

Matemáticas Aplicadas II. Curso 2009-2010.

Exámenes

1. Probabilidad

Ejercicio 1

- ◇ Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número mayor que en la primera.
- ◇ Se extraen tres cartas de una baraja de 40 cartas. Calcular la probabilidad de que las tres cartas tengan números distintos.

Solución:

Los resultados posibles del experimento son:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36
41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66

Hay 15 de los 36 resultados en los que el segundo número es mayor que el primero. La probabilidad es por tanto $\frac{15}{36}$.

Sacamos una carta. Al hacer la segunda extracción, la probabilidad de que la segunda carta sea distinta de la primera es $\frac{36}{39}$. Sacamos una tercera carta, la probabilidad de que sea distinta de las dos primeras es $\frac{32}{38}$. La probabilidad que nos piden es

$$p = \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = 0,7773$$

Ejercicio 2. De los sucesos A y B se sabe que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3$. Hallar la probabilidad $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$ y $p(A \cap \overline{B})$.

Solución:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3 \implies p(\overline{A \cup B}) = 0,3 \implies p(A \cup B) = 0,7$$

Entonces:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2$$
$$p(A \cap \overline{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$$

Ejercicio 3. Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con $p(A) = 0,7$, $p(B) = 0,6$ y $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,58$. ¿Son independientes A y B ?

Solución:

$$p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,58 \implies p(\overline{A \cap B}) = 0,58 \implies p(A \cap B) = 1 - 0,58 = 0,42$$

Puesto que:

$$p(A) \cdot p(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42 = p(A \cap B)$$

los sucesos son independientes.

Ejercicio 4. Una encuesta revela que el 35% de los habitantes de una ciudad escucha la emisora A, el 28% la emisora B y el 10% oye ambas emisoras. Se elige al azar uno de esos ciudadanos. Calcular la probabilidad de que escuche:

- ◇ Alguna de esas emisoras.
- ◇ Ninguna de ellas.
- ◇ La emisora A sabiendo que no escucha la B.
- ◇ Solo una de las dos.

Solución:

Llamando:

A = “la persona elegida escucha la emisora A”

B = “la persona elegida escucha la emisora B”

tenemos que $P(A) = 0,35$, $p(B) = 0,28$ y $P(A \cap B) = 0,10$. Entonces tenemos:

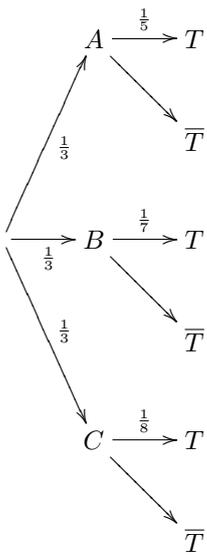
- ◇ $p(\text{“escucha alguna de estas emisoras”}) = p(A \cup B) = 0,35 + 0,28 - 0,10 = 0,53$
- ◇ $p(\text{“no escucha ninguna de ellas”}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,53 = 0,47$
- ◇ $p(\text{“escucha A sabiendo que no escucha B”}) = p(A/\overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{0,35 - 0,10}{0,72} = 0,3472$
- ◇ $p(\text{“escucha solo una de las dos”}) = p(A - B) + p(B - A) = 0,35 - 0,10 + 0,28 - 0,10 = 0,43$

Ejercicio 5. En una casa hay tres llaveros A B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que solo una abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.

- ◇ ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
- ◇ ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero elegido sea el tercero y la llave no abra?
- ◇ Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero A?

Solución:

El problema responde al siguiente esquema:



donde hemos llamado:

A = “escoger el llavero A ”

B = “escoger el llavero B ”

C = “escoger el llavero C ”

T = “la llave abre el trastero”

Entonces:

$$p(T) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{131}{840}$$

$$p(C \cap \bar{T}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$$

$$p(A/T) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \frac{56}{131}$$

2. Segundo examen de probabilidad

Ejercicio 1. En un experimento se sabe que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,7$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,15$. Calcula:

$$\diamond p(A \cap B)$$

$$\diamond p(A \cap \overline{B})$$

$$\diamond p(A/B)$$

Solución:

Si $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 0,15$, entonces:

$$p(A \cup B) = 1 - 0,15 = 0,85 \quad \implies \quad p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,5 + 0,7 - 0,85 = 0,35$$

A partir de aquí:

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0,5 - 0,35 = 0,15$$

y

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,35}{0,7} = 0,50$$

Ejercicio 2. Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

\diamond "obtener tres caras"

\diamond "obtener dos caras y una cruz"

\diamond "obtener al menos una cara"

Solución:

Llamando C al resultado cara y X al resultado cruz, el espacio muestral es:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Entonces:

$$p(\text{"obtener tres caras"}) = \frac{1}{8}$$

$$p(\text{"obtener dos caras y una cruz"}) = \frac{3}{8}$$

$$p(\text{"obtener al menos una cara"}) = \frac{7}{8}$$

Ejercicio 3. En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados se pide calcular la probabilidad de obtener:

\diamond Tres unos.

\diamond Al menos un dos.

\diamond Tres números distintos.

\diamond Una suma de diez.

Solución:

La probabilidad de sacar tres unos es por la regla del producto:

$$p(\text{"tres unos"}) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

La probabilidad de no sacar ningún dos es:

$$p(\text{"ningún dos"}) = \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

de forma que la probabilidad de sacar algún dos es:

$$p(\text{"algún dos"}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Al tirar el segundo dado, la probabilidad de obtener un número diferente que en el primer lanzamiento es $\frac{5}{6}$. Si lanzamos el tercer dado, la probabilidad de obtener un número diferente que en los dos primeros lanzamientos es $\frac{4}{6}$. Entonces:

$$p(\text{"tres números diferentes"}) = \frac{5}{6} \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Una suma de 10 puede obtenerse de las siguientes maneras:

145 154 415 451 514 541
 136 163 316 361 613 631
 226 262 622
 235 253 325 352 523 532
 244 424 442
 334 343 433

En total, 27 resultados favorables de los 216 posibles. La probabilidad de obtener suma 10 es

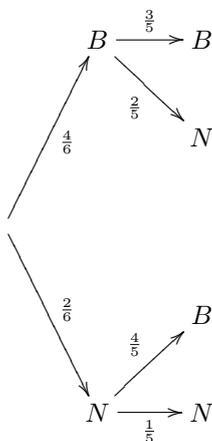
$$p(\text{"suma diez"}) = \frac{27}{216}$$

Ejercicio 4. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

- ◇ ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?
- ◇ Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?

Solución:

El problema puede representarse mediante el siguiente esquema:



La probabilidad de que las dos sean blancas es:

$$p(B_1 B_2) = \frac{4}{6} \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Si la segunda es negra:

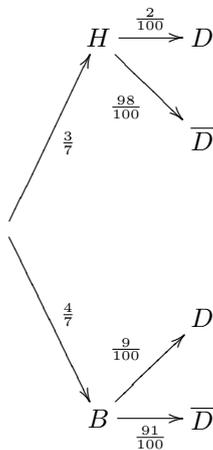
$$p(N_1/N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_2)} = \frac{\frac{2}{6} \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 5. En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y las de que lo sea una de bajo consumo es de 0,09. Se escoge una bombilla al azar:

- ◇ Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa.
- ◇ Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

Solución:

En este caso el esquema es el siguiente:



La probabilidad de que la bombilla no sea defectuosa es:

$$p(\bar{D}) = \frac{3}{7} \frac{98}{100} + \frac{4}{7} \frac{91}{100} = \frac{658}{700}$$

En cuanto a la segunda cuestión:

$$p(H/\bar{D}) = \frac{p(H \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{\frac{3}{7} \frac{98}{100}}{\frac{658}{700}} = \frac{294}{658}$$

3. Recuperación de probabilidad

Ejercicio 1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$p(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad p(\bar{B}) = \frac{2}{3}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar $p(B)$, $p(A)$ y $p(\bar{A} \cap B)$.

Solución:

La probabilidad de B se calcula fácilmente puesto que se conoce la de su contrario:

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ resulta que:

$$\frac{3}{4} = p(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \implies p(A) = \frac{2}{3}$$

y finalmente

$$p(\bar{A} \cap B) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Ejercicio 2. Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Calcular:

$$p(A \cup B), \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}), \quad p(A/B), \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Solución:

$$p(A \cup B) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$$

$$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

Ejercicio 3. En una cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:

- ◇ Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?
- ◇ Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?
- ◇ Cuál es la probabilidad de que no tenga ojos ni cabellos castaños?

Solución:

Llamemos O = “tener ojos castaños” y C = “tener cabellos castaños”:

$$p(O/C) = \frac{p(O \cap C)}{p(C)} = \frac{0,15}{0,40} = \frac{3}{8}$$

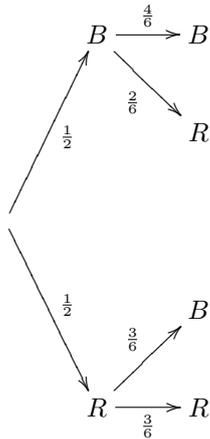
$$p(C/O) = \frac{p(O \cap C)}{p(O)} = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}$$

$$p(\bar{O} \cap \bar{C}) = p(\overline{O \cup C}) = 1 - p(O \cup C) = 1 - (0,40 + 0,25 - 0,15) = 0,50$$

Ejercicio 4. Una caja A contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja B contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de A a B y después se extrae una bola de B .

- ◊ Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.
- ◊ Si la bola extraída ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la bola trasladada haya sido también blanca.

Solución:



Del esquema anterior se deduce que:

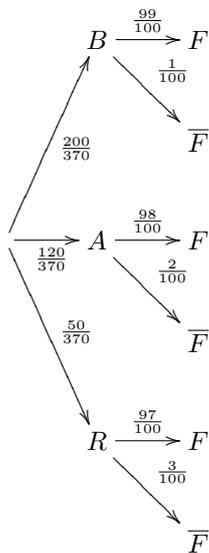
$$\diamond p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{12}$$

$$\diamond p(B_1/B_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

Ejercicio 5. Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 50 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

- ◊ Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.
- ◊ Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

Solución:



En este caso resulta:

$$\diamond p(\bar{F}) = \frac{200}{370} \cdot \frac{1}{100} + \frac{120}{370} \cdot \frac{2}{100} + \frac{50}{370} \cdot \frac{3}{100} = \frac{59}{3700}$$

$$\diamond p(A/\bar{F}) = \frac{\frac{120}{370} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{59}{3700}} = \frac{24}{59}$$

4. Estadística

Ejercicio 1.

- ◇ En la distribución normal $N(0, 1)$ calcula un intervalo característico del 82%.
- ◇ Calcula un intervalo característico del 75% en la distribución $N(200, 43)$.

Solución:

- ◇ $p(-z_p < z < z_p) = 0,82 \implies p(z < z_p) = 0,91 \implies z_p = 1,34$
- ◇ Calculamos en primer lugar el intervalo característico en $N(0, 1)$:

$$p(-z_p < z < z_p) = 0,75 \implies p(z < z_p) = 0,875 \implies z_p = 1,15$$

Los extremos del intervalo en $N(200, 43)$ son

$$200 - 1,15 \cdot 43 = 150,55; \quad 200 + 1,15 \cdot 43 = 249,45$$

El intervalo característico es $(150,55; 249,45)$.

Ejercicio 2. La cantidad de café depositada en cada bolsa por una máquina envasadora sigue una distribución normal con media $\mu = 1040$ gramos y desviación típica 50 gramos:

- ◇ Calcula la probabilidad de que un paquete escogido al azar pese más de un kilo.
- ◇ Calcula x_0 sabiendo que el 97,5% de los paquetes pesan menos de x_0 gramos.
- ◇ Calcula el tanto por ciento de paquetes cuyo contenido tiene un peso comprendido entre 950 y 1050 gramos.

Solución:

- ◇ $p(x > 1000) = p(z > \frac{1000 - 1040}{50}) = p(z > -0,8) = p(z < 0,8) = 0,7881$
- ◇ $p(z < z_0) = 0,975 \implies z_0 = 1,96 \implies x_0 = 1040 + 1,96 \cdot 50 = 1138$
- ◇ $p(950 < x < 1050) = p(-1,8 < z < 0,2) = p(z < 0,2) - p(z < -1,8) = 0,5434$

Ejercicio 3. El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91; 68; 39; 82; 55; 70; 72; 62; 54; 67

- ◇ Determínese un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.
- ◇ Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%.

Solución:

La media muestral es $\bar{x} = 66$. Para el nivel de confianza $c = 0,90$, $z_c = 1,645$. El intervalo de confianza tiene como extremos:

$$66 - \frac{1,645 \cdot 15}{\sqrt{10}} = 58,20$$

$$66 + \frac{1,645 \cdot 15}{\sqrt{10}} = 73,80$$

El intervalo es (58,20; 73,80).

Para $c = 0,95$, $z_c = 1,96$. Si el error debe ser menor de 5 se cumple que:

$$\frac{1,96 \cdot 15}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(\frac{1,96 \cdot 15}{5}\right)^2 = 34,57$$

y el tamaño muestral mínimo es $n_{min} = 35$

Ejercicio 4. La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea \bar{X} la media muestral de la edad de casamiento.

- ◇ ¿Cuáles son la media y la varianza de \bar{X} ?
- ◇ ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución:

La distribución de medias muestrales tiene el mismo valor medio que la población, es decir, 35 y desviación típica:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0,5$$

Por tanto, la varianza es $s^2 = 0,25$.

La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 36 y 37 la calculamos a partir de la distribución $N(35; 0,5)$:

$$p(36 < \bar{x} < 37) = p\left(\frac{36 - 35}{0,5} < z < \frac{37 - 35}{0,5}\right) = p(2 < z < 4) = 0,0228$$

Ejercicio 5. El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

- ◇ ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98%? Razónese.
- ◇ ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95%?

Solución:

Con un nivel de confianza $c = 0,98$ resulta $z_c = 2,33$. El error en la estimación es:

$$E = \frac{z_c \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,33 \cdot 1}{8} = 0,291$$

que es menor que 0,5.

Si el nivel de confianza es $c = 0,95$ resulta que $z_c = 1,96$ y el tamaño de la muestra debe cumplir que:

$$\frac{1,96 \cdot 1}{\sqrt{n}} < 0,5 \implies n > \left(\frac{1,96 \cdot 1}{0,5}\right)^2 = 15,37$$

con lo que el tamaño mínimo de la muestra debe ser $n_{min} = 16$

5. Segundo examen de estadística

Ejercicio 1.

- ◇ En una distribución normal $N(0, 1)$ calcula $p(-1,25 < z < 2,4)$.
- ◇ En la distribución $N(32, 5)$ calcula un intervalo característico del 84%.

Solución:

$$p(-1,25 < z < 2,4) = p(z < 2,4) - p(z < -1,25) = p(z < 2,4) - p(z > 1,25) = 0,9918 - 0,4013 = 0,5905$$

El intervalo característico tiene la forma $(\mu - z_p\sigma, \mu + z_p\sigma)$. Calculamos el valor de z_p :

$$p(-z_p < z < z_p) = 0,84 \implies p(z < z_p) = 0,92 \implies z_p = 1,41$$

Los extremos del intervalo son $32 \pm 1,41 \cdot 5$. El intervalo característico resulta ser $(24,95; 39,05)$.

Ejercicio 2. En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población de la que procede esa muestra es de 2 años.

- ◇ Obtenga un intervalo de confianza al 95% para la edad media de la población.
- ◇ ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, tenga de amplitud a lo sumo 0,5?

Solución:

- ◇ Para un nivel de confianza $c = 0,95$, $z_c = 1,96$. Los extremos del intervalo de confianza son:

$$17,4 \pm \frac{1,96 \cdot 2}{16}$$

y el intervalo es $(17,16; 17,65)$.

- ◇ Si $c = 0,90$, $z_c = 1,645$. Si la amplitud del intervalo de confianza es a lo sumo de 0,5, el error en la estimación debe ser menor que 0,25. Por consiguiente:

$$\frac{1,645 \cdot 2}{\sqrt{n}} < 0,25 \implies n > \left(\frac{1,645 \cdot 2}{0,25} \right)^2 = 173,19 \implies n_{min} = 174$$

Ejercicio 3. El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:

255, 85, 120, 290, 80, 80, 275, 290, 135

- ◇ Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.
- ◇ Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99%, el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

Solución:

- ◇ Para un nivel de confianza $c = 0,98$:

$$p(-z_c < z < z_c) = 0,98 \implies p(z < z_c) = 0,99 \implies z_c = 2,33$$

El intervalo de confianza tiene por extremos:

$$178,89 \pm \frac{2,33 \cdot 100}{3}$$

y el intervalo resulta ser $(101,22; 256,56)$.

- ◇ Si $c = 0,99$, $z_c = 2,575$. Si queremos que el error en la estimación sea menor que 50, debe verificarse que:

$$\frac{2,575 \cdot 100}{\sqrt{n}} < 50 \implies n > \left(\frac{2,575 \cdot 100}{50} \right)^2 = 26,52 \implies n_{min} = 27$$

Ejercicio 4. Se ha medido la talla de 100 personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de 1,75 m. Se sabe que la desviación típica de la población es 0,2 m.

- ◇ Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional de la talla de los estudiantes.
 ◇ ¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo (1,73; 1,77) para la media poblacional?

Solución:

- ◇ En este caso $c = 0,90$ y $z_c = 1,645$, con lo que los extremos del intervalo son:

$$1,75 \pm \frac{1,645 \cdot 0,2}{10}$$

y el intervalo es (1,72; 1,78).

- ◇ El error en la estimación es la mitad de la longitud del intervalo de confianza:

$$E = \frac{1,77 - 1,73}{2} = 0,02$$

Entonces:

$$0,02 = \frac{z_c \cdot 0,2}{\sqrt{100}} \implies z_c = 1$$

Y el nivel de confianza es:

$$c = p(-1 < z < 1) = p(z < 1) - p(z < -1) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826 = 68,26 \%$$

Ejercicio 5. Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 2$ horas.

- ◇ A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (7,26; 8,14) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.
 ◇ Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 98%.

Solución:

- ◇ Como en el problema anterior, el error en la estimación es la mitad de la longitud del intervalo de confianza:

$$E = \frac{8,14 - 7,26}{2} = 0,44$$

Entonces:

$$0,44 = \frac{z_c \cdot 2}{8} \implies z_c = 1,76 \implies c = p(-1,76 < z < 1,76) = 0,9216 = 92,16 \%$$

- ◇ Si $c = 0,98$, $z_c = 2,33$. Si el error en la estimación debe ser menor de 0,75, debe cumplirse que:

$$\frac{2,33 \cdot 2}{\sqrt{n}} < 0,75 \implies n > \left(\frac{2,33 \cdot 2}{0,75} \right)^2 = 38,61 \implies n_{min} = 39$$

6. Derivadas

Ejercicio 1. Derivar las siguientes funciones:

1. $y = 4x^2 - 3x + 2$

2. $y = (3x + 1)^2$

3. $y = (3x^2 - 2x + 5)^2$

4. $y = \sqrt{3x + 1}$

5. $y = (3x + 1) \cdot (x^2 - 6x + 3)$

6. $y = \frac{3x^2}{4}$

7. $y = \frac{3x^4 + 2x - 1}{3x^2 - 1}$

8. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

9. $y = \frac{1}{x}$

10. $y = \sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$y = 4x^2 - 3x + 2$

$y' = 8x - 3$

$y = (3x + 1)^2$

$y' = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3$

$y = (3x^2 - 2x + 5)^2$

$y' = 2 \cdot (3x^2 - 2x + 5) \cdot (6x - 2)$

$y = \sqrt{3x + 1}$

$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$

$y = (3x + 1) \cdot (x^2 - 6x + 3)$

$y' = 3 \cdot (x^2 - 6x + 3) + (2x - 6) \cdot (3x + 1)$

$y = \frac{3x^2}{4}$

$y' = \frac{6x}{4}$

$y = \frac{3x^4 + 2x - 1}{3x^2 - 1}$

$y' = \frac{(12x^3 + 2)(3x^2 - 1) - 6x \cdot (3x^4 + 2x - 1)}{(3x^2 - 1)^2}$

$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

$y = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{-1}{x^2}$

$y = \sqrt[3]{x^2}$

$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

Ejercicio 2. Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola.

Solución:

Las coordenadas de los puntos de intersección son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \implies 2x^2 - 5x + 1 = -x - 1 \implies 2x^2 - 4x + 2 = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$$

Esta ecuación tiene una única solución $x = 1$ a la que corresponde el valor $y = 2$. Así pues el punto de intersección de la parábola y la recta es $(1, -2)$.

Ejercicio 3. Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

Solución:

En los puntos de tangente horizontal la derivada es cero. Igualando a cero la derivada resulta:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

Calculamos la ordenada sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva y obtenemos los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

Calculamos en primer lugar la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = y(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Así pues la tangente pasa por el punto $(2, 0)$.

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de abscisa 2, es decir:

$$y' = 2x - 5 \implies m = y'(2) = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y = -1 \cdot (x - 2)$$

Ejercicio 5. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Solución:

Los puntos de corte con el eje de abscisas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

que son los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

Teniendo en cuenta que $y' = -2x$, la pendiente de las tangentes en estos puntos es:

$$\begin{cases} m_1 = y'(-2) = 4 \\ m_2 = y'(2) = -4 \end{cases}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = 4 \cdot (x + 2); \quad y = -4 \cdot (x - 2)$$

Ejercicio 6. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?

Solución: Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola. Igualamos la derivada a 8 y resulta:

$$y' = 3x^2 - 4 = 8 \implies 3x^2 = 12 \implies x_1 = -2, x_2 = 2$$

Las ordenadas de la curva para estos valores son:

$$\begin{cases} y(-2) = -8 + 8 = 0 \\ y(2) = 8 - 8 = 0 \end{cases}$$

Los puntos son $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

Ejercicio 7. Representar gráficamente la curva $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ calculando sus máximos mínimos y puntos de inflexión.

Solución:

Ejercicio 8. Se considera la función:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$$

Calcular:

- ◇ (1 punto) Intersecciones con los ejes y asíntotas.
- ◇ (0,75 puntos) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ◇ (0,75 puntos) Representación gráfica.

Solución:

7. Integrales

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

1. $\int (5x^2 - 6x - 2) dx$
2. $\int \sqrt{x} dx$
3. $\int (4x + 1)^3 dx$
4. $\int \frac{3}{\sqrt{x-5}} dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \diamond \int (5x^2 - 6x - 2) dx &= \frac{5x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} - 2x + C = \frac{5x^3}{3} - 3x^2 - 2x + C \\ \diamond \int \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C \\ \diamond \int (4x + 1)^3 dx &= \frac{(4x + 1)^4}{4} \cdot \frac{1}{4} + C \\ \diamond \int \frac{3}{\sqrt{x-5}} dx &= 3 \int (x-5)^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \cdot \frac{(x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x-5} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx$
2. $\int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \diamond \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = 9 \\ \diamond \int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx &= \left[\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_{-1}^3 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Representar gráficamente la parábola $y = 3x^2 - x + 1$ y calcular el área comprendida entre esa curva, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

La parábola tiene como vértice el punto:

$$x_0 = \frac{1}{6}; \quad y_0 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{11}{12} \quad \implies \quad V \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12} \right)$$

No tiene puntos de corte con el eje X pues el sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

no tiene solución. La intersección con el eje Y es $(0, 1)$.

La representación gráfica aparece en la figura 1. Puesto que la curva no corta al eje X , el área puede calcularse mediante la integral:

$$S = \int_0^4 (3x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^4 = (64 - 8 + 4) - 0 = 60$$

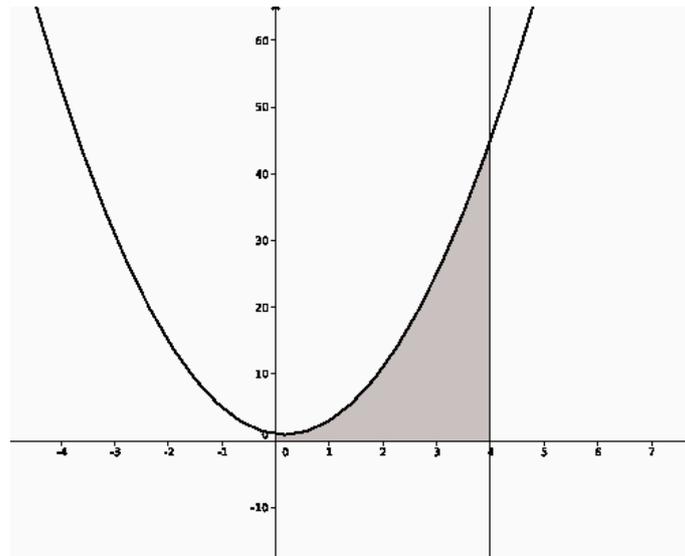


Figura 1: Ejercicio 3

Ejercicio 4. Se considera el recinto limitado por la parábola $y = x^2 + x - 2$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 4$. Representarlo gráficamente y calcular su área.

Solución:

La parábola tiene como vértice el punto

$$x_0 = \frac{-1}{2}; \quad y_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

y corta al eje X en los puntos

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \implies x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

La representación gráfica puede verse en la figura 2. Puesto que la curva corta al eje de abscisas, para calcular el área de la zona sombreada es preciso calcular dos integrales:

$$\int_{-1}^1 (x^2 + x - 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) = -\frac{10}{3}$$

$$\int_1^4 (x^2 + x - 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^4 = \left(\frac{64}{3} + 8 - 8 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{45}{2}$$

de modo que el área total es:

$$S = \frac{10}{3} + \frac{45}{2} = \frac{155}{6}$$

Ejercicio 5. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x$.

Solución:

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

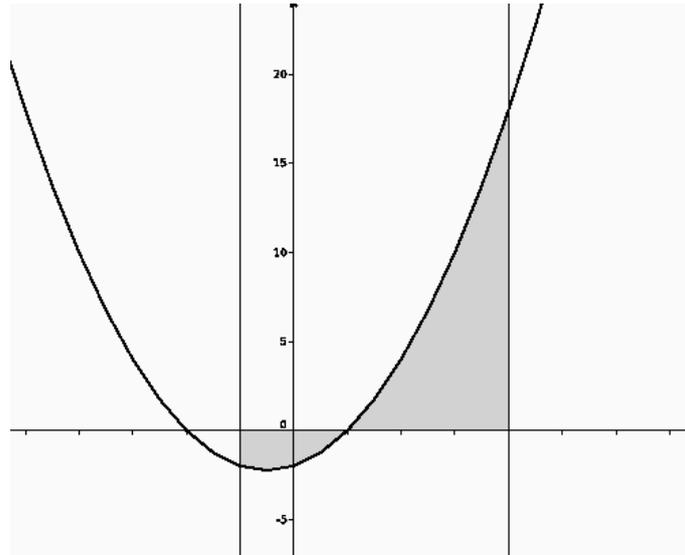


Figura 2: Ejercicio 4

Las soluciones de este sistema (para la incógnita x) son $x = 0$ y $x = 1$.

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_0^1 (2x^2 - 2x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente, la superficie es igual a $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 6. *Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.*

Solución:

Calculamos la ecuación de la recta tangente. La derivada de la función es

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de abscisa 0:

$$m = y'(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, es decir, $y = x$.

Ahora debemos calcular el área comprendida entre la curva y su tangente, es decir, entre $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta $y = x$. Como en el ejercicio anterior, calculamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x \\ y = x \end{cases} \implies x_1 = 0, x_2 = 2$$

Como las dos gráficas se cortan solamente en dos puntos, para calcular el área comprendida entre las dos, basta calcular la integral de la diferencia, o sea,

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - x) dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$$

y la superficie encerrada por la curva y la tangente es igual a $\frac{4}{3}$.

8. Examen final

Ejercicio 1. Hallar los valores de k para los cuales la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

no posee inversa. Calcular A^{-1} para $k = 0$.

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot (k-1) \cdot 2 + k(k-2) - 2(k-2) + 2 - k(k-1)(-1) = 2k^2 - 9k + 9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \implies k = 3, k = \frac{3}{2}$$

Para estos valores de k no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \implies \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k = 0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

Solución:

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a^2 - 4)$$

donde hemos hecho la transformación $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$. El determinante es cero cuando $a^2 - 4$ es cero, esto es, para $a = -2$ y $a = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

◊ $a \neq -2, a \neq 2$. En este caso $\text{rango } A = \text{rango } A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado.

◊ $a = -2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{suprimiendo una columna de la matriz } A \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{sumando la primera fila a las otras dos} \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

◊ $a = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado puesto que el rango de las dos matrices es 2.

Vamos a resolver el sistema para $a = 2$. Puesto que el rango de las dos matrices es 2 solamente hay 2 ecuaciones independientes. El sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

No podemos tomar z como parámetro puesto que quedaría el determinante de la matriz de coeficientes igual a cero. Tomemos $y = t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} 2x + 6z &= -2t \\ 2x + 4z &= 2 - 2t \end{aligned}$$

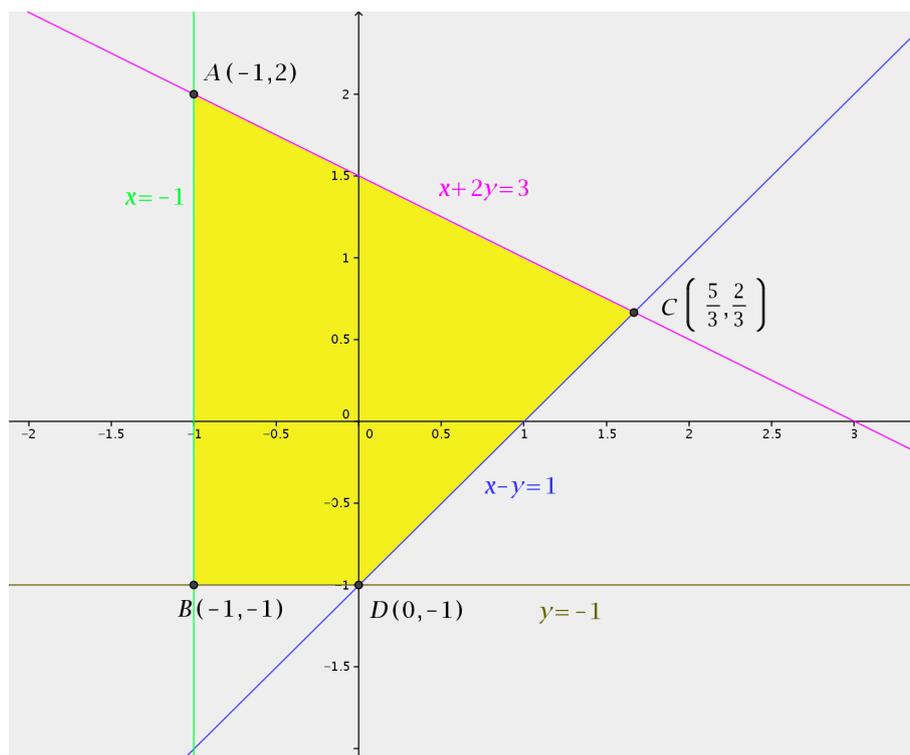
Resolviendo por la regla de Cramer resulta:

$$x = 3 - t; \quad y = t; \quad z = -1$$

Ejercicio 3. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

Solución:



En la figura aparece representada la región factible. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región es:

$$z(A) = z(-1, 2) = -1 + 2 = 1$$

$$z(B) = z(-1, -1) = -1 - 1 = -2$$

$$z(C) = z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$z(D) = z(0, -1) = 0 - 1 = -1$$

El valor máximo se produce en el punto C y el valor mínimo en el punto D .

Ejercicio 4. *Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón que se venden a 30 euros; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la oferta B. ¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar los ingresos?*

Solución:

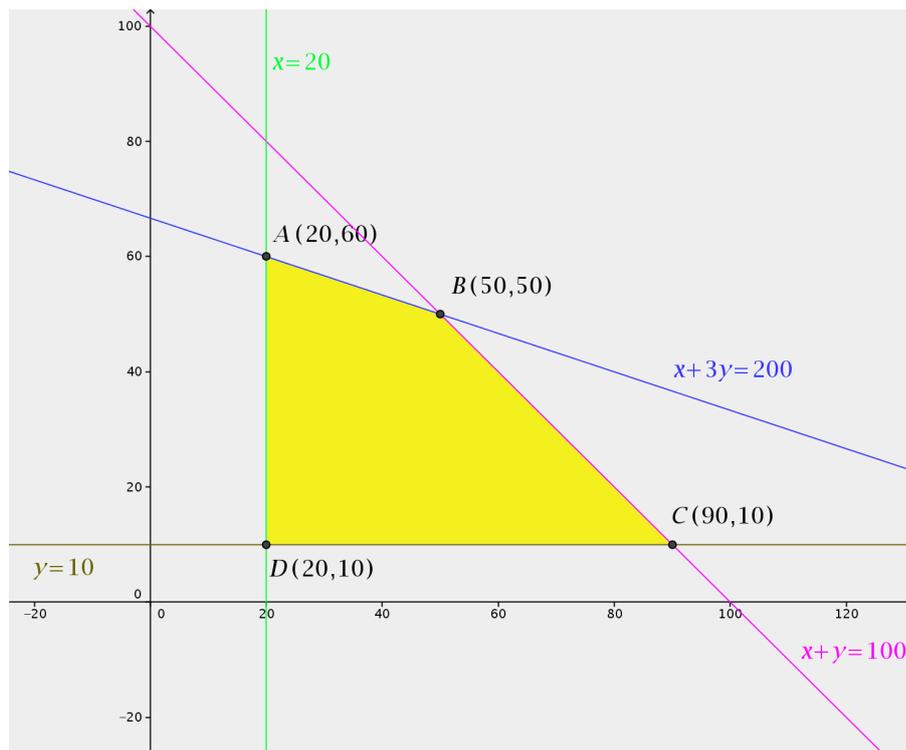
- ◇ Sea x el número de lotes de tipo A e y el número de lotes de tipo B que se venden. Los ingresos que se obtienen por la venta de estos lotes (la función objetivo) son:

$$F(x, y) = 30x + 50y$$

- ◇ Se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

◇ Con estas restricciones resulta la siguiente región factible:



◇ Los valores de la función objetivo en los vértices de la región:

$$F(20, 60) = 3600$$

$$F(50, 50) = 4000$$

$$F(90, 10) = 3200$$

$$F(20, 10) = 1100$$

Los máximos ingresos se producen con la venta de 50 lotes de tipo A y otros 50 de tipo B.

Ejercicio 5. De los sucesos A y B se sabe que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ y $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3$. Hallar la probabilidad $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$ y $p(A \cap \bar{B})$.

Solución:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3 \implies p(\overline{A \cup B}) = 0,3 \implies p(A \cup B) = 0,7$$

Entonces:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2$$

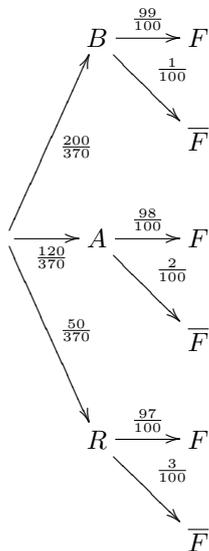
$$p(A \cap \bar{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$$

Ejercicio 6. Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 50 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

◇ Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

- ◇ Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

Solución:



En este caso resulta:

$$\diamond p(\bar{F}) = \frac{200}{370} \frac{1}{100} + \frac{120}{370} \frac{2}{100} + \frac{50}{370} \frac{3}{100} = \frac{59}{3700}$$

$$\diamond p(A/\bar{F}) = \frac{\frac{120}{370} \frac{2}{100}}{\frac{59}{3700}} = \frac{24}{59}$$

Ejercicio 7. La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea \bar{X} la media muestral de la edad de casamiento.

- ◇ ¿Cuáles son la media y la varianza de \bar{X} ?
- ◇ ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución:

La distribución de medias muestrales tiene el mismo valor medio que la población, es decir, 35 y desviación típica:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0,5$$

Por tanto, la varianza es $s^2 = 0,25$.

La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 36 y 37 la calculamos a partir de la distribución $N(35; 0,5)$:

$$p(36 < \bar{x} < 37) = p\left(\frac{36 - 35}{0,5} < z < \frac{37 - 35}{0,5}\right) = p(2 < z < 4) = 0,0228$$

Ejercicio 8. El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:

255, 85, 120, 290, 80, 80, 275, 290, 135

- ◇ Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.

- ◇ Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99%, el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

Solución:

- ◇ Para un nivel de confianza $c = 0,98$:

$$p(-z_c < z < z_c) = 0,98 \implies p(z < z_c) = 0,99 \implies z_c = 2,33$$

El intervalo de confianza tiene por extremos:

$$178,89 \pm \frac{2,33 \cdot 100}{3}$$

y el intervalo resulta ser (101,22; 256,56).

- ◇ Si $c = 0,99$, $z_c = 2,575$. Si queremos que el error en la estimación sea menor que 50, debe verificarse que:

$$\frac{2,575 \cdot 100}{\sqrt{n}} < 50 \implies n > \left(\frac{2,575 \cdot 100}{50} \right)^2 = 26,52 \implies n_{min} = 27$$

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

Calculamos en primer lugar la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = y(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Así pues la tangente pasa por el punto (2, 0).

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de abscisa 2, es decir:

$$y' = 2x - 5 \implies m = y'(2) = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y = -1 \cdot (x - 2)$$

Ejercicio 10. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x$.

Solución:

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema (para la incógnita x) son $x = 0$ y $x = 1$.

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_0^1 (2x^2 - 2x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente, la superficie es igual a $\frac{1}{3}$.