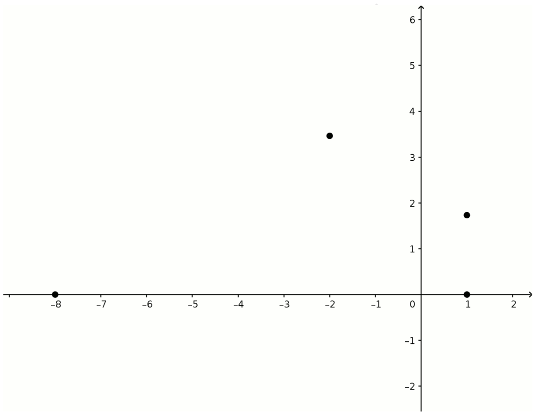
(b) Show that the area of the quadrilateral Q is $\frac{21\sqrt{3}}{2}$

Let $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. The points represented on an Argand diagram by z^0, z^1, z^2, ..., z^n form the vertices of a polygon P_n.

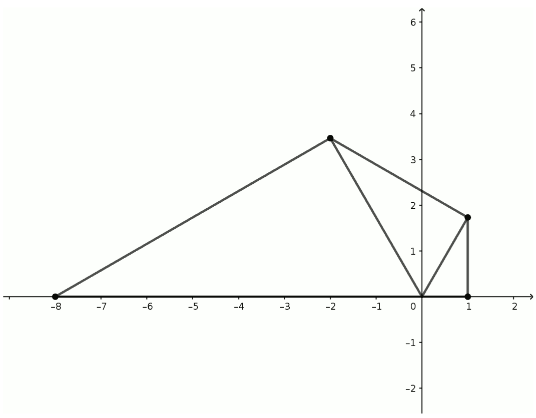
(c) Show that the area of the polygon P_n can be expressed in the form $a\,(b^n - 1)\sin\frac{\pi}{n}$, where $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) (I) $w^2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$, $w^3 = 8\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$
(II) Los afijos de estoas complejos aparecen en el siguiente gráfico:



(b) Podemos descomponer el cuadrilátero de muchas maneras. Por ejemplo, pensando en el apartado siguiente lo podemos hacer de la siguiente manera:



El área es:

$$S = \frac{1}{2}\,1\cdot 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\,2\cdot 4\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\,4\cdot 8\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\,(2+8+32)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

(c) Procediendo como en el apartado anterior, el área será:

$$S = \frac{1}{2}\left(2+8+32+\ldots+2^{2n-1}\right)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n} = \left(1+4+16+\ldots+2^{2n-2}\right)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

Sumando la progresión geométrica obtenemos:

$$S = \frac{2^{2n-2}\cdot 4 - 1}{4-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n} = \frac{1}{3}\,(4^n - 1)\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

de forma que $a = \frac{1}{3}$ y $b = 4$.

♠♠♠♠

34. 2018. Segundo examen. TZ1.

34.1. Sección A

Ejercicio 1. (7 puntos)

The 3rd term of an arithmetic sequence is 1407 and the 10th term is 1183.

(a) Find the first term and the common difference of the sequence.

(b) Calculate the number of positive terms in the sequence.

Solución:

(a) Puesto que:

$$a_{10} = a_3 + d\cdot(10-3)$$

tenemos que:

$$1183 = 1407 + 7d\;; \qquad d = \frac{1183-1407}{7} = -32$$

Y como $a_3 = a_1 + 2d$:

$$a_1 = a_3 - 2d = 1407 + 64 = 1471$$

(b) Resolvemos la inecuación:

$$1471 - 32(n-1) > 0\;; \qquad n < \frac{1471+32}{32} = 46{,}96\ldots$$

Hay 46 términos que son positivos.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

The equation $x^2 - 5x - 7 = 0$ has roots α and β. The equation $x^2 + px + q = 0$ has roots $\alpha+1$ and $\beta+1$. Find the value of p and the value of q.

Solución:

De la primera ecuación deducimos por las relaciones de cardano que $\alpha+\beta = 5$ y $\alpha\beta = -7$. Aplicando las mismas relaciones a la segunda ecuación tenemos que:

$$p = -(\alpha+1+\beta+1) = -(\alpha+\beta) - 2 = -5-2 = -7$$
$$q = (\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = -7+5+1 = -1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Let $f(x) = \tan(x+\pi)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ where $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Express $f(x)$ in terms of $\sin x$ and $\cos x$.

Solución:

$$f(x) = \tan(x+\pi)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

The age, L, in years, of a wolf can be modelled by the normal distribution $L \sim \mathrm{N}(8,5)$.

(a) Find the probability that a wolf selected at random is at least 5 years old.

(b) Eight wolves are independently selected at random and their ages recorded. Find the probability that more than six of these wolves are at least 5 years old.

Solución:

(a) Sea $X \sim \mathrm{N}(8,5)$:

$$\mathrm{p}(X \geq 5) \simeq 0{,}910$$

(b) Sea Y el número de lobos que tienen más de 5 años. Si p es la probabilidad obtenida en el apartado anterior, $Y \sim \mathrm{B}(10,p)$. La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(Y > 6) = 1 - \mathrm{p}(Y \leq 6) \simeq 0{,}843$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (7 puntos)

(a) Given that $2x^3 - 3x + 1$ can be expressed in the form $Ax(x^2+1) + Bx + C$, find the values of the constants A, B and C.

(b) Hence find

$$\int \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Tenemos la igualdad:

$$2x^3 - 3x + 1 = Ax(x^2+1) + Bx + C$$

Identificando coeficientes obtenemos $A = 2$, $B = -5$ y $C = 1$.

(b) Con ayuda de la descomposición anterior:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x(x^2+1) - 5x + 1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(2x - \frac{5}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= x^2 + \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{artg} x + C
\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (5 puntos)

The mean number of squirrels in a certain area is known to be 3,2 squirrels per hectare of woodland. Within this area, there is a 56 hectare woodland nature reserve. It is known that there are currently at least 168 squirrels in this reserve.

Assuming the population of squirrels follow a Poisson distribution, calculate the probability that there are more than 190 squirrels in the reserve.

Solución:

Sea X la variable aleatoria que representa el número de ardillas en la reserva Dado que $56 \cdot 3{,}2 = 179{,}2$, $X \sim \mathrm{Po}(179{,}2)$. La probabilidad que nos piden es

$$\mathrm{p}(X > 190 | X \geq 168) = \frac{\mathrm{p}(X > 190)}{\mathrm{p}(X \geq 168)} = \frac{1 - \mathrm{p}(X \leq 190)}{1 - \mathrm{p}(X \leq 167)} \simeq 0{,}245$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (8 puntos)

It is known that the number of fish in a given lake will decrease by 7 % each year unless some new fish are added. At the end of each year, 250 new fish are added to the lake. At the start of 2018, there are 2500 fish in the lake.

(a) Show that there will be approximately 2645 fish in the lake at the start of 2020.

(b) Find the approximate number of fish in the lake at the start of 2042.

Solución:

(a) Al final de 2018 el número de peces será:

$$2500 - 0{,}07 \cdot 2500 + 250 = 2500 \cdot 0{,}93 + 250 = 2575$$

y al final de 2019:

$$2500 \cdot 0{,}93^2 + 250 \cdot 0{,}93 + 250 \simeq 2645$$

(b) Al cabo de 24 años el número de peces será

$$2500 \cdot 0{,}93^{24} + 250 \cdot 0{,}93^{23} + 250 \cdot 0{,}93^{22} + \ldots + 250 = 2500 \cdot 0{,}93^{24} + 250 \cdot \frac{1 - 0{,}93^{24}}{1 - 0{,}93} \simeq 3384$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

Each of the 25 students in a class are asked how many pets they own. Two students own three pets and no students own more than three pets. The mean and standard deviation of the number of pets owned by students in the class are $\frac{18}{25}$ and $\frac{24}{25}$ respectively.

Find the number of students in the class who do not own a pet.

Solución:

Los datos aparecen representados en la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	0	1	2	3
f_i	f_0	f_1	f_2	2

Tenemos que:

$$\frac{0 \cdot f_0 + 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot 2}{25} = \frac{18}{25}$$

$$\frac{0 \cdot f_0 + 1 \cdot f_1 + 4 \cdot f_2 + 9 \cdot 2}{25} - \frac{18^2}{25^2} = \frac{24^2}{25^2}$$

$$f_0 + f_1 + f_2 + 2 = 25$$

Simplificando las ecuaciones:

$$f_1 + 2f_2 = 12$$

$$f_1 + 4f_2 = 18$$

$$f_0 + f_1 + f_2 = 23$$

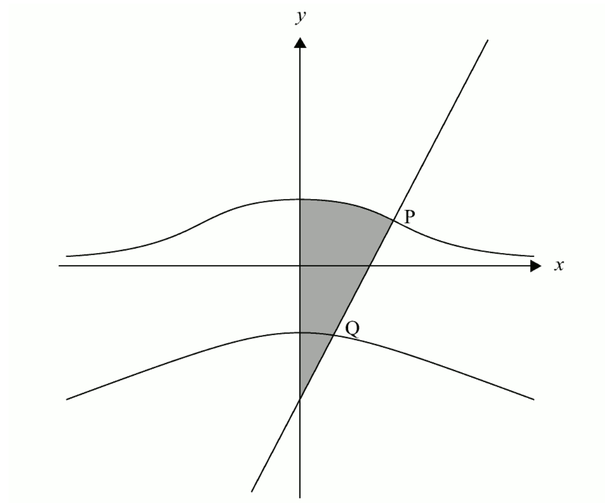
y de aquí, $f_1 = 6$, $f_2 = 3$ y, por consiguiente $f_0 = 14$.

♠♠♠♠

Section B

Ejercicio 9. (22 puntos)

The following graph shows the two parts of the curve defined by the equation $x^2y = 5 - y^4$, and the normal to the curve at the point $P(2,1)$.



(*a*) Show that there are exactly two points on the curve where the gradient is zero.
(*b*) Find the equation of the normal to the curve at the point P.
(*c*) The normal at P cuts the curve again at the point Q. Find the x-coordinate of Q.
(*d*) The shaded region is rotated by 2π about the y-axis. Find the volume of the solid formed.

Solución:

(*a*) Derivamos en forma implícita:

$$2xy + x^2y' = -4y^3y'$$
$$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 4y^3}$$

De la ecuación de la curva se desprende que y no puede ser cero para ningúm punto de la curva. Entonces:

$$y' = 0 \implies x = 0\ ;\quad y = \pm\sqrt[4]{5}$$

Tenemos dos puntos en los que la derivada es cero $\left(0, \sqrt[4]{5}\right)$ y $\left(0, -\sqrt[4]{5}\right)$.

(*b*) La derivada en el punto $P(2,1)$ es:

$$y'(2,1) = \frac{-2\cdot 2\cdot 1}{2^2 + 4\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

La pendiente de la normal es 2 y su ecuación es:

$$y - 1 = 2(x-2)\ ;\qquad y = 2x - 3$$

(*c*) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2y = 5 - y^4 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \quad ;\qquad x^2(2x-3) = 5 - (2x-3)^4$$

Resolvemos con la calculadora y obtenemos $x = 0{,}724$.

(*d*) El volumen puede considerarse formado por un cono de radio 2 y altura 4:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$$

y el volumen engendrado por la parte de la curva comprendida entre $y = 1$ e $y = \sqrt[4]{5}$:

$$V_2 = \pi \int_1^{\sqrt[4]{5}} x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_1^{\sqrt[4]{5}} \frac{5 - y^4}{y} \, \mathrm{d}y$$

Podemos obtener estos valores con la calculadora gráfica y resulta:

$$V = V_1 + V_2 \simeq 19{,}9$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (13 puntos)

The continuous random variable X has probability density function f given by

$$f(x) = \begin{cases} 3ax & 0 \leq x < 0{,}5 \\ a(2 - x) & 0{,}5 \leq x < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(*a*) Show that $a = \frac{2}{3}$.

(*b*) Find $\mathrm{p}(X < 1)$.

(*c*) Given that $\mathrm{p}(s < X < 0{,}8) = 2 \cdot \mathrm{p}(2s < X < 0{,}8)$, and that $0{,}25 < s < 0{,}4$, find the value of s.

Solución:

(*a*) La suma de las probabilidades debe ser igual a 1, de modo que:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{0,5} 3ax \, \mathrm{d}x + \int_{0,5}^2 a(2 - x) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3ax^2}{2}\right]_0^{0,5} + \left[2ax - \frac{ax^2}{2}\right]_{0,5}^2 \\ &= \frac{3a}{8} + \left(4a - \frac{4a}{2}\right) - \left(a - \frac{a}{8}\right) \\ &= \frac{3a}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(*b*) Con este valor de a:

$$\mathrm{p}(X < 1) = \int_0^{0,5} 2x \, \mathrm{d}x + \int_{0,5}^1 \frac{2}{3}(2 - x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

(*c*) Calculamos:

$$\int_s^{0,5} 2x \, \mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_{0,5}^{0,8} (2 - x) \, \mathrm{d}x = \Big[x^2\Big]_s^{0,5} + 0{,}27 = 0{,}52 - s^2$$

De la misma manera:

$$2 \cdot \frac{2}{3}\int_{2s}^{0,8} (2 - x) \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{2s}^{0,8} = \frac{4}{3}\left(1{,}28 - (4s - 2s^2)\right)$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$0{,}52 - s^2 = \frac{4}{3}\left(1{,}28 - (4s - 2s^2)\right) \ ; \qquad s \simeq 0{,}274$$

También se puede hacer definiendo en la calculadora gráfica las funciones:

$$y_1 = \int_x^{0,5} 2x \, \mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_{0,5}^{0,8} (2 - x) \, \mathrm{d}x$$

$$y_2 = \frac{4}{3}\int_{2x}^{0,8} (2 - x) \, \mathrm{d}x$$

para $0{,}21 < x < 0{,}4$ (x es la variable que aparece en los límites de la integral) y calculando su punto de intersección.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (15 puntos)

Two submarines A and B have their routes planned so that their positions at time t hours, $0 \leq t < 20$, would be defined by the position vectors

$$\boldsymbol{r_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}15 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

relative to a fixed point on the surface of the ocean (all lengths are in kilometres).

(a) Show that the two submarines would collide at a point P and write down the coordinates of P.

To avoid the collision submarine B adjusts its velocity so that its position vector is now given by

$$\boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}45 \\ 1{,}08 \\ 0{,}09 \end{pmatrix}$$

(b) (I) Show that submarine B travels in the same direction as originally planned.
(II) Find the value of t when submarine B passes through P.

(c) (I) Find an expression for the distance between the two submarines in terms of t.
(II) Find the value of t when the two submarines are closest together.
(III) Find the distance between the two submarines at this time.

Solución:

(a) Se producirá una colisión si $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2}$ para el mismo valor de t. Se tiene que cumplir que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2 - t = -0{,}5t \\ 4 + t = 3{,}2 + 1{,}2t \\ -1 - 0{,}15t = -2 + 0{,}1t \end{cases}$$

Las tres ecuaciones se cumplen para $t = 4$. El punto de colisión es $P(-2, 8, -1{,}6)$.

(b) (I) Basta ver que los vectores de dirección son paralelos. En efecto

$$\frac{-0{,}45}{-0{,}5} = \frac{1{,}08}{1{,}2} = \frac{0{,}09}{0{,}1} = 0{,}9$$

(II) En este caso

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}45 \\ 1{,}08 \\ 0{,}09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad -0{,}45t = -2 \; ; \qquad t = \frac{200}{45} \simeq 4{,}44$$

(c) (I) La distancia es el módulo de $\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}$:

$$\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \\ -2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -0{,}45 \\ 1{,}08 \\ 0{,}09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0{,}55t \\ 0{,}8 - 0{,}08t \\ 1 - 0{,}24t \end{pmatrix}$$

La distancia es

$$d = \sqrt{(2 - 0{,}55t)^2 + (0{,}8 - 0{,}08t)^2 + (1 - 0{,}24t)^2} = \sqrt{0{,}317t^2 - 2{,}688t + 8{,}64}$$

(II) La derivada será igual a cero:

$$2 \cdot 0{,}317t - 2{,}688 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t \simeq 3{,}83$$

(III) Para este valor de t la distancia es $d \simeq 0{,}511$.

♠♠♠♠

35. 2018. Primer examen. TZ2.

35.1. Sección A

Ejercicio 1. (4 puntos)

El ángulo agudo que forman los vectores $3\vec{\imath}-4\vec{\jmath}-5\vec{k}$ y $5\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+3\vec{k}$ se denomina θ. Halle $\cos\theta$

Solución:

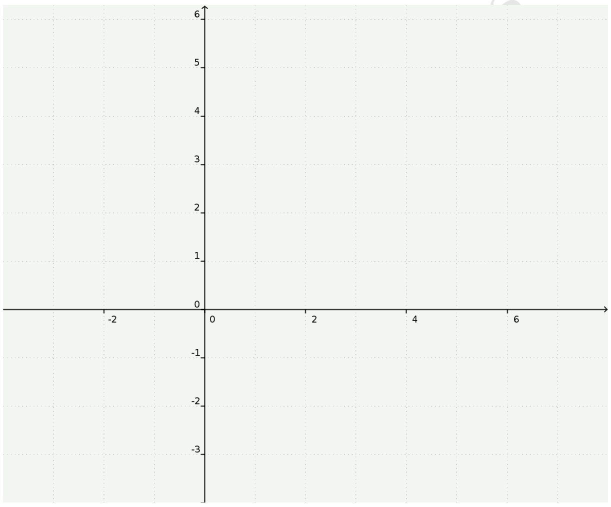
Llamando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a los dos vectores:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{15+16-15}{\sqrt{9+16+25}\sqrt{25+16+9}}=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (7 puntos)

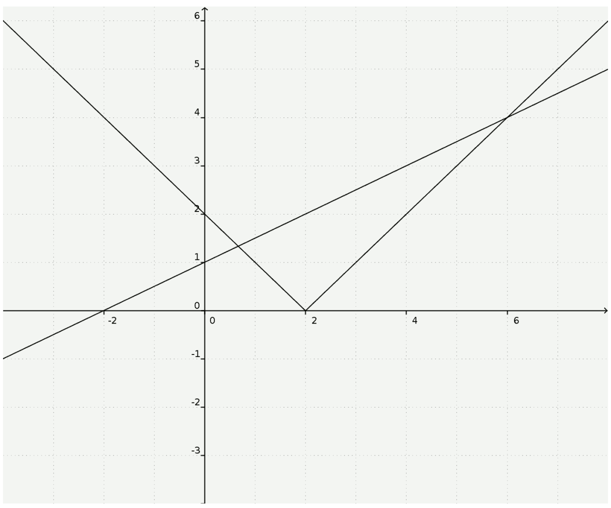
(a) Dibuje aproximadamente los gráficos de $y=\dfrac{x}{2}+1$ y $y=|x-2|$ en los siguientes ejes de coordenadas;



(b) Resuelva la ecuación $\dfrac{x}{2}+1=|x-2|$.

Solución:

(a)



(b) Las soluciones de la ecuación son las abscisas de los puntos de intersección $x = \frac{2}{3}$ y $x = 6$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad donde p es una constante:

x	0	1	2	3	4
$\text{p}(X = x)$	p	$0{,}5 - p$	0,25	0,125	p^3

(a) Halle el valor de p.

(b) (I) Halle μ, el valor esperado de X

(II) Halle $\text{p}(X > \mu)$

Solución:

(a) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$p + 0{,}5 - p + 0{,}25 + 0{,}125 + p^3 = 1\ ; \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + p^3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

(b) El valor esperado es $\mu = \sum p_i x_i$:

$$\mu = \text{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{11}{8}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (6 puntos)

Considere la curva:

$$y = \frac{1}{1-x} + \frac{4}{x-4}$$

Halle las coordenadas de los puntos de la curva donde la pendiente es cero.

Solución:

Calculamos los puntos de derivada cero:

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2 -}\frac{4}{(x-4)^2} = 0$$

$$(x-4)^2 - 4(x-1)^2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

Los puntos son $(2, -3)$ y $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (7 puntos)

La progresión geométrica u_1, u_2, u_3, $\ldots$, tiene razón común r.

Considere la progresión $A = \{a_n = \log_2 |u_n| : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

(a) Muestre que A es una progresión aritmética e indique cuál es la diferencia común d en función de r.

En una progresión geométrica en particular , $u_1 = 3$ y la suma de los infinitos términos es igual a 4.

(b) Halle el valor de d.

Solución:

(a) Sea $u_{n+1} = u_n \cdot r$. Entonces:

$$a_{n+1} = \log_2 |u_{n+1}| = \log_2 |u_n \cdot r| = \log_2 |u_n| \cdot |r| = \log_2 |u_n| + \log_2 |r| = a_n + \log_2 |r|$$

Por consiguiente A es una progresión aritmética de diferencia común $d = \log_2 |r|$

(b) La suma de los infinitos términos es:

$$S = \frac{u_1}{1-r}\ ; \qquad 4 = \frac{3}{1-r} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{4}$$

Entonces $d = \log_2 \frac{1}{4} = -2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Considere las funciones f y g definidas para $x \in \mathbb{R}$, mediante $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$ y $g(x) = e^{-x} \cos x$.

(a) Halle

(I) $f'(x)$

(II) $g'(x)$

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Las derivadas son:

(I) $f'(x) = -e^{-x} \operatorname{sen} x + e^{-x} \cos x = e^{-x} \left(-\operatorname{sen} x + \cos x\right)$

(II) $g'(x) = -e^{-x} \cos x + e^{-x}(-\operatorname{sen} x) = e^{-x} \left(-\operatorname{sen} x - \cos x\right)$

(b) Del apartado anterior se deduce que

$$-\frac{1}{2}\left(f'(x) + g'(x)\right) = e^{-x} \operatorname{sen} x$$

y entonces, la función $F(x) = -\frac{1}{2}\left(f(x) + g(x)\right)$ es una primitiva de $e^{-x} \operatorname{sen} x$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2}\left(e^{-x} \operatorname{sen} x + e^{-x} \cos x\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2} e^{0} \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

Considere los números complejos distintos $z = a + ib$, $w = c + id$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Halle la parte real de $\dfrac{z+w}{z-w}$.

(b) Halle el valor de la parte real cuando $|z| = |w|$.

Solución:

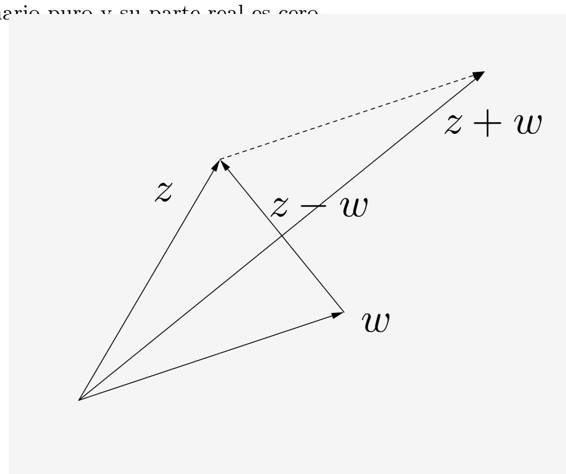
(a) Multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\operatorname{Re}\frac{z+w}{z-w} = \operatorname{Re}\frac{(z+w)(\bar z-\bar w)}{(z-w)(\bar z-\bar w)} = \operatorname{Re}\frac{z\bar z - w\bar w - z\bar w + \bar z w}{|z-w|} = \operatorname{Re}\frac{|z|-|w|-z\bar w+\bar z w}{|z-w|} = \frac{|z|-|w|}{|z-w|}$$

Hemos aplicado que los números $z\bar w$ y $\bar z w$ son conjugados y, por consiguiente, su diferencia es un número imaginario puro.

(b) Del apartado anterior se deduce que, en el caso de que los complejos tengan el mismo módulo, la parte real del cociente de $z+w$ y $z-w$ es cero.

Otra manera de verlo es la siguiente: en la figura se han representado los complejos z, w, $z+w$ y $z-w$ como vectores. Se puede ver que, si z y w tienen el mismo módulo, $z+w$ y $z-w$ son perpendiculares. Entonces su cociente tiene argumento $\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$, es imaginario puro y su parte real es cero.



♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

(a) Utilice la sustitución $u = x^{\frac{1}{2}}$ para hallar

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$$

(b) A partir de lo anterior halle el valor de

$$\frac{1}{2}\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$$

en la forma $\operatorname{artg} q$ donde $q \in \mathbb{Q}$.

Solución:

(a) Sea $u = x^{\frac{1}{2}}$. Entonces $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = 2u\,\mathrm{d}u$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2u}{u^3+u}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\operatorname{artg} u + C = 2\operatorname{artg} x^{\frac{1}{2}} + C$$

(b) A partir del apartado anterior:

$$\frac{1}{2}\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\Big[2\operatorname{artg} x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^9 = \operatorname{artg} 3 - \operatorname{artg} 1 = \operatorname{artg}\frac{3-1}{1+3} = \operatorname{artg}\frac{1}{2}$$

♠♠♠♠

35.2. Sección B

Ejercicio 9. (24 puntos)

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ los vectores de posición con respecto al origen de coordenadas O de los puntos A, B, C y D respectivamente.

Se sabe que $\vec{AB} = \vec{DC}$

(*a*) (I) Explique por qué $ABCD$ es un paralelogramo.
(II) Utilizando el álgebra de vectores muestre que $\vec{AD} = \vec{BC}$

Los vectores de posición $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ y $\vec{OD}$ vienen dados por:

$$\boldsymbol{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$
$$\boldsymbol{b} = 3\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + p\vec{k}$$
$$\boldsymbol{c} = q\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$
$$\boldsymbol{d} = -\vec{\imath} + r\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

donde p, q y r son constantes.

(*b*) Muestre que $p = 1$, $q = 1$ y $r = 4$.

(*c*) Halle el área del paralelogramo $ABCD$.

El punto en que se cortan las diagonales de $ABCD$ se denomina M.

(*d*) Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por M y es normal al plano Π que contiene a $ABCD$.

(*e*) Halle la ecuación cartesiana de Π.

El plano Π corta a los ejes x, y y z en X, Y, Z respectivamente.

(*f*) (I) Halle las coordenadas de X, Y y Z.
(II) Halle YZ.

Solución:

(*a*) (I) Si $\vec{AB} = \vec{DC}$ el cuadrilátero tiene dos lados paralelos y de la misma longitud. Entonces, es un paralelogramo.
(II) En efecto:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{DC} + \vec{BD} = \vec{BD} + \vec{DC} = \vec{BC}$$

(*b*) Teniendo en cuenta que $\vec{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ y $\vec{DC} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}$:

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ p+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+1 \\ 1-r \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad p = 1\ ; \quad q = 1\ ; \quad r = 4$$

(*c*) El área es el módulo del producto vectorial $\vec{AB} \times \vec{AC}$ donde $A(1, 2, -3)$, $B(3, -1, 1)$ y $C(1, 1, 2)$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 0 \\ \vec{\jmath} & -3 & -1 \\ \vec{k} & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El área es el módulo de este vector:

$$S = \sqrt{121 + 100 + 4} = \sqrt{225} = 15$$

(d) El punto M es el punto medio de AC. Tiene de coordenadas $M\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Como la recta es perpendicular al paralelogramo, tiene la dirección del producto vectorial $\vec{AB} \times \vec{AC}$. Su ecuación es:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(e) La ecuación del plano es:

$$11(x-1) + 10(y-2) + 2(z+3) = 0 \; ; \qquad 11x + 10y + 2z - 25 = 0$$

(f) (I) Las coordenadas de X se obtienen con la intersección

$$\begin{cases} 11x + 10y + 2z - 25 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

y se obtiene $X\left(\frac{25}{11}, 0, 0\right)$. De la misma forma $Y\left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$ y $Z\left(0, 0, \frac{25}{2}\right)$.

(II) El vector director de YZ es

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{25}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta YZ en forma vectorial es:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (14 puntos)

La función f se define mediante:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \; ; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -\frac{d}{c}$$

(a) Halle la función inversa f^{-1} e indique su dominio.

La función g se define mediante:

$$g(x) = \frac{2x-3}{x-2} \; ; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$$

(b) (a) Exprese g en la forma

$$g(x) = A + \frac{B}{x-2}$$

donde A y B son constantes.

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$. Indique la ecuación de cada una de las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes.

La función h se define mediante $h(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$.

(c) Indique el dominio y recorrido de $h \circ g$

Solución:

(a) Intercambiamos las variables y despejamos:

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}\ ; \qquad cxy + dx = ay + b\ ; \qquad cxy - ay = b - dx\ ; \qquad y(cx-a) = -dx + b$$

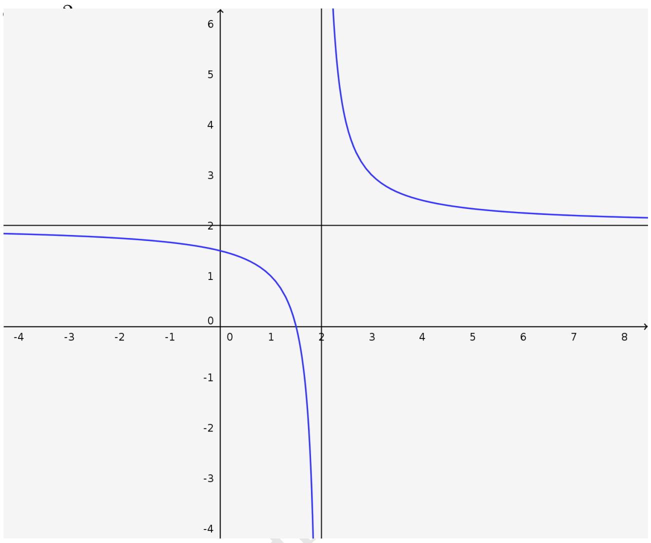
Entonces:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}\ ; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{a}{c}$$

(b) (I) Efectuando la división se obtiene

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$$

(II) Las asíntotas son $x = 2$



Las intersecciones con los ejes son los puntos $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ y $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

(c) La función $h \circ g$ es:

$$h \circ g(x) = h[g(x)] = \sqrt{\frac{2x-3}{x-2}}$$

El dominio de esta función es la solución de la inecuación

$$\frac{2x-3}{x-2} \geq 0$$

Estudiemos el signo de esta función:

	$\frac{3}{2}$		2	
$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

El dominio es el conjunto $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right] \cup (2,\infty)$. Al hacer la raíz la función sigue siendo decreciente y su asíntota es $y = \sqrt{2}$. El recorrido de la función es $\left[0,\sqrt{2}\right) \cup (\sqrt{2},\infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (12 puntos)

(a) Muestre que

$$\log_{r^2} x = \frac{1}{2}\log_r x\ ; \qquad r, x \in \mathbb{R}^+$$

Se sabe que

$$\log_2 y + \log_4 x + \log_4 2x = 0$$

(b) Exprese y en función de x. Dé la respuesta en la forma $y = px^q$ donde p y q son constantes.

La región R está delimitada por el gráfico de la función hallada en el apartado (b), por el eje x y por las rectas $x = 1$ y $x = \alpha$, donde $\alpha > 1$. El área de R es igual a $\sqrt{2}$.

(c) Halle el valor de α

Solución:

(a) Expresamos el primer logaritmo en base r:

$$\log_{r^2} x = \frac{\log_r x}{\log_r r^2} = \frac{\log_r x}{2} = \frac{1}{2}\log_r x$$

(b) Expresamos los logaritmos en base 2:

$$\begin{aligned}
\log_2 y &= -\log_4 x - \log_4 2x \\
&= -\frac{\log_2 x}{\log_2 4} - \frac{\log_2 2x}{\log_2 4} \\
&= -\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 2x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\log_2 x + \log_2 2x\right) \\
&= -\frac{1}{2}\log_2 2x^2 \\
&= \log_2 \left(2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$y = \left(2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x^{-1}$$

(c) En el intervalo $[1, \alpha]$ la función es positiva. El área es igual a la siguiente integral:

$$\int_1^\alpha \frac{1}{x\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x\right]_1^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\alpha$$

Puesto que el área es igual a $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\alpha = \sqrt{2}\,; \qquad \ln\alpha = 2 \implies \alpha = e^2$$

♠♠♠♠

36. 2018. Segundo examen. TZ2.

36.1. Sección A

Ejercicio 1. (6 puntos)

Considere el número complejo

$$z = \frac{2+7i}{6+2i}$$

(a) Exprese z en la forma $a+ib$, donde $a,b \in \mathbb{Q}$.

(b) Halle el valor exacto del módulo de z.

(c) Halle el argumento de z con una aproximación de 4 lugares decimales.

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{2+7i}{6+2i} = \frac{(2+7i)(6-2i)}{(6+2i)(6-2i)} = \frac{12+14-4i+42i}{40} = \frac{13}{20} - \frac{19}{20}i$$

(b) El módulo es

$$|z| = \sqrt{\frac{13^2}{20^2} + \frac{13^2}{20^2}} = \frac{\sqrt{530}}{20}$$

(c) El argumento es un ángulo del cuarto cuadrante:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{19}{13}\varphi \simeq 0{,}9707$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

El polinomio x^3+px^2+qx+r es exactamente divisible entre $(x-1)$, entre $(x-2)$ y entre $(x-4)$. Hallar los valores de p, q y r.

Solución:

Por las relaciones de Cardano $p=-7$ (suma de las raíces cambiada de signo) y $r=-8$ (producto de las raíces cambiado de signo). Además $q = 1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 = 14$ (suma de productos dobles)

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (6 puntos)

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 16$.

(a) Dibuje aproximadamente la función densidad de probabilidad correspondiente a X y sombree la región que representa $\mathrm{p}(\mu-2\sigma, \mu+\sigma)$.

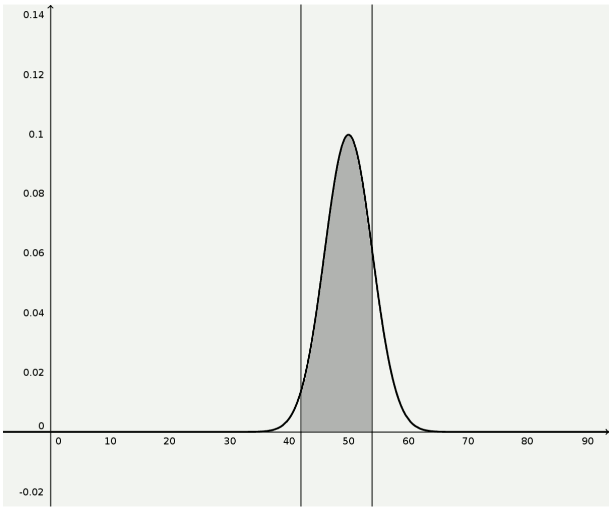
(b) Halle el valor de $\mathrm{p}(\mu-2\sigma, \mu+\sigma)$.

(c) Halle el valor de k para el cual $\mathrm{p}(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0{,}5$

Solución:

Podemos ayudarnos de la calculadora gráfica y obtenemos

(a)



(b) Se puede calcular $\mathrm{p}(42 < X < 54) \simeq 0{,}819$. También:

$$\mathrm{p}(\mu - 2\sigma, \mu + \sigma) = \mathrm{p}(-2 < Z < 1) = 0{,}819$$

(c) Creemos que la manera más sencilla es hacer el cambio a la distribución $\mathrm{N}(0,1)$:

$$\mathrm{p}(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(-k < Z < k) = 0{,}5$$

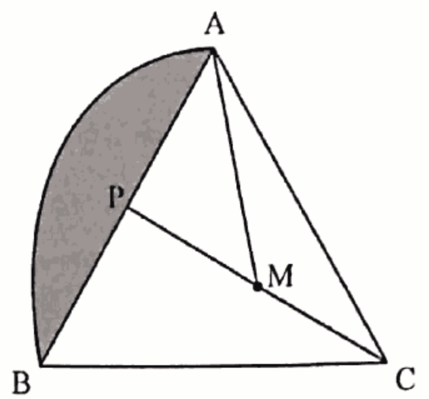
y por la simetría de la distribución normal:

$$\mathrm{p}(Z < k) = 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad k = 0{,}674$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (8 puntos)

Considere la siguiente figura



Los lados del triángulo equilátero ABC tienen longitudes de 1 m. P es el punto medio de $[AB]$. El arco de circunferencia AB tiene por centro M, el punto medio de $[CP]$.

(a) (I) Halle AM.
(II) Halle $A\hat{M}P$ en radianes.

(b) Halle el área de la región sombreada.

Solución:

(a) (I) Por ser ABC equilátero de lado 1 m $AP = \frac{1}{2}$ y $PM = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Por el teorema de Pitágoras:

$$AM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \simeq 0{,}661$$

(II) Con los datos anteriores

$$\operatorname{tg} A\hat{M}P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \implies A\hat{M}P \simeq 0{,}857$$

(*b*) La fórmula que nos da el área del segmento circular es:

$$S = \frac{1}{2}r^2\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$$

Con los datos anteriores $S \simeq 0{,}158\ \mathrm{m}^2$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

(*a*) Exprese el coeficiente binomial $\binom{3n+1}{3n-2}$ como un polinomio en n

(*b*) A partir de lo anterior, halle el menor valor de n para el cual $\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6$

Solución:

(*a*) Por las propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{3n+1}{3n-2} = \binom{3n+1}{3} = \frac{(3n+1)3n(3n-1)}{6} = \frac{(9n^2-1)n}{2} = \frac{9}{2}\,n^3 - \frac{1}{2}\,n$$

(*b*) Formando una tabla con la calculadora puede verse que el primer término para que el esa expresión es mayor que 10^6 es $n = 61$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

Utilice la inducción matemática para demostrar que

$$(1-a)^n > 1 - na$$

para $\{n:\ n \in \mathbb{Z}^+,\ n \geq 2$ y $0 < a < 1$.

Solución:

- La fórmula se cumple para $n = 2$:

$$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 > 1 - 2a$$

- Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$(1-a)^k > 1 - ka$$

Entonces, veamos que en ese caso también se cumple para $n = k + 1$:

$$(1-a)^{k+1} = (1-a)^k(1-a) > (1-ka)(1-a) = 1 - a - ka + ka^2 = 1 - (k+1)a + ka^2 > 1 - (k+1)a$$

- Por el principio de inducción matemática, la fórmula se cumple para $n \geq 2$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (5 puntos)

Un punto P se mueve en línea recta. Su velocidad v m s^{-1} en el instante t segundos viene dada por

$$v(t) = e^{-t} - 8t^2e^{-2t}$$

donde $t \geq 0$.

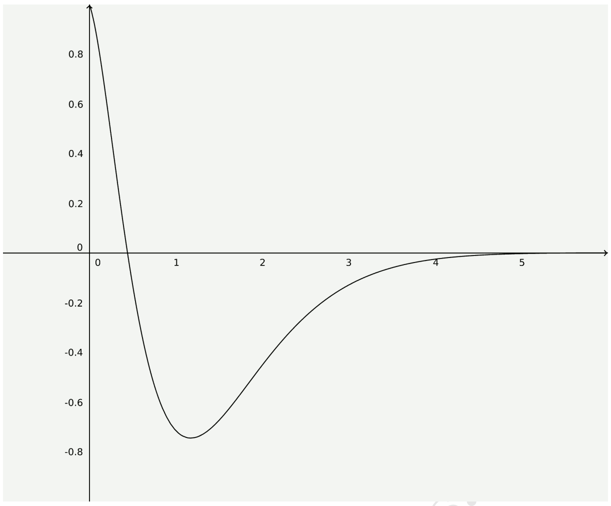
(a) Determine el primer instante t_1 en el que P tiene velocidad cero.

(b) (I) Halle una expresión para la aceleración de P en el instante t.

(II) Halle el valor de la aceleración de P en el instante t_1

Solución:

(a) La gráfica de la función tiene la siguiente forma



La velocidad se hace cero en $t \simeq 0{,}441$.

(b) (I) Derivando

$$\begin{aligned} a &= -e^{-t} - (16te^{-2t} + e^{-2t}(-2)8t^2) \\ &= e^{-t}\left(-1 - 16te^{-t} + 16t^2e^{-t}\right) \end{aligned}$$

(II) El valor de esta función en t_1 es $-2{,}28$ m s^{-2}

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

La variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p. Se sabe que $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$.

(a) Halle el valor posible de n

Se sabe además que $\mathrm{p}(X \leq 1) = 0{,}09478$ con una aproximación de 4 cifras significativas.

(b) Determine el valor de n y el valor de p.

Solución:

(a) Debe verificarse que $np = 3{,}5$ y $p \leq 1$. El valor más pequeño de n que puede cumplir esto es 4.

(b) Debe cumplirse

$$\begin{cases} np = 3{,}5 \\ \mathrm{p}(X \leq 1) = 0{,}09478 \end{cases}$$

Se puede hacer una tabla de la función con la calculadora

$$y = \mathrm{binomcdf}(x, 3{,}5/x, 1)$$

y vemos que la probabilidad que nos dan corresponde a $n = 12$. Para este valor $p = \frac{3{,}5}{12} \simeq 0{,}292$

♠♠♠♠

36.2. Sección B

Ejercicio 9. (13 puntos)

El número de taxis que llegan a la estación de trenes de Cardiff Central se puede modelizar por una distribución de Poisson. Durante las horas del día de mayor afluencia los taxis llegan a razón media de 5,3 taxis cada 10 minutos. Sea T un periodo aleatorio de 10 minutos a esas horas de mayor afluencia.

(*a*) (I) Halle la probabilidad de que durante T lleguen exactamente 4 taxis.
(II) Halle el número más probable de taxis que llegarían durante T.
(III) Sabiendo que durante T llegan más de 5 taxis, halle la probabilidad de que T lleguen exactamente 7 taxis.

Durante las horas tranquilas del día los taxis llegan a razón media de 1,3 taxis cada 10 minutos.

(*b*) Halle la probabilidad de que durante un periodo de 15 minutos, en el cual los primeros 10 minutos son de mayor afluencia de viajeros y los siguientes 5 minutos son tranquilos, lleguen exactamente 2 taxis.

Solución:

(*a*) (I) Sea X la variable aleatoria que representa el número de taxis que llegan en al periodo T. Sabemos que $X \sim \mathrm{Po}(5{,}3)$. Con estos datos:

$$\mathrm{p}(X = 4) = 0{,}164$$

(II) Con ayuda de la calculadora podemos crear una tabla de probabilidades para la distribución Po(5,3). La probabilidad mayor se da para $X = 5$.
(III) La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}(X = 7 \mid X > 5) = \frac{\mathrm{p}(X = 7)}{\mathrm{p}(X > 5)} = \frac{\mathrm{p}(X = 7)}{1 - \mathrm{p}(X \leq 5)} \simeq 0{,}267$$

(*b*) Sea X el número de taxis que llegan durante los 10 minutos de mayor afluencia de viajeros e Y el número de taxis que llegan durante los 5 minutos tranquilos. La distribución $X \sim \mathrm{Po}(5{,}3)$ y la distribución $Y \sim \mathrm{Po}(0{,}65)$.
La probabilidad de que lleguen dos taxis es igual:

$$p = \mathrm{p}(X = 2 \cap Y = 0) + \mathrm{p}(X = 1 \cap Y = 1) + \mathrm{p}(X = 0 \cap Y = 2) \simeq 0{,}0461$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (18 puntos)

Considere la expresión

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

(*a*) (I) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$ para $-\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8}$.
(II) Haciendo referencia al gráfico anterior, explique por qué f es una función en el dominio dado.
(III) Explique por qué no tiene inversa en el dominio dado.
(IV) Explique por qué no es una función para $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

La expresión de $f(x)$ se puede escribir como $g(t)$, donde $t = \operatorname{tg} x$.

(*b*) Muestre que

$$g(t) = \left(\frac{1 + t}{1 - t}\right)^2$$

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(t)$ para $t \leq 0$. Dé las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes y las ecuaciones de todas las asíntotas.

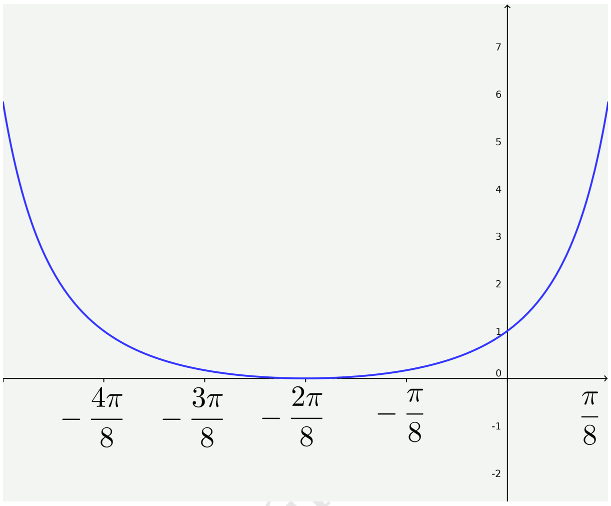
(d) Sean α, β las raíces de $g(t) = k$, donde $0 < k < 1$.

(I) Halle α y β en función de k.

(II) Muestre que $\alpha + \beta < -2$

Solución:

(a) (I)



(II) Es una función porque a cad punto del intervalo le hace corresponder un solo número.

(III) No tiene inversa en el intervalo porque no es inyectiva. Hay dos puntos del intervalo a los que corresponde el mismo valor.

(IV) La expresión no tiene sentido para $x = -\frac{3\pi}{4}$ ni para $x = \frac{\pi}{4}$.

(b) La función f puede escribirse:

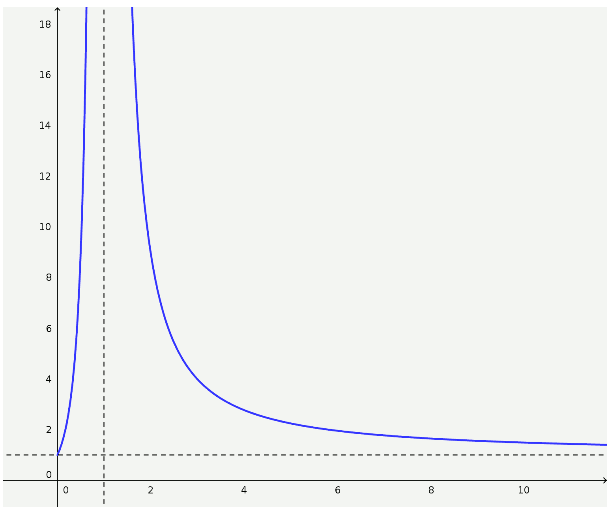
$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}}{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2}{(1 - \operatorname{tg} x)^2}$$

Llamando $\operatorname{tg} x = t$ la función se escribe:

$$g(t) = \left(\frac{1 + t}{1 - t}\right)^2$$

(c)



El único punto de corte con los ejes es (0, 1. Las asíntotas son $t = 1$ y $y = 1$.

(d) (I) Resolvemos la ecuación:

$$\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 = k\ ; \qquad \frac{1+t}{1-t} = \pm\sqrt{k}\ ; \qquad 1+t = \pm\sqrt{k}(1-t)\ ; \qquad t(1\pm\sqrt{k}) = \pm\sqrt{k}-1$$

Y obtenemos dos soluciones:

$$\alpha = \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}\ ; \qquad \beta = \frac{-\sqrt{k}-1}{-\sqrt{k}+1} = \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}$$

(II) Sumamos las dos soluciones:

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1} + \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}\\ &= \frac{(\sqrt{k}-1)^2+(\sqrt{k}+1)^2}{(\sqrt{k}+1)(\sqrt{k}-1)}\\ &= \frac{2k+2}{k-1} = \frac{-2k-2}{1-k}\\ &< -2-2k\\ &< -2\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (19 puntos)

Una curva C viene dada por la ecuación implícita

$$x + y - \cos(xy) = 0$$

(a) Muestre que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{1+x\operatorname{sen}(xy)}$$

(b) La curva $xy = -\dfrac{\pi}{2}$ y C se cortan en P y en Q.

(I) Halle las coordenadas de P y de Q.

(II) Sabiendo que las pendientes de las tangentes a C en P y en Q son m_1 y m_2 respectivamente, muestre que $m_1m_2 = 1$.

(c) Halle las coordenadas de los tres puntos de C más próximos al origen de coordenadas en los que la tangente es paralela a la recta $y = -x$.

Solución:

(a) Derivando:

$$\begin{aligned}&1 + y' + \operatorname{sen}(xy)\left(y + xy'\right) = 0\\ &y' + xy'\operatorname{sen}(xy) = -1 - y\operatorname{sen}(xy)\\ &y'\left(1 + x\operatorname{sen}(xy)\right) = -1 - y\operatorname{sen}(xy)\end{aligned}$$

y despejando y' resulta:

$$y' = -\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{1+x\operatorname{sen}(xy)}$$

(b) (I) Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases}x+y-\cos(xy) = 0\\ xy = -\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases}x+y = 0\\ xy = -\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

De aquí resulta $P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ y $Q\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$

(II) Cuando $xy=-\frac{\pi}{2}$:

$$y'=-\frac{1-y}{1-x}$$

Entonces

$$m_1=-\frac{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\ ;\qquad m_2=-\frac{1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

y queda claro que $m_1m_2=1$

(c) Si $y'=-1$:

$$y'=-\frac{1+y\,\mathrm{sen}(xy)}{1+x\,\mathrm{sen}(xy)}=-1 \quad\Longrightarrow\quad y\,\mathrm{sen}(xy)=x\,\mathrm{sen}(xy) \quad\Longrightarrow\quad (x-y)\,\mathrm{sen}(xy)=0$$

Puede ocurrir que $x=y$ o que $\mathrm{sen}(xy)=0$.
Si $x=y$ tenemos

$$\begin{cases} x+y-\cos(xy)=0 \\ x=y \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x=y\simeq 0{,}486$$

Si $\mathrm{sen}(xy)=0$ tenemos $xy=0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots$. Los más próximos al origen son aquellos en que $xy=0$:

$$\begin{cases} x+y-\cos(xy)=0 \\ \mathrm{sen}(xy)=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x+y-1=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

y resultan los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$. Esta claro que $xy=\pi,2\pi,\ldots$ da puntos más alejados del origen que estos.
Así pues los tres puntos son $(0,1)$, $(1,0)$ y $(0{,}486,0{,}486)$.

♠♠♠♠

37. Noviembre 2018. Primer examen.

37.1. Sección A

Ejercicio 1. (6 puntos)

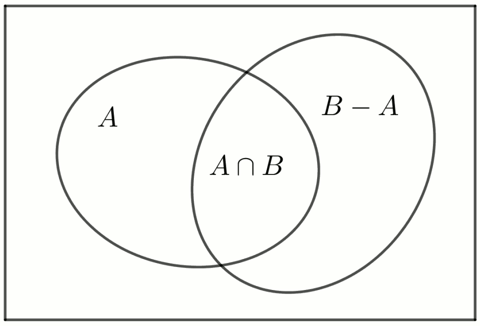
Consider two events, A and B, such that $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A' \cap B) = 0{,}4$ and $\mathrm{p}(A \cap B) = 0{,}1$.

(a) By drawing a Venn diagram, or otherwise, find $\mathrm{p}(A \cup B)$.

(b) Show that the events A and B are not independent.

Solución:

(a) De la figura:



se desprende que:

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B - A) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$$

(b) Tenemos que:

$$\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(A \cap B) + \mathrm{p}(B - A) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$$

Los sucesos son independientes si $\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(A \cap B)$. Entonces:

$$\mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \neq \mathrm{p}(A \cap B)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

A team of four is to be chosen from a group of four boys and four girls.

(a) Find the number of different possible teams that could be chosen.

(b) Find the number of different possible teams that could be chosen, given that the team must include at least one girl and at least one boy.

Solución:

(a) El número de maneras de elegir un equipo de cuatro a partir de ocho es:

$$C_{8,4} = 70$$

(b) Se puede elegir un equipo de solo chicos y un equipo de solo chicas. Todos los demás constan de chicos y chicas. El número es

$$C_{8,4} - 2 = 68$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (7 puntos)

Consider the function $g(x) = 4\cos x + 1$, $a \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ where $a < \frac{\pi}{2}$.

(a) For $a = -\frac{\pi}{2}$, sketch the graph of $y = g(x)$. Indicate clearly the maximum and minimum values of the function.

(b) Write down the least value of a such that g has an inverse.

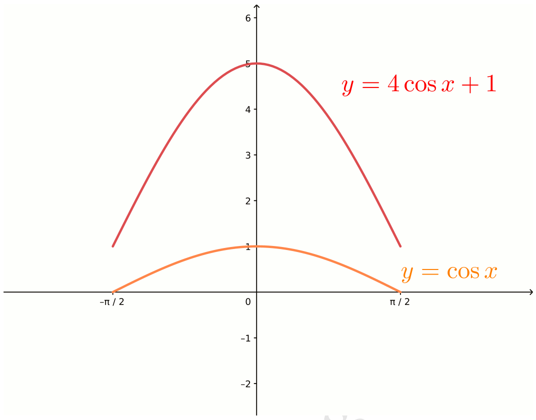
(c) For the value of a found in part (b),

(I) write down the domain of g^{-1}:

(II) find an expression for $g^{-1}(x)$

Solución:

(a) La gráfica es igual que $y = \cos x$ pero con una traslación hacia arriba de una unidad en el eje OY y un cambio de escala en el mismo eje:



El valor máximo de la función es 5 y el valor mínimo es 1.

(b) Para que exista inversa la función debe ser inyectiva así que el valor más pequeño de a para que esto suceda es $a = 0$.

(c) (I) El dominio de g^{-1} es el recorrido de g es decir, el intervalo $[1, 5]$.

(II) Para calcular una expresión de la inversa intercambiamos las variables y despejamos:

$$\begin{aligned} y &= 4\cos x + 1 \\ x &= 4\cos y + 1 \\ \cos y &= \frac{x-1}{4} \\ y = g^{-1}(x) &= \arccos\frac{x-1}{4} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (7 puntos)

Consider the following system of equations where $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 10 \\ x + 2y + ax = 5 \\ 5x + 12y = 2a \end{cases}$$

(a) Find the value of a for which the system of equations does not have a unique solution.

(b) Find the solution of the system of equations when $a = 2$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 12 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - 4a$$

El determinante se anula para $a = -\frac{1}{2}$. Para este valor de a el sistema no tiene solución única.

(*b*) Para $a=2$ resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & 10\\ 1 & 2 & 2 & 5\\ 5 & 12 & 0 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & 10\\ 5 & 10 & 0 & 25\\ 5 & 12 & 0 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & 10\\ 5 & 10 & 0 & 25\\ 0 & 2 & 0 & -21\end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos $y=-\frac{21}{2}$. Sustituyendo este valor $x=26$, $z=0$. La solución es $\left(26,-\frac{21}{2},0\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

The vectors $\vec{a}$ y $\vec{b}$ are defined by:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-t\\4t\end{pmatrix}$$

where $t\in\mathbb{R}$.

(*a*) Find and simplify an expression for $\vec{a}\cdot\vec{b}$ in terms of t.

(*b*) Hence or otherwise, find the values of t for which the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is obtuse.

Solución:

(*a*) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 0+1\cdot(-t)+t\cdot 4t=4t^2-t$

(*b*) Para que el ángulo de los dos vectores sea obtuso, el producto escalar debe ser negativo:

$$4t^2-t<0$$

Las raíces son $t=0$ y $t=\frac{1}{4}$. Para que el polinomio sea negativo $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

Use mathematical induction to prove that

$$\sum_{r=1}^{n} r\,(r!)=(n+1)!-1$$

for $n\in\mathbb{Z}^+$.

Solución:

- La fórmula se cumple para $n=1$ puesto que $1\cdot 1!=(1+1)!-1$
- Supongamos que se cumple para $n=k$, es decir, supongamos

$$\sum_{r=1}^{k} r\,(r!)=(k+1)!-1$$

y comprobemos que, en ese caso, también se cumple para $n=k+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1} r\,(r!) &= \sum_{r=1}^{k} r\,(r!)+(k+1)\,[(k+1)!]\\ &=(k+1)!-1+(k+1)\,[(k+1)!]\\ &=(k+1)!(k+1+1)-1\end{aligned}$$

- Por el principio de inducción matemática la igualdad se cumple para $n\in\mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (6 puntos)

Consider the curves C_1 and C_2 defined as follows:

$$C_1: \quad xy = 4, \quad x > 0\,; \qquad C_2: \quad y^2 - x^2 = 2, \quad x > 0$$

(*a*) Using implicit differentiation, or otherwise, find $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ for each curve in terms of x and y.

Let $P(a, b)$ be the unique point where the curves C_1 and C_2 intersect.

(*b*) Show that the tangent to C_1 at P is perpendicular to the tangent to C_2 at P.

Solución:

(*a*) Para la primera

$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{y}{x}$$

Y para la segunda:

$$2yy' - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{x}{y}$$

(*b*) Las tangentes son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1. Sean m y m' las pendientes de las tangentes:

$$m \cdot m' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = -1$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

Consider the equation $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, where $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{C}$. Two of the roots of the equation are $\log_2 6$ and $i\sqrt{3}$ and the sum of all the roots is $3 + \log_2 3$. Show that $6a + d + 12 = 0$.

Solución:

Tenemos una raíz $z_1 = \log_2 6$ y otra $z_2 = i\sqrt{3}$. Como los coeficientes son reales si $i\sqrt{3}$ es raíz también debe ser raíz su conjugada $z_3 = -i\sqrt{3}$. Como conocemos la suma de las raíces podemos calcular la cuarta:

$$\log_2 6 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + z_4 = 3 + \log_2 3 \quad \Longrightarrow \quad z_4 = 3 + \log_2 3 - \log_2 6 = 3 + \log_2 \frac{3}{6} = 2$$

Por las relaciones de Cardano, la suma de las raíces es $-a$:

$$a = -3 - \log_2 3$$

y el producto es d:

$$d = \log_2 6 \cdot i\sqrt{3} \cdot (-i\sqrt{3}) \cdot 2 = 6 \log_2 6$$

Entonces:

$$6a + d + 12 = -18 - 6\log_2 3 + 6\log_2 6 + 12 = -6 + 6\log_2 \frac{6}{3} = -6 + 6 = 0$$

♠♠♠♠

37.2. Sección B

Ejercicio 9. (15 puntos)

Consider a triangle OAB such that O has coordinates $(0,0,0)$, A has coordinates $(0,1,2)$ and B has coordinates $(2b,0,b-1)$ where $b<0$.

(a) Find, in terms of b, a Cartesian equation of the plane Π containing this triangle.

Let M be the midpoint of the line segment $[OB]$.

(b) Find, in terms of b, the equation of the line L which passes through M and is perpendicular to the plane Π.

(c) Show that L does not intersect the y-axis for any negative value of b.

Solución:

(a) Tomando como vectores directores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2b \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & b-1 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando el determinante:

$$(b-1)x + 4by - 2bz = 0$$

(b) El punto M tiene como coordenadas $M\left(b, 0, \frac{b-1}{2}\right)$. La ecuación de la recta que nos piden es:

$$\begin{cases} x = b + (b-1)\lambda \\ y = 4b\lambda \\ z = \frac{b-1}{2} - 2b\lambda \end{cases}$$

(c) La intersección de la recta con el eje OY es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = b + (b-1)\lambda \\ y = 4b\lambda \\ z = \frac{b-1}{2} - 2b\lambda \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De aquí resulta:

$$\begin{cases} b + (b-1)\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{b}{b-1} \\ \frac{b-1}{2} + 2b\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{b-1}{4b} \end{cases}$$

Para que haya intersección debe ocurrir:

$$-\frac{b}{b-1} = \frac{b-1}{4b} \quad \Longrightarrow \quad (b-1)^2 = -4b^2$$

Esta ecuación no tiene solución, no hay intersección con el eje OY.
Otra manera de verlo es la siguiente. El vector director del eje OY y el de la recta L son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} b-1 \\ 4b \\ -2b \end{pmatrix}$$

Un punto de la primera recta es $O(0,0,0)$ y de la segunda $M\left(b, 0, \frac{b-1}{2}\right)$. Calculamos el producto mixto:

$$[\vec{OM}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} b & 0 & b-1 \\ 0 & 1 & 4b \\ \frac{b-1}{2} & 0 & -2b \end{vmatrix} = -2b^2 - \frac{1}{2}(b-1)^2$$

Este número no se anula para ningún valor de b. Las dos rectas se cruzan y no hay punto de intersección.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (19 puntos)

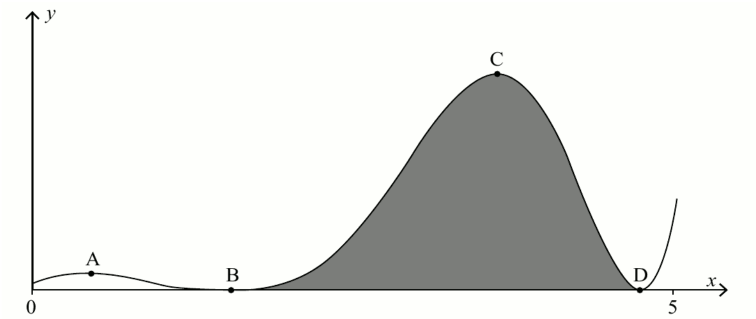
(a) Use integration by parts to show that

$$\int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{2e^x}{5} \sin 2x + \frac{e^x}{5} \cos 2x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Hence, show that

$$\int e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{e^x}{5} \sin 2x + \frac{e^x}{10} \cos 2x + \frac{e^x}{2} + c; \qquad c \in \mathbb{R}.$$

The function f is defined by $f(x) = e^x \cos^2 x$, where $0 \leq x \leq 5$. The curve $y = f(x)$ is shown on the following graph which has local maximum points at A and C and touches the x-axis at B and D.



(c) Find the x-coordinates of A and of C, giving your answers in the form $a + \arctan b$, where $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Find the area enclosed by the curve and the x-axis between B and D, as shaded on the diagram.

Solución:

(a) Integramos por partes con:

$$u = e^x \qquad \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos 2x \, \mathrm{d}x \quad v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

y resulta:

$$\int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \int e^x \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes con:

$$u = e^x \qquad \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

obtenemos:

$$= \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando:

$$\frac{5}{4} \int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x$$
$$\int e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{5} e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{5} e^x \cos 2x + C$$

(b) Teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}\int e^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int e^x\,(1+\cos 2x)\;\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int e^x\;\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\;\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\,e^x+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,e^x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{5}\,e^x\cos 2x\right)+C\\ &= \frac{1}{2}\,e^x+\frac{1}{5}\,e^x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{10}\,e^x\cos 2x+C\end{aligned}$$

(c) En los puntos A y C la derivada es cero:

$$f'(x)=e^x\cos^2 x-2e^x\operatorname{sen}x\cos x=e^x\cos x\,(\cos x-2\operatorname{sen}x)$$

Los ceros de la derivada son:

$$\begin{aligned}\cos x=0 &\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}\quad x=\frac{3\pi}{2}\\ \cos x-2\operatorname{sen}x=0 &\quad\Longrightarrow\quad 1-2\operatorname{tg}x=0\,;\qquad \operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Las soluciones correspondientes a $\cos x=0$ son $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$ que son los puntos B y D de la figura en los que la función vale 0.
Los puntos A y C son las soluciones de $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. Uno de ellos está en el primer cuadrante:

$$x=\operatorname{artg}\frac{1}{2}$$

y otro en el tercero:

$$x=\pi+\operatorname{artg}\frac{1}{2}$$

(d) El área es:

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}e^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &=\left[\frac{1}{2}\,e^x+\frac{1}{5}\,e^x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{10}e^x\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\\ &=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{10}e^{\frac{3\pi}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{10}e^{\frac{\pi}{2}}\right)\\ &=\frac{2}{5}\left(e^{\frac{3\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right)\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (16 puntos)

(a) Find the roots of $z^{24}=1$ which satisfy the condition $0<\arg(z)<\frac{\pi}{2}$, expressing your answers in the form $re^{i\theta}$, where $r,\theta\in\mathbb{R}^+$.

(b) Let S be the sum of the roots found in part (a).

(I) Show that $\operatorname{Re}S=\operatorname{Im}S$.

(II) By writing $\frac{\pi}{12}$ as $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, find the value of $\cos\frac{\pi}{12}$ in the form $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{e}$ where a, b and c are integers to be determined.

(III) Hence, or otherwise, show that

$$S=\frac{1}{2}\,(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1+i)$$

Solución:

(a) Las raíces tienen de módulo 1 y argumento $\frac{2\pi k}{24}$, $k=0,1,\dots,23$. Las que cumplen la condición son:

$$z_1=e^{\frac{\pi i}{12}}\,,\quad z_2=e^{\frac{\pi i}{6}}\,,\quad z_3=e^{\frac{\pi i}{4}}\,,\quad z_4=e^{\frac{\pi i}{3}}\,,\quad z_5=e^{\frac{5\pi i}{12}}$$

(b) (I) Los afijos de las raíces se encuentran situados simétricamente respecto a la bisectriz del primer cuadrante. En consecuencia la parte real de su suma es igual a la parte imaginaria.

Otro modo de verlo es el siguiente. La parte real de la suma es es:

$$\operatorname{Re} S = \cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{12}$$

Y la parte imaginaria:

$$\operatorname{Im} S = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$$

Pero, por la propiedad de los ángulos complementarios:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\ ; \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\ ; \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

de forma que:

$$\operatorname{Re} S = \operatorname{Im} S$$

(II) Procediendo como indica el enunciado:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(III) De la misma forma que en el apartado anterior:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} S &= \cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{12} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{2}
\end{aligned}$$

Como la parte real de S es igual a su parte imaginaria:

$$S = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{2} + i\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{2}\,(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})(1+i)$$

♠♠♠♠

38. Noviembre 2018. Segundo examen.

38.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

Consider a geometric sequence with a first term of 4 and a fourth term of $-2{,}916$.

(a) Find the common ratio of this sequence.

(b) Find the sum to infinity of this sequence.

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que $a_4 = a_1 \cdot r^3$:

$$-2{,}916 = 4r^3\ ; \qquad r^3 = -\frac{2{,}916}{4} = -0{,}729\ ; \qquad r = -0{,}9$$

(b) La suma vale:

$$S = \frac{4}{1+0{,}9} = \frac{40}{19}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (7 puntos)

A function f satisfies the conditions $f(0) = -4$, $f(1) = 0$ and its second derivative is

$$f''(x) = 15\sqrt{x} + \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad z \geq 0$$

Find $f(x)$.

Solución:

Calculamos en primer lugar $f'(x)$:

$$f'(x) = \int \left(15\sqrt{x} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)\,\mathrm{d}x = 15\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x+1} + C_1 = 10x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x+1} + C_1$$

Integrando $f'(x)$ calculamos $f(x)$:

$$f(x) = \int \left(10x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x+1} + C_1\right)\,\mathrm{d}x = 10\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \ln(x+1) + C_1x + C_2 = 4x^2\sqrt{x} - \ln(x+1) + C_1x + C_2$$

Ahora calculamos C_1 y C_2:

$$\begin{aligned} f(0) = -4 \quad &\Longrightarrow \quad C_2 = -4 \\ f(1) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 4 - \ln 2 + C_1 - 4 = 0\ ; \qquad C_1 = \ln 2 \end{aligned}$$

La función es:

$$f(x) = 4x^2\sqrt{x} - \ln(x+1) + x\ln 2 - 4$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (8 puntos)

It is known that 56 % of Infiglow batteries have a life of less than 16 hours, and 94 % have a life less than 17 hours. It can be assumed that battery life is modelled by the normal distribution $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Find the value of μ and the value of σ.

(b) Find the probability that a randomly selected Infiglow battery will have a life of at least 15 hours.

Solución:

(a) Llamemos X a la variable aleatoria que representa la duración de las dichosas baterías. Tenemos que:

$$\begin{cases} \mathrm{p}(X < 16) = 0{,}56 \\ \mathrm{p}(X < 17) = 0{,}94 \end{cases}$$

Tipificando la variable:

$$\begin{cases} \mathrm{p}\left(Z < \dfrac{16-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}56 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{16-\mu}{\sigma} = 0{,}1509\ldots \\ \mathrm{p}\left(Z < \dfrac{17-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}94 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{17-\mu}{\sigma} = 1{,}554\ldots \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mu \simeq 15{,}9$, $\sigma \simeq 0{,}712$

(b) La probabilidad es:

$$\mathrm{p}(X \geq 15) \simeq 0{,}895$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

Find the value of the constant term in the expansion of $x^4\left(x + \dfrac{3}{x^3}\right)^5$.

Solución:

Los términos de $\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$ son de la forma:

$$\binom{5}{n} x^n \left(\frac{3}{x^2}\right)^{5-n}$$

Si queremos que el exponente de x sea igual a -4:

$$n - 2(5-n) = -4 \quad \Longrightarrow \quad n = 2$$

El término constante es:

$$x^4 \binom{5}{2} x^2 \left(\frac{3}{x^2}\right)^3 = 270$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (5 puntos)

Differentiate from first principles the function $f(x) = 3x^3 - x$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^3 - (x+h) - 3x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x - h - 3x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(9x^2 + 9xh + 3h^2 - 1\right) \\ &= 9x^2 - 1 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

Let $P(x) = 2x^4 - 15x^3 + ax^2 + bx + c$ where $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Given that $(x-5)$ is a factor of $P(x)$, find a relationship between a, b and c.
(b) Given that $(x-5)^2$ is a factor of $P(x)$, write down the value of $P'(5)$.
(c) Given that $(x-5)^2$ is a factor of $P(x)$, and that $a = 2$, find the values of b and c.

Solución:

(a) Si $(x-5)$ es un factor, $x = 5$ es una raíz del polinomio:

$$2 \cdot 625 - 15 \cdot 125 + 25a + 5b + c = 0\ ; \qquad 25a + 5b + c = 625$$

(b) Si $x = 5$ es una raíz doble del polinomio, es una raíz simple de su derivada. Por consiguiente $P'(5) = 0$.

(c) La derivada de $P(x)$ es:

$$P'(x) = 8x^3 - 45x^2 + 2ax + b\ ; \qquad P'(5) = 10a + b - 125$$

Si $a = 2$, por los apartados anteriores:

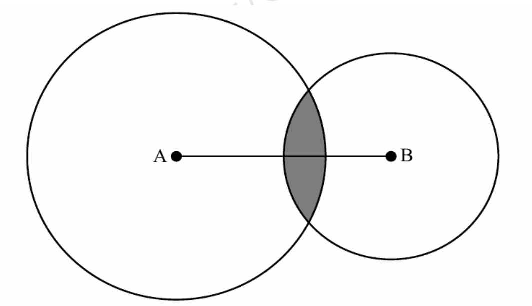
$$\begin{cases} 5b + c = 575 \\ b = 105 \end{cases}$$

y sustituyendo b se obtiene $c = 50$.

♠♠♠♠

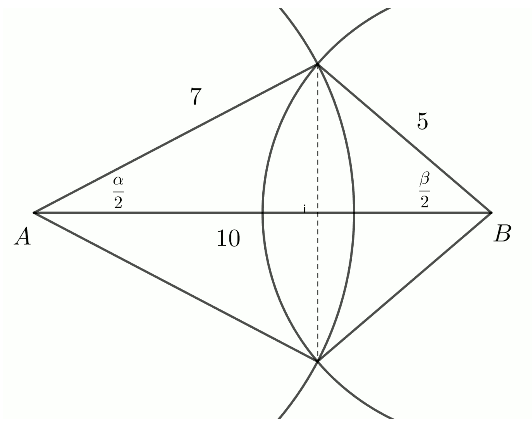
Ejercicio 7. (6 puntos)

Boat A is situated 10 km away from boat B, and each boat has a marine radio transmitter on board. The range of the transmitter on boat A is 7 km, and the range of the transmitter on boat B is 5 km. The region in which both transmitters can be detected is represented by the shaded region in the following diagram. Find the area of this region.



Solución:

El área es la suma de las áreas de dos segmentos circulares, uno en el círculo de centro A y otro en el círculo de centro B. Calculemos los ángulos α y β



$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{10^2+7^2-5^2}{2\cdot 10\cdot 7}\ ; \qquad \alpha = 2\ \mathrm{arcos}\,\frac{10^2+7^2-5^2}{2\cdot 10\cdot 7}$$
$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{10^2+5^2-7^2}{2\cdot 10\cdot 5}\ ; \qquad \beta = 2\ \mathrm{arcos}\,\frac{10^2+5^2-7^2}{2\cdot 10\cdot 5}$$

El área es entonces:

$$S=\frac{1}{2}\,7^2\,(\alpha-\operatorname{sen}\alpha)+\frac{1}{2}\,5^2\,(\beta-\operatorname{sen}\beta)\simeq 8{,}85\ \mathrm{km}^2$$

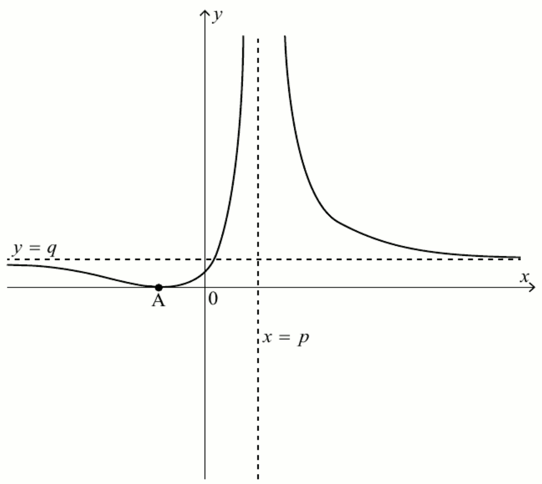
♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

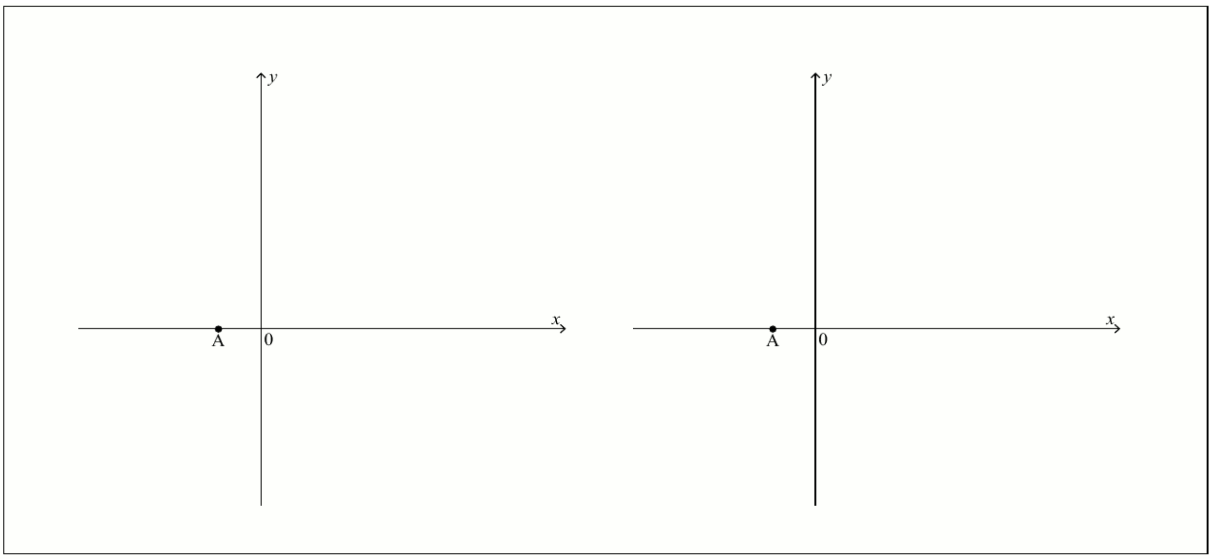
Consider the function

$$f(x)=\frac{ax+1}{bx+c},\quad x\neq -\frac{c}{b},\qquad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

The following graph shows the curve $y=(f(x))^2$. It has asymptotes at $x=p$ and $y=q$ and meets the x-axis at A.



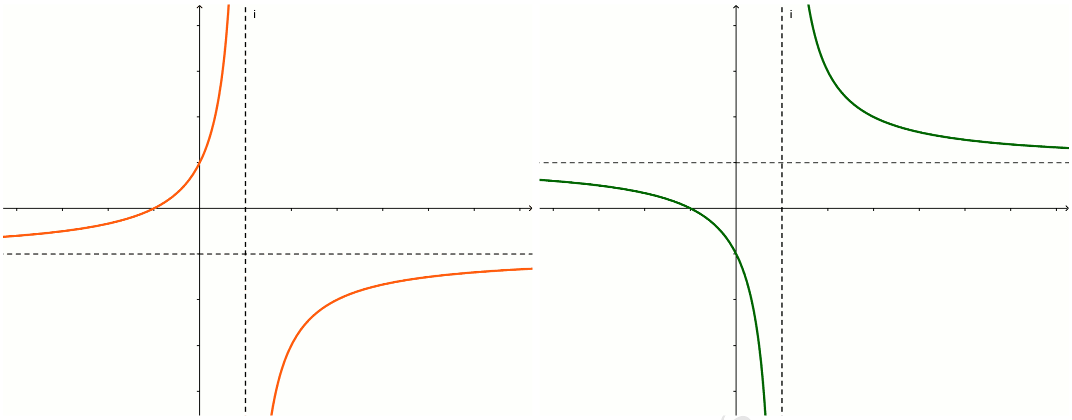
(a) On the following axes, sketch the two possible graphs of $y=f(x)$ giving the equations of any asymptotes in terms of p and q.



(*b*) Given that $p = \frac{4}{3}$, $q = \frac{4}{9}$ and A has coordinates $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, determine the possible sets of values for a, b and c.

Solución:

(*a*) La asíntota vertical es la misma para $y = f(x)$ y para $y = (f(x))^2$. En ambos casos es $x = -\frac{c}{b}$. Sin embargo la asíntota horizontal de $y = f(x)$ es $y = \frac{a}{b}$ y la de $y = (f(x))^2$ es $y = \frac{a^2}{b^2}$. Entonces, si $y = q$ es la asíntota horizontal de $y = (f(x))^2$ hay dos posibilidades para la asíntota horizontal de $y = f(x)$ que son $y = -\sqrt{q}$ o $y = \sqrt{q}$. Gráficamente



(*b*) Sea

$$y = \frac{ax+1}{bx+c}$$

Si $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ debe ser $a = 2$.
La asíntota vertical es $x = -\frac{c}{b}$. Por tanto:

$$-\frac{c}{b} = \frac{4}{3}$$

La asíntota horizontal es $y = \frac{a}{b} = \frac{2}{b}$. Hay dos posibilidades:

$$\frac{2}{b} = -\frac{2}{3}\,; \qquad \text{o} \qquad \frac{2}{b} = \frac{2}{3} \qquad \text{es decir } b = 3 \text{ o } b = -3$$

Tenemos dos soluciones:

$$a = 2\,, \quad b = 3\,, \quad c = -4$$
$$a = 2\,, \quad b = -3\,, \quad c = 4$$

♠♠♠♠

38.2. Sección B

Ejercicio 9. (19 puntos)

The function f is defined by

$$f(x) = \frac{2\ln x + 1}{x-3}, \qquad 0 < x < 3.$$

(*a*) Find $f'(x)$

(*b*) Hence, or otherwise, find the coordinates of the point of inflexion on the graph of $y = f(x)$.

(*c*) Draw a set of axes showing x and y values between -3 and 3. On these axes

(I) sketch the graph of $y = f(x)$, showing clearly any axis intercepts and giving the equations of any asymptotes.

(II) sketch the graph of $y = f^{-1}(x)$, showing clearly any axis intercepts and giving the equations of any asymptotes.

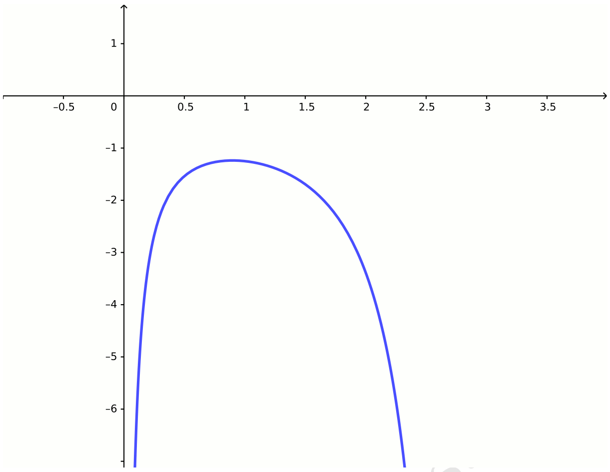
(*d*) Hence, or otherwise, solve the inequality $f(x) > f^{-1}(x)$.

Solución:

(*a*) Calculamos la derivada:

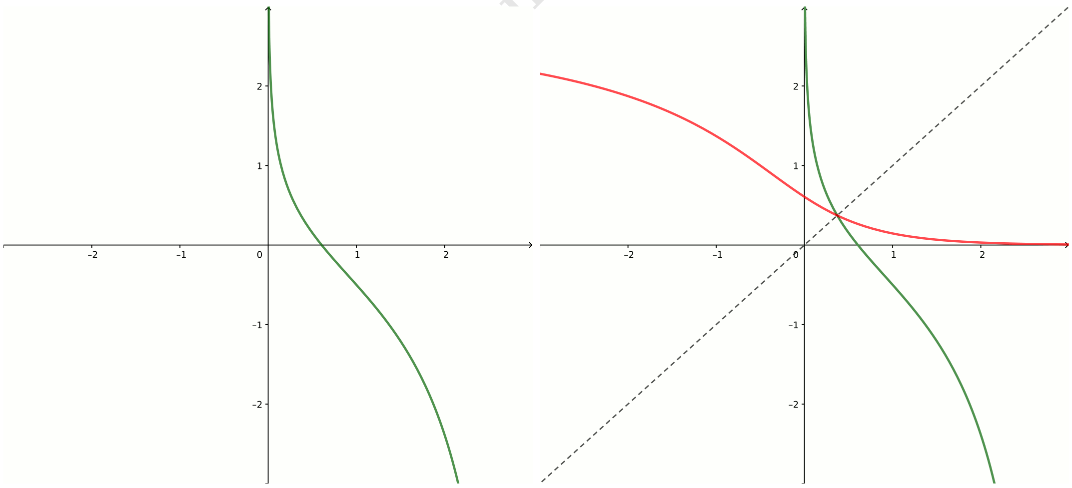
$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot (x-3) - 2\ln x - 1}{(x-3)^2} = \frac{x - 2x\ln x - 6}{x(x-3)^2}$$

(*b*) Si representamos la derivada con la calculadora:



vemos que presenta un máximo para $x \simeq 0{,}899$. El máximo de $f'(x)$ es punto de inflexión de $f(x)$ (también podría calcularse por la derivada segunda). Calculamos el valor de la función en ese punto con la calculadora y obtenemos el punto de inflexión $(0{,}899, -0{,}375)$.

(*c*) (I) La gráfica la obtenemos con la calculadora:



Las asíntotas son $x = 0$ y $x = 3$. El punto de intersección con el eje de abscisas es $(0{,}607, 0)$.

(II) La función $f : (0,3) \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y sobreyectiva. Existe por tanto su función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,3)$. La gráfica puede obtenerse reflejando la gráfica de $y = f(x)$ en $y = x$. Las asíntotas son $y = 0$ e $y = 3$ y el punto de intersección con el eje de ordenadas es $(0, 0{,}607)$.

(*d*) De la gráfica se desprende que la solución de la inecuación es el intervalo que tiene por extremos 0 y la abscisa del punto de intersección de las dos curvas. El intervalo lo obtenemos con la calculadora gráfica y resulta ser $(0, 0{,}372)$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (18 puntos)

Willow finds that she receives approximately 70 emails per working day. She decides to model the number of emails received per working day using the random variable X, where X follows a Poisson distribution with mean 70.

(a) Using this distribution model, find

(I) $p(X < 60)$

(II) the standard deviation of X.

(b) In order to test her model, Willow records the number of emails she receives per working day over a period of 6 months. The results are shown in the following table.

Number of emails received(x)	Number of days
$40 \leq x \leq 49$	2
$50 \leq x \leq 59$	15
$60 \leq x \leq 69$	40
$70 \leq x \leq 79$	53
$80 \leq x \leq 89$	0
$90 \leq x \leq 99$	1
$100 \leq x \leq 109$	3
$110 \leq x \leq 119$	6

From the table, calculate

(I) an estimate for the mean number of emails received per working day;

(II) an estimate for the standard deviation of the number of emails received per working day.

(c) Give one piece of evidence that suggests Willow's Poisson distribution model is not a good fit.

Archie works for a different company and knows that he receives emails according to a Poisson distribution, with a mean of λ emails per day.

(d) Suppose that the probability of Archie receiving more than 10 emails in total on any one day is 0.99. Find the value of λ.

(e) Now suppose that Archie received exactly 20 emails in total in a consecutive two day period. Show that the probability that he received exactly 10 of them on the first day is independent of λ.

Solución:

(a) Sea $X \sim \text{Po}(70)$:

(I) $p(X < 60) = p(X \leq 59) \simeq 0{,}102$

(II) En una distribución de Poisson la media y la varianza son iguales. La desviación típica es entonces:

$$\sigma = \sqrt{70} \simeq 8{,}37$$

(b) (I) Calculamos la media:

$$\mu = \frac{44{,}5 \cdot 2 + 54{,}5 \cdot 15 + 64{,}5 \cdot 40 + 74{,}5 \cdot 53 + 94{,}5 + 104{,}5 \cdot 3 + 114{,}5 \cdot 6}{2 + 15 + 40 + 53 + 0 + 1 + 3 + 6} = \frac{8530}{120} \simeq 71{,}1$$

(II) y la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{44{,}5^2 \cdot 2 + 54{,}5^2 \cdot 15 + 64{,}5^2 \cdot 40 + 74{,}5^2 \cdot 53 + 94{,}5^2 + 104{,}5^2 \cdot 3 + 114{,}5^2 \cdot 6}{2 + 15 + 40 + 53 + 0 + 1 + 3 + 6} - \mu^2 \simeq$$

y obtenemos para la desviación típica $\sigma \simeq 13{,}9$.

(c) En una distribución de Poisson la media debería coincidir con la varianza, sin embargo, los valores de la media y la varianza son muy diferentes.

(d) Sea Y la distribución que representa el número de mails recibidos por Archie:

$$0{,}99 = p(Y > 10) = 1 - p(Y \leq 10) \quad \Longrightarrow \quad p(Y \leq 10) = 0{,}01$$

Con la calculadora representamos la curva:

$$y = \text{poissoncdf}(x, 10) - 0{,}01$$

El número que buscamos es la intersección con el eje OX. Este número es $\lambda \simeq 20{,}1$.

(e) Llamemos X al número de mails recibidos en un día e Y al número de mails que recibe en dos días. Entonces $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{Po}(2\lambda)$. Así:

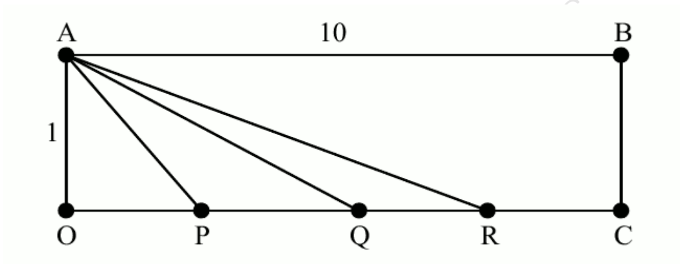
$$\begin{aligned} \mathrm{p}(X = 10 \mid Y = 20) &= \frac{\mathrm{p}(X = 10 \cap Y = 20)}{\mathrm{p}(Y = 20)} \\ &= \frac{\mathrm{p}(X = 10) \cdot \mathrm{p}(X = 10)}{\mathrm{p}(Y = 20)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^{10} e^{-\lambda}}{10!} \cdot \frac{\lambda^{10} e^{-\lambda}}{10!}}{\frac{(2\lambda)^{20} e^{-2\lambda}}{20!}} \\ &= \frac{20!}{2 \cdot 10! \cdot 10!} \end{aligned}$$

que no depende de λ.

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (13 puntos)

Consider the rectangle $OABC$ such that $AB = OC = 10$ and $BC = OA = 1$, with the points P, Q and R placed on the line OC such that $OP = p$, $OQ = q$ and $OR = r$, such that $0 < p < q < r < 10$.



Let θ_p be the angle APO, θ_q be the angle AQO and θ_r be the angle ARO.

(a) Find an expression for θ_p in terms of p.

Consider the case when $\theta_p = \theta_q + \theta_r$ and $QR = 1$.

(b) Show that

$$p = \frac{q^2 + q - 1}{2q + 1}$$

(c) By sketching the graph of p as a function of q, determine the range of values of p for which there are possible values of q.

Solución:

(a) $\operatorname{tg} \theta_p = \frac{1}{p} \quad \Longrightarrow \quad \theta_p = \operatorname{artg} \frac{1}{p}$

(b) En este caso tenemos:

$$\theta_p = \theta_q + \theta_r \; ; \qquad \operatorname{tg} \theta_p = \frac{1}{p} \; ; \qquad \operatorname{tg} \theta_q = \frac{1}{q} \; ; \qquad \operatorname{tg} \theta_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{q+1}$$

Entonces:

$$\operatorname{tg} \theta_p = \operatorname{tg}(\theta_q + \theta_r) = \frac{\operatorname{tg} \theta_q + \operatorname{tg} \theta_r}{1 - \operatorname{tg} \theta_q \operatorname{tg} \theta_r}$$

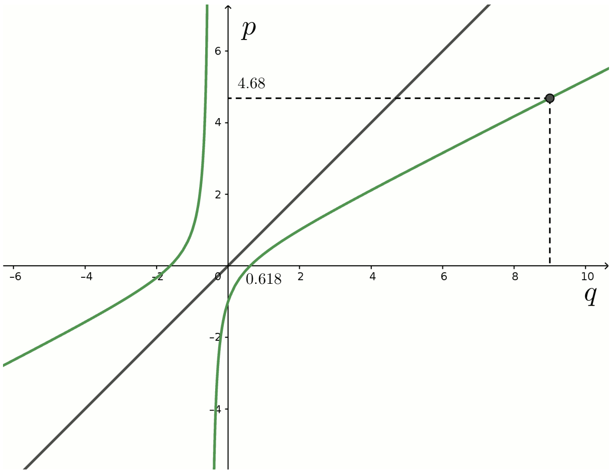
Sustituyendo:

$$\frac{1}{p} = \frac{\frac{1}{q} + \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{q}\frac{1}{r}} = \frac{r + q}{qr - 1}$$

Despejamos p:

$$p = \frac{qr-1}{r+q} = \frac{q(q+1)-1}{q+1+q} = \frac{q^2+q-1}{2q+1}$$

(c) La variable q puede tomar valores entre 0 y 9. Además debe cumplirse que $q \geq p$. Si representamos p en función de q la gráfica es la siguiente:



La variable q puede tomar valores entre 0,618 y 9. El punto de la curva correspondiente a $q = 9$ es $(9, 4{,}68)$. Los valores que puede tomar p son los del intervalo $(0, 4{,}68)$.

♠♠♠♠

39. Mayo 2019. Primer examen.

39.1. Sección A

Ejercicio 1. (4 puntos)

En una progresión aritmética la suma de los términos 3° y 8° es igual a 1. Sabiendo que la suma de los siete primeros términos es 35, determine el primer término y la diferencia común.

Solución:

Por la primera condición:

$$a_1 + 2d + a_1 + 7d = 1 \ ; \qquad 2a_1 + 9d = 1$$

Por la segunda:

$$\frac{(a_1 + a_1 + 6d) \cdot 7}{2} = 35 \ ; \qquad 2a_1 + 6d = 10$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones resulta $a_1 = 14$, $d = -3$.

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (6 puntos)

Tres puntos del espacio tridimensional tienen por ccoordenadas $A(0,0,2)$, $B(0,2,0)$ y $C(3,1,0)$.

(*a*) Halle el vector:

(I) $\vec{AB}$

(II) $\vec{AC}$

(*b*) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el área del triángulo ABC.

Solución:

(*a*) Obtenemos las coordenadas de los vectores restando las coordenadas del extremo menos las del origen del vector:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \ ; \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(*b*) El área es la mitad del módulo producto vectorial de los dos vectores:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 0 & 3 \\ \vec{\jmath} & 2 & 1 \\ \vec{k} & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{19}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (5 puntos)

Considere la función $f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
El gráfico de f se traslado dos unidades hacia la izquierda para dar lugar a la función $g(x)$. Exprese $g(x)$ de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$.

Solución:

La función $g(x)$ es:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)^4 - 6(x+2)^2 - 2(x+2) + 4 \\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 - 6x^2 - 24x - 24 - 2x - 4 + 4 \\ &= x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 4. (5 puntos)

Utilizando la sustitución $u = \operatorname{sen} x$ halle:

$$\int \frac{\cos^3 x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Solución:

Puesto que:

$$\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} &= \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1 - u^2}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u - \int \frac{u^2}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= 3\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5} \operatorname{sen}^2 x \sqrt{\operatorname{sen} x} + C \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (8 puntos)

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de

$$y = \frac{x-4}{2x-5}$$

e indique la ecuación de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes

(b) Considere la función:

$$f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x-4}{2x-5}}$$

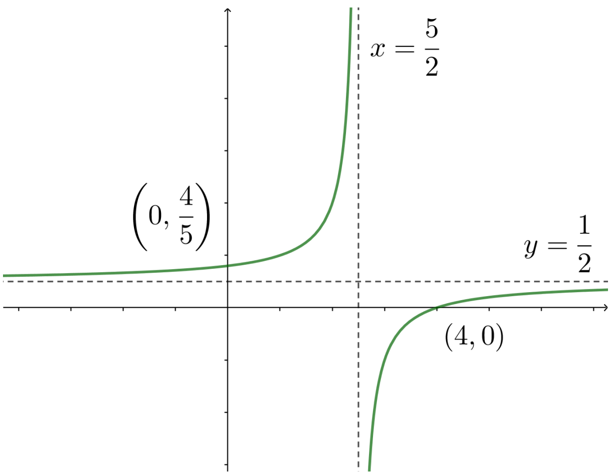
Escriba:

(I) el mayor dominio posible de f

(II) el correspondiente recorrido de f

Solución:

(a) El gráfico es el siguiente:



(b) (I) De la figura se desprende que el dominnio es $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup [4, \infty)$.
(II) El recorrido es $(0, \infty) \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (7 puntos)

La curva C viene dada por la ecuación

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\pi x y}{4}$$

(a) Muestre que en el punto $(1, 1)$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2+\pi}{2-\pi}$$

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la recta normal a C en $(1, 1)$.

Solución:

(a) Derivamos en forma implícita:

$$y' = \operatorname{tg} \frac{\pi x y}{4} + x \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x y}{4}\right) \frac{\pi}{4}(y + xy')$$

Sustituyendo x e y por 1:

$$y' = 1 + (1+1) \cdot \frac{\pi}{4}(1 + y')\ ; \qquad y' - \frac{\pi}{2} y' = 1 + \frac{\pi}{2}$$

de modo que:

$$y'(1,1) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{1 - \frac{\pi}{2}} = \frac{2+\pi}{2-\pi}$$

(b) Teniendo en cuenta que la pendiente de la normal es $-\frac{1}{y'}$:

$$y - 1 = -\frac{2-\pi}{2+\pi}(x - 1)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (7 puntos)

Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \log_2 6x = 1 + \log_2 y \\ 1 + \log_6 x = \log_6(15y - 25) \end{cases}$$

Solución:

La primera ecuación puede escribirse:

$$\log_2 6 + \log_2 x = 1 + \log_2 y$$

y la segunda:

$$1 + \frac{\log_2 x}{\log_2 6} = \frac{\log_2(15y-25)}{\log_2 6}\ ; \qquad \log_2 6 + \log_2 x = \log_2(15y-25)$$

Por igualación:

$$\begin{aligned} &1 + \log_2 y = \log_2(15y-25)\\ &\log_2 2y = \log_2(15y-25)\\ &2y = 15y - 25\\ &y = \frac{25}{13} \end{aligned}$$

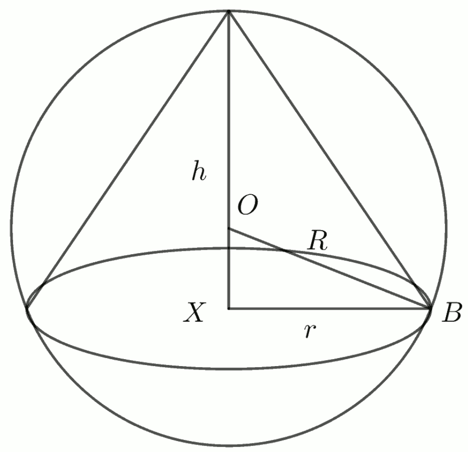
Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} &\log_2 6 + \log_2 x = 1 + \log_2 \frac{25}{13}\\ &\log_2 x = \log_2 2 + \log_2 \frac{25}{13} - \log_2 6\\ &x = \frac{2\cdot 25}{13\cdot 6} = \frac{25}{39} \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (8 puntos)

Un cono circular recto de radio r está inscrito en una esfera de centro O y radio R, tal como se muestra en la siguiente figura. La altura perpendicular de cono es h, X denota el centro de la base y B es un punto donde el cono toca la esfera.



(a) Muestre que el volumen del cono se puede expresar mediante

$$V = \frac{\pi}{3}\left(2Rh^2 - h^3\right)$$

(b) Sabiendo que existe un cono inscrito que tiene volumen máximo, muestre que el volumen de dicho cono es:

$$V_{max} = \frac{32\pi R^3}{81}$$

Solución:

(a) En el triángulo OXB:

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$$

El volume del cono es:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\,(2Rh - h^2)h = \frac{\pi}{3}\,(2Rh^2 - h^3)$$

(b) En el máximo, la derivada d V con respecto a h debe ser cero:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \frac{\pi}{3}\,(4Rh - 3h^2) = \frac{\pi h}{3}\,(4R - 3h) = 0$$

La solución $h = 0$ no puede corresponder a un máximo de volumen. Entonces $h = \frac{4R}{3}$ y:

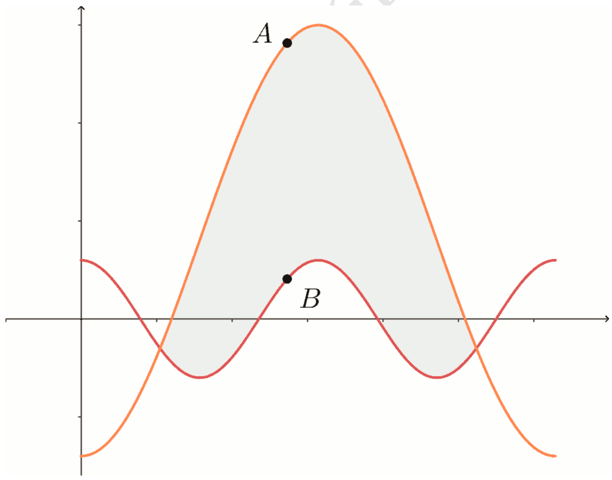
$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2R \cdot 16R^2}{9} - \frac{64R^3}{27}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$$

♠♠♠♠

39.2. Sección B

Ejercicio 9. (17 puntos)

Considere las funciones f y g definidas en el dominio $0 < x < 2\pi$ mediante $f(x) = 3\cos 2x$ y $g(x) = 4 - 11\cos x$.
La siguiente figura muestra el gráfico de $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



(a) Halle la coordenada x de cada uno de los puntos de intersección de los dos gráficos.

(b) Halle el área exacta de la región sombreada; dé la respuesta de la forma $p\pi + q\sqrt{3}$, donde $p, q \in \mathbb{Q}$.

En los puntos A y B de las figuras , los dos gráficos tienen la misma pendiente.

(c) Determine la coordenada y de A, perteneciente al gráfico de g

Solución:

(a) Los puntos de intersección son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 3\cos 2x \\ y = 4 - 11\cos x \end{cases}$$

con $0 < x < 2\pi$. Resolvemos por igualación:

$$\begin{aligned}
&3\cos 2x = 4 - 11\cos x\\
&3(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 4 - 11\cos x\\
&3(2\cos^2 x - 1) = 4 - 11\cos x\\
&6\cos^2 x + 11\cos x - 7 = 0
\end{aligned}$$

Calculamos $\cos x$:

$$\cos x = \frac{-11 \pm \sqrt{121+168}}{12} = \frac{-11 \pm 17}{12}$$

La solución negativa no es válida por ser menor que -1. Tenemos entonces:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{\pi}{3}\ ; \qquad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

(b) El área se puede calcular mediante la integral:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (4 - 11\cos x - 3\cos 2x)\ \mathrm{d}x\\
&= \left[4x - 11\operatorname{sen} x - \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\\
&= \left(\frac{20\pi}{3} + \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\\
&= \frac{16}{3}\pi + \frac{25}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(c) Si las curvas tienen la misma pendiente tienen también la misma derivada:

$$\begin{aligned}
&-3\operatorname{sen} 2x \cdot 2 = 11\operatorname{sen} x\\
&-12\operatorname{sen} x\cos x = 11\operatorname{sen} x\\
&\operatorname{sen} x(11 + 12\cos x) = 0
\end{aligned}$$

La solución $\operatorname{sen} x = 0$ no corresponde a los puntos A y B puesto que, en ese caso la derivada y la pendiente de ambas curvas sería cero. Por consiguiente, en los puntos A y B se cumple que:

$$\cos x = -\frac{11}{12}$$

y el valor de la ordenada del punto A es:

$$y_A = 4 - 11 \cdot \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{169}{12}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (16 puntos)

La variable aleatoria X tiene función de densidad de probabilidad f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(\pi - \operatorname{arsen} x) & 0 \le x \le 1\\ 0 & \text{resto de valores}\end{cases}$$

donde k es una constante positiva.

(a) Indique la moda de X.

(b) (I) Halle $\int \operatorname{arsen} x\ \mathrm{d}x$.

(II) A partir de lo anterior muestre que $k = \frac{2}{2+\pi}$.

(c) Sabiendo que:

$$y = \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arsen} x - \frac{1}{4}\ \operatorname{arsen} x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

muestre que:

(I) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \operatorname{arsen} x.$

(II) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3\pi}{4(\pi+2)}$

Solución:

(*a*) La moda es el valor de x para el que $f(x)$ toma el valor máximo de $f(x)$. El valor máximo se da para $x = 0$.

(*b*) (I) Integramos por partes:

$$u = \operatorname{arsen} x \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arsen} x\,\mathrm{d}x &= x \operatorname{arsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arsen} x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

(II) Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\int_0^1 k\,(\pi - \operatorname{arsen} x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior:

$$\left[\pi k x - k\left(x \operatorname{arsen} x + \sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 = 1$$

Sustituyendo:

$$k\pi - \frac{k\pi}{2} + k = 1$$
$$k\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = 1$$
$$k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1} = \frac{2}{\pi+2}$$

(*c*) (I) Derivando:

$$\begin{aligned}y' &= x \operatorname{arsen} x + \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{8\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \operatorname{arsen} x + \frac{2x^2}{4\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-x^2}{4\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{4\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \operatorname{arsen} x\end{aligned}$$

(II) Teniendo en cuenta que el apartado anterior nos proporciona una primitiva de $x \operatorname{arsen} x$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{2}{\pi+2}\int_0^1 x\,(\pi - \operatorname{arsen} x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi+2}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\operatorname{arsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{arsen} x - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi+2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \frac{2}{\pi+2}\cdot\frac{3\pi}{8} \\ &= \frac{3\pi}{4(\pi+2)}\end{aligned}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (17 puntos)

Considere las funciones f y g definidas mediante $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $g(x) = \ln|x+k|$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-k\}$ donde $k \in \mathbb{R}$, $k > 2$.

(a) Describa la transformaciones mediante la cual $f(x)$ se trnasforma en $g(x)$.

(b) Indique el recorrido de g.

(c) En un mismo sistema de ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, indicando claramente todos los puntos de corte con los ejes.

Los gráficos de f y g se cortan en el punto P.

(d) Halle las coordenadas de P.

La tangente a $y = f(x)$ en el punto P pasa por el origen.

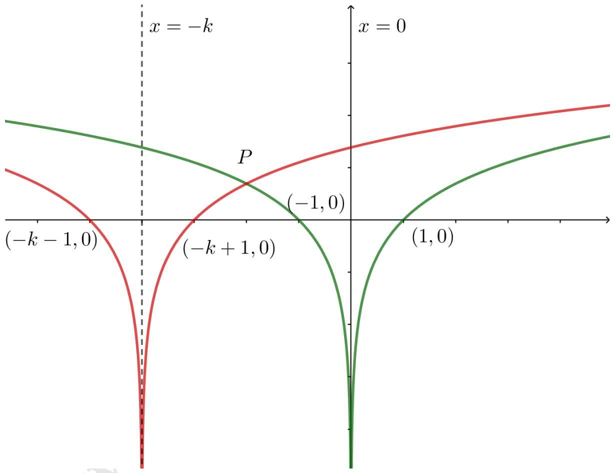
(e) Determine el valor de k.

Solución:

(a) Es una traslación en la dirección del eje OX de vector $\begin{pmatrix} -k \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) El recorrido es $(-\infty, \infty)$.

(c) La función $\ln|x|$ es igual a $\ln x$ para los x positivos. Para los x negativos la gráfica es simétrica de la anterior respecto al eje de ordenadas. La gráfica de $\ln|x+k|$ es igual a $\ln|x|$ desplazada k unidades hacia la izquierda.



(d) Por la simetría de la figura se ve que la abscisa de P debe ser $x = -\frac{k}{2}$. También se puede obtener como punto de corte de $y = \ln|x|$ con $y = \ln|x+k|$:

$$\ln|x| = \ln|x+k| \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = x + k & \text{no tiene solución} \\ \text{ó} & \\ x = -x - k & x = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

La ordenada es $\ln \frac{k}{2}$.

(e) La derivada de $y = \ln(-x)$ es:

$$y' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

La pendiente en al punto de abscisa $x_0 = -\frac{k}{2}$ es:

$$m = \frac{1}{-\frac{k}{2}} = -\frac{2}{k}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \ln\frac{k}{2} = -\frac{2}{k}\left(x + \frac{k}{2}\right)$$

Si pasa por el origen:

$$-\ln\frac{k}{2} = -\frac{2}{k} \cdot \frac{k}{2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{k}{2} = e\,; \qquad k = 2e$$

♠♠♠♠

40. Mayo 2019. Segundo examen.

40.1. Sección A

Ejercicio 1. (5 puntos)

En el triángulo ABC, $AB = 5$, $BC = 14$ y $AC = 11$. Hallar todos los ángulos interiores del triángulo. Dé la respuesta en grados, con una aproximación de una cifra decimal.

Solución:

Los ángulos se obtienen por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{5^2 + 11^2 - 14^2}{2 \cdot 5 \cdot 11} \;; \qquad A \simeq 117{,}0^\circ$$
$$\cos B = \frac{5^2 + 14^2 - 11^2}{2 \cdot 5 \cdot 11} \;; \qquad B \simeq 44{,}4^\circ$$
$$\cos C = \frac{14^2 + 11^2 - 5^2}{2 \cdot 5 \cdot 11} \;; \qquad C \simeq 18{,}5^\circ$$

♠♠♠♠

Ejercicio 2. (5 puntos)

Timmy tiene una tienda. Sus ingresos diarios, procedentes de la venta de sus artículos, se pueden modelizar por una distribución normal, siendo la media de los ingresos diarios igual a \$820 y la desviación típica igual a \$230. Para poder tener beneficios, los ingresos diarios de Timmy tienen que ser mayores que \$1000.

(a) Calcule la probabilidad de que, en un día elegido al azar, Timmy tenga beneficios.

La tienda abre 24 días al mes.

(b) Calcule la probabilidad de que, en un mes elegido al azar, Timmy tenga beneficios entre 5 y 10 días (ambos inclusive).

Solución:

(a) Sea X la variable aleatoria que representa los ingresos diarios de Timmy, $X \sim \mathrm{N}(820, 230)$:

$$\mathrm{p}(X \geq 1000) = 0{,}217$$

(b) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de días del mes que Timmy obtiene beneficios. Y sigue una distribución binomial con un número de pruebas igual a 24 y la probabilidad de éxito $\mathrm{p}(X \geq 1000)$:

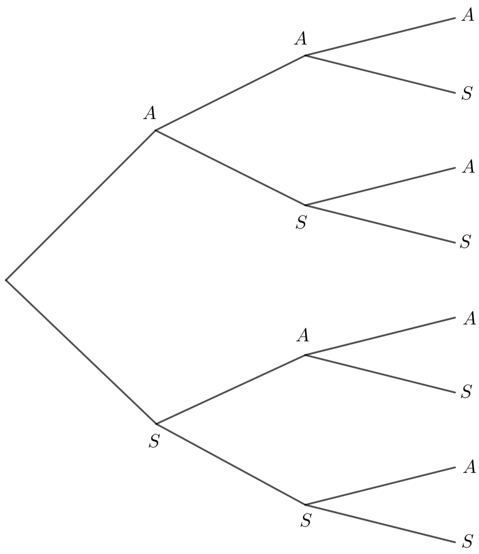
$$\mathrm{p}(5 \leq Y \leq 10) = \mathrm{p}(Y \leq 10) - \mathrm{p}(Y \leq 4) \simeq 0{,}613$$

♠♠♠♠

Ejercicio 3. (8 puntos)

Iqbal, para practicar, decide hacer tres exámenes de muestra de matemáticas. La probabilidad de que apruebe el primer examen es igual a 0,6. Cuando aprueba un examen, Iqbal gana confianza en sí mismo, de modo que la probabilidad de que apruebe el siguiente examen aumenta en 0,1. Cuando suspende un examen, la probabilidad de que apruebe el siguiente es igual a 0,6.

(a) Complete el siguiente diagrama de árbol de probabilidades para los tres exámenes de muestra que hace Iqbal, rotulando cada rama con la probabilidad correcta.

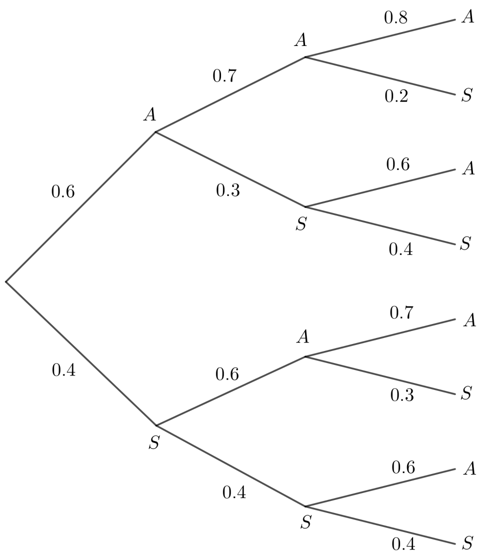


(b) Calcule la probabilidad de que Iqbql apruebe al menos dos de los exámenes.

(c) Halle la probabilidad de que Iqbal apruebe el tercer examen, sabiendo que solo ha aprobado uno de los exámenes anteriores.

Solución:

(a) El diagrama es el siguiente:



(b) $p = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}696$

(c) Sea T el suceso 'aprobar el tercer examen' y R el suceso 'aprobar exactamente uno de los dos primeros'. Entonces:

$$\mathrm{p}(T \mid R) = \frac{\mathrm{p}(T \cap R)}{\mathrm{p}(R)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7}{0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 0{,}657$$

♠♠♠♠

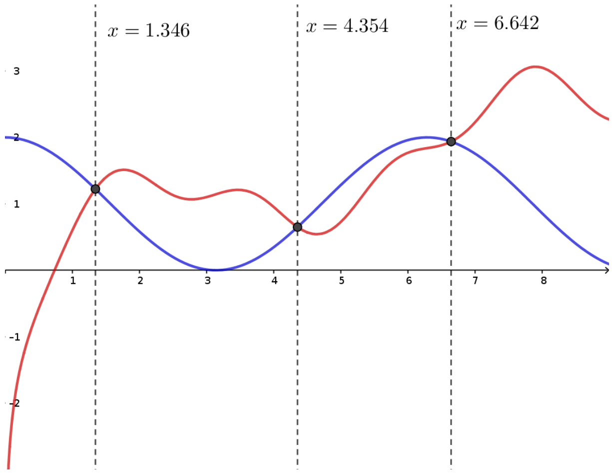
Ejercicio 4. (6 puntos)

(a) Dibuje aproximadamente los gráficos de $y = \operatorname{sen}^3 x + \ln x$ y de $y = 1 + \cos x$ para $0 < x <\leq 9$.

(*b*) A partir de lo anterior, resuelva $\operatorname{sen}^3 x + \ln x - \cos x - 1 < 0$, $0 < x \leq 9$.

Solución:

(*a*) La calculadora nos da los gráficos y los puntos de intersección:



(*b*) La inecuación es equivalente a:

$$\operatorname{sen}^3 x + \ln x < 1 + \cos x$$

De acuerdo con el gráfico, la solución es:

$$x \in (0; 1{,}34) \cup (4{,}36; 6{,}64)$$

Los números se han redondeado de forma que todos los números del intervalo formen parte de la solución.

♠♠♠♠

Ejercicio 5. (6 puntos)

(*a*) Demuestre la identidad

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$$

(*b*) Resuelva la ecuación:

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \sqrt{3}\,; \qquad 0 \leq x < 2\pi$$

Solución:

(*a*) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} &= \frac{1+2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{dividiendo numerador y denominador por } \cos^2 x \\
&= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} && \text{puesto que } \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x \\
&= \frac{1+\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \\
&= \frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{(1+\operatorname{tg} x)(1-\operatorname{tg} x)} \\
&= \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}
\end{aligned}$$

(*b*) La ecuación puede resolverse gráficamente mediante la calculadora. También, teniendo en cuenta el apartado anterior, la ecuación es equivalente a:

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \sqrt{3}\,; \qquad 1+\operatorname{tg} x = \sqrt{3}(1-\operatorname{tg} x)\,; \qquad \operatorname{tg} x(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}-1$$

Entonces:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \implies x \simeq 0{,}262\ ; \qquad x \simeq 3{,}40$$

Puede obtenerse el resultado exacto sin necesidad de calculadora teniendo en cuenta que para ese valor de $\operatorname{tg} x$, el valor de $\operatorname{tg} 2x$ es $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Las soluciones en grados sexagesimales son exactamente 15° y 195°.

♠♠♠♠

Ejercicio 6. (6 puntos)

Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de modo tal que en el instante t segundos, $t \geq 0$, su aceleración a viene dada por $a = 2t-1$. Cuando $t = 6$, su desplazamiento s respecto a un origen fijo O es igual a 18,25 m. Cuando $t = 15$, el desplazamiento respecto a O es igual a 922,75 m. Halle una expresión para s en función de t.

Solución:

Obtenemos la velocidad integrando la aceleración:

$$v = \int (2t-1)\ \mathrm{d}t = t^2 - t + C_1$$

La posición se obtiene integrando la velocidad:

$$s = \int (t^2 - t + C_1)\ \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Ahora determinamos las dos constantes por las condiciones que nos dan:

$$\begin{aligned} 18{,}25 &= \frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} + 6C_1 + C_2 \\ 922{,}75 &= \frac{15^3}{3} - \frac{15^2}{2} + 15C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resulta $C_1 = -6$ y $C_2 = \frac{1}{4}$. De modo que:

$$s = \int (t^2 - t + C_1)\ \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t + \frac{1}{4}$$

♠♠♠♠

Ejercicio 7. (puntos)

Suponga que u_1 es el primer término de la serie geométrica de razón r. Demuestre mediante inducción matemática que la suma de los n primeros términos, S_n, viene dada por

$$S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}\ ; \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Solución:

– La igualdad se cumple para $n = 1$:

$$S_1 = \frac{u_1(1-r^1)}{1-r} = u_1$$

– Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$S_k = \frac{u_1(1-r^k)}{1-r}$$

y veamos que, en ese caso, también se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + u_{k+1} && \text{puesto que } u_{k+1} = u_1 r^k \\ &= \frac{u_1(1-r^k)}{1-r} + u_1 r^k \\ &= \frac{u_1(1-r^k) + u_1 r^k(1-r)}{1-r} \\ &= \frac{u_1 - u_1 r^k + u_1 r^k - u_1 r^{k+1}}{1-r} \\ &= \frac{u_1 - u_1 r^{k+1}}{1-r} \\ &= \frac{u_1(1-r^{k+1})}{1-r} \end{aligned}$$

y se cumple para $n = k + 1$

– Como consecuencia del principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para $n \in \mathbb{Z}^+$.

♠♠♠♠

Ejercicio 8. (7 puntos)

(a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i$, $w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.

Una de las raíces, w_1, satisface la condición $\operatorname{Re}(w_1) = 0$.

(b) Sabiendo que:

$$w_1 = \frac{z}{z-i}$$

exprese z en la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.

Solución:

(a) Las raíces de la ecuación son las raíces cúbicas de $8i = 8_{90^\circ}$. Estas raíces son:

$$\begin{aligned} 2_{30^\circ} &= 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i \\ 2_{150^\circ} &= 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\sqrt{3} + i \\ 2_{270^\circ} &= 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2i \end{aligned}$$

(b) Por el apartado anterior $w_1 = -2i$. Entonces:

$$-2i = \frac{z}{z-i}\ ; \qquad -2i(z-i) = z\ ; \qquad 2 = z(1+2i)$$

despejando:

$$z = \frac{2}{1+2i} = \frac{2(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

♠♠♠♠

40.2. Sección B

Ejercicio 9. (15 puntos)

Considere el polinomio $P(z) = z^4 - 6z^3 - 2z^2 + 58z - 51$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Exprese $P(z)$ en la forma $(z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 58x - 51$, indicando claramente las coordenadas de todos los máximos, mínimos y cortes con los ejes.

(c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, indique qué condición tiene que cumplir $k \in \mathbb{R}$ para que todas las raíces de la ecuación $P(z) = k$ sean reales

Solución:

(a) Pueden buscarse las raíces de este polinomio con la calculadora. Puede verse que tiene las raíces enteras 1 y -3:

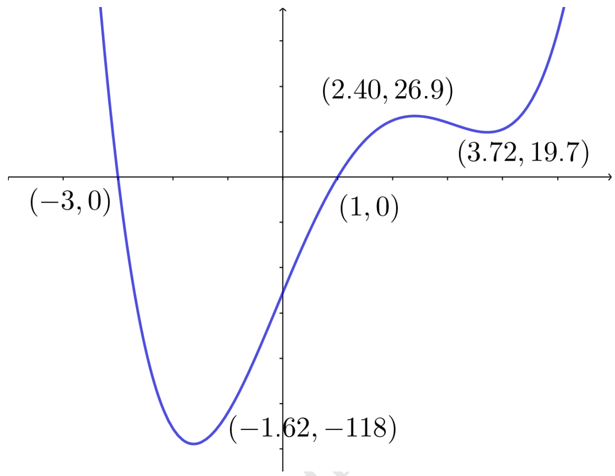
	1	-6	-2	58	-51
1		1	-5	-7	51
	1	-5	-7	51	0

	1	-5	-7	51
-3		-3	24	-51
	1	-8	17	0

Por consiguiente:

$$z^4 - 6z^3 - 2z^2 + 58z - 51 = (z-1)(z+3)(z^2 - 8z + 17) = (z^2 + 2z - 3)(z^2 - 8z + 17)$$

(b) Dibujamos la gráfica con la calculadora:



(c) La ecuación tiene 4 raíces complejas. Si queremos que las cuatro raíces sean reales, la recta $y = k$ debe cortar a la curva en 4 puntos. Esto sucede si $19{,}7 < k < 26{,}9$.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. (16 puntos)

Steffi la gata callejera acude con Frecuencia a casa de Will en busca de comida. Sea X la variable aleatoria discreta 'el número de veces al día que Steffi acude a casa de Will'. La variable aleatoria X se puede modelizar por una distribución de Poisson de media 2,1.

(a) Halle la probabilidad de que un día elegido al azar, Steffi no acuda a casa de Will.

Sea Y la variable aleatoria discreta 'el número de veces al día que a Steffi le dan de comer en casa de Will'. Cada día, a Steffi solo le dan de comer las cuatro primeras veces que acude a la casa.

(b) Copie y complete la siguiente tabla de distribución de probabilidades correspondiente a Y:

y	0	1	2	3	4

(c) A partir de lo anterior, halle el número esperado de veces al día que le dan de comer a Steffi en casa de Will.

(d) En un año cualquiera de 365 días, la probabilidad de que Steffi no acuda a casa de Will como mucho n días en total es igual a 0,5 (aproximada a una cifra decimal). Halle el valor de n.

(e) Muestre que el número esperado de veces al año en las que Steffi acude a casa de Will y no le dan de comer es al menos 30.

Solución:

(a) Si $X \sim \text{Po}(2{,}1)$:

$$\text{p}(X = 0) \simeq 0{,}122$$

(b) Las probabilidades de Y son las mismas que las de X para 0, 1, 2 y 3. Por otra parte:

$$\text{p}(Y = 4) = \text{p}(X \geq 4)$$

Entonces, con tres cifras significativas:

y	0	1	2	3	4
	0,122	0,257	0,270	0,189	0,161

(c) El valor esperado de Y es:

$$\text{E}(Y) = \sum_{k=0}^{4} k \cdot \text{p}(Y = k) \simeq 2{,}01$$

(d) Sea N la variable aleatoria que representa el número de días en un año en que Steffi no acude a casa de Will. Esta variable sigue una distribución binomial $\text{B}(365; 0{,}122)$ (la probabilidad de éxito la hemos calculado en el primer apartado). Entonces:

$$\text{p}(N \leq n) = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad n = 44$$

Para calcular n hemos estudiado en la calculadora la tabla resultante de introducir la función $Y = \text{binomcdf}(365; 0{,}122; x)$.

(e) El número esperado de veces en un dia que a Steffi no le dan de comer es

$$1 \times \text{p}(X = 5) + 2 \times \text{p}(X = 6) + 3 \times \text{p}(X = 7) + \ldots = 0{,}840 + \ldots > 0{,}0840$$

Entonces, el número esperado de veces que en un año no le dan de comer será mayor que

$$0{,}0840 \times 365 = 30{,}7$$

♠♠♠♠

Ejercicio 11. (19 puntos)

El plano Π_1 contiene a los puntos $P(1, 6, -7)$, $Q(0, 1, 1)$ y $R(2, 0, -4)$.

(a) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a P, Q y R.

La ecuación cartesiana del plano Π_2 es $x - 3y - z = 3$.

(b) Sabiendo que Π y Π_2 se cortan en una recta L, verifique que la ecuación vectorial de L se puede dar mediante:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

La ecuación cartesiana del plano Π_3 es $ax + by + cz = 1$.

(c) Sabiendo que Π_3 es paralelo a la recta L, muestre que $a + 2b - 5c = 0$.

Considere el caso en el que Π_3 contiene a L.

(d) (I) Muestre que $5a - 7c = 4$.

(II) Sabiendo que Π_3 está igual de inclinado hacia Π_1 que hacia Π_2, determine dos ecuaciones cartesianas posibles y distintas para Π_3

Solución:

(a) Pueden tomarse como vectores directores del plano $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$:

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación del plano como determinante es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-6 & -5 & -6 \\ z+7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$33(x-1)+11(y-6)+11(z+7)=0\ ; \qquad 3(x-1)+y-6+z+7=0\ ; \qquad 3x+y+z-2=0$$

(b) La recta debe estar contenida en los dos planos. Por una parte, el vector director de la recta debe ser perpendicular a los vectores normales a los planos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}+1-\frac{5}{2}=0\ ; \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}-3+\frac{5}{2}=0$$

Vemos que es perpendicular. Por otra parte, el punto $A\left(\frac{5}{4},0,-\frac{7}{4}\right)$ debe estar contenido en los planos:

$$3\cdot\frac{5}{4}+0-\frac{7}{4}-2=0\ ; \qquad \frac{5}{4}-0+\frac{7}{4}-3=0$$

El punto está en los planos. Por consiguiente L es la intersección de los dos planos.

(c) Si la recta es paralela al plano el vector normal al plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{2}+b-\frac{5c}{2}=0 \quad\Longrightarrow\quad a+2b-5c=0$$

(d) (I) Si Π_3 contiene a L, el punto $A\left(\frac{5}{4},0,-\frac{7}{4}\right)$ está en Π_3:

$$\frac{5a}{4}-\frac{7c}{4}=1\ ; \qquad 5a-7c=4$$

(II) En este caso Π_3 debe ser uno de los planos bisectores de Π_1 y Π_2. Estos planos son:

$$\frac{3x+y+z-2}{\sqrt{9+1+1}} = \pm\frac{x-3y-z-3}{\sqrt{1+3+1}}$$

$$3x+y+z-2=\pm(x-3y-z-3)$$

Uno de los planos es:

$$3x+y+z-2=x-3y-z-3\ ; \qquad 2x+4y+2z+1=0$$

y el otro:

$$3x+y+z-2=-(x-3y-z-3)\ ; \qquad 4x-2y+1=0$$

♠♠♠♠