Matemáticas Aplicadas II. Curso 2009-2010. Exámenes

1. Matrices y determinantes

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 13 & 0 & -17 & 1 \\ 5 & 0 & -10 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(hemos sumado a la F_2, $5F_1$ y a F_3, $3F_1$)

Desarrollando por la segunda columna:

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 13 & -17 & 1 \\ 5 & -10 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -45$$

Ejercicio 2. *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -x & 3 & -1 \\ -x^2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} &(-1)\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot(-x)\cdot 1 + 2\cdot(-1)(-x^2) - 2\cdot 3\cdot(-x^2) - (-1)(-1)\cdot 1 - 2(-x)\cdot 3 \\ &= -9 - 2x + 2x^2 + 6x^2 - 1 + 6x \\ &= 8x^2 + 4x - 10 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación:

$$8x^2 + 4x - 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+320}}{16} = \frac{-4 \pm \sqrt{336}}{16}$$

Ejercicio 3. *Dada la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallar los valores de m para los que la matriz no tiene inversa. Hallar su inversa para $m = 1$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2$$

El determinante es cero para:

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1, \ x = 2$$

por consiguiente, existe la matriz inversa para $m \neq -1$ y $m \neq 2$.

Para $m = 1$, por la fórmula obtenida $|A| = -2$. Además:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. *Calcula $AB - BA$ siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Calcular el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8\end{bmatrix} = \qquad \begin{matrix}F_2 \to F_2 + F_1\\ F_4 \to F_4 + F_1\end{matrix}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 2 & 0 & 12\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}F_2 = F_3\\ F_4 = 2F_2\end{matrix}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$= 2$$

2. Segundo examen de matrices y determinantes

Ejercicio 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \ ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \ ; \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

calcular $(A+B)C^t$.

Solución:

$$\begin{aligned}(A+B)C^t &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Hallar los valores de k para los cuales la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

no posee inversa. Calcular A^{-1} para $k=0$.

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot (k-1) \cdot 2 + k(k-2) - 2(k-2) + 2 - k(k-1)(-1) = 2k^2 - 9k + 9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 3, \ k = \frac{3}{2}$$

Para estos valores de k no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k=0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{adj}\, A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k=0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango } A = \text{rango } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{poniendo ceros en la } 3^{\text{a}} \text{ columna}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad F_3 = F_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{intercambiamos } C_1 \text{ y } C_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad F_3 \to F_3 - F_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3$$

Ejercicio 4. Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

Solución: Poniendo ceros en la primera fila:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 4 \\ 3 & 11 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{desarrollamos por la } 1^{\text{a}}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 11 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 133$$

Ejercicio 5. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

calcular:

1. La matriz inversa de A.
2. La matriz X que verifica la ecuación:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

El determinante de A es igual a 1, de modo que la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{bmatrix}$$

3. Examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. *Estudia la compatibilidad del sistema y resuelve si es posible:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ -x - 5y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el rango de las matrices:

$$\begin{aligned}
\text{rango}\, A = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} && F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1 \\
= \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\
= 2 & \\
\text{rango}\, A^* = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} && \text{solo 2 de las 3 primeras columnas son independientes} \\
= \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} && F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1 \\
= \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
= 2 &
\end{aligned}$$

El sistema es por tanto, compatible, puesto que el rango de las dos matrices es el mismo, e indeterminado puesto que el rango es menor que el número de incógnitas.

Puesto que el rango es 2, solamente hay 2 ecuaciones independientes. Elegimos por ejemplo las dos primeras:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ -x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Llamando $z = t$ y pasando esta incógnita al segundo miembre resulta:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 + t \\ -x - 5y &= -t \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema por la regla de Cramer se obtiene finalmente:

$$x = \frac{2t + 15}{7}; \quad y = \frac{t - 3}{7}; \quad z = t$$

Ejercicio 2. *En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:*

- *Sin defecto, todos al precio de* 20 *euros.*
- *Con defecto no apreciable, con una rebaja del* 20 % *sobre el precio de los anteriores.*

- *Con defecto apreciable, con una rebaja del 60 % sobre el precio de los que no tienen defecto.*

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros y los que tienen defecto suponen el 40 % de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución:

Llamemos x al número de pantalones de la primera clase, y al número de pantalones de la segunda clase y z al número de pantalones de la tercera.

Los pantalones de la primera clase valen 20 euros, los de la segunda $20 - \frac{20}{100}20 = 16$ euros y los de la tercera $20 - \frac{60}{100}20 = 8$ euros.

Con los datos planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= 70 \\ 20x + 16y + 8z &= 1280 \\ y + \quad z &= 0{,}4x \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resulta $x = 50$, $y = 15$, $z = 5$.

Ejercicio 3. *Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:*

$$\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\left(a^2 - 4\right)$$

donde hemos hecho la transformación $F_3 \to F_3 - F_2$. El determinante es cero cuando $a^2 - 4$ es cero, esto es, para $a = -2$ y $a = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

- $a \neq -2,\ a \neq 2$. En este caso rango A = rango $A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- $a = -2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{suprimiendo una columna de la matriz } A \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{sumando la primera fila a las otras dos} \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

- $a = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

  El sistema es compatible indeterminado puesto que el rango de las dos matrices es 2.

Vamos a resolver el sistema para $a = 2$. Puesto que el rango de las dos matrices es 2 solamente hay 2 ecuaciones independientes. El sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

No podemos tomar z como parámetro puesto que quedaría el determinante de la matiz de coeficientes igual a cero. Tomemos $y = t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} 2x + 6z &= -2t \\ 2x + 4z &= 2 - 2t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer resulta:

$$x = 3 - t; \quad y = t; \quad z = -1$$

Ejercicio 4. *Discute y resuelve el siguiente sistema homogéneo según los valores de a:*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ ax + 2z &= 0 \\ 2x - y + az &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 3 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -\left[a(a+1) - 6\right] = -a^2 - a + 6$$

Para calcular el determinante se le ha sumado la primera fila a la tercera. El determinante es cero cuando $-a^2 - a + 6 = 0$ es decir para $a = 2$ y $a = -3$. Así, pueden presentarse los siguientes casos:

- $a \neq 2,\ a \neq -3$. El rango de la matriz de coeficientes es 3 y el sistema es compatible determinado. El sistema tiene una solución única que es la solución trivial $x = y = z = 0$.
- $a = 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2. Solamente hay 2 ecuaciones independientes de modo que el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

  que tiene como solución $x = -t, y = 0, z = t$.
- $a = -3$. El rango de la matriz también es 2. Como en el caso anterior solamente hay 2 ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -3x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

  Haciendo $z = t$ de la segunda ecuación se deduce fácilmente que $x = \frac{2}{3}t$ y sustituyendo en la primera da $y = -\frac{5}{3}t$. Puesto que en sistema homogéneo si se multiplica una solución por un número se obtiene otra solución, multiplicando por 3, la solución general puede expresarse de una manera más simple como $x = 2t,\ y = -5t,\ z = 3t$.

---

4. Segundo examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. *Estudiar y resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ 2x + 5y - 3z &= 15 \\ 11x - y &= 21 \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (F_2 \to F_2 + 3F_1)$$

De aquí deducimos que el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculamos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \operatorname{rango} A = \operatorname{rango} &\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 15 \\ 11 & -1 & 0 & 21 \end{bmatrix} && \text{(suprimimos la segunda columna)} \\ = \operatorname{rango} &\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 15 \\ 11 & 0 & 21 \end{bmatrix} && (F_2 \to F_2 + 3F_1) \\ = \operatorname{rango} &\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 11 & 0 & 21 \\ 11 & 0 & 21 \end{bmatrix} \\ = 2 & \end{aligned}$$

Así pues, las dos matrices tienen el mismo rango menor que el número de incógnitas: el sistema es compatible indeterminado.

Solamente tenemos dos ecuaciones independientes. Escogemos las dos primeras y tomamos $z = t$ como parámetro de modo que el sistema queda:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ 2x + 5y - 3z &= 15 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 2y &= 2 - t \\ 2x + 5y &= 15 + 3t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-t & -2 \\ 15+3t & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{40+t}{19}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2-t \\ 2 & 15+3t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41+11t}{19}; \qquad z = t$$

Ejercicio 2. *Discutir la compatibilidad del siguiente sistema*

$$\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}$$

según los valores de a y resolverlo para $a = 2$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 12a + 16 - 12a - 4a^2 - 24 = 2a^2 - 8$$

El determinante se anula para $a = -2$ y $a = 2$.

Pueden presentarse los siguientes casos:

- $a \neq -2$ y $a \neq 2$. En este caso rango $A^* =$ rango $A = 3$. El sistema es compatible determinado.
- $a = -2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && (C_2 = -C_1) \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && (F_2 \to F_2 + F_1;\ F_3 \to F_3 + F_1) \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

  En este caso, el sistema es incompatible.

- $a = 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} && (F_1 = F_3) \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

  El sistema es, en esta ocasión, compatible indeterminado.

Resolvamos para $a = 2$. Solamente hay dos ecuaciones independientes. Tomemos las dos primeras, no podemos escoger como parámetro la incçognita z pues nos quedaría un sistema com matriz de coeficientes con determinante cero. Tomemos como parámetro $x = t$. El sistema queda:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} 2y + 6z &= -2t \\ 2y + 4z &= 2 - 2t \end{aligned} \implies \begin{aligned} y + 3z &= -t \\ y + 2z &= 1 - t \end{aligned}$$

Resolviendo resulta:

$$x = t; \quad y = 3 - t; \quad z = -1$$

Ejercicio 3. *Discute y resuelve según los valores del parámetro el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \\ 4x + 2y - az &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo que será, por tanto, compatible.

El determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3a - 46$$

El determinante se anula para $a = \frac{46}{3}$. Pueden darse los siguientes casos:

- ◇ $a \neq \frac{46}{3}$. El rango de la matriz de coeficientes es 3 igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y su única solución es la solución trivial $x = y = z = 0$.
- ◇ $a = \frac{46}{3}$. El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el sistema es compatible indeterminado. Solamente hay dos ecuaciones independientes (por ejemplo, la primera y la tercera) de modo que el sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Tomando $z = t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= t \\ 3x + 4y &= -6t \end{aligned}$$

resolviendo por la regla de Cramer resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t & 3 \\ -6t & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{22t}{3}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & t \\ 3 & -6t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-21t}{3} = -7t; \qquad z = t$$

Ejercicio 4. *Por un helado, dos horchatas y cuatro batidos nos cobraron en una heladería* 17 *euros un día. Otro día por cuatro helados y cuatro horchatas nos cobraron* 22 *euros. Un tercer día tuvimos que pagar* 13 *euros por una horchata y cuatro batidos. Razonar si hay o no motivos para pensar que alguno de los días nos presentaron una factura incorrecta.*

Solución:

Llamemos x al precio del helado, y al precio de la horchata y z al precio del batido. De los datos resulta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 17 \\ 4x + 4y &= 22 \\ y + 4z &= 13 \end{aligned}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(hemos restado } F_1 \text{ a } F_3\text{)}$$

Quiere esto decir que el rango de la matriz de coeficientes es 2 puesto que el determinante de orden 3 es cero y hay menores de orden 2 en la matriz que tienen determinante distinto de cero.

El rango de la matriz ampliada es:

$$
\begin{aligned}
\text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 4 & 4 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{bmatrix} && \text{(suprimiendo una columna dependiente)} \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 4 & 0 & 22 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} && F_1 \to F_1 - F_3 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 22 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Así pues, los rangos de las matrices son diferentes y el sistema es incompatible. No puede valores de los precios que satisfagan las ecuaciones y, por consiguiente, alguna de las facturas era incorrecta.

5. Examen de recuperación

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Restando la primera columna a la última resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollando por la } 4^{\text{a}} \text{ fila:}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{y puesto que } C_3 = C_1 + C_2\text{:}$$

$$= 0$$

Ejercicio 2. *Calcular las inversas de las siguientes matrices:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \; ; \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

- ◇ La primera matriz tiene determinante -1. Así pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- ◇ Para la segunda matriz:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 1 - 20 = 3$$

además

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

De forma que, trasponiendo y dividiendo por el determinante resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ -2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 18 + 4 + 21 = 0$$

de forma que el rango de la matriz es menor que 3. Puesto que, por ejemplo, las dos primeras columnas son independientes, el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$$\operatorname{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

En el cálculo anterior, hemos suprimido la tercera columna puesto que el rango de la matriz de coeficientes es 2 y la cuarta porque es igual a la primera. Puesto que las dos matrices tienen rango 2 el sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos el sistema. Puesto que el rango de las matrices es 2, sólo hay dos ecuaciones independientes. Nos quedamos con la segunda y la tercera:

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 3 \\ -2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos como parámetro $z = t$. Pasando z al segundo miembro resulta:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 3 - 2z \\ -2y &= 0 - 7z \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$\begin{aligned} &x = 1 + \frac{1}{2}t \\ &y = \frac{7}{2}t \\ &z = t \end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro m:*

$$\begin{aligned} x + y + z &= m - 1 \\ 2x + y + mz &= m \\ x + my + z &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$$

El determinante se hace cero para:

$$-m^2+3m-2=0 \quad\Longrightarrow\quad m^2-3m+2=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} m=1\\ m=2\end{cases}$$

Para estos valores de m el rango de la matriz de coeficientes es menor que 3. Es fácil ver que el rango es 2. Pueden distinguirse los siguientes casos:

- ◇ $m\neq 1, m\neq 2$ En este caso rango $A=$ rango $A^*=3$. El sistema es compatible determinado.
- ◇ $m=1$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

  Restando la primera fila de la tercera resulta:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = 3$$

  y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

- ◇ $m=2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix} = 2$$

  (hemos suprimido una columna de la matriz A puesto que solamente hay dos independientes) y el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio 5. *Discutir en función del parámetro a el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x+y+\;\; z &= 0\\ ax \quad +\;\; 2z &= 0\\ 2x-y+az &= 0\end{aligned}$$

Resolverlo para $a=1$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, es compatible. Para decidir si es determinado o indeterminado calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&0&2\\2&-1&a\end{vmatrix} = -a^2-a-6$$

El determinante se hace cero para:

$$-a^2-a-6=0 \quad\Longrightarrow\quad a^2+a-6=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a=-3\\ a=2\end{cases}$$

Por consiguiente, puede ocurrir que:

- ◇ $a\neq -3, a\neq 2$. En este caso rango $A=3$ y el sistema es compatible determinado.

- ⋄ $a = -3$. El rango de la matriz es 2 y el sistema es compatible indeterminado.
- ⋄ $a = 2$. Como en el cao anterior el sistema es compatible indeterminado

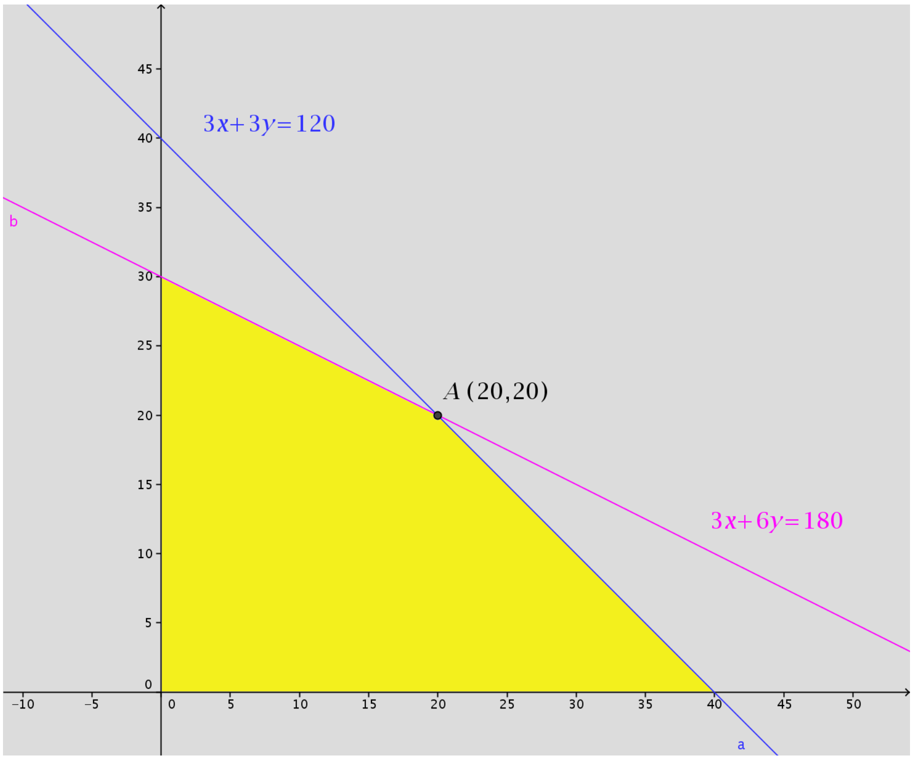
Resolvamos el sistema para $a = 1$. Según la discusión anterior, en este caso el sistema es compatible determinado. El sistema admite una única solución que será la solución trivial $x = y = z = 0$.

6. Programación lineal

Ejercicio 1. *Construye el recinto de soluciones del siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+3y & \leq & 120 \\ 3x+6y & \leq & 180 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

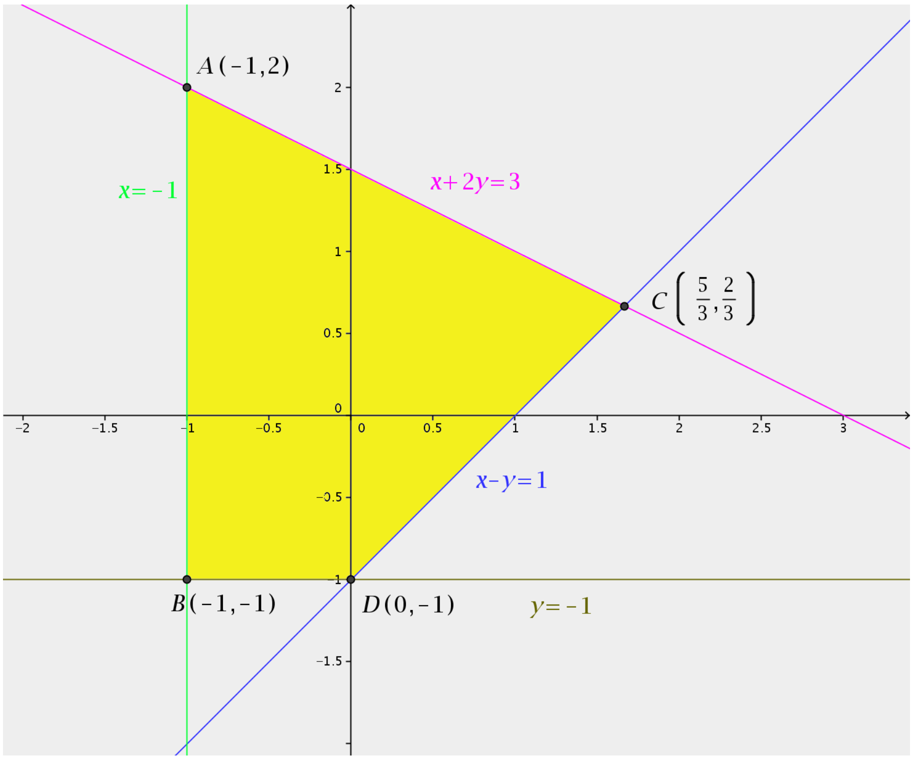
Solución:



Ejercicio 2. *Hallar el máximo y el mínimo de la función* $z = x + y$, *en la región determinada por:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & \leq & 3 \\ x - y & \leq & 1 \\ x & \geq & -1 \\ y & \geq & -1 \end{array} \right.$$

Solución:



En la figura aparece representada la región factible. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región es:

$$z(A) = z(-1, 2) = -1 + 2 = 1$$
$$z(B) = z(-1, -1) = -1 - 1 = -2$$
$$z(C) = z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$
$$z(D) = z(0, -1) = 0 - 1 = -1$$

El valor máximo se produce en el punto C y el valor mínimo en el punto D.

Ejercicio 3. *Unos grandes almacenes desean liquidar* 200 *camisas y* 100 *pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas* A *y* B*. La oferta* A *consiste en un lote de una camisa y un pantalón que se venden a* 30 *euros; la oferta* B *consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a* 50 *euros. No se desea ofrecer menos de* 20 *lotes de la oferta* A *ni menos de* 10 *de la oferta* B*.*

¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar los ingresos?

Solución:

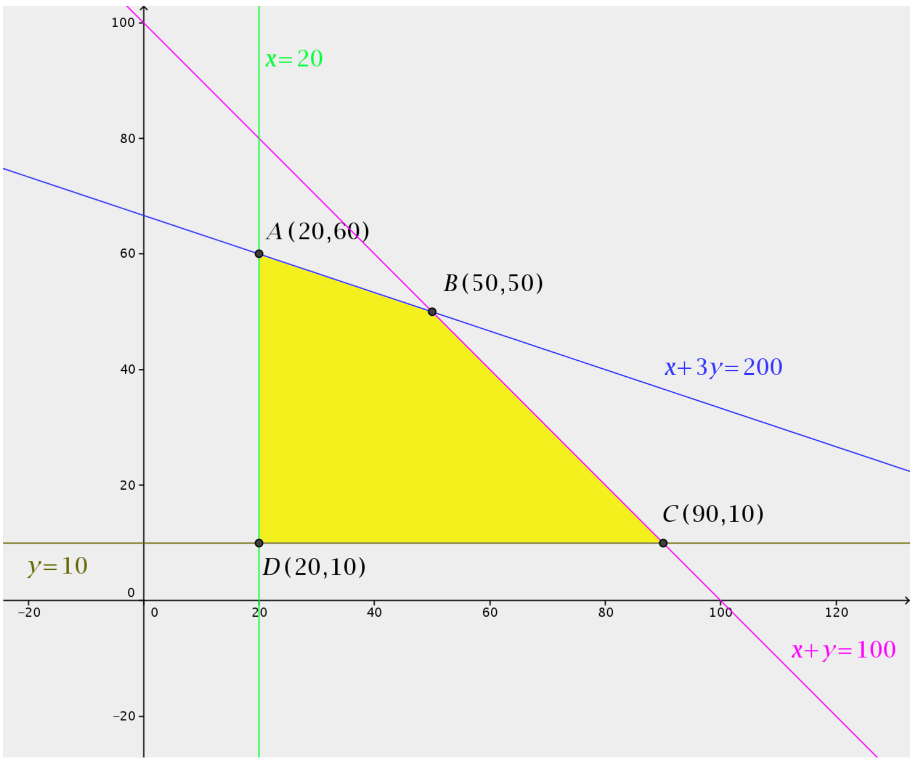
- Sea x el número de lotes de tipo A e y el número de lotes de tipo B que se venden. Los ingresos que se obtienen por la venta de estos lotes (la función objetivo) son:

$$F(x,y) = 30x + 50y$$

- Se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

- Con estas restricciones resulta la siguiente región factible:



- Los valores de la función objetivo en los vértices de la región:

$$F(20,60) = 3600$$
$$F(50,50) = 4000$$
$$F(90,10) = 3200$$
$$F(20,10) = 1100$$

Los máximos ingresos se producen con la venta de 50 lotes de tipo A y otros 50 de tipo B.

Ejercicio 4. *Disponemos de* 210000 *euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el* 10 % *y las del tipo B que rinden el* 8 %. *Decidimos invertir un máximo de* 130000 *euros en las de tipo A y, como mínimo,* 60000 *euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las de tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.*

¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo beneficio anual?

Solución:

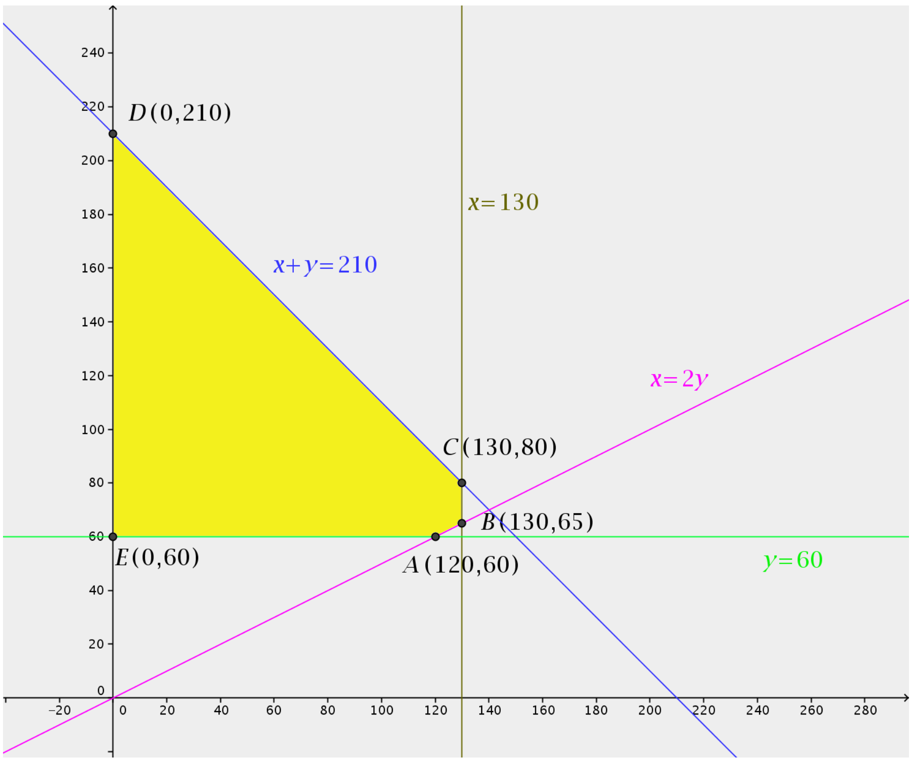
- Llamamos x a la cantidad invertida en acciones del tipo A e y a la cantidad invertida en acciones de tipo B. La función objetio es el beneficio que se obtiene de la inversión que será:

  $$F(x,y) = 0{,}10x + 0{,}08y$$

- Tenemos las siguientes restricciones:

  $$\begin{cases} x + y \leq 210000 \\ x \leq 130000 \\ y \geq 60000 \\ x \leq 2y \end{cases}$$

- Con las restricciones anteriores resulta la siguiente región factible (las cantidades se han expresado en millares):



- Los valores de la función objetivo en los vértices son los siguientes:

  $$\begin{aligned} F(120000, 60000) &= 16800 \\ F(130000, 65000) &= 18200 \\ F(130000, 80000) &= 19400 \\ F(0, 210000) &= 16800 \\ F(0, 60000) &= 4800 \end{aligned}$$

  de forma que el máximo beneficio se obtiene invirtiendo 130000 euros en acciones de tipo A y 80000 euros en acciones de tipo B.

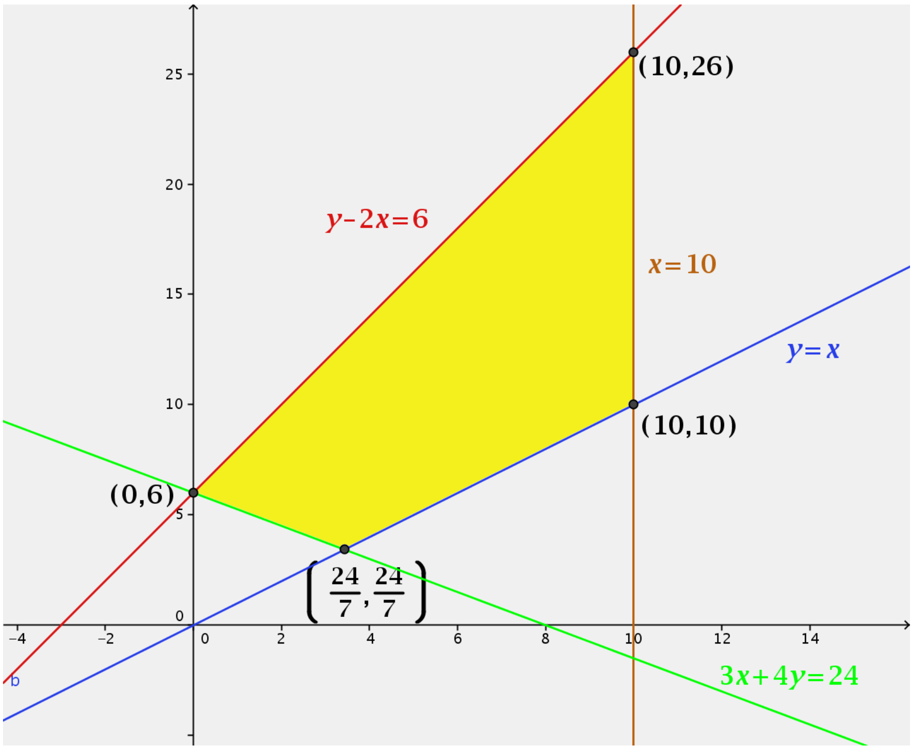
7. Segundo examen de programación lineal

Ejercicio 1. *Maximiza la función* $F(x, y) = x + y + 1$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ x \leq y \\ y - 2x \leq 6 \\ 3x + 4y \geq 24 \end{cases}$$

Solución:

La región factible es:



El máximo de la función $F(x, y) = x + y + 1$ se produce en el punto $(10, 26)$.

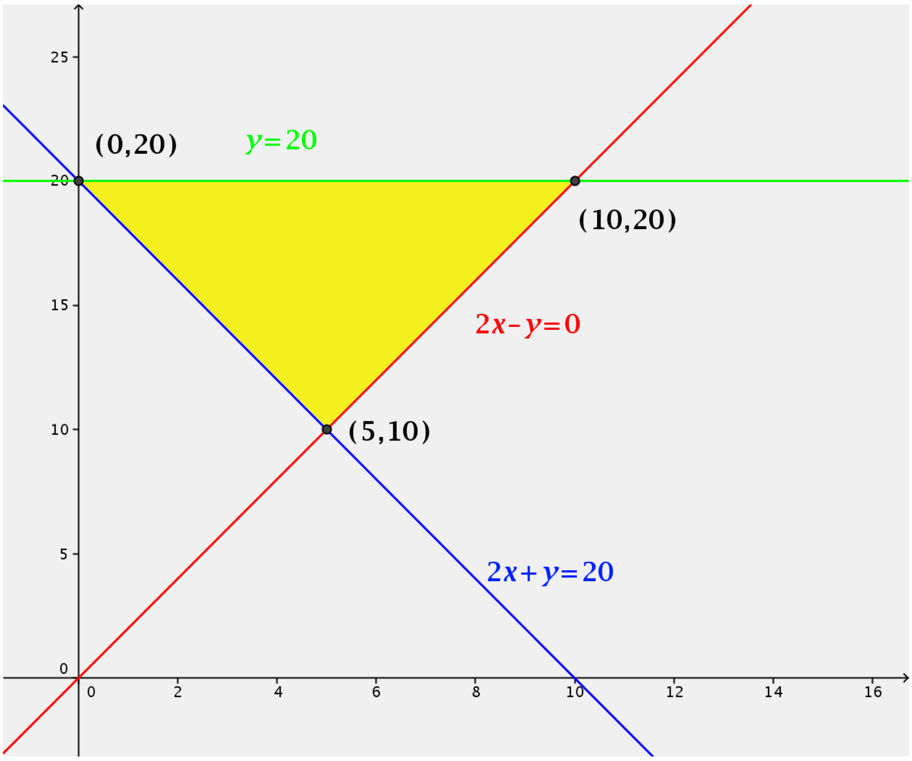
Ejercicio 2. *Calcula los puntos del recinto*

$$\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $F(x, y) = 4x + 2y$. *¿Cuántas soluciones hay para cada caso?*

Solución:

La región factible es:



Los valores de la función objetivo en los vértices son:

$$\begin{aligned} F(0, 20) &= 4 \cdot 0 + 2 \cdot 20 = 40 \\ F(10, 20) &= 4 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 80 \\ F(5, 10) &= 4 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 40 \end{aligned}$$

La función toma el valor máximo en el punto $(10, 20)$. Puesto que en los otros dos vértices la función toma valores iguales, la función toma los valores más pequeños en los puntos del segmento de extremos $(0, 20)$ y $(5, 10)$.

Ejercicio 3. *Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas y dispone cada mes de 400 Kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlos. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg de aluminio y 16 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima y a cuánto asciende ésta?*

Solución:

◇ Sea:

x: número de metros cuadrados de lámina fina
y: número de metros cuadrados de lámina gruesa.

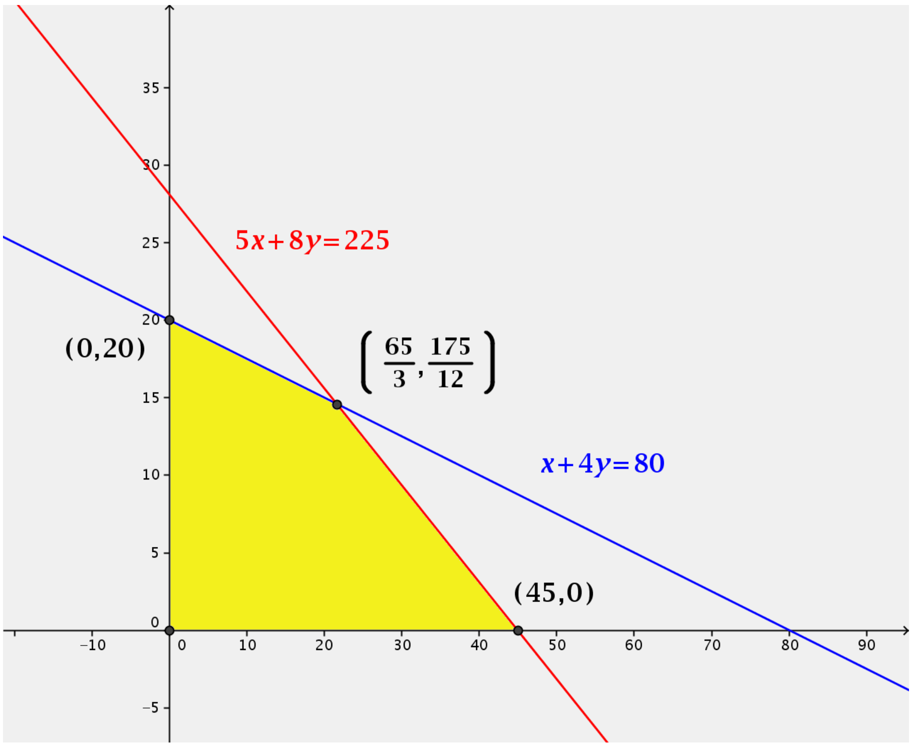
La función objetivo es:

$$F(x,y) = 45x + 80y$$

◇ Las restricciones son:

$$\begin{cases} 5x + 20y \leq 400 \\ 10x + 16y \leq 450 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{o simplificando} \qquad \begin{cases} x + 4y \leq 80 \\ 5x + 8y \leq 225 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

◇ Con estas restricciones, la región factible resulta ser:



◇ Calculamos la función objetivo en los vértices de la región:

$$F(0,20) = 45 \cdot 0 + 80 \cdot 20 = 1600$$
$$F\left(\frac{65}{3}, \frac{175}{12}\right) = 45 \cdot \frac{65}{3} + 80 \cdot \frac{175}{12} \simeq 2141{,}67$$
$$F(45,0) = 45 \cdot 45 + 80 \cdot 0 = 2025$$

De forma que los máximos ingresos se producen fabricando 65/3 m^2 de lámina fina y 175/12 m^2 de lámina gruesa. Los ingresos so aproximadamente de 2141,67 euros.

Ejercicio 4. *Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen 500 kg de A y 500 kg de B. En la mezcla, el peso de B debe ser mayor o igual que 1,5 veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para obtener una mezcla de coste mínimo que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.*

Solución:

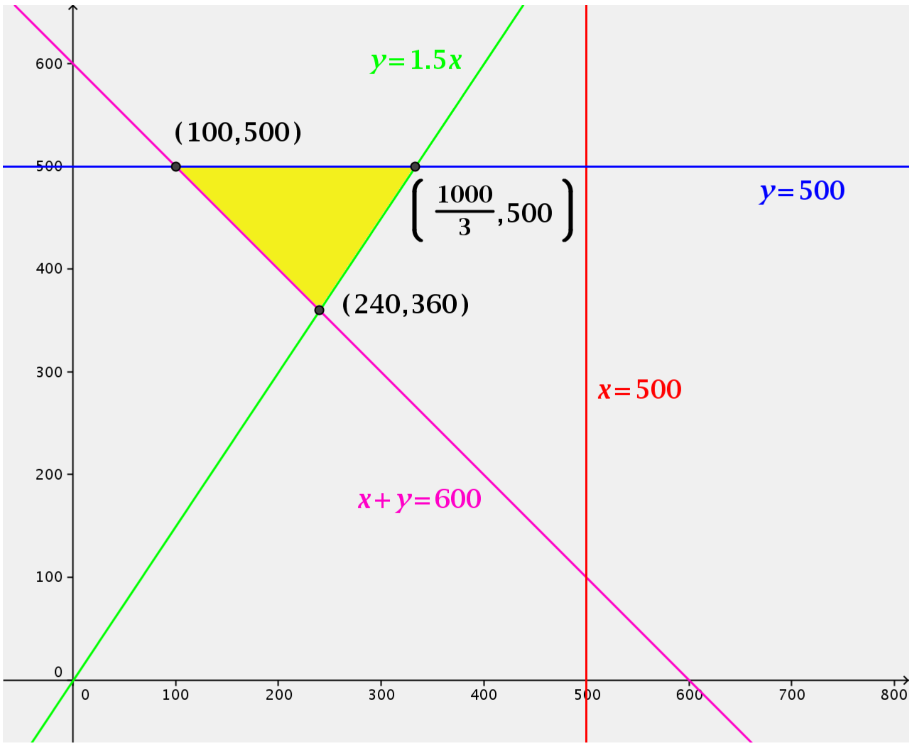
- Sea:
  x: número de kilos del producto A
  y: número de kilos del producto B.
  La función objetivo es:

$$F(x,y) = 5x + 4y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} y \geq 1{,}5x \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 500 \\ y \leq 500 \end{cases}$$

- La región factible es:



- Calculando los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible:

$$F(100,500) = 5 \cdot 100 + 4 \cdot 500 = 2500$$
$$F\left(\frac{1000}{3}, 500\right) = \frac{5000}{3} + 2000 \simeq 3666{,}67$$
$$F(240,360) = 5 \cdot 240 + 4 \cdot 360 = 2640$$

  de forma que el mínimo de la función se obtiene mezclando 100 kilos del producto A y 500 kilos del producto B.