

## 1. Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término es igual al anterior más un número constante llamado diferencia de la progresión. Por ejemplo:

$$10, 12, 14, 16, 18, \dots ; \quad 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots ; \quad 5, 2, -1, -4, -7, \dots$$

La primera es una progresión aritmética de diferencia 2. La segunda tiene diferencia  $\frac{1}{2}$  y la tercera diferencia  $-3$ .

El primer término de la progresión lo designaremos mediante  $a_1$ , el segundo  $a_2$ , el tercero  $a_3$  etc. El subíndice indica el lugar que ocupa el término en la sucesión. Por ejemplo, en la sucesión:

$$3, 7, 11, 15, 19, \dots ; \quad a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, \dots$$

Un término cualquiera de la progresión, el término que ocupa el lugar  $n$ ésimo, lo llamaremos  $a_n$  (término general).

### ◇ Cálculo del término general.

Si llamamos  $d$  a la diferencia de la progresión, tenemos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ a_4 &= a_1 + 3d \\ &\dots \end{aligned}$$

y, en general

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

esta fórmula permite calcular un término cualquiera de la progresión cuando se conocen el primer término y la diferencia.

Si en vez del primero se conoce otro término, la fórmula anterior se escribe:

$$a_n = a_m + d(n - m)$$

### ◇ Suma de los $n$ primeros términos de una progresión aritmética.

Vamos a obtener una fórmula para calcular:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Para ello, escribamos la suma dos veces, la segunda en sentido inverso, y sumemos ambas expresiones:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Todos los paréntesis que aparecen en la última línea son iguales y hay  $n$  de ellos. Por consiguiente:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \implies S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

## 2. Problemas de progresiones aritméticas

1. Conociendo el último término 199, el número de ellos 100 y la suma de los términos de una progresión aritmética 10000, calcular el primero y la diferencia.
2. Calcular la suma y el último término de una progresión aritmética de diferencia 4, sabiendo que consta de 12 términos y el primero vale 7.
3. Calcular la suma y el número de términos de una progresión aritmética, cuyo primer término es 4, el último término 40 y la diferencia 3.
4. Conociendo el primer término de una progresión aritmética 3, el último 25 y el número de términos 12, determinar la diferencia y la suma.
5. Conociendo el primer término 3, el último 39 y la suma 210 de los términos de una progresión aritmética, calcular la diferencia y el número de términos.
6. Formar una progresión aritmética de términos positivos de razón 2, último término 18 y 88 la suma de sus términos.
7. Determinar el número de términos y el último de una progresión aritmética, sabiendo que el primero vale 3, la diferencia es 2 y la suma 120.
8. Hallar el número de términos de una progresión aritmética que tiene por primer término 7, por último 112 y por diferencia 3.
9. Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que forman progresión aritmética de diferencia igual a  $25^\circ$ .
10. Calcular la suma de todos los números que, teniendo tres cifras, son múltiplos de 7.
11. Encontrar el valor de cada uno de los tres ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que están en progresión aritmética.
12. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, valiendo uno de ellos  $100^\circ$ . Hallar el valor de los demás.
13. Hallar la suma de los números pares comprendidos entre 99 y 1001.
14. Hallar la suma de todos los múltiplos de 4 comprendidos entre 122 y 1418.
15. Hallar la suma de los 50 primeros números múltiplos de 5.
16. Hallar la suma de los 50 primeros números múltiplos de 7.
17. Hallar la suma de los términos de la progresión aritmética 5, 9, 11, 14  $\dots$ , 338.
18. Interpolar 10 medios aritméticos entre los números 3 y 25.
19. Interpolar 5 medios aritméticos entre los números  $1/2$  y 1.
20. Interpolar cinco medios aritméticos entre el octavo y el noveno término de la progresión aritmética, cuyo primer término es  $1/2$  y el segundo  $7/12$ .
21. Hallar el número de bolas que contiene una pila triangular completa, teniendo sobre cada lado 20 bolas.
22. Hallar el número de bolas que contiene un pila triangular truncada cuya base inferior tiene 25 bolas y la superior 13 bolas.
23. Un hexágono tiene un ángulo recto y los restantes, a partir de él están en progresión aritmética. Hallar el valor de cada uno de ellos.
24. Calcular la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 1243 y 4728.

25. Formar una progresión aritmética de 6 términos, sabiendo que su suma es 69 y la diferencia entre los extremos es 15.
26. La suma de los once términos de una progresión aritmética es 220. Sabiendo que la diferencia entre el último y el primero es 30, formar la progresión.
27. La suma de diez términos de una progresión aritmética es 205. La diferencia entre el último y el primero es 27. Formar la progresión.
28. En una progresión aritmética de 11 términos, la suma de éstos es 176, y la diferencia entre el último y el primero es 30. Formar la progresión.
29. El segundo y el noveno término de una progresión aritmética suman 29 y el tercero con el duodécimo suman 41. Calcular los cuatro primeros términos.
30. La razón de una progresión aritmética creciente es 2 y 11 el número de términos. Averiguar el primer término y la suma de los 11, sabiendo que el último término es igual al cuadrado del primero.
31. Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de razón 3. Hallarlos.
32. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de razón 2, calcular sus medidas.
33. Los tres primeros términos de una progresión aritmética son 12, 16 y 20. Calcular el número de términos que hay que añadirle para que la suma total sea 300.
34. Tres números en progresión aritmética creciente tienen por producto 45 y el más pequeño es 1. ¿Cuáles son los otros dos?
35. La suma de tres números en progresión aritmética es 21 y el producto 280. Formar la progresión.
36. Hallar tres números en progresión aritmética, siendo su suma 33 y su producto 1287.
37. Hallar un número de tres cifras que, dividido por la suma de las mismas, de 15; las cifras están en progresión aritmética y sumando al número 396 se obtiene el número invertido.
38. El volumen de un paralelepípedo es  $1232 \text{ cm}^3$  Calcular sus aristas sabiendo que están formadas por tres números en progresión aritmética de diferencia 3.
39. Dado un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales en progresión aritmética, de diferencia 2, determinar su volumen, sabiendo que su área total mide  $142 \text{ m}^2$ .
40. Encontrar tres enteros en progresión aritmética creciente, sabiendo que su suma vale 15 y la suma de sus cuadrados 107.
41. Encontrar cuatro números en progresión aritmética creciente, sabiendo que su suma es 92 y la suma de sus cuadrados 2136.
42. La suma de los cuatro términos de una progresión aritmética es 2, y la suma de sus cuadrados 46. Averiguar la progresión.
43. Calcular los 10 términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los seis términos centrales es 93 y el producto de sus extremos es 58.
44. La suma de los seis términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 141, y el producto de sus extremos es 46. Escribir la progresión.
45. La suma de los cuatro términos centrales de una progresión aritmética creciente de ocho términos es 70 y el producto del primero por el último 196. Formar la progresión.
46. Una progresión aritmética tiene un número impar de términos. El central vale 44 y el producto de los extremos 336. Calcular los extremos.
47. Calcular cuatro enteros en progresión aritmética conocida su suma 26 y el producto del segundo término por el cuarto 55.

### 3. Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión de números en la que cada término es igual al anterior multiplicado por un número constante que se llama razón de la progresión:

$$a_{n+1} = a_n r ; \quad r : \text{razón}$$

◇ **Cálculo del término general.**

Procediendo como en las progresiones aritméticas:

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_1 r^3$$

...

y en general

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

De forma similar, si en vez del primer término conocemos el que ocupa el lugar  $m$ :

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

◇ **Cálculo de la suma de los  $n$  primeros términos.** Escribamos la suma de los  $n$  primeros términos de la progresión, esta misma suma multiplicada por la razón  $r$  y restemos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ rS_n = a_1 r + a_2 r + \dots + a_{n-2} r + a_{n-1} r + a_n r \\ \hline (1-r)S_n = a_1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - a_n r \end{array}$$

De donde se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

Puesto que  $a_n = a_1 r^{n-1}$  esta fórmula se puede escribir también:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} r}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

◇ **Cálculo de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.**

Si la razón está comprendida entre  $-1$  y  $1$  los términos de la progresión se hacen muy próximos a cero cuando  $n$  se hace muy grande de forma que la suma de los términos es igual a:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

### 4. Problemas de progresiones geométricas

48. Conocido el primer término 1, la razón 2 y el número de términos 8 de una progresión geométrica, hallar el octavo término y la suma.
49. Conocidos el séptimo término 1458, y el primero 2 de una progresión geométrica, hallar la suma de los siete términos.

50. La suma de tres términos de una progresión geométrica creciente es 133. El primer término es 1. Hallar la razón.
51. En la progresión geométrica 4, 12,  $\dots$  hallar el lugar que ocupan dos términos consecutivos, cuya suma es 3888.
52. En una progresión geométrica de razón 3, el último término es 1458 y la suma de todos los términos 2184. Hallar el número de términos.
53. Conociendo el primer término 4, la razón 2 y el último término 1024 de una progresión geométrica, se desea hallar la suma y el número de términos.
54. El primer término de una progresión geométrica es 2, la razón 2 y la suma 765; calcular el último término y el número de ellos.
55. Hallar el número de términos de una progresión geométrica cuya razón es 2, el último término 896 y la suma de todos 1785.
56. Hallar la suma de las diez primeras potencias numéricas de 3.
57. Hallar la suma de los cubos de las once primeras potencias numéricas de 2.
58. El primer término de una progresión geométrica es 7, el último 448 y la suma 889. Hallar la razón y el número de términos.
59. En una progresión geométrica el primer término es 9, el último 288 y la suma 567? Hallar la razón y el número de términos.
60. En una ciudad hay 29524 personas y una de éstas se entera de cierta noticia; al minuto la ha comunicado a otras tres y cada una de éstas se lo comunica en otro minuto a otras tres distintas y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrán enterado todas las personas de la ciudad?
61. Sabiendo que es 7 el primer término de una progresión geométrica, 45927 el último y 68887 la suma, se desea hallar la razón y el número de términos.

Calcular  $x$  sabiendo que:

62.  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^x = 16383$ .
63.  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^x = 32767$ .
64.  $3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2x} = 597870$ .
65. Hallar la suma de 12 términos de la progresión 1,  $\sqrt{3}$ , 3,  $3\sqrt{3}$ ,  $\dots$ .
66. Interpolar tres medios proporcionales entre los números 7 y 112.
67. Interpolar tres medios proporcionales entre los números 3 y 243.
68. Interpolar siete medios proporcionales entre los números 2 y 13122.
69. Interpolar ocho medios proporcionales entre los números 12 y 23437500.
70. Conocido el octavo término 512 y la razón 2 de una progresión geométrica, hallar el primero y la suma de los ocho términos.
71. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 104 y el producto del primer término por el tercero es 576. Calcular los tres términos.
72. Una progresión geométrica consta de 5 términos positivos, hallar su suma sabiendo que el primero con el segundo suman 12 y el primero con el tercero suman 30.

73. En una progresión geométrica el producto del primer término por el tercero es 25. Calcular el segundo término.
74. La suma de tres términos de una progresión geométrica es 31 y el producto 125. Hallarlos.
75. Hallar tres números en progresión geométrica, sabiendo que su suma es 65 y su producto 3375.
76. A una cuerda de 700 metros de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los tramos extremos mide 100 metros. Determinar la longitud de cada tramo sabiendo que forman progresión geométrica.
77. En una progresión geométrica de términos positivos el segundo término vale 6 y la suma de los términos tercero y cuarto 72. Calcular el sexto término.
78. En una progresión geométrica de términos positivos, el segundo término vale 12 y el tercero más el cuarto suman 144. Hallar el séptimo término.
79. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica creciente es 63 y la diferencia entre el tercero y el primero es 45. Hallar los términos.
80. Un paralelepípedo cuyas aristas forman progresión geométrica tiene por volumen  $512 \text{ cm}^3$ . Calcular las aristas sabiendo que su suma es 28 cm.
81. El volumen de un paralelepípedo es  $216 \text{ dm}^3$ , hallar sus aristas sabiendo que suman 26 dm y que están en progresión geométrica.
82. Encontrar cuatro enteros positivos en progresión geométrica, sabiendo que los tres primeros suman 26 y todos los cuatro 80.
83. Encontrar cuatro enteros positivos en progresión geométrica, sabiendo que los dos primeros suman 8 y los dos últimos 72.
84. Hallar cuatro números en progresión geométrica creciente, sabiendo que la suma de los dos primeros es 12 y la suma de los dos últimos 108.
85. Encontrar cuatro enteros en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el segundo y el primero es 8 y la diferencia entre el cuarto y el tercero es 32.
86. Encontrar el valor de cada uno de los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que forman progresión geométrica y que el cuarto es igual a 9 veces el segundo.
87. La suma de los 5 términos de una progresión geométrica es 242 y la suma de los términos de lugar par es 60. Hallar la progresión, sabiendo que la razón es real, entera y positiva.
88. En una progresión geométrica de términos positivos el segundo término es 12 y la suma del tercero y cuarto 144. Hallar el quinto.
89. Encontrar siete términos en progresión geométrica tal que los tres primeros suman 7 y los tres últimos 112, sabiendo que la razón es real, entera y positiva.
90. Determinar una progresión geométrica de siete términos, sabiendo que los tres primeros suman 26 y los tres últimos 2106, y que la razón es real, entera y positiva.
91. Determinar siete términos en progresión geométrica, sabiendo que la suma de los 6 últimos es igual al duplo de los seis primeros y que la suma de éstos es 63 y que la razón es real, entera y positiva.
92. La suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de siete términos es 1456 y la suma de los seis últimos es 4368. Hallar la progresión, sabiendo que la razón es real, entera y positiva.
93. Demostrar que si tres números forman a la vez progresión aritmética y geométrica, éstos han de ser iguales.
94. La suma de los términos de una progresión geométrica es 728; dos términos consecutivos son 18 y 54, y el número de términos es 6. Calcular el primero y el sexto términos y la razón.

95. En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero, y el producto de todos es igual a  $4\sqrt{2}$ . Formar la progresión.

Encontrar el límite de la suma:

96.  $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$

97.  $0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$

98.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

99.  $\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \dots$

Calcular:

100.  $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}$

101.  $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{\dots}}}}$

102.  $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}}}$

Reducir a fracción la periódica pura:

103.  $0,33333\dots$

104.  $2,88888\dots$

105.  $2,636363\dots$

Reducir a fracción la periódica mixta:

106.  $0,83333\dots$

107.  $1,416666\dots$

108.  $1,2142857142857\dots$

109. Las edades de dos personas suman 70 años y están en la razón  $\frac{a}{b}$ . Calcular las edades sabiendo que  $\frac{a}{b}$  es la suma de los infinitos términos de la progresión  $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$ .

110. Los dos primeros términos de una progresión geométrica suman 5. Un término cualquiera es igual a la suma de los infinitos términos que le siguen. Averiguar la progresión y la suma de sus infinitos términos.

111. Hallar la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica cuyo primer término es  $\frac{3}{17}$  y cuyo quinto término es  $\frac{768}{10625}$ .

112. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de términos positivos es 2 y la suma de los dos primeros es  $\frac{3}{2}$ . Encontrar la progresión.

113. En un triángulo equilátero de 1 m de lado se unen entre sí los tres puntos medios, dando lugar a un nuevo triángulo equilátero, en el cual se hace lo mismo. Siguiendo así sucesivamente, cuál será:

- (a) El límite de la suma de los perímetros.  
(b) El límite de las sumas de las áreas.
114. En un metro cuadrado se inscribe otro cuadrado con sus vértices en los puntos medios de los lados. Se toman los puntos medios de los lados de este segundo cuadrado, como vértices de un tercer cuadrado, y así sucesiva e indefinidamente. Calcular:
- (a) La suma de las infinitas áreas de los cuadrados.  
(b) La suma de sus infinitos perímetros.
115. Calcular la suma de todas las longitudes de las circunferencias cuyos radios miden, el de la primera, 1 dm; el de la segunda, 0,5 dm, y así indefinidamente.
116. En un círculo de radio 1 se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo, en éste un nuevo cuadrado, y así sucesivamente. Hallar:
- (a) Límite de la suma de las áreas de los círculos.  
(b) Límite de la suma de las áreas de los cuadrados.
117. El radio de una circunferencia es de 10 m y se inscribe en ella un triángulo equilátero, al cual se le inscribe otra circunferencia, y a ésta otro triángulo equilátero, y así sucesiva e indefinidamente, alternando circunferencias y triángulos inscritos. Calcular:
- (a) La suma de las longitudes de las infinitas circunferencias así construidas.  
(b) La suma de los infinitos perímetros de los triángulos así obtenidos.  
(c) Suma de áreas de los infinitos círculos.  
(d) Suma de áreas de los infinitos triángulos.
118. En el círculo de radio  $r$  se inscribe un triángulo equilátero, en éste se inscribe un círculo y de nuevo en este círculo un triángulo equilátero. Siguiendo así sucesivamente, se pide encontrar:
- (a) Suma de las áreas y perímetros de los triángulos.  
(b) Suma de las longitudes de las circunferencias y de las áreas de los círculos correspondientes.
119. En un hexágono regular de un metro de radio se inscribe otro exágono tomando como vértices los puntos medios de los lados del primero. En este segundo se toman los puntos medios de sus lados como vértices de un tercer exágono, y así sucesiva e indefinidamente. Calcular:
- (a) La suma de todos los perímetros de los infinitos exágonos así obtenidos.  
(b) La suma de sus infinitas áreas.
120. Uniendo los centros de las caras de un tetraedro regular se obtiene otro también regular. Si se hace lo mismo en éste y se continúa indefinidamente la operación, hallar la suma de los volúmenes así obtenidos, siendo 1 metro la arista del primero.
121. ¿Qué condición ha de cumplir  $a$  para que en la progresión  $1, -\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, -\frac{1}{a^3}, \dots$  podamos sumar infinitos términos? Sumarlos.
122. Si los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  están en progresión geométrica, la ecuación  $ax^2 + 2bx + c = 0$ , tiene una raíz doble. Comprobarlo.
123. Se tienen tres enteros  $a$ ,  $b$  y  $c$  en progresión geométrica. Se aumenta  $b$  en 8 y se dejan invariables  $a$  y  $c$ , con lo que se obtiene una progresión aritmética. Si de estos nuevos tres números sólo varía  $c$ , al aumentarlo en 64, la progresión aritmética que se tenía, se convierte en una nueva progresión geométrica. Se pide calcular  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
124. Sabiendo que la suma de la  $n$  términos de una progresión geométrica es  $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ , hallar  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ .
125. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada es el logaritmo de 16 en el sistema de base 8 y su primer término es  $\frac{1}{4}$ . Calcular la razón de la progresión.

126. La diferencia entre los dos últimos términos de una progresión geométrica es 448 y la diferencia de sus logaritmos en el sistema de base 32 es  $\frac{1}{5}$ . Calcular el número de términos y la razón, sabiendo que 7 es el primero.
127. La progresión geométrica  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , es tal, que los logaritmos en base  $x$  de sus términos, están en progresión aritmética de diferencia 2. Se sabe, además, que el cociente entre los términos  $a_4$  y  $a_2$  vale 81 y que la suma de los seis primeros términos es 33215. Hallar:
- La base de los logaritmos.
  - Valor de la razón de la progresión geométrica y el primer término.
128. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente proposición: yo pagaré 1 euro por el primer día, 2 por el segundo, 3 por el tercero, y así sucesivamente; en cambio, usted me dará 0,001 de céntimos por el primer día, 0,002 por el segundo, 0,004 por el tercero, y así sucesivamente. Liquidar la cuenta al final de 30 días.
129. Asaphad, historiador árabe, cuenta que Sessa presentó el invento del juego de ajedrez a Scheran, príncipe de la India y éste le preguntó cuánto quería como recompensa; Sessa contestó: 1 grano de trigo por la primera casilla, 2 por la segunda; 4 por la tercera, y así sucesivamente, hasta la 64 casilla. Se pregunta:
- ¿Cuántos granos de trigo pedía Sessa?
  - ¿Cuántas veces habría que sembrar la superficie no sumergida de la tierra, que es, aproximadamente, 13109 Ha, suponiendo que cada hectárea produjera 25 Hl. y cada Hl 2 millones de granos?.