1. Ángulos en la circunferencia

- **Ángulo central**. Es el que tiene el vértice en el centro de la circunferencia. Se identifica con el

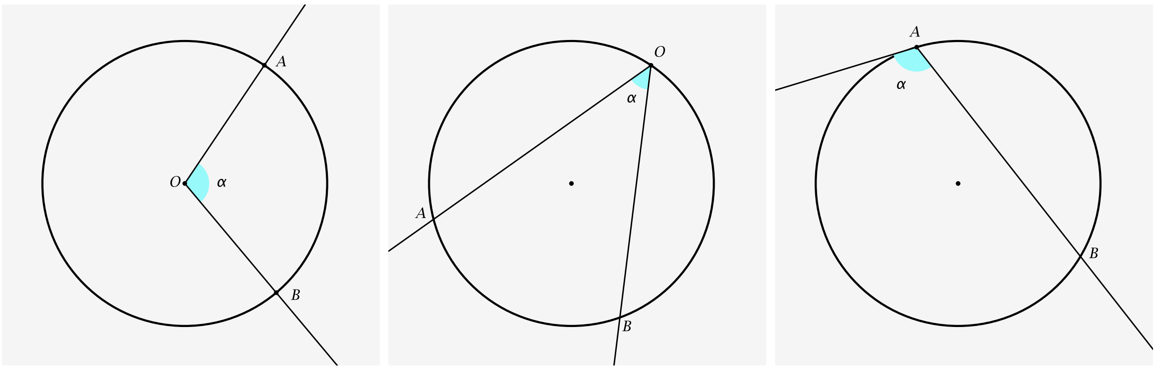


Figura 1: Ángulo central, inscrito y semiinscrito

arco, de modo que escribiremos

$$\alpha = \overset{\frown}{AB}$$

- Ángulo inscrito. Es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella. El

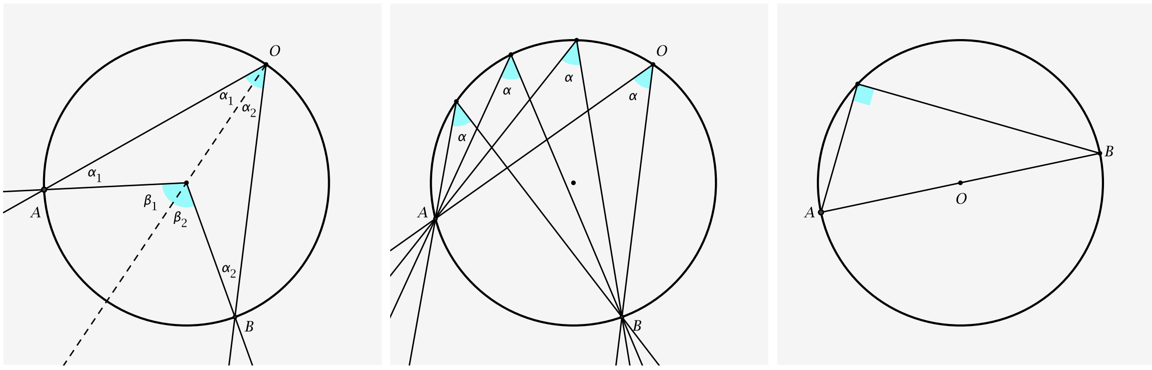


Figura 2: Medida del ángulo inscrito

ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco o, brevemente, es igual a la mitad del arco:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

En efecto, de la figura 2 se deduce que:

$$\beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

De aquí se sigue que:

- Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.
- El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

- Ángulo semiinscrito. Tiene el vértice en la circunferencia, un lado secante y otro tangente a la circunferencia. El ángulo semiinscrito, como el inscrito, es igual a la mitad del arco que abarca. De la figura resulta:

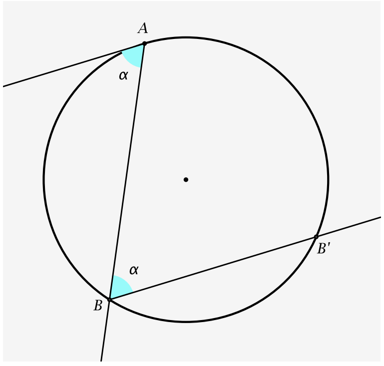


Figura 3: El ángulo semiinscrito mide la mitad del arco

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

pues los arcos $\overset{\frown}{AB'}$ y $\overset{\frown}{AB}$ son iguales por estar comprendidos entre paralelas.

- Ángulo interior. Tiene el vértice en el interior de la circunferencia. El ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos que abarca. Dibujamos un ángulo inscrito de lados paralelos y tenemos que:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{B'C}}{2} = \frac{\overset{\frown}{A'C} + \overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

Como en el caso anterior, los arcos $\overset{\frown}{A'C}$ y $\overset{\frown}{AB}$ son iguales por estar comprendidos entre paralelas.

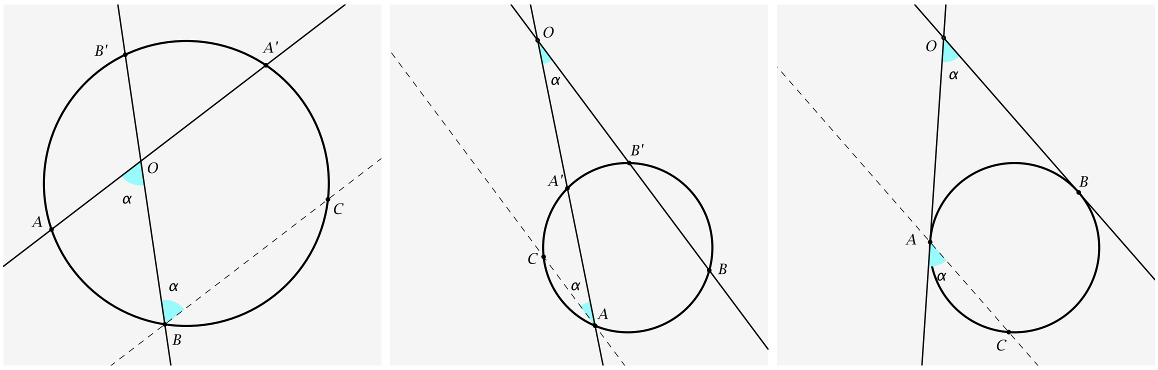


Figura 4: Ángulo interior, exterior y circunscrito

- Ángulo exterior. Es el que tiene el vértice en el interior de la circunferencia. El ángulo interior es igual a la semidiferencia de los arcos que abarca. Dibujamos un ángulo inscrito de lados paralelos y tenemos que:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{A'C}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CB'} - \overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

- Ángulo circunscrito. Como en el caso anterior es igual a la semidiferencia de los dos arcos que comprende.

2. Teorema de Tales

Si dos rectas son cortadas por paralelas, los segmentos que resultan son proporcionales:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

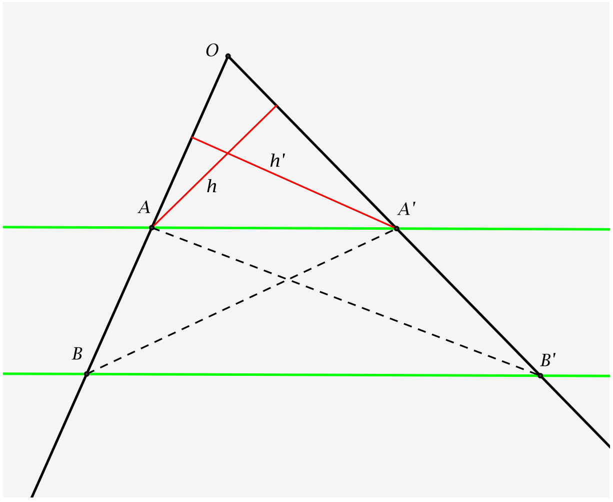


Figura 5: Teorema de Tales

Demostración:

Los triángulos $AA'B$ y $AA'B'$ tienen el mismo área puesto que tienen la misma base (AA') y la misma altura (la distancia entre las dos paralelas). Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Área } AA'B &= \text{Área } AA'B' \\ \frac{1}{2}\, AB \cdot h' &= \frac{1}{2}\, A'B' \cdot h \\ \frac{AB}{A'B'} &= \frac{h}{h'} \end{aligned}$$

Por otra parte, en el triángulo OAA' se verifica que:

$$\begin{aligned} \text{Área } OAA' &= \frac{1}{2}\, OA \cdot h' \\ \text{Área } OAA' &= \frac{1}{2}\, OA' \cdot h \\ OA \cdot h'' &= OA' \cdot h \\ \frac{OA}{OA'} &= \frac{h}{h'} \end{aligned}$$

Combinando ambos resultados resulta:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

3. Semejanza de triángulos

Aplicando la propiedad de las proporciones:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a+b}{a'+b'}$$

resulta que:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA + AB}{OA' + A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

Es decir, los lados OA y OA' del triángulo OAA' son proporcionales a los lados OB y OB' del triángulo OBB'. Seguidamente veremos que los lados AA' y BB' están en la misma proporción.

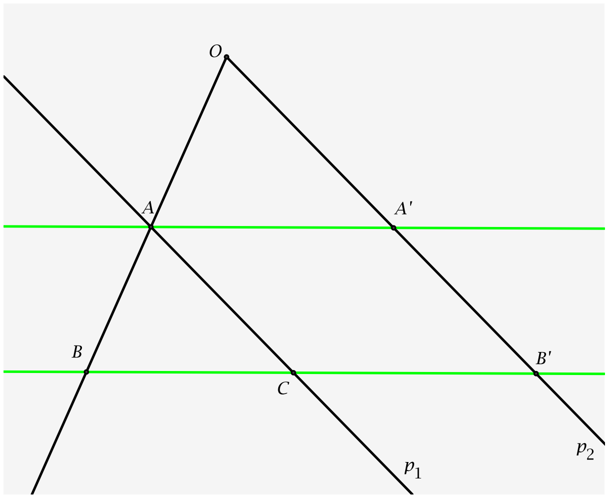


Figura 6: Triángulos semejantes

Trazamos la paralela por A a la recta OBB' y aplicamos el teorema de Tales a las rectas BO y BB' cortadas por las paralelas p_1 y p_2. Resulta que:

$$\frac{OB}{BB'} = \frac{OA}{CB'} = \frac{OA}{AA'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$$

Tenemos pues que:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

y hemos demostrado una propiedad importante: los triángulos que tienen ángulos iguales tienen también lados proporcionales y son semejantes.

4. Teorema de la paralela media

Es una consecuencia del teorema de Tales. Si por el punto medio de un lado de un triángulo trazamos una paralela a otro lado se cumple que:

- ⋄ La paralela divide al otro lado en partes iguales.
- ⋄ El segmento de paralela entre los lados es la mitad que el tercer lado.
- ⋄ El área del triángulo determinado por la paralela es un cuarto de la del primer triángulo.

Por el teorema de Tales se cumple que (ver figura 7):

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{MB}{M'C} \quad \Longrightarrow \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'C} = 1 \quad \Longrightarrow \quad AM' = M'C$$

Asímismo, por la semejanza de los triángulos ABC y AMM' tenemos que:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AM'} = \frac{BC}{MM'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BC}{MM'} = 2 \quad \Longrightarrow \quad BC = 2MM'$$

Finalmente, el área del triángulo ABC es cuatro veces mayor que la del triángulo AMM' porque su base y su altura son el doble.

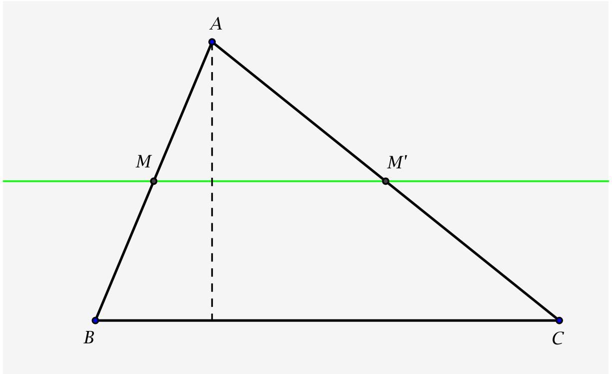


Figura 7: Teorema de la paralela media

5. Mediatrices. Circuncentro

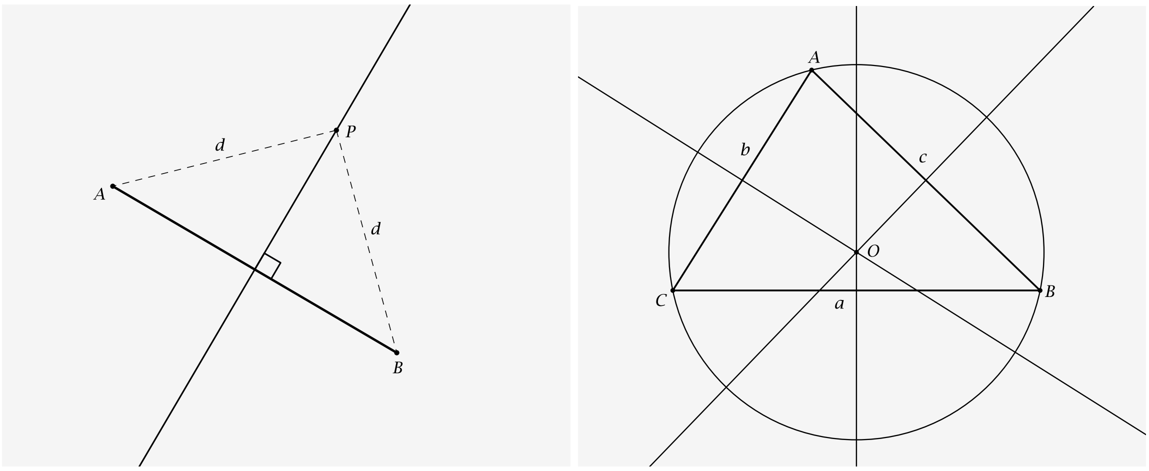


Figura 8: Propiedad de la mediatriz. Circuncentro

Mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio. Los puntos de la mediatriz tienen la propiedad de que equidistan de los extremos del segmento. Por ello, la mediatriz puede definirse también com el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros dos (ver figura 8).

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto. En efecto, todos los puntos de la mediatriz del lado a equidistan de B y C. Todos los puntos de la mediatriz del lado b equidistan de A y C. Entonces, el punto de intersección de las dos mediatrices equidista de los tres vértices y pertenece a la mediatriz de C.

El punto de corte de las mediatrices se llama circuncentro y, por estar a la misma distancia de los tres vértices es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (ver figura 8).

6. Bisectrices. Incentro

Se llama bisectriz de un ángulo a la recta que divide el ángulo en dos ángulos iguales. La bisectriz tiene la propiedad de que todos sus puntos equidistan de los lados del ángulo. Por esta razón, la bisectriz puede definirse también como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas.

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto que se llama incentro del triángulo. Este punto, por la propiedad de la bisectriz, es equidistante de los tres lados del triángulo y

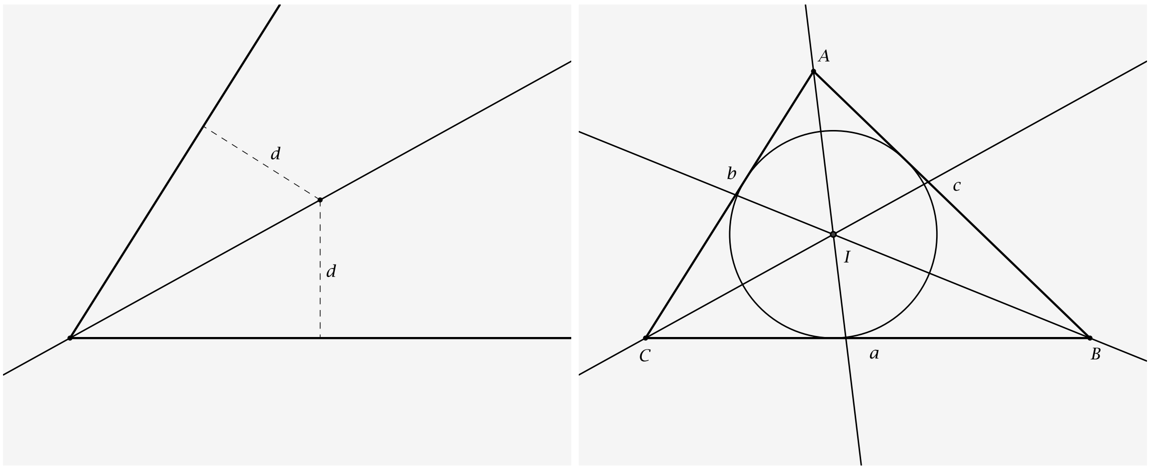


Figura 9: Propiedad de la bisectriz. Incentro

es, por tanto, el centro de la circunferencia inscrita.

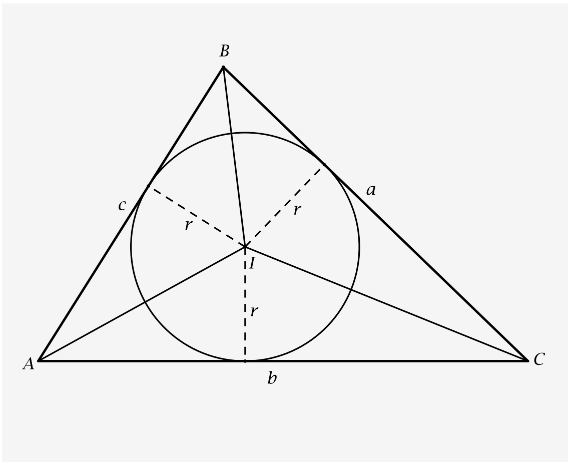


Figura 10: Área del triángulo

El área del triángulo puede calcularse a partir del radio del círculo inscrito. De la figura 12 se deduce que el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos BIC, CIA y AIB. Entonces:

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$$

donde p es el semiperímetro.

La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes:

En la figura 11 los triángulos PBC y PAD son semejantes porque tienen los ángulos iguales. De aquí se deduce que:

$$\frac{a}{x} = \frac{m}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{a} = \frac{y}{x}$$

También son semejantes los triángulos BPD y APC:

$$\frac{b}{x} = \frac{n}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{b} = \frac{y}{x}$$

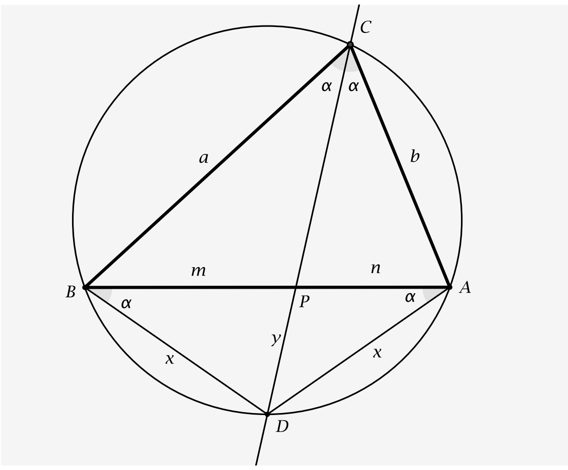


Figura 11: Propiedad de la bisectriz

y de las dos igualdades se deduce que:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$$

Vamos a obtener una fórmula que nos permita obtener las longitudes m y n conocidos los lados del triángulo. Si llamamos $c = m + n$ a la longitud del lado opuesto al vértice C, aplicando una conocida propiedad de las proporciones:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{m+n}{a+b} = \frac{c}{a+b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m = \dfrac{ac}{a+b} \\ n = \dfrac{bc}{a+b} \end{cases}$$

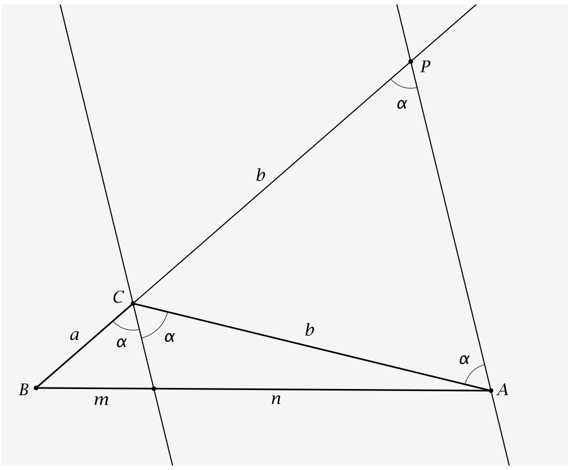


Figura 12: Propiedad de la bisectriz

Otra manera de obtener este mismo resultado consiste en trazar por uno de los vértices una paralela a la bisectriz.

El triángulo ACP es isósceles por tener dos ángulos iguales (ver figura 12). Entonces $CP = b$ y aplicando el teorema de Tales resulta que:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$$

7. Alturas. Ortocentro

Las alturas de un triángulo son las perpendiculares por un vértice al lado opuesto. Las tres alturas se cortan en un punto que se llama ortocentro.

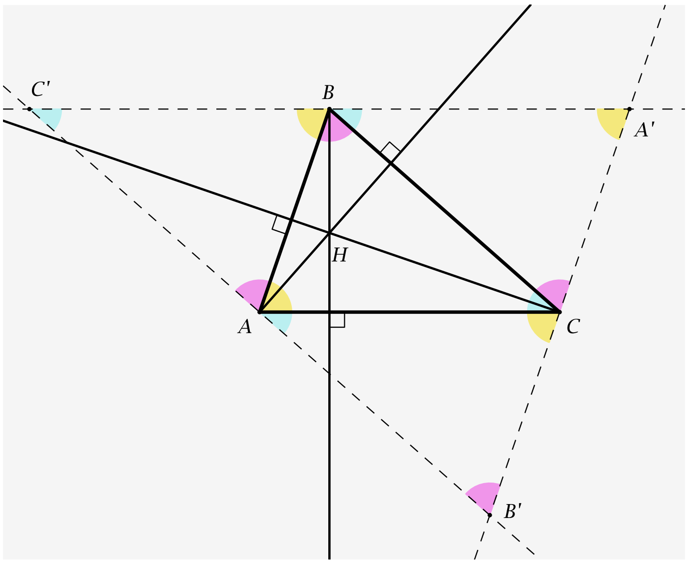
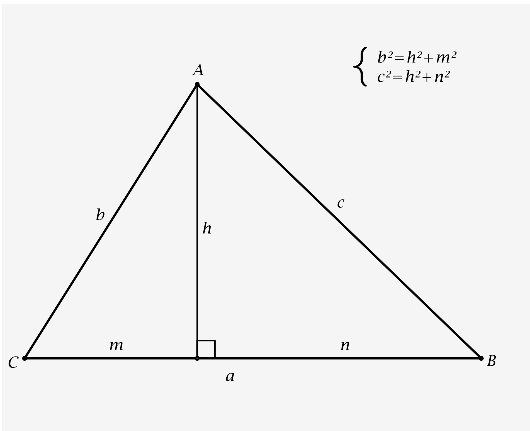


Figura 13: Ortocentro de un triángulo

Como puede verse en la figura 13 las alturas del triángulo ABC son las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ construido trazando por los vértices paralelas a los lados opuestos.

Una altura divide el triángulo en dos triángulos rectángulos:



8. Medianas. Baricentro

Las medianas de un triángulo son los segmentos desde un vértice al punto medio del lado opuesto. Las medianas dividen el triángulo en otros dos de igual área.

En la figura 14 se han dibujado dos medianas que se cortan en el punto G. Las triángulos ABG y MNG son semejantes pues tienen los ángulos iguales. Por consiguiente, sus lados son proporcionales:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AG}{MG} = \frac{BG}{NG}$$

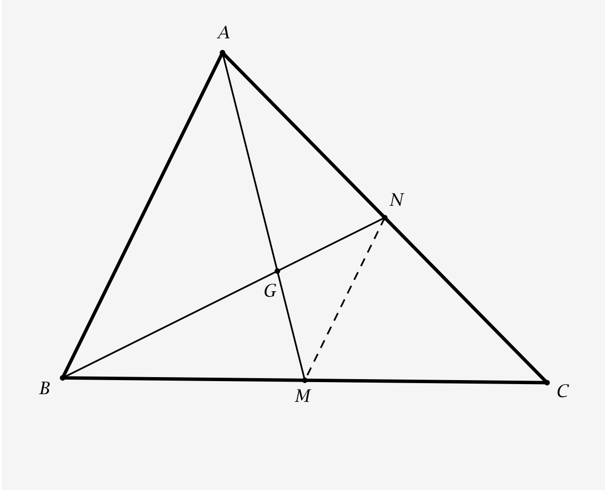


Figura 14: Propiedad de las medianas

Por el teorema de la paralela media MN es la mitad de AB. Por consiguiente, en la igualdad anterior la constante de proporcionalidad es 2:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AG}{MG} = \frac{BG}{NG} = 2$$

y entonces:

$$AG = 2 \cdot MG; \qquad BG = 2 \cdot NG$$

Hemos demostrado la siguiente propiedad: las medianas de un triángulo se cortan en un punto tal que su distancia al vértice es doble que al punto medio.

De la propiedad anterior se deduce que las tres medianas se cortan en un punto pues la tercera mediana deberá dividir a las otras dos en segmentos en la proporción dos a uno y, por tanto, deberá pasar por el punto G. Este punto se llama baricentro del triángulo.

9. Triángulos rectángulos

Si en un triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura correspondiente a la hipotenusa (AH) el triángulo que da dividido en dos triángulos rectángulos CHA y BHA semejantes entre sí y semejantes al triángulo ABC. En la figura 15 se han marcado con colores los ángulos iguales. De la semejanza de los triángulos se deducen los teoremas que se exponen a continuación:

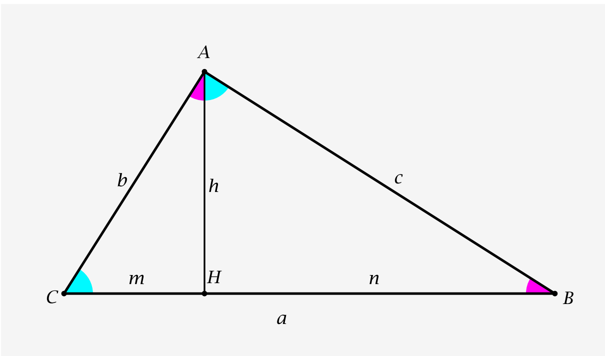


Figura 15: Triángulos rectángulos

- ◇ Teorema del cateto. De la semejanza de los triángulos CHA y ABC se deduce que:

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \quad \Longrightarrow \quad b^2 = am$$

y de la semejanza de los triángulos BHA y ABC:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \quad \Longrightarrow \quad c^2 = an$$

que puede expresarse así: un cateto al cuadrado es igual a la hipotenusa por su proyección sobre ella (teorema del cateto).

- ◇ Teorema de Pitágoras. Del teorema del cateto se deduce que:

$$\begin{array}{c} b^2 = am \\ c^2 = an \end{array} \quad \Longrightarrow \quad b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a^2$$

- ◇ Teorema de la altura. De la semejanza de los triángulos CHA y BHA deducimos que:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \Longrightarrow \quad h^2 = mn$$

El cuadrado de la altura es igual al producto de las longitudes de los segmentos en que divide a la hipotenusa (teorema de la altura).