4ºESO Matemáticas

Jesús García de Jalón de la Fuente
IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2021-2022

Tema 1

Raíces y logaritmos

1.1. Potencias.

Una potencia a^n, en donde n es un entero positivo es un producto de factores iguales:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El factor que se repite a se llama base de la potencia y el número de veces que se repite, n, es el exponente.

Así definidas, las potencias tienen las cinco propiedades siguientes:

- Producto de potencias de la misma base:

  $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

  Para multiplicar potencias de la misma base, se suman los exponentes.

- Cociente de potencias de la misma base:

  $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

  Para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes.

- Potencia de una potencia:

  $$(a^m)^n = a^{mn}$$

  Para elevar una potencia a otro exponente, se multiplican ambos exponentes.

- Potencia de un producto:

  $$(MN)^n = M^n N^n$$

  La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.

- Potencia de un cociente:

  $$\left(\frac{M}{N}\right)^n = \frac{M^n}{N^n}$$

  La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias.

Estas propiedades son sencillas de justificar a partir de la definición de potencia como un producto de factores iguales. Por ejemplo, la primera propiedad se demuestra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

El concepto de potencia puede extenderse a exponentes enteros no positivos de forma que se sigan cumpliendo las propiedades anteriores:

- Si dividimos dos números iguales sabemos que el resultado es 1. Dividamos dos potencias iguales:

  $$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \quad \Longrightarrow \quad a^0 = 1$$

  Así pues, sea cual sea la base, si el exponente es cero, la potencia vale 1.

- Sea ahora una potencia de exponente negativo. Para que se cumpla la primera propiedad debe ocurrir que:

  $$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

  El número a^{-n} es el inverso de a^n.

Así definidas, las potencias de exponente negativo o cero, cumplen las propiedades enumeradas anteriormente. Pero ya no se pueden definir como productos de factores iguales (un número no puede multiplicarse por sí mismo un número negativo de veces).

1.2. Raíces.

La raíz cuadrada de un número N es otro número que elevado al cuadrado es igual a N. Este número se representa por $\sqrt{N}$. Es decir, este número cumple que:

$$\left(\sqrt{N}\right)^2 = N$$

Los números positivos tienen dos raíces cuadradas. Por ejemplo hay dos raíces cuadradas de 9 que son $+3$ y -3 pues cualquiera de estos números elevados al cuadrado dan 9. Cuando queramos distinguir entre la raíz cuadrada positiva y negativa de un número pondremos el signo delante. Así, la raíz positiva de 3 se indica mediante $+\sqrt{3}$ y la negativa mediante $-\sqrt{3}$.

No existe raíz cuadrada de los números negativos puesto que cualquier número al cuadrado es positivo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de -4 no puede ser ni $+2$ ni -2 puesto que $2^2 = (-2)^2 = 4$.

De forma similar se definen las raíces cúbicas, cuartas, etc. La raíz cúbica de N es un número que elevado al cubo es igual a N. La raíz cuarta de N es un número que elevado a la cuarta es igual a N. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{8} = 2 & \text{porque } 2^3 = 8 \\ \sqrt[3]{-8} = -2 & \text{porque } (-2)^3 = -8 \\ \sqrt[4]{81} = 3 & \text{porque } 3^4 = 81 \\ \sqrt[4]{81} = -3 & \text{porque } (-3)^4 = 81 \end{array}$$

Todos los números, positivos y negativos, tienen una única raíz cúbica. Sin embargo, como en el caso de la raíz cuadrada, los números positivos tienen dos raíces cuartas y los números negativos no tienen ninguna.

En general, la raíz enésima de un número N es un número $\sqrt[n]{N}$ que elevado al exponente n es igual a N:

$$\left(\sqrt[n]{N}\right)^n = N$$

Esta definición, la podemos expresar también de la siguiente forma:

$$x^n = N \iff x = \sqrt[n]{N}$$

en donde se aprecia que la raíz permite despejar una incógnita que está elevada a un exponente. En la expresión $\sqrt[n]{N}$, N es el radicando y n es el índice de la raíz.

En general, existe una única raíz de índice impar para todos los números. Los números positivos tienen dos raíces de índice par y los números negativos no tienen ninguna.

Las raíces tienen las propiedades siguientes:

- Raíz de un producto:

  $$\sqrt[n]{M \cdot N} = \sqrt[n]{M} \cdot \sqrt[n]{N}$$

  La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

- Raíz de un cociente:

  $$\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{M}}{\sqrt[n]{N}}$$

  La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces.

- Raíz de una potencia. Siempre que existan las raíces se verifica que:

  $$\sqrt[n]{N^m} = \left(\sqrt[n]{N}\right)^m$$

  La raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz.

- Raíz de una raíz:

  $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{N}} = \sqrt[mn]{N}$$

  La raíz de una raíz es una raíz cuyo índice es el producto de los índices.

- Propiedad de simplificación:

  $$\sqrt[np]{N^{mp}} = \sqrt[n]{N^m}$$

  El índice de la raíz y el exponente del radicando pueden multiplicarse o dividirse por el mismo número.

1.3. Las raíces como potencias de exponente fraccionario.

Podemos pensar ahora qué sentido podemos darle a una potencia de exponente fraccionario como, por ejemplo $5^{\frac{1}{2}}$. Como en el caso de los exponentes negativos no puede considerarse como un producto de factores iguales pues no tiene sentido multiplicar 5 por sí mismo media vez.

Se trata entonces, de definir este número de tal forma que se cumplan las propiedades de las potencias que hemos visto. Elevando este número al cuadrado y aplicando la propiedad de la potencia de otra potencia resulta:

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = 5$$

Vemos que $5^{\frac{1}{2}}$ es un número que, elevado al cuadrado, es igual 5. Pero el número que elevado al cuadrado es 5 es $\sqrt{5}$. Por consiguiente:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

En general:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad \text{puesto que} \qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

y si el numerador es distinto de 1:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{puesto que} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Es decir, el denominador del exponente es el índice de la raíz y el numerador es el exponente del radicando.

1.4. Operaciones con radicales.

Vamos a ver algunos ejemplos de las operaciones más usuales con radicales.

- Extraer factores de la raíz:
$$\sqrt{128} = \sqrt{64\cdot 2} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt{27x^5} = \sqrt{9x^4\cdot 3x} = 3x^2\sqrt{3x}$$

- Introducir factores en la raíz:
$$5\sqrt{6} = \sqrt{25\cdot 6} = \sqrt{150}$$
$$3\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{27\cdot 10} = \sqrt[3]{270}$$
$$2x^3\sqrt{5x} = \sqrt{4x^6\cdot 5x} = \sqrt{20x^7}$$

- Multiplicar o dividir radicales. Si las raíces tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos. Si tienen distinto índice, aprovechando la propiedad de simplificación, se reducen a índice común y después se multiplican o dividen los radicandos:
$$\sqrt{18}\ \sqrt{6} = \sqrt{18\cdot 6} = \sqrt{108}$$
$$\sqrt{5}\ \sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{5^3}\ \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[6]{5^3\cdot 10^2} = \sqrt[6]{12500}$$
$$\sqrt{2x}\ \sqrt[3]{5x^2};\ \sqrt[4]{3x^3} = \sqrt[12]{2^6x^6}\ \sqrt[12]{5^4x^8}\ \sqrt[12]{3^3x^9} = \sqrt[12]{1080000x^{23}}$$

- Suma de radicales. Solamente puede encontrarse una expresión más sencilla en el caso de que los radicales sean semejantes, esto es, radicales en los que después de extraer factores queden raíces iguales. Si no sucede así, la suma se deja indicada.
$$5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = (5+3)\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$
$$2\sqrt{50} + 3\sqrt{32} = 2\sqrt{25\cdot 2} + 3\sqrt{16\cdot 2} = 2\cdot 5\sqrt{2} + 3\cdot 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} - \sqrt{3} \qquad \text{esta suma debe dejarse indicada}$$

- Racionalizar denominadores. Se trata de obtener fracciones equivalentes sin raíces en el denominador. La técnica es diferente según aparezca o no en el denominador una suma o diferencia de raíces:
$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$
$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}$$

1.5. Logaritmos.

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 3^x = 81 &\quad \Longrightarrow x = \log_3 81 = 4 \\ 2^x = 8 &\quad \Longrightarrow x = \log_2 8 = 3 \\ 5^x = \tfrac{1}{5} &\quad \Longrightarrow x = \log_5 \tfrac{1}{5} = -1 \\ 3^x = \sqrt{3} &\quad \Longrightarrow x = \log_3 \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

También puede definirse de la siguiente forma. Sea a un número positivo, se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} \log_7 49 = 2 & \text{ya que} & 7^2 = 49 \\ \log_5 125 = 3 & \text{ya que} & 5^3 = 125 \\ \log_4 2 = \frac{1}{2} & \text{ya que} & 4^{\frac{1}{2}} = 2 \end{array}$$

Primeras propiedades:

- Puesto que para $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, solamente existen los logaritmos de los números positivos.
- Puesto que $a^0 = 1$, el logaritmo de 1 es igual a 0 en cualquier base:

  $$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0$$

- Puesto que $a^1 = a$, el logaritmo de la base es igual a 1:

  $$a^1 = a \Longleftrightarrow \log_a a = 1$$

1.6. Propiedades de las logaritmos.

- **Logaritmo de un producto.** El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

  $$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

  Demostración:

  $$\left.\begin{array}{ll} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_a(MN) = \log_a(a^x a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a M + \log_a N$$

- **Logaritmo de un cociente.** El logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores:

  $$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

  Demostración:

  $$\left.\begin{array}{ll} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

- **Logaritmo de una potencia.** El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

  $$\log_a M^n = n \log_a M$$

  Demostración:

  $$\begin{aligned}\log_a M^n &= \log_a \overbrace{(M \cdot M \cdot \ldots \cdot M)}^{n \text{ factores}} \\ &= \overbrace{\log_a M + \log_a M + \ldots + \log_a M}^{n \text{ sumandos}} \\ &= n \log_a M\end{aligned}$$

- **Logaritmo de una raíz.** El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

  $$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

  Demostración:

  $$\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a M$$

1.7. Cambio de base.

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración:

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base a en esta última igualdad:

$$\begin{aligned}&\log_a b^x = \log_a N \Longrightarrow x \log_a b = \log_a N \\ &\qquad \Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}\end{aligned}$$

Veamos ahora algunas aplicaciones de la fórmula del cambio de base:

- *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.

  Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:

  $$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$

- *Obtener sin calculadora* $\log_{32} 16$.

  Puesto que los dos números son potencias de 2, pasando a esta base:

  $$\log_{32} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 32} = \frac{4}{5}$$

- *Demostrar que* $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N$.

  Cambiando a la base a:

  $$\log_{\frac{1}{a}} N = \frac{\log_a N}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a N}{-1} = -\log_a N$$

Tema 2

Progresiones

2.1. Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números en la que cada término es igual al anterior más un número constante que se llama diferencia de la progresión:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

De la definición se deduce que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 4d \\ \cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

En general se cumple que:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Aplicando la fórmula anterior a dos términos de la progresión se obtiene:

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + d \cdot (m-1) \\ a_n &= a_1 + d \cdot (n-1) \end{aligned}$$

Restando las dos igualdades resulta:

$$\boxed{a_m = a_n + d \cdot (m-n)}$$

fórmula que permite obtener cualquier término de la sucesión a partir de otro término y de la diferencia.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Agrupando los sumandos el primero con el último, el segundo con el penúltimo, etc:

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots$$

Todos los paréntesis son iguales y hay $\frac{n}{2}$ paréntesis. Por consiguiente:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

2.2. Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números en que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón de la progresión:

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Razonando de forma similar a como se hizo con las progresiones aritméticas resulta:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Aplicando esta fórmula a dos términos:

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 \cdot r^{m-1} \\ a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene:

$$\boxed{a_m = a_n \cdot r^{m-n}}$$

Si en la expresión:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

multiplicamos por r y restamos, resulta:

$$\begin{array}{lllllllll} S_n & = a_1 & + a_2 & + a_3 & + \cdots & + a_n & & \\ S_n r & = & a_1 r & + a_2 r & + \cdots & + a_{n-1} r & + a_n r \\ \hline S_n - S_n r & = a_1 & & & & & - a_n r \end{array}$$

De aquí se obtiene la fórmula para la suma:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}}$$

Si la razón de la progresión está comprendida entre -1 y 1, el término a_n tiende a cero cuando n tiende a infinito. En este caso existe el límite de S_n:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

Por consiguiente, para estas progresiones podemos escribir:

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}} \qquad -1 < r < 1$$

2.3. Problemas

1. Escribir los cinco primeros términos de una progresión aritmética en la que el cuarto término es 5 y la diferencia -3.
2. Calcular el término 30 de una progresión aritmética en que al primer término es 5 y la diferencia $\frac{1}{3}$.
3. Sabiendo que el sexto término de una progresión aritmética es 4 y su diferencia $\frac{1}{2}$, calcular el término 20 y la suma de los 14 primeros términos.
4. Interpolar 5 medios aritméticos entre 3 y 27.
5. En una progresión aritmética $A_{40} = 59$ y $a_{27} = 33$. calcular la suma de los 50 primeros términos.
6. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética $3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ \ldots$ se deben tomar para que la suma sea -374.

7. Demostrar que en toda progresión aritmética cada término es igual a la semisuma del que le precede y el que le sigue.

8. Los ángulos de un hexágono regular forman una progresión aritmética y el menor de ellos mide 80. Calcular los demás.

9. Calcular cuatro números en progresión aritmética sabiendo que su suma es 22 y la suma de sus cuadrados es 166.

10. En una progresión aritmética limitada de un número impar de términos, la suma de los que ocupan lugar impar es 75 y la suma de los que ocupan lugar par es 60. Calcular el término central y el número de términos.

11. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Si la hipotenusa mide 20 cm, calcular el perímetro y el área de dicho triángulo.

12. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 7744?

13. Escribir el término general de las siguientes sucesiones:

    (a) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \ldots$ (b) $7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \frac{7}{81}\ldots$ (c) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}\ldots$

    (d) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{27}{2}, \ldots$ (e) $4, -4, 4, -4, 4, -4\ldots$ (f) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$

14. Escribir los cinco primeros términos de la progresión geométrica en el que el cuarto término es 27 y la razón 3.

15. sabiendo que el cuarto término de una progresión geométrica es 27 y que l primero vale 1, calcular su razón, el quinto término y el producto de los nueve primeros términos.

16. En una progresión geométrica el primer término vale 7, la razón 2 y un cierto término 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

17. Interpola cuatro medios proporcionales o geométricos entre 3 y 96.

18. Si en una progresión geométrica conocemos que el primer término vale 7 y el término 15 vale 1575, calcula el producto de los 15 primeros términos.

19. Halla el producto de los 11 primeros términos de una progresión geométrica si el término central vale 2.

20. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la sucesión $3, 6, 12, 24, \ldots$. Lo mismo para la sucesión $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$.

21. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 6.

22. Calcular el valor de la siguiente expresión:
    $$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\cdots}$$

23. La suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los 4 primeros. Calcula la razón de dicha progresión.

24. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su producto es 328509 y que el mayor de ellos excede en 115 a la suma de los otros dos.

25. Hallar la fracción generatriz de las siguientes expresiones (a) 0,737373... (b) 3,27818181...

Tema 3

Polinomios

3.1. Polinomios. Valor numérico.

Un polinomio es una expresión en la que aparecen operaciones indicadas de sumas y productos entre números y una variable x (indeterminada):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Los números a_0, a_1, ..., se llaman **coeficientes** del polinomio y cada uno de los sumandos es un **monomio**. El exponente de x en cada sumando es el grado del monomio y el mayor de todos ellos es el **grado del polinomio**. El coeficiente del monomio de mayor grado es el **coeficiente principal** del polinomio. El coeficiente del término de grado cero, esto es, el número que no multiplica a x se llama **término independiente** del polinomio. Es decir:

n: grado del polinomio
a_n: coeficiente principal
a_0: término independiente

Por ejemplo $2x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ es un polinomio de grado 3, su coeficiente principal es 2 y el término independiente es -1. El polinomio $x^2 - x$ es de grado 2, su coeficiente principal es 1 y el término independiente es 0.

El **valor numérico** (o simplemente valor) de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene sustituyendo en el polinomio la indeterminada x por a. El valor del polinomio $P(x)$ para $x = a$ se representa por $P(a)$.

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2 \cdot (-3)^4 - 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) - 2 \\ &= 162 - 45 - 12 - 2 \\ &= 103 \end{aligned}$$

El valor numérico de un polinomio se calcula fácilmente mediante la Regla de Ruffini. Supongamos que queremos calcular el valor numérico para $x = a$. Escribimos los coeficientes del polinomio en orden descendente (completando con ceros cuando falte algún término). Multiplicamos el primer coeficiente por a y sumamos este producto al segundo coeficiente. El número así obtenido lo volvemos a multiplicar por

a y se lo sumamos al tercer coeficiente. Repitiendo el proceso, el último número que obtenemos es el valor numérico del polinomio.

Veamos un ejemplo. Sea de nuevo el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$$

Calculemos su valor numérico para $x = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & 105 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -35 & \mathbf{103} \end{array}$$

Más adelante veremos otra forma de interpretar los números que se obtienen mediante la regla de Ruffini.

3.2. Raíces de un polinomio.

Un número r es **raíz** de un polinomio si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es cero.

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(r) = 0$$

Para calcular las raíces del polinomio $P(x)$ se resuelve la ecuación $P(x) = 0$. De esta manera, resulta sencillo calcular las raíces de los polinomios de primer y segundo grado.

Recordemos que para polinomios de segundo grado, la existencia y el número de las raíces depende del valor del discriminante.

Sea el polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$. Las raíces de este polinomios son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama discriminante del polinomio. Según los valores del discriminante tenemos:

- ◇ $\Delta > 0$: el polinomio tiene dos raíces diferentes r_1 y r_2.
- ◇ $\Delta = 0$: las dos raíces coinciden. El polinomio tiene por consiguiente una sola raíz que podemos llamar r_{12}.
- ◇ $\Delta < 0$: el polinomio no tiene raíces.

Para calcular las raíces de polinomios de grado superior, resulta útil la siguiente **propiedad**: las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente:

$$\begin{aligned} & r \text{ raíz de } a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ \Longrightarrow \quad & a_0 + a_1r + a_2r^2 + a_3r^3 + \cdots = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_0 = -a_1r - a_2r^2 - a_3r^3 - \cdots \\ \Longrightarrow \quad & a_0 = -r(a_1 + a_2r + a_3r^2 + \cdots) \\ \Longrightarrow \quad & r \text{ es divisor de } a_0 \end{aligned}$$

Por ejemplo, las raíces enteras del polinomio $x^3 - 6x^2 + x - 4$ han de ser divisores de 4. Por tanto sólo pueden ser -1, 1, -2, 2, -4 y 4.

3.3. Teoremas del factor y del resto.

Teorema del factor. Si r es raíz de un polinomio, éste es divisible por $x - r$

$$r \text{ raíz de } P(x) \Longleftrightarrow P(x) = (x - r)Q(x)$$

Demostración:

- ⋄ Sea r raíz del polinomio $P(x)$, es decir, $P(r) = 0$.
- ⋄ Si se divide $P(x)$ por $x - r$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

- ⋄ Para $x = r$:

$$P(r) = (r - r)Q(r) + R \quad \Longrightarrow \quad R = P(r) = 0$$

y por consiguiente $P(x) = (x - r)Q(x)$.

De acuerdo con el teorema del factor, si r es una raíz de un polinomio, en su descomposición factorial aparece un factor $x - r$. Si este factor aparece repetido dos veces, esto es, si en la descomposición factorial aparece el factor $(x - r)^2$, entonces la raíz r se llama **doble**. Si apareciese el factor $(x - r)^3$ la raíz sería **triple**, si apareciese $(x - r)^4$ sería **cuádruple**, etc.

Teorema del resto. El valor numérico del polinomio para $x = a$ es igual al resto de dividir ese polinomio por $x - a$.

Demostración:

Supongamos que al dividir $P(x)$ por $x - a$ da un cociente $C(x)$ y un resto R. Estos polinomios cumplen que:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

y para $x = a$:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R = R$$

3.4. Descomposición factorial de un polinomio de segundo grado.

Según el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, el polinomio de $ax^2 + bx + c$ puede tener cero, una o dos raíces. Si aplicamos el teorema del factor, en cada uno de estos casos, el polinomio se descompone de la siguiente forma:

- ⋄ $\Delta > 0$. En este caso, el polinomio tiene dos raíces r_1 y r_2. De acuerdo con el teorema del factor, en su descomposición factorial deben aparecer los factores $x - r_1$ y $x - r_2$. Puesto que el coeficiente de x^2 es a la descomposición en factores debe ser:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

- ⋄ $\Delta = 0$. El polinomio tiene una sola raíz r_{12}. Este caso es igual que el anterior suponiendo que las dos raíces son iguales. La descomposición es:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_{12})^2$$

- ⋄ $\Delta < 0$. El polinomio no tiene raíces. No puede descomponerse en factores.

Ejercicio 1. Descomponer en factores los polinomios (a) $18x^2 - 9x - 2$ (b) $4x^2 - 4x + 1$ (c) $x^2 + x + 1$

(a) Calculamos las raíces del polinomio $18x^2 - 9x - 2$:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{36} = \frac{9 \pm 15}{36} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{2}{3} \\ r_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

La descomposición factorial es:

$$18x^2 - 9x - 2 = 18 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right) = (3x - 2)(6x + 1)$$

(*b*) Como en el caso anterior:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2}$$

Puesto que el discriminante es cero, el polinomio tiene una raíz doble. Su descomposición factorial es:

$$4x^2 - 4x + 1 = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2x-1)^2$$

(*c*) El discriminante de este polinomio es menor que cero. El polinomio no puede descomponerse en factores.

♠♠♠♠

Se llaman polinomios **primos o irreducibles** aquéllos que no pueden descomponerse en factores de grado inferior. Los polinomios de primer grado son primos puesto que multiplicando polinomios de grado inferior (polinomios de grado cero,es decir, números) no puede obtenerse un polinomio de primer grado.

Acabamos de ver que los polinomios de segundo grado con discriminante menor que cero también son primos. Puede demostrarse que no existen polinomios primos distintos de estos. En consecuencia, todo polinomio puede descomponerse como producto de polinomios de primer grado y de polinomios primos de segundo grado.

3.5. Regla de Ruffini.

La regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ -3 & & -6 & 18 & -39 & 105 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -35 & 103 \end{array}$$

puede interpretarse como una división en la que:

Dividendo:	$2x^4 - 5x^2 + 4x - 2$
Divisor:	$x + 3$
Cociente:	$2x^3 - 6x^2 + 13x - 35$
Resto:	103

La regla de Ruffini facilita la búsqueda de las raíces enteras de un polinomio y su descomposición factorial. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 2. Descomponer en factores el polinomio $6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12$.

Buscamos raíces enteras. Éstas deben ser divisores del término independiente 12. Las posibles raíces enteras son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12. Probemos con -1 y $+1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -17 & -7 & 40 & -12 \\ -1 & & -6 & 23 & -16 & -24 \\ \hline & 6 & -23 & 16 & 24 & -36 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -17 & -7 & 40 & -12 \\ 1 & & 6 & -11 & -18 & 22 \\ \hline & 6 & -11 & -18 & 22 & 10 \end{array}$$

Vemos que ni -1 ni $+1$ son raíces del polinomio. Probemos con -2 y $+2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -17 & -7 & 40 & -12 \\ -2 & & -12 & 58 & -102 & 124 \\ \hline & 6 & -29 & 51 & -62 & 112 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -17 & -7 & 40 & -12 \\ 2 & & 12 & -10 & -34 & 12 \\ \hline & 6 & -5 & -17 & 6 & 0 \end{array}$$

El número 2 es una raíz del polinomio, por consiguiente $x-2$ es un factor y podemos escribir:

$$6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12 = (x-2)(6x^3 - 5x^2 - 17x + 6)$$

Busquemos ahora factorizar $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6$. Ya hemos visto que -1, 1 y -2 no son raíces. Probemos de nuevo con 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -5 & -17 & 6 \\ 2 & & 12 & 14 & -6 \\ \hline & 6 & 7 & -3 & 0 \end{array}$$

Tenemos de nuevo la raíz 2. Podemos escribir que:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12 &= (x-2)(6x^3 - 5x^2 - 17x + 6) \\ &= (x-2)(x-2)(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x-2)^2(6x^2 + 7x - 3) \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $6x^2 + 7x - 3$ las obtenemos resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$6x^2 + 7x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{1}{3} \\ r_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

con lo que el polinomio factorizado queda finalmente:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 40x - 12 &= (x-2)^2(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x-2)^2 \cdot 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \\ &= (x-2)^2 \cdot (3x-1)(2x+3) \end{aligned}$$

♠♠♠♠

Tema 4

Ecuaciones e inecuaciones

4.1. Ecuaciones de primer grado.

El procedimiento general para resolver una ecuación de primer grado es el siguiente:

- ◇ Quitar denominadores multiplicando todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de todos ellos.
- ◇ Quitar paréntesis.
- ◇ Agrupar términos.
- ◇ Despejar la incógnita.

Veámoslo con un ejemplo:

Ejercicio 3. Resolver la ecuación:

$$\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{-4x+2}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2}$$

- ◇ Multiplicamos ambos miembros por 10 y simplificamos:

$$\frac{10(x-4)}{5} - 10 \cdot 4(-2x+1) - \frac{10(-4x+2)}{10} = 10 \cdot 2(x-3) + \frac{10(5x+6)}{2}$$

$$2(x-4) - 40(-2x+1) - (-4x+2) = 20(x-3) + 5(5x+6)$$

- ◇ Quitamos paréntesis:

$$2x - 8 + 80x - 40 + 4x - 2 = 20x - 60 + 25x + 30$$

- ◇ Reducimos y agrupamos términos:

$$86x - 50 = 45x - 30$$
$$86x - 45x = 50 - 30$$
$$41x = 20$$

- ◇ Finalmente despejamos y obtenemos la solución:

$$x = \frac{20}{41}$$

♠♠♠♠

Si después de agrupar términos se encontrase una ecuación del tipo $0 \cdot x = b$ con $b \neq 0$ querría decir que la ecuación no tiene solución, pues ningún número multiplicado por 0 da un producto distinto de cero. Si se encontrase una ecuación $0 \cdot x = 0$ querría decir que todo número es solución, pues cualquier número multiplicado por cero da cero.

4.2. Ecuaciones de segundo grado.

En la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ se despeja la incógnita x mediante la fórmula conocida:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El número de soluciones depende del signo del discriminante $\Delta = b^2-4ac$. Si éste es positivo, la suma de las dos soluciones vale:

$$x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

y su producto:

$$x_1x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Si el coeficiente principal vale 1 la suma y el producto de las soluciones son:

$$x_1+x_2=-b\,; \qquad x_1x_2 = c \qquad (a=1)$$

Ejercicio 4. Obtener una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $x_1=-3$, y $x_2=7$.

Si $a=1$ tenemos queda:

$$x_1+x_2 = -3+7=4=-b\,; \qquad x_1x_2=-3\cdot 7=-21=c$$

y la ecuación es:

$$x^2-4x-21=0$$

A la misma ecuación se llega escribiéndola en forma factorizada:

$$(x+3)\cdot(x-7)=0$$

♠♠♠♠

Ejercicio 5. Resolver la ecuación:

$$6x^2-1+\frac{2x(3-x)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$$

Empezamos quitando denominadores multiplicando todos los términos por 6:

$$6\cdot 6x^2 - 6\cdot 1 + \frac{6\cdot 2x(3-x)}{3} = \frac{6\cdot(5x^2-2)}{6} - 6\cdot 4x^2 + \frac{6\cdot 59}{6}$$

$$36x^2-6+12x-4x^2 = 5x^2-2-24x^2+59$$

Quitamos paréntesis y agrupamos términos en el primer miembro:

$$32x^2+12x-6=-19x^2+57$$

$$51x^2+12x-63=0$$

$$17x^2+4x-21=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^4+4\cdot 17\cdot 21}}{2\cdot 17} \implies x_1=1\,; \qquad x_2=-\frac{21}{17}$$

♠♠♠♠

La fórmula de la ecuación de segundo grado permite calcular x en ecuaciones del tipo $ax^4+bx^2+c=0$ (ecuaciones bicuadradas). Llamando $t=x^2$ estas ecuaciones se escriben:

$$at^2+bt+c=0 \implies t=x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \implies x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

y de forma parecida se resuelven ecuaciones del tipo $ax^6+bx^3+c=0$ y similares.

Ejercicio 6. Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Despejando:

$$x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

que nos da las soluciones:

$$x^2 = 9 \implies \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \qquad x^2 = 4 \implies \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

♠♠♠♠

4.3. Ecuaciones irracionales.

Se llaman así las ecuaciones en que la incógnita aparece bajo el signo de raíz. Para resolver estas ecuaciones seguiremos los siguientes pasos:

- ◇ Despejar la raíz.
- ◇ Elevar ambos miembros de la igualdad al cuadrado.
- ◇ Resolver la ecuación resultante.
- ◇ Comprobar las soluciones.

El último paso es necesario porque, al elevar al cuadrado, la ecuación que resulta es de grado superior y puede tener más soluciones que la ecuación original, aparte de que puede tener soluciones para las que la raíz cuadrada no tenga sentido. Por ejemplo, la ecuación

$$x - 1 = 3$$

tiene una sola solución $x = 4$, pero la ecuación

$$(x-1)^2 = 3^2$$

tiene dos soluciones $x = 4$ y $x = -2$.

Ejercicio 7. Resolver la ecuación $\sqrt{40 - x^2} + 4 = x$

- ◇ Despejamos la raíz:

$$\sqrt{40 - x^2} = x - 4$$

- ◇ Elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{40 - x^2}\right)^2 = (x-4)^2 \implies 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16$$

- ◇ Resolvemos

$$0 = 2x^2 - 8x - 24 \implies x^2 - 4x - 12 = 0 \implies \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

- ◇ Si comprobamos las soluciones vemos que $x = 6$ es válida pero $x = -2$ no lo es, porque para este valor el primer miembro es igual a 10 y el segundo a -2.

♠♠♠♠

4.4. Ecuaciones de grado superior al segundo.

Estas ecuaciones deben resolverse factorizando el polinomio con los métodos aprendidos en el tema anterior.

Ejercicio 8. Resolver la ecuación $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.

Buscamos una raíz entera entre los divisores de 10:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ 1 & & 1 & -5 & -2 \\ \hline & 1 & -5 & -2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ -1 & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

Vemos que -1 es una raíz del polinomio y que, por consiguiente, $x+1$ es un factor. Descomponemos el polinomio en factores y la ecuación queda:

$$(x+1)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

No es preciso seguir descomponiendo el polinomio pues una vez que lo tenemos factorizado en polinomios de primer y segundo grado ya podemos resolver la ecuación. Igualando a cero cada uno de los factores resulta:

$$\begin{aligned} x + 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -1 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = 2\,; \quad x_3 = 5 \end{aligned}$$

♠♠♠♠

4.5. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Hay que tener en cuenta que de la definición de logaritmo

$$\log_a N = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = N$$

se desprende que en igualdades de este tipo, un exponente se despeja como logaritmo de la misma base, y que el argumento de la función logaritmo se despeja como una exponencial de la misma base.

Para transformar las ecuaciones hasta obtener igualdades de este tipo deben aplicarse las propiedades de las potencias y logaritmos.

Ejercicio 9. Resolver la ecuación $\ln x^3 - \ln x = \ln(2x + 15)$

Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente:

$$\begin{aligned} &\ln \frac{x^3}{x} = \ln(2x + 15) \\ &\ln x^2 = \ln(2x + 15) \\ &x^2 = 2x + 15 \\ &x^2 - 2x - 15 = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta última ecuación son $x = 5$ y $x = -3$. Ésta última no puede ser solución de la ecuación original porque no existen logaritmos de números negativos.

♠♠♠♠

Ejercicio 10. Resolver la ecuación $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$

Aplicando las propiedades de las potencias de la misma base:

$$5^3 5^x - \frac{5^x}{5} - 3120 = 0$$

Quitando denominadores y despejando:

$$\begin{aligned} &625 \cdot 5^x - 5^x - 15600 = 0 \\ &(625 - 1)5^x = 15600 \\ &5^x = \frac{15600}{624} = 25 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, $x = 2$.

♠♠♠♠

4.6. Inecuaciones.

Una inecuación es una desigualdad que se satisface solamente para algunos valores de las incógnitas que son las soluciones de la inecuación. Ejemplos de inecuaciones son:

$$3x+5 \geq x\,; \qquad 3x^2-5x+6<0\,; \qquad \frac{x-4}{x+2} \leq 5$$

Una inecuación puede transformarse en otra equivalente casi con las mismas reglas que una ecuación. Es decir, pueden cambiarse sumandos de uno a otro miembro cambiándoles el signo y pueden multiplicarse ambos miembros de la desigualdad por el mismo número positivo.

Únicamente hay que tener en cuenta que si se multiplican o dividen los dos miembros por el mismo número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad. Por ejemplo:

$$5x<10 \implies x<\frac{10}{5} \implies x<2 \qquad \text{sin embargo}$$

$$-5x<10 \implies x>\frac{10}{-5} \implies x>-2$$

Así, una inecuación de primer grado puede resolverse de forma prácticamente igual que una ecuación. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 11. Resolver la inecuación:

$$\frac{2(x-3)}{5}-x \leq \frac{x}{2}+\frac{3(x-2)}{10}$$

Aplicamos el mismo procedimiento que para resolver una ecuación de primer grado. Si debemos multiplicar o dividir por un número negativo, cambiaremos el sentido de la desigualdad:

$$\frac{10\cdot 2(x-3)}{5}-10\cdot x \leq \frac{10\cdot x}{2}+\frac{10\cdot 3(x-2)}{10}$$

$$4(x-3)-10x \leq 5x+3(x-2)$$

$$4x-12-10x \leq 5x+3x-6$$

$$-6x-12 \leq 8x-6$$

$$-6x-8x \leq -6+12$$

$$-14x \leq 6$$

$$x \geq \frac{6}{-14} \qquad \text{o bien} \qquad x \geq -\frac{3}{7}$$

La solución puede expresarse también como el intervalo $[-\frac{3}{7},\infty)$.

♠♠♠♠

De forma general, para resolver una inecuación de cualquiera de las formas

$$P(x)<0\,; \qquad P(x)\leq 0\,; \qquad P(x)>0\,; \qquad P(x)\geq 0$$

se procede de la forma siguiente:

- ◇ Se calculan las raíces del polinomio $P(x)$.
- ◇ Las raíces obtenidas en el apartado anterior dividen la recta real en varios intervalos. Se calcula el signo del polinomio en cada uno de los intervalos.
- ◇ La solución está formada por los intervalos que cumplen la inecuación.

Para ver si el polinomio toma valores positivos o negativos en un intervalo basta probar con un número del intervalo. Además debe tenerse en cuenta que en las raíces simples (o de multiplicidad impar) el polinomio cambia de signo y en las raíces dobles (o de multiplicidad par) el polinomio no cambia de signo. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 12. Resolver la inecuación $x^2 - 2x - 3 > 0$

- ◇ Las raíces del polinomio son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. Son raíces simples.
- ◇ Estudiamos el signo del polinomio. Tenemos el siguiente esquema de signos:

	0		0	
$+$	|	$-$	|	$+$
	-1		3	

- ◇ Como buscamos los intervalos en los que la función es positiva, la solución es:

  $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

♠♠♠♠

Ejercicio 13. Resolver la inecuación $x^3 - x^2 - 8x + 12 \leq 0$

- ◇ Para calcular las raíces, descomponemos en factores el polinomio buscando sus raíces enteras:

	1	-1	-8	12
2		2	2	-12
	1	1	-6	0

  y tenemos una primera factorización $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2 + x - 6)$.
  Las raíces de $x^2 + x - 6$ son 2 y -3. Por consiguiente, tenemos que:

  $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3)$

  Las raíces del polinomio son $x_1 = 2$ (doble) y $x_2 = -3$.
- ◇ El signo del polinomio responde al siguiente esquema:

	0		0	
$-$	|	$+$	|	$+$
	-3		2	

  Obsérvese que en $x = 2$ que es una raíz doble, el polinomio no cambia de signo.
- ◇ La solución de la inecuación propuesta es $(-\infty, -3] \cup \{2\}$

♠♠♠♠

Otro tipo de inecuaciones importantes son las de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Este problema se reduce al caso anterior si tenemos en cuenta que el signo de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual que el de $P(x)Q(x)$. Únicamente hay que tener en cuenta que en las raíces del denominador no existe la fracción y, por consiguiente, no pueden ser soluciones. Veámoslo con un ejemplo.

Ejercicio 14. Resolver la inecuación:

$$\frac{4 - x^2}{x + 1} \geq 0$$

Consideremos la inecuación

$$(4 - x^2)(x + 1) \geq 0$$

Las raíces de este polinomio son 2, -2 y -1. Calculemos el signo del polinomio y tengamos en cuenta que la raíz del denominador ($x = -1$), no puede ser solución:

	0		$\nexists$		0	
$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$
	-2		-1		2	

Hemos indicado con el símbolo $\nexists$ (no existe) la raíz del denominador $x = -1$. Del diagrama de signos se desprende que la solución de la inecuación es $(-\infty, -2] \cup (-1, 2]$.

♠♠♠♠

Ejercicio 15. Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x} \leq 2$$

La inecuación es equivalente a:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x} - 2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 0$$

Resolvamos

$$(x^2 - 3x + 2)x \leq 0$$

eliminando la raíz del denominador ($x = 0$) como posible solución. Las raíces del polinomio producto son $x = 1$, $x = 2$ y $x = 0$:

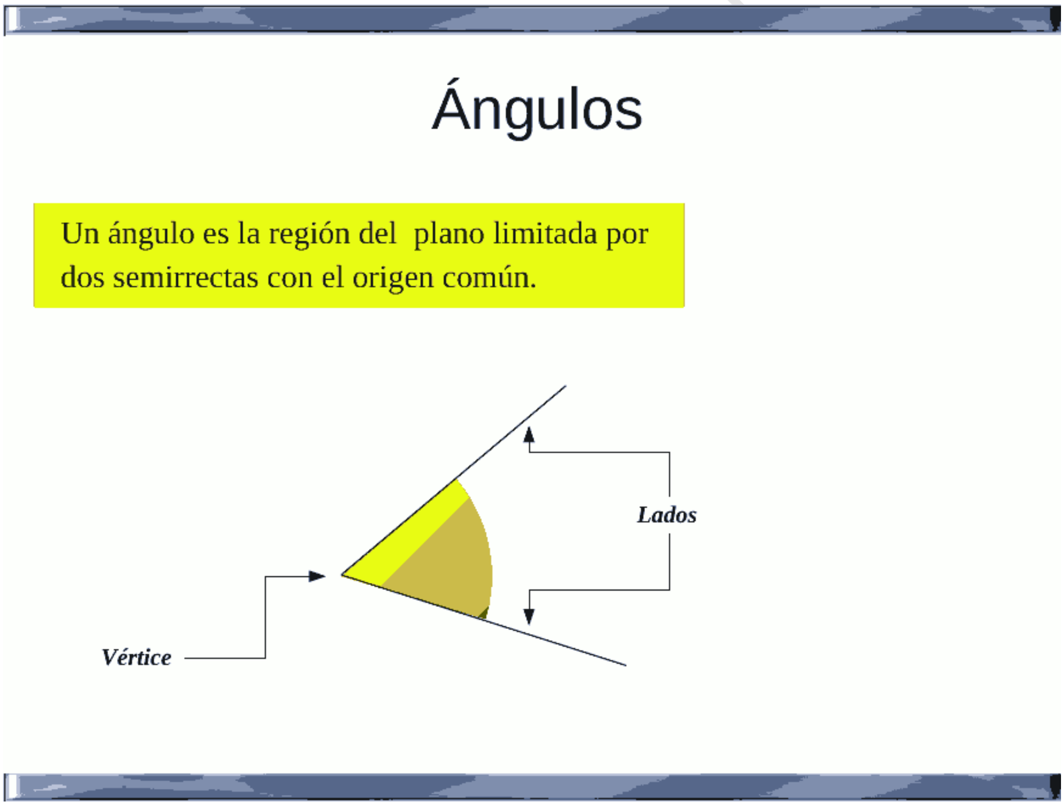
	$\nexists$		0		0	
$-$		$+$		$-$		$+$
	0		1		2	

La solución es $(-\infty, 0) \cup [1, 2]$.

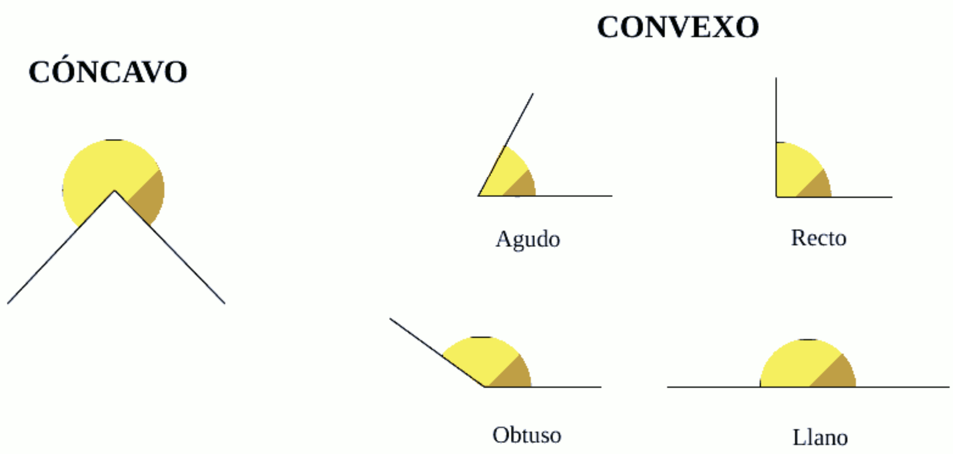
♠♠♠♠

Tema 5

Geometría

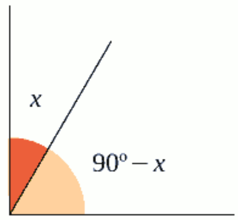


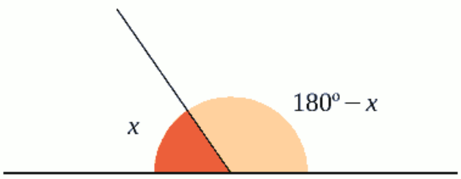
Clasificación de los ángulos



Complementarios y suplementarios

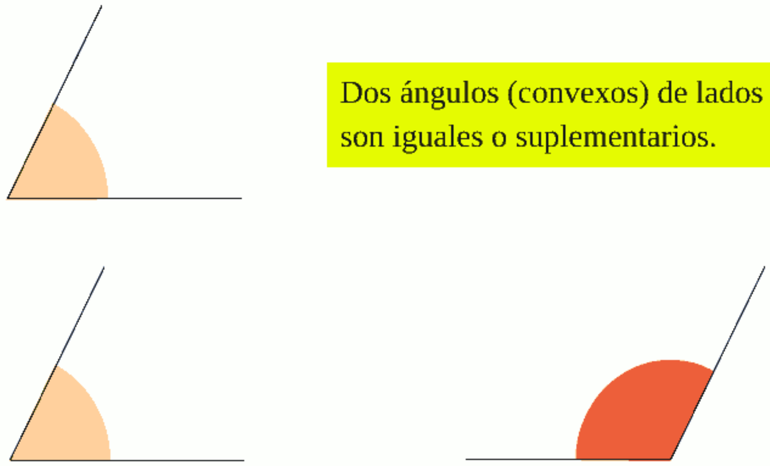
Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto (90º).





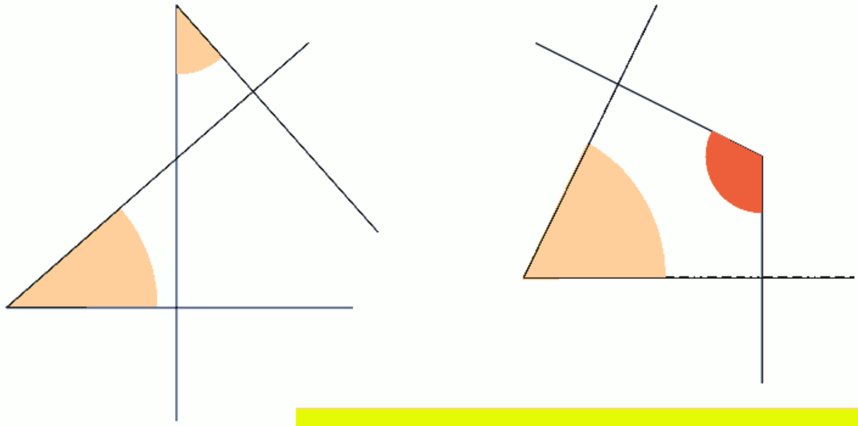
Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano (180º).

Lados paralelos



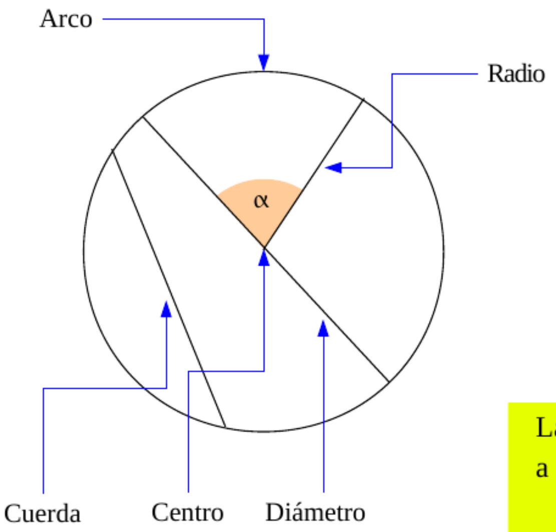
Dos ángulos (convexos) de lados paralelos son iguales o suplementarios.

Lados perpendiculares



Dos ángulos (convexos) de lados perpendiculares son iguales o suplementarios.

Circunferencia



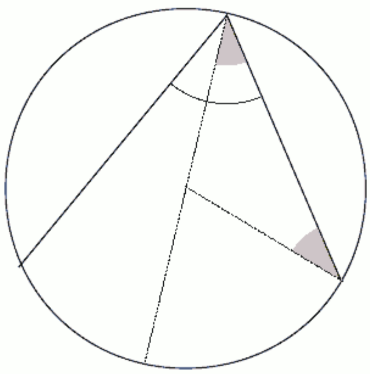
La longitud de la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π:

$$l = 2\pi r$$

La longitud de un arco es proporcional a su amplitud:

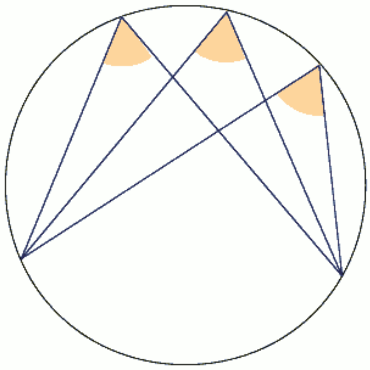
$$l_{arco} = \frac{2\pi r \alpha}{360}$$

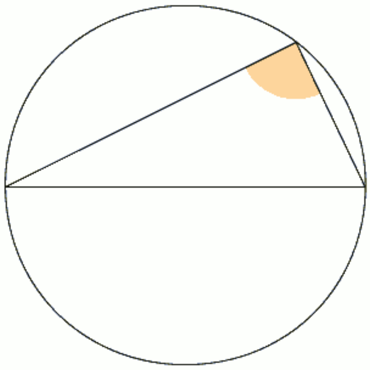
Ángulos inscritos



Un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad que el ángulo central correspondiente (es la mitad del arco).

Ángulos inscritos

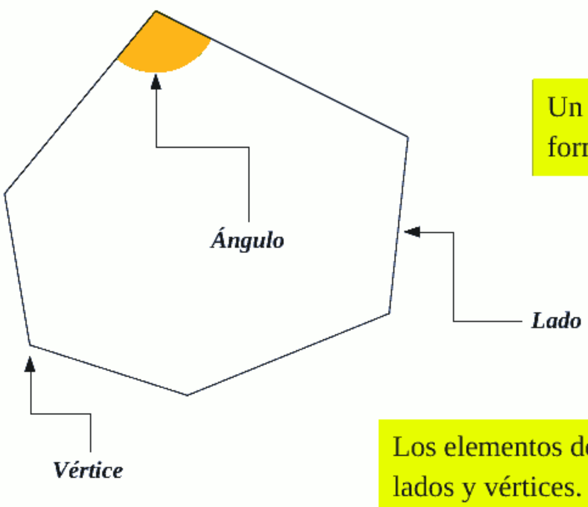




Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.

Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

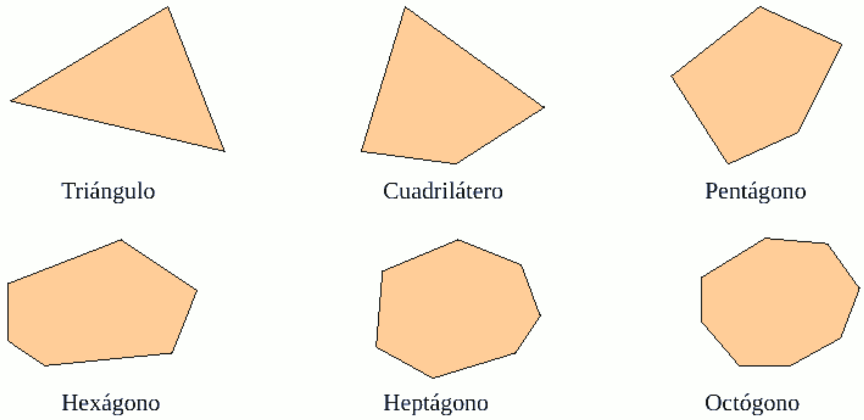
Polígonos



Un polígono es una línea cerrada formada por varios segmentos.

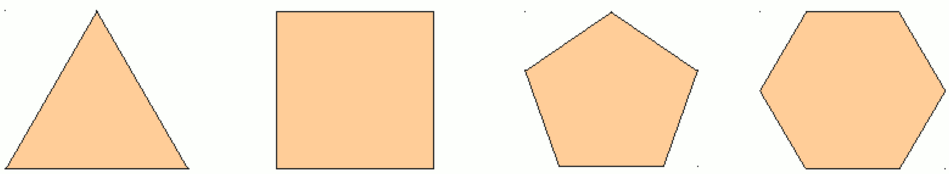
Los elementos de un polígono son ángulos, lados y vértices.

Clasificación de los polígonos



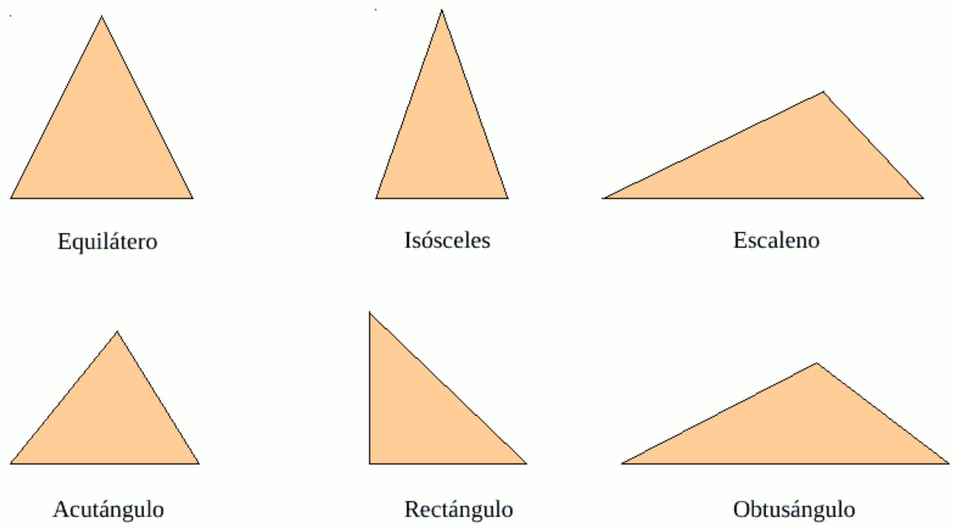
Según el número de ángulos y lados, los polígonos se clasifican en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, etc.

Polígonos regulares

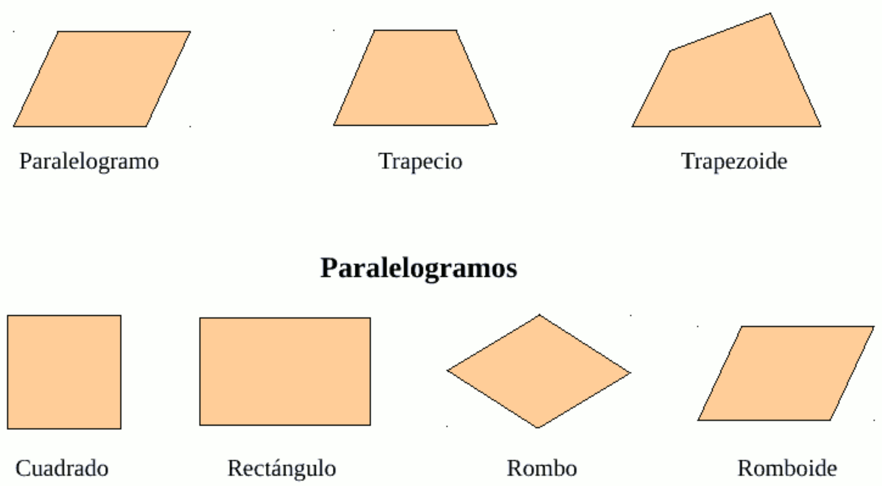


Se llaman regulares los polígonos que tienen todos sus lados y ángulos iguales.

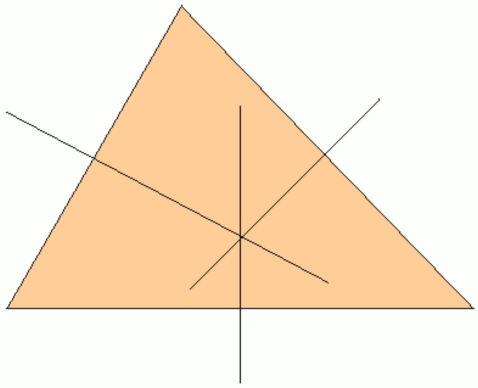
Triángulos: clasificación



Cuadriláteros: clasificación



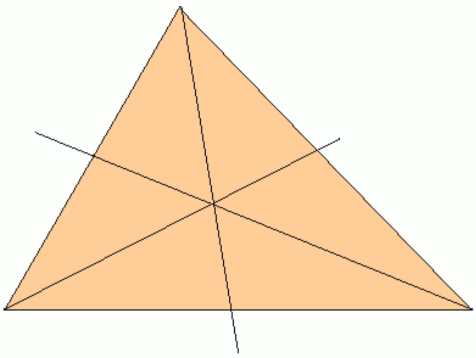
Mediatrices. Circuncentro



Las **mediatrices** son las perpendiculares a los lados por su punto medio.

Las tres mediatrices se cortan en un punto que se llama **circuncentro**. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.

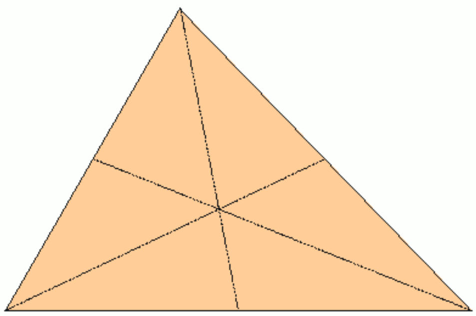
Bisectrices. Incentro



Las **bisectrices** son las rectas que dividen los ángulos en dos partes iguales.

Las tres bisectrices se cortan en un punto que se llama **incentro**. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita.

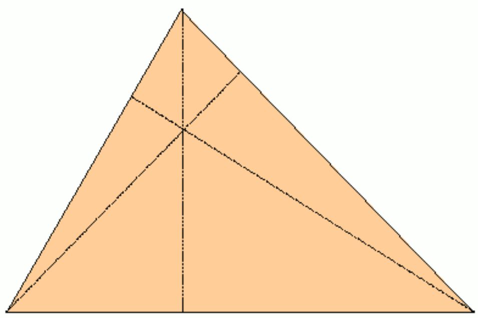
Medianas. Baricentro



Las **medianas** son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas se cortan en un punto que se llama **baricentro**. La distancia del baricentro sobre la mediana es doble al vértice que al lado.

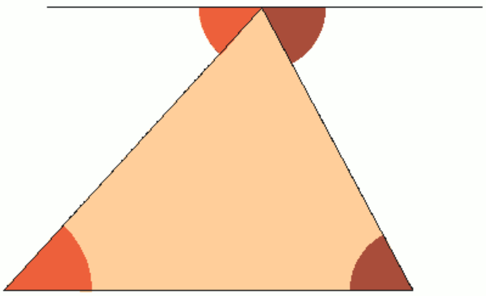
Alturas. Ortocentro



Las **alturas** son los segmentos perpendiculares desde un vértice al lado opuesto.

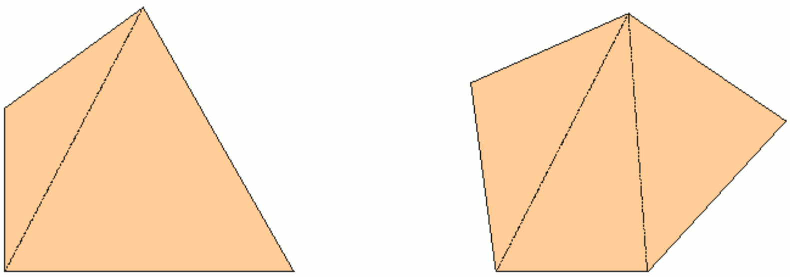
Las tres alturas se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.

Suma de los ángulos de un triángulo



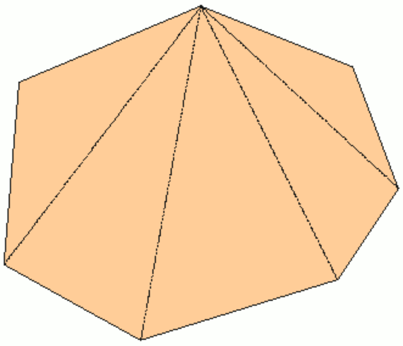
La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

Suma de los ángulos de un cuadrilátero y un pentágono



La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360º.
Los ángulos de un pentágono suman 540º.

Suma de los ángulos de un polígono cualquiera



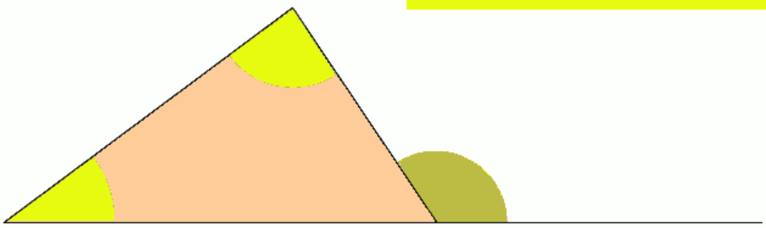
Trazando diagonales desde un vértice cualquiera en un polígono de *n* lados, éste se descompone en *n* - 2 triángulos.

La suma de los ángulos de un polígono de *n* lados es:

$$S_n = 180^{\circ}(n-2)$$

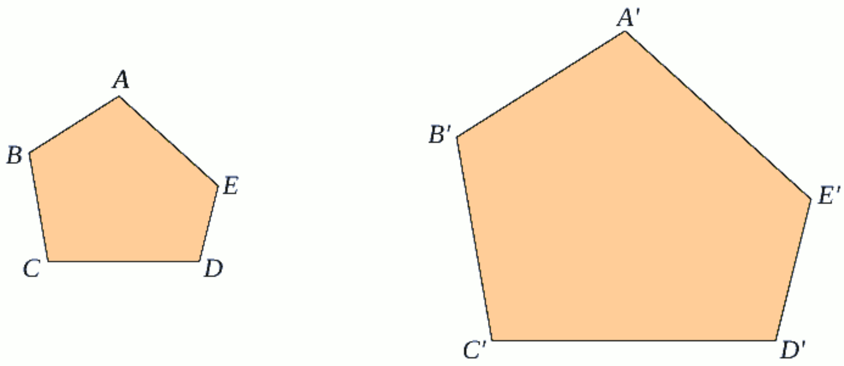
Propiedad del ángulo exterior

En un triángulo se llama ángulo exterior el formado por un lado y la prolongación de otro.



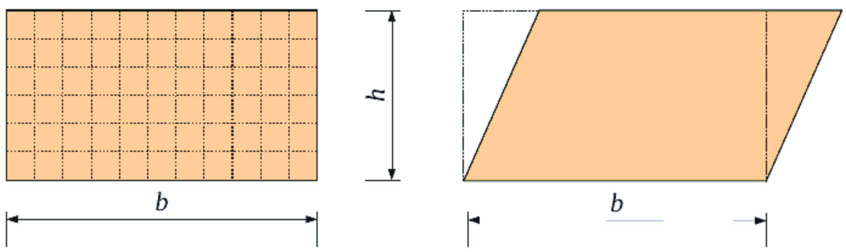
Un ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

Polígonos semejantes



Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. Para que dos triángulos sean semejantes basta que tengan sus tres ángulos iguales.

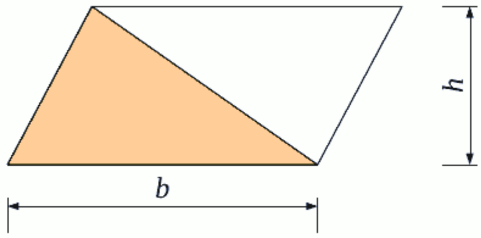
Área del paralelogramo



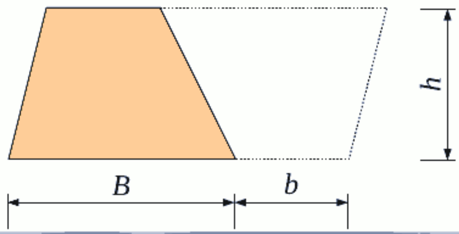
El área de un rectángulo o, en general, de cualquier paralelogramo es igual a la base por la altura:

$$S = b \cdot h$$

Área del triángulo y el trapecio

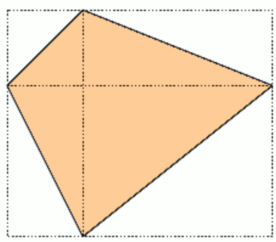


$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



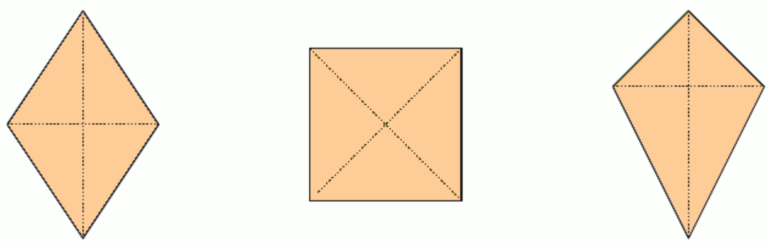
$$S = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Áreas y diagonales

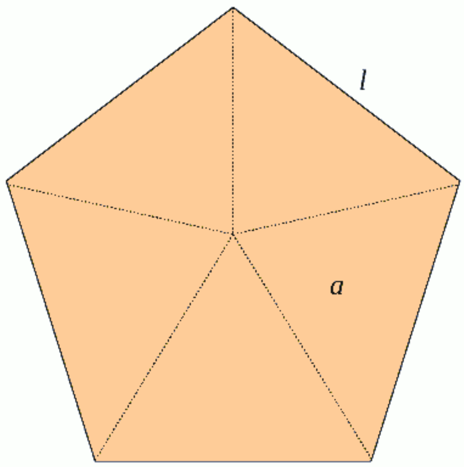


Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, su área es igual al producto de las diagonales dividido por dos:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$



Área de un polígono regular



Un polígono regular de *n* lados, puede descomponerse en *n* triángulos isósceles.
La altura de estos triángulos es la **apotema** del polígono.

El área del polígono se obtiene sumando las áreas de estos triángulos:

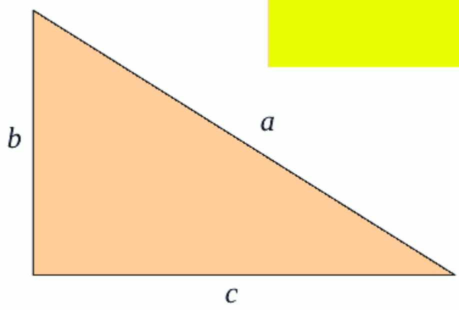
$$S = n \cdot \frac{1}{2}\, l\, a = \frac{p\, a}{2}$$

Donde p es el perímetro.

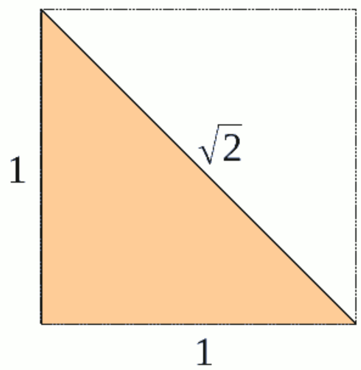
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



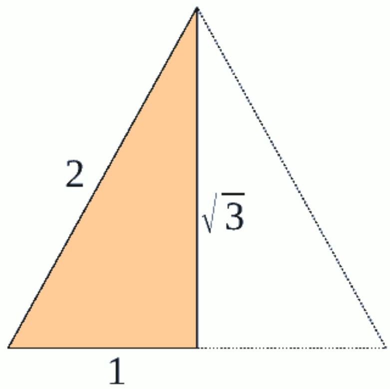
La escuadra



La escuadra es un triángulo rectángulo isósceles. Los ángulos agudos miden 45º. Puede considerarse como una de las dos mitades en que una diagonal divide un cuadrado.
Sus lados están en la proporción:

$$1 : 1 : \sqrt{2}$$

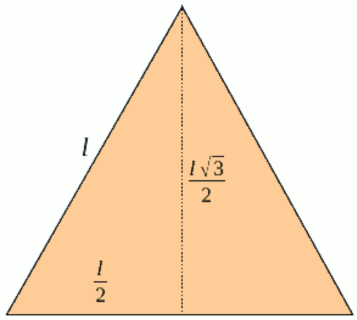
El cartabón

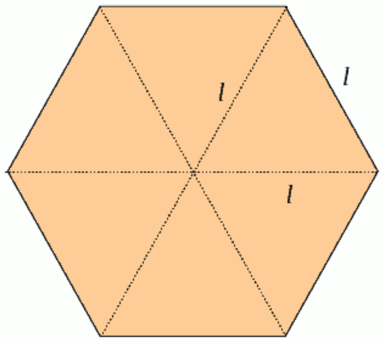


El cartabón es un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30º y 60º. Puede considerarse como una de las dos mitades en que una altura divide un triángulo equilátero.
Sus lados están en la proporción:

$$1 : \sqrt{3} : 2$$

Área de un triángulo equilátero y de un hexágono regular

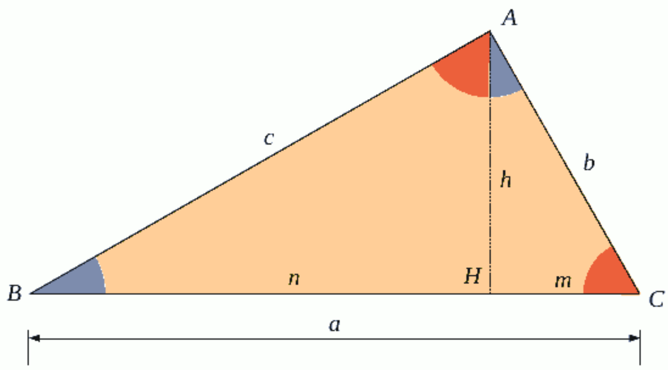




$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{3\,l^2\sqrt{3}}{2}$$

Teorema del cateto

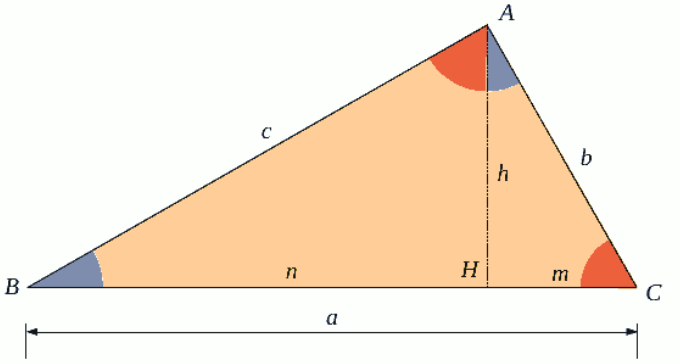


$$b^2 = a \cdot m$$
$$c^2 = a \cdot n$$

Los triángulos *ABC* y *AHC* son semejantes. Por tanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a \cdot m$$

Teorema de la altura

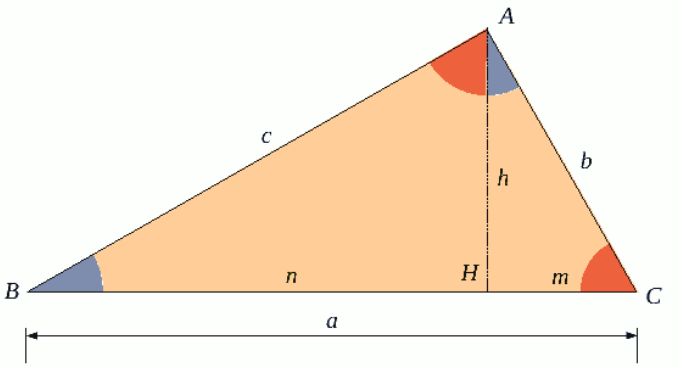


$h^2 = m \cdot n$

Los triángulos *ABH* y *AHC* son semejantes. Por tanto:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \quad \Rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

Demostración del teorema de Pitágoras

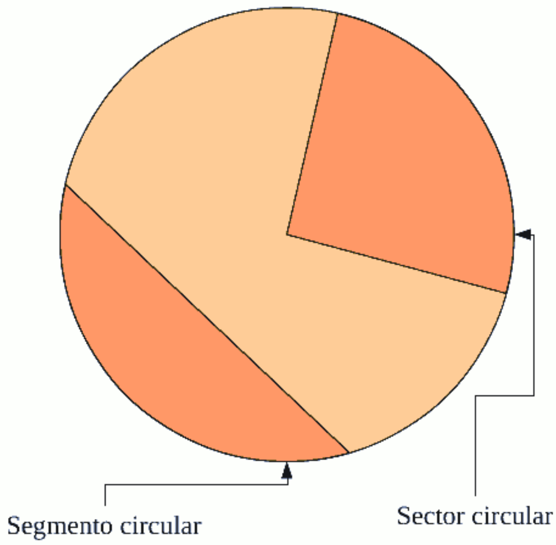


$a^2 = b^2 + c^2$

Del teorema del cateto se deduce que:

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ c^2 &= a \cdot n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m+n) = a^2$$

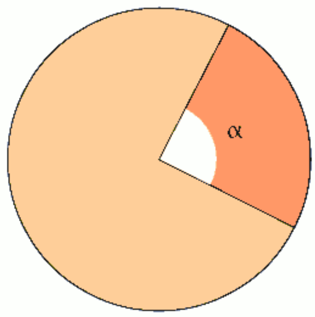
El círculo

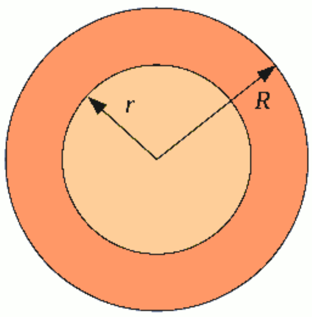


El área del círculo se calcula mediante:

$$S = \pi r^2$$

El sector y la corona





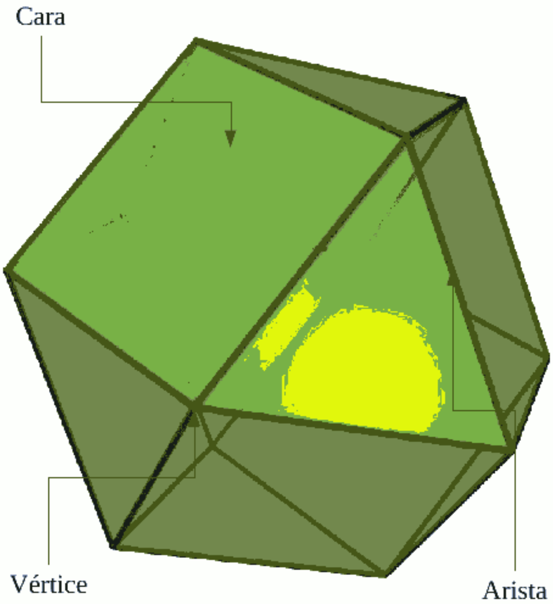
El área del sector es proporcional al ángulo:

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

El área de la corona es la diferencia de las áreas de los dos círculos:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

Poliedros

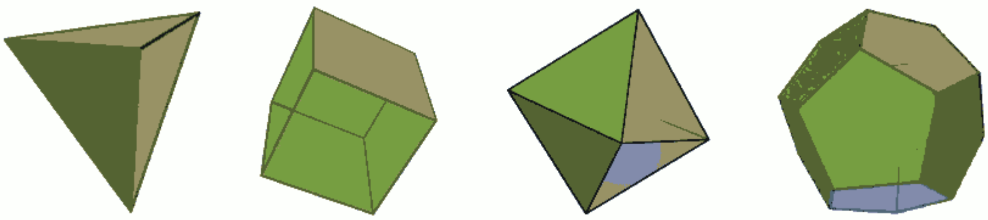


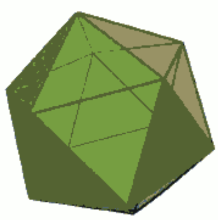
Un poliedro es un cuerpo de volumen finito limitado por caras planas cuyo contorno es un polígono.

Los elementos de un poliedro cumplen la relación de Euler:

$$\textit{caras} + \textit{vértices} = \textit{aristas} + 2$$

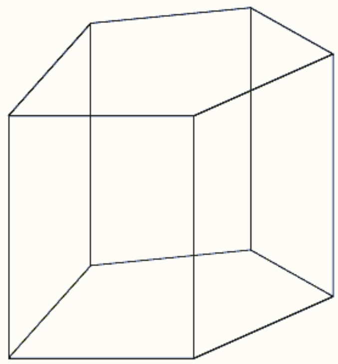
Poliedros regulares

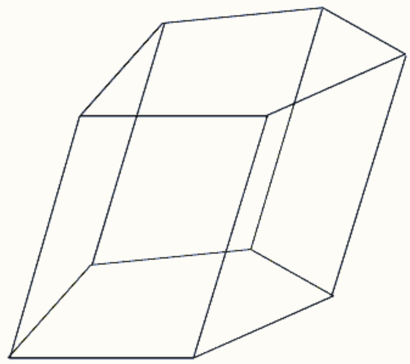




Los poliedros regulares son aquéllos cuyas caras son polígonos regulares iguales.
Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

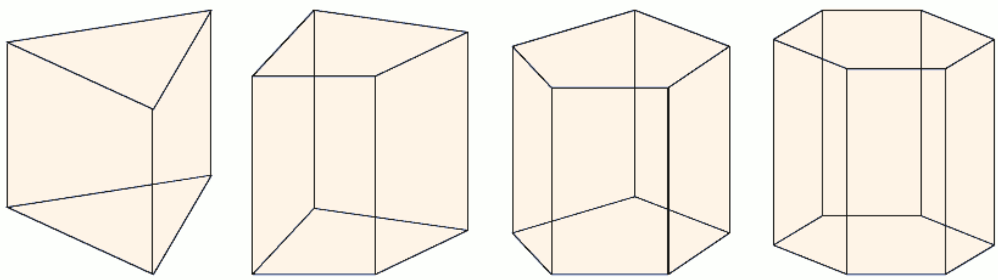
Prismas





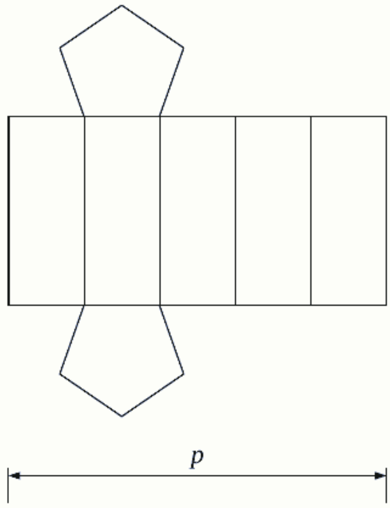
Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras paralelas iguales que se llaman **bases** y **caras laterales** que son paralelogramos. Si las caras laterales son rectángulos el prisma es **recto**. Si son romboides el prisma es **oblicuo**.

Prismas



Según que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc, los prismas se clasifican en triangulares,cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.

Prismas

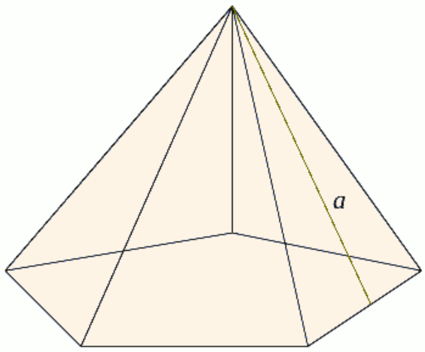


El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro de la base por la altura del prisma.

El área total es igual al área lateral más el área de las bases.

El volumen del prisma es igual al área de la base por la altura.

Pirámides

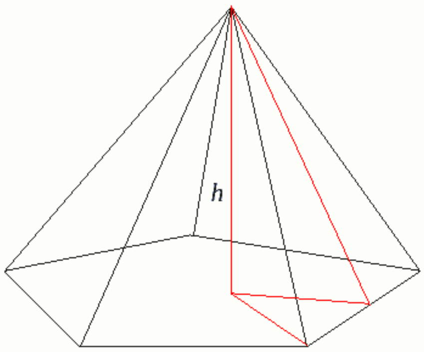


Una pirámide está formada por una base y unas caras laterales que son triángulos con un vértice común.

Una pirámide es regular si la base es un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

En una pirámide regular, la **apotema** es la perpendicular desde el vértice a los lados de la base.

Pirámides



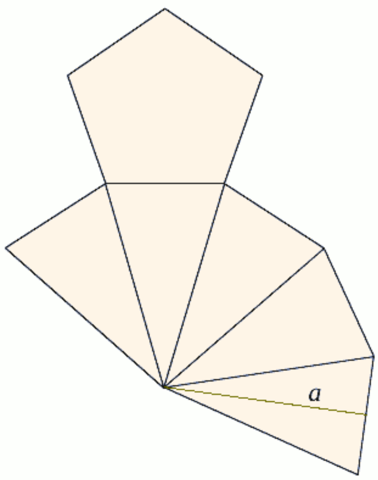
El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} B h$$

En una pirámide regular la altura forma un triángulo rectángulo con la apotema de la base y la apotema de la pirámide.

La altura también forma un triángulo rectángulo con la arista lateral y el radio de la circunferencia circunscrita a la base.

Pirámides

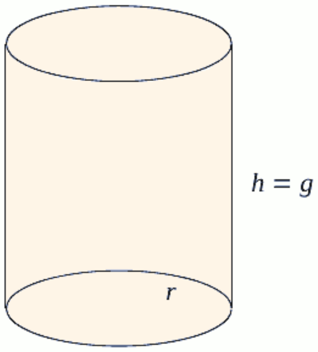


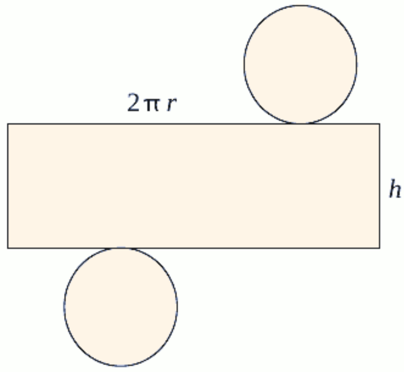
El área lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del perímetro de la base por la apotema:

$$S_l = \frac{p a}{2}$$

El área total es igual al área lateral más el área de la base

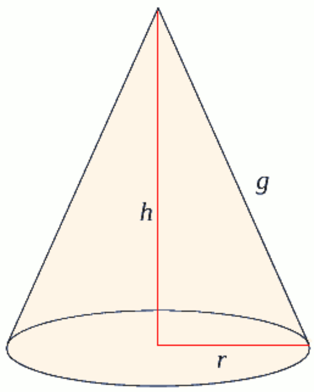
Cilindro

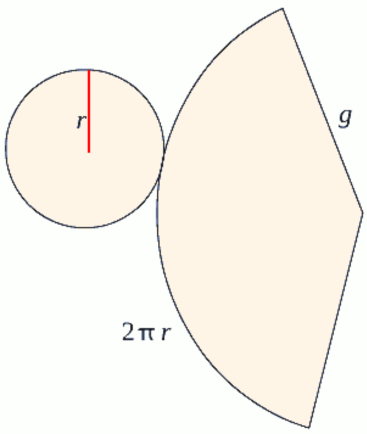




$V = \pi r^2 h$ $S_l = 2\pi r g$ $S_t = 2\pi r g + 2\pi r^2$

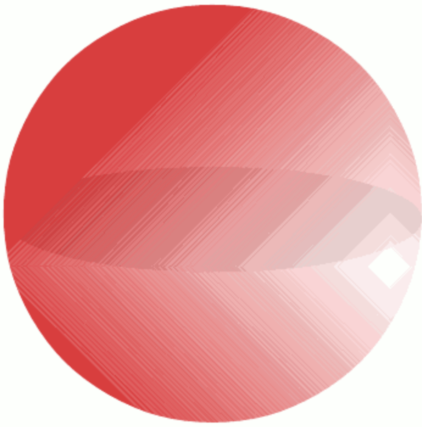
Cono





$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $S_l = \pi r g$ $S_t = \pi r g + \pi r^2$

Esfera



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

Tema 6

Trigonometría

6.1. Medida de ángulos.

Como es sabido, los ángulos pueden medirse en grados sexagesimales. Un ángulo de un grado resulta de dividir una vuelta en 360 partes. Los grados sexagesimales se dividen en 60 minutos y estos a su vez, se subdividen en 60 segundos.

Otra unidad común de medida de ángulos es el radián. El radián se define como el ángulo al que corresponde un arco de longitud igual al radio (ver figura **??**).

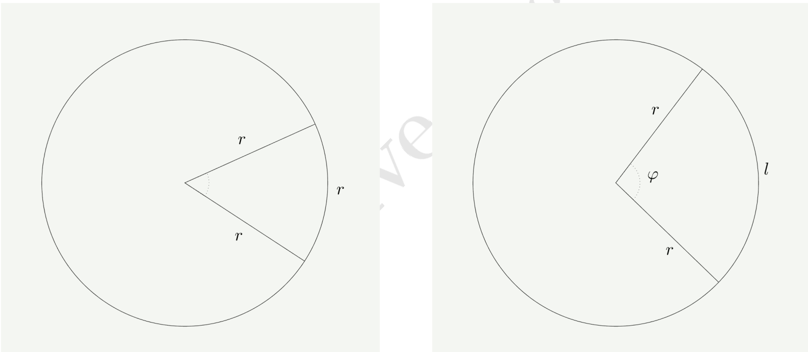


Figura 6.1: Angulo de un radián y medida de un ángulo en radianes

En general, la medida de un ángulo en radianes se define como la razón entre la longitud del arco y el radio (figura 6.1):

$$\varphi(radianes) = \frac{l}{r}$$

Puesto que una vuelta se corresponde con un arco de longitud $2\pi r$, la medida de una vuelta en radianes es:

$$1 \text{ vuelta} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Una vuelta son 2π radianes y media vuelta, esto es 180 son π radianes. Esta equivalencia permite pasar de grados a radianes (multiplicando por π y dividiendo por 180) o de radianes a grados (multiplicando por 180 y dividiendo por π).

Ejercicio 16. Calcular la medida del ángulo de un radián en grados, minutos y segundos.

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \simeq 57{,}2958 \simeq 5717'45''$$

♠♠♠♠

Las fórmulas de álgunas áreas se escriben de una forma más simple cuando el ángulo se expresa en radianes. Por ejemplo, para la longitud del arco y la superficie del sector circular tenemos:

$$l(arco) = r\varphi \qquad S(sector) = \frac{1}{2}r^2\varphi \qquad (\varphi \text{ en radianes})$$

6.2. Razones trigonométricas de ángulos agudos.

Consideremos un triángulo rectángulo como el de la figura 6.2. En este triángulo es conocida una relación

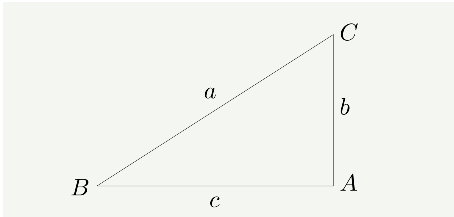


Figura 6.2: Triángulo Rectángulo

entre los ángulos:

$$A + B + C = 180 \qquad \text{o} \qquad B + C = 90$$

y una relación entre los lados:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Vamos a definir unas funciones que relacionan ángulos y lados. Estas funciones se llaman trigonométricas o circulares (pues como se verá se definen también sobre la circunferencia) y son las siguientes:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \text{función seno}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \text{función coseno}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c} \qquad \text{función tangente}$$

Como vemos, el seno y el coseno relacionan los catetos con la hipotenusa y la tangente relaciona los catetos entre sí.

También se definen las funciones cosecante, secante y cotangente como las fracciones inversa de las anteriores:

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}; \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}; \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

Con ayuda de estas funciones pueden calcularse los ángulos de un triángulo rectángulo cuando se conocen los lados. Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejercicio 17. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo en el que $b = 56$ cm y $a = 74$ cm.

Calcularemos en primer lugar el seno del ángulo B:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = \frac{56}{74}$$

Conocido el seno del ángulo, puede calcularse el ángulo mediante la función inversa del seno. Esta función se llama arcoseno. En las calculadora aparece como $\sin^{-1}$. Entonces:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = \frac{56}{74} \quad \Longrightarrow \quad B = \text{ arsen} \frac{56}{74} = 4910'45''$$

De forma similar calcularíamos el ángulo C mediante la función coseno y su función inversa arcocoseno:

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{56}{74} \quad \Longrightarrow \quad C = \text{ arcos} \frac{56}{74} = 4049'15''$$

Desde luego que el ángulo C podría haberse calculado como el complementario de B.

♠♠♠♠

Si se quieren calcular lados conviene recordar las fórmulas de la siguiente manera:

$$\text{un cateto} = \text{hipotenusa} \times \begin{cases} \text{seno del ángulo opuesto} \\ \text{coseno del ángulo comprendido} \end{cases}$$

$$\text{hipotenusa} = \text{un cateto} \div \begin{cases} \text{seno del ángulo opuesto} \\ \text{coseno del ángulo comprendido} \end{cases}$$

$$\text{un cateto} = \text{otro cateto} \times \begin{cases} \text{tangente del ángulo opuesto al primero} \\ \text{cotangente del ángulo comprendido por el primero} \end{cases}$$

Ejercicio 18. Calcular a y b sabiendo que $c = 45$ cm y $B = 36$.

La hipotenusa la calculamos por el coseno:

$$a = \frac{c}{\cos B} = \frac{45}{\cos 36} \simeq 55{,}6 \text{ cm}$$

Como conocemos un cateto, el otro lo calculamos mediante la tangente:

$$b = c \cdot \operatorname{tg} B = 45 \cdot \operatorname{tg} 36 \simeq 32{,}7 \text{ cm}$$

♠♠♠♠

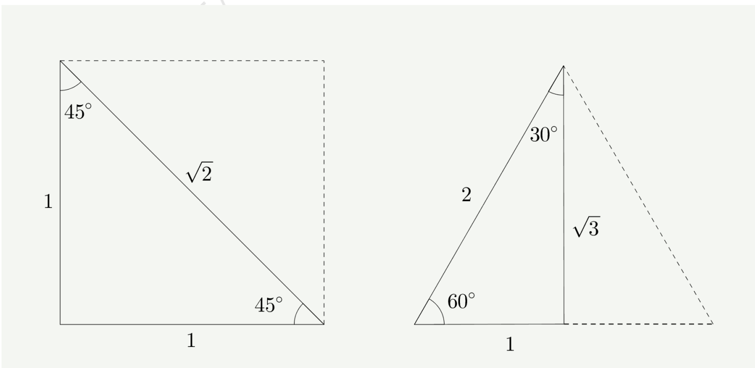


Figura 6.3: La escuadra y el cartabón

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30, 45 y 60 pueden calcularse fácilmente a partir de las proporciones de los elementos del cuadrado y el triángulo equilátero.

En el cuadrado, si el lado mide 1, del teorema de Pitágoras se desprende que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$. En el triángulo equilátero, si el lado mide 2, la mitad del lado mide 1 y, de nuevo por el teorema de Pitágoras, la altura mide $\sqrt{3}$. De aquí, se obtienen para el seno, coseno y tangente de 30, 45 y 60 los valores que aparecen en la siguiente tabla:

	30	45	60
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$$

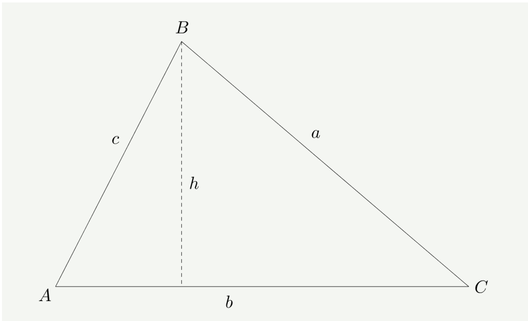


Figura 6.4: Área del triángulo

En efecto, de la figura 6.4 se deduce que $h = c \operatorname{sen} A$. Por consiguiente:

$$S = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$$

6.3. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

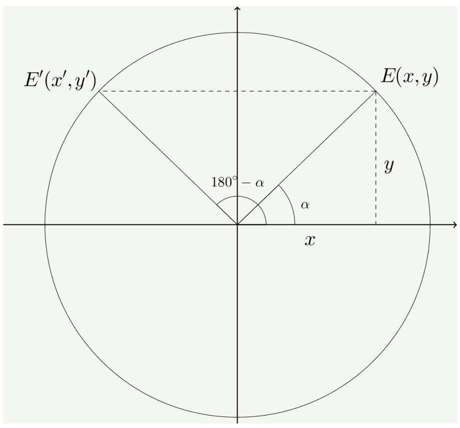


Figura 6.5: Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

Representaremos los ángulos sobre una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y tomaremos el eje de abscisas como origen de ángulos. A cada ángulo α le corresponde un punto de la circunferencia $E(x, y)$. En función de las coordenadas de este punto se definen las razones trigonométricas del ángulo α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Ordenada de } E}{\text{Radio}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Abscisa de } E}{\text{Radio}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Ordenada de } E}{\text{Abscisa de } E} = \frac{y}{x}$$

De esta definición se desprende:

- Para ángulos agudos, esta definición coincide con la anterior basada en los triángulos rectángulos.
- Las funciones seno, coseno y tangente pueden tomar valores positivos y negativos puesto que dependen de las coordenadas de un punto.
- Para ángulos obtusos, el seno es positivo pero el coseno y la tangente son negativos. Esto es consecuencia de que la abscisa de los puntos correspondientes a estos ángulos es negativa y la ordenada positiva.
- Los ángulos suplementarios tienen el mismo seno. El coseno y tangente son iguales pero de signo contrario (ver figura 6.5).
- Para los ángulos de 0, 90 y 180, las funciones toman los siguientes valores:

	0	90	180
seno	0	1	0
coseno	1	0	-1
tangente	0	no existe	0

6.4. Teoremas del seno y el coseno.

Teorema 1 (Teorema del seno). *Las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

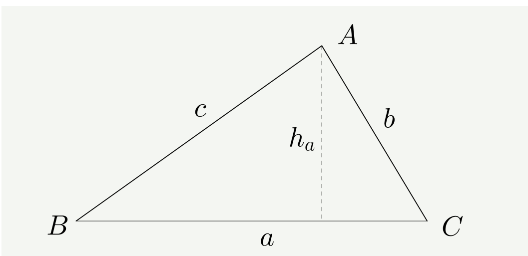


Figura 6.6: Teorema del Seno

Demostración: En el triángulo ABH de la figura 6.6 se verifica que:

$$h = c \cdot \operatorname{sen} A$$

y en el triángulo CBH:

$$h = a \cdot \operatorname{sen} C$$

Por consiguiente:

$$c \cdot \operatorname{sen} A = a \cdot \operatorname{sen} C \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

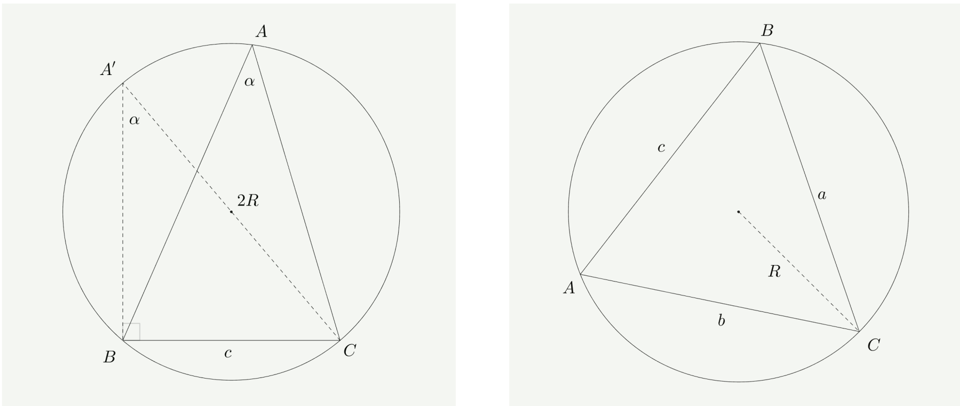


Figura 6.7: Ángulos inscritos y teorema del seno

También puede demostrarse el teorema del seno a partir de la siguiente propiedad de los ángulos inscritos: el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la longitud de la cuerda dividida por el diámetro.

En efecto, al ángulo inscrito en el punto A (ver figura 6.7) le corresponde una cuerda BC de longitud l. Por un extremo de esa cuerda trazamos el diámetro BA' y el segmento $A'C$. El ángulo A' es igual que A por estar inscritos en el mismo arco. Además el triángulo $A'BC$ es rectángulo. De aquí:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{l}{2R}$$

Consideremos ahora un triángulo cualquiera ABC (ver la misma figura 6.7). Dibujemos la circunferencia circunscrita al triángulo y supongamos que R es el radio de esa circunferencia. Por la propiedad anterior:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{a}{2R} \\ \operatorname{sen} B &= \frac{b}{2R} \\ \operatorname{sen} C &= \frac{c}{2R} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad 2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

De esta forma hemos demostrado no solo la proporcionalidad entre los lados y los ángulos opuestos, sino también que la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Para poder aplicar el teorema del seno se necesita conocer al menos un ángulo y el lado opuesto. Si se conocen dos lados y el ángulo comprendido o tres lados se puede aplicar el siguiente teorema:

Teorema 2 (Teorema del coseno)**.** *En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido.*

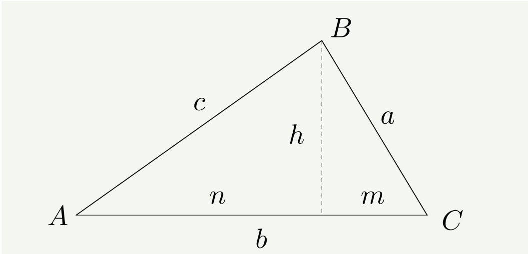


Figura 6.8: Teorema del coseno

Demostración:

De la figura 6.8 resulta:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + n^2 && \text{puesto que } n = b - m: \\ &= h^2 + (b-m)^2 \\ &= h^2 + b^2 + m^2 - 2bm && \text{y como } h^2 + m^2 = a^2: \\ &= a^2 + b^2 - 2bm && \text{puesto que } m = a\cos C: \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Para los lados a y b obtendríamos fórmulas similares:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A; \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Mediante estas fórmulas podemos calcular un lado cuando se conocen los otros dos y el ángulo comprendido entre ellos. También se pueden calcular los ángulos cuando se conocen los tres lados. En este cso es conveniente expresar el teorema de coseno de la siguiente forma:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Tema 7

Geometría analítica

7.1. Distancia. Punto medio de un segmento.

Sean dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ (ver figura 7.1). De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la distancia d entre los dos puntos está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si queremos calcular las coordenadas del punto medio del segmento AB, por la semejanza de los triángulos tenemos que

$$x_2 - x_1 = 2(x - x_1) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_2 - y_1 = 2(y - y_1) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Es decir, las coordenadas del punto medio de un segmento son la media de las coordenadas de los extremos. En general, si queremos calcular un punto P del segmento AB tal que las distancias del punto a A y B

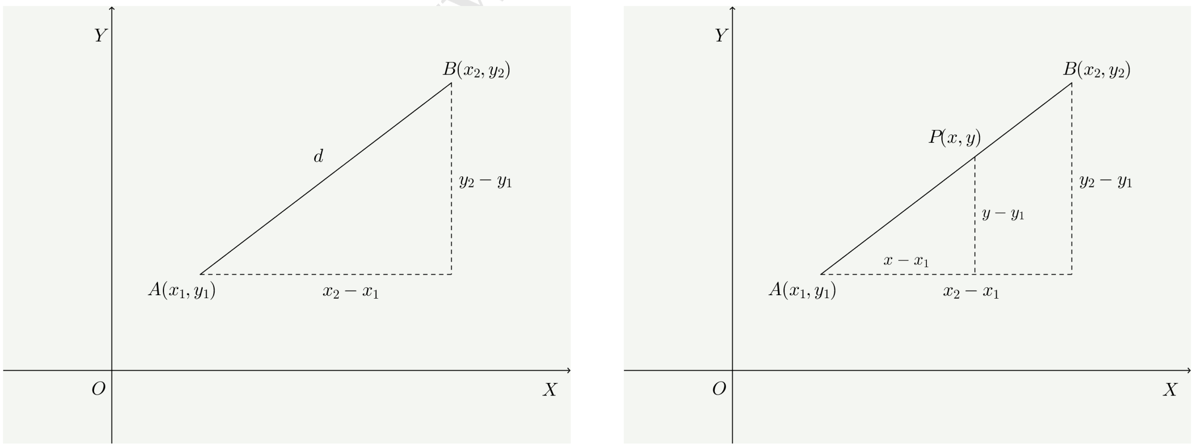


Figura 7.1: Distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento

estén en la proporción $p : q$ haremos una media ponderada tomando como pesos p y q (figura 7.2):

$$x = \frac{qx_1 + px_2}{p + q} \; ; \qquad y = \frac{qy_1 + py_2}{p + q}$$

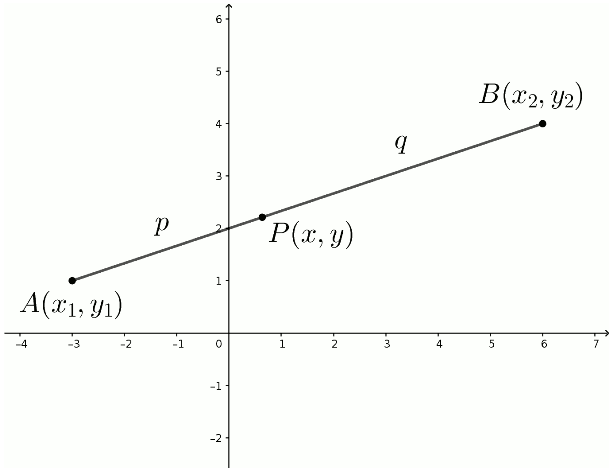


Figura 7.2: Punto que divide a un segmento en una razón dada

Ejercicio 19. Dados los puntos $A(-4, 5)$ y $B(5, -1)$ calcular: ($\diamond$) Distancia entre los dos puntos, ($\diamond$) Punto medio del segmento AB, ($\diamond$) Puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

$\diamond$ La distancia entre los puntos es:

$$d = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

$\diamond$ Las coordenadas del punto medio son:

$$x = \frac{-4 + 5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

Por consiguiente, el punto medio del segmento AB es el punto $M(\frac{1}{2}, 2)$.

$\diamond$ Los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales son tales que sus longitudes están en la proporción $1 : 2$ y $2 : 1$. Entonces, el primer punto es:

$$x = \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot 5}{3} = -1$$

$$y = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)}{3} = 3$$

y el segundo punto:

$$x = \frac{1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5}{3} = 2$$

$$y = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{3} = 1$$

Los puntos que dividen AB en tres partes iguales son $P(-1, 3)$ y $Q(2, 1)$. Puede comprobarse que las coordenadas de los cuatro puntos A, P, Q, B, están en progresión aritmética.

♠♠♠♠

7.2. Ecuación punto-pendiente y explícita de la recta.

En Geometría Analítica las rectas se representan mediante ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Los puntos de la recta son las soluciones de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$3x + 4y = 5$$

representa a una recta. Si queremos obtener puntos de esta recta, basta calcular soluciones de la ecuación. Dando un valor a una de las incógnitas y calculando el valor correspondiente de la otra obtenemos un punto. Por ejemplo, en la ecuación anterior, dando a x el valor -1 se obtiene para y:

$$x = -1 \quad \Longrightarrow \quad 3(-1) + 4y = 5 \; ; \qquad 4y = 8 \; ; \qquad y = 2$$

de modo que el punto $(-1, 2)$ es un punto de la recta dada.

Una ecuación de primer grado puede escribirse de muchas formas diferentes, con paréntesis, sin paréntesis, con denominadores, sin denominadores, etc. Dependiendo cómo se escriba la ecuación, sus coeficientes tienen un significado u otro como características de la recta. Seguidamente, veremos las formas más convenientes de escribir la ecuación de una recta.

Supongamos que una recta está definida por un punto $P(x_0, y_0)$ y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje de abscisas, es decir, por el ángulo α en la figura 7.3. La tangente de este ángulo se representa por la letra m y se llama **pendiente** de la recta.

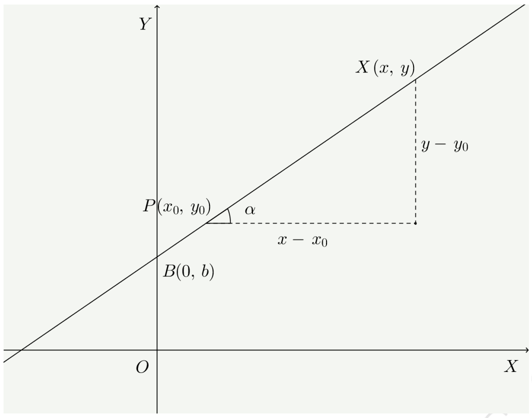


Figura 7.3: Ecuaciones de la recta punto-pendiente y explícita

Para que el punto $X(x, y)$ se encuentre sobre la recta debe cumplir que:

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Longrightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta forma de escribir la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

se llama forma **punto-pendiente** de la ecuación de la recta. El significado de los coeficientes en este caso está claro: representan las coordenadas (x_0, y_0) de un punto de la recta y la pendiente m.

Si se toma como punto para definir la recta, el punto de corte con el eje de ordenada $B(0, b)$, la ecuación queda:

$$y - b = m(x - 0)$$

o bien

$$y = mx + b$$

que se llama **ecuación explícita** de la recta. En esta ecuación, el coeficiente de x es la pendiente, y el término independiente b representa la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas que recibe el nombre de **ordenada en el origen.**

Ejercicio 20. Calcular en las formas punto-pendiente y explícita la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 5)$ y $B(3, 1)$.

Podemos calcular la pendiente de la recta como el cociente de las variaciones de y y de x entre los dos puntos conocidos de la recta (figura 7.4):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{3 - (-2)} = \frac{-4}{5}$$

Como punto para definir la recta podemos tomar cualquiera de los dos, por ejemplo el punto A. La ecuación punto-pendiente

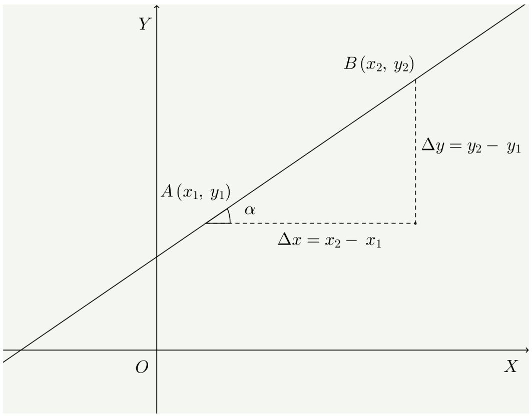


Figura 7.4: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

es:

$$y - 5 = -\frac{4}{5}\,(x + 2)$$

La ecuación explícita la obtenemos despejando y:

$$y = 5 - \frac{4}{5}\,x - \frac{8}{5} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{4}{5}\,x + \frac{17}{5}$$

♠♠♠♠

7.3. Ecuación canónica o segmentaria.

Vamos a suponer ahora que la recta está dada por los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ en que la recta corta a los ejes de coordenadas (figura 7.5).

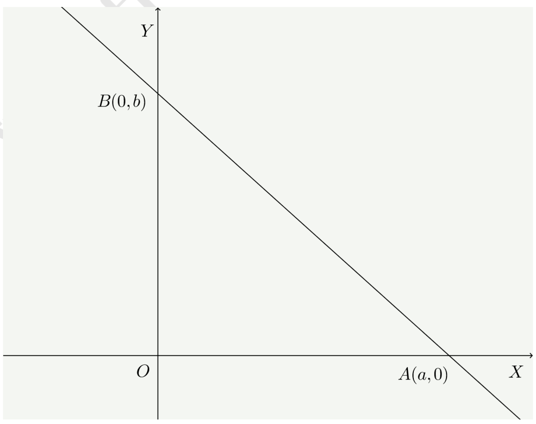


Figura 7.5: Ecuación segmentaria de la recta

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

Puesto que la ordenada en el origen de la recta es b, su ecuación explícita es:

$$y = -\frac{b}{a}\,x + b \quad \Longrightarrow \quad \text{(quitando denominadores)} \qquad bx + ay = ab$$

y dividiendo por ab los dos miembros resulta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta es la **ecuación segmentaria o canónica** de la recta. Los coeficientes a y b de la ecuación son, respectivamente, **la abscisa y la ordenada en el origen**, es decir, la abscisa y la ordenada de los puntos de corte con los ejes (ver figura 7.5).

Ejercicio 21. Calcular la ecuación segmentaria de la recta $3x + 4y = 24$.

Resolveremos el problema por dos procedimientos:

- ⋄ Calculamos las intersecciones e la recta con los ejes de coordenadas. Para calcular la intersección con el eje de abscisas hacemos $y = 0$ y para calcular la intersección con el eje de ordenadas hacemos $x = 0$:

  $$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow A(8, 0) \qquad \begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(0, 6)$$

  Hemos hallado la abscisa en el origen ($a = 8$) y la ordenada en el origen ($b = 6$). La ecuación de la recta en forma segmentaria es:

  $$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

- ⋄ Dividiendo los dos miembros de la ecuación por 24:

  $$\frac{3x}{24} + \frac{4y}{24} = \frac{24}{24}$$

  Pasando dividiendo al denominador los coeficientes que aparecen en el numerador multiplicando:

  $$\frac{x}{\frac{24}{3}} + \frac{y}{\frac{24}{4}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

♠♠♠♠

7.4. Ecuación general o implícita.

No todas las rectas tienen una ecuación que se pueda escribir en una de las formas vistas hasta ahora. Por ejemplo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas. Las rectas paralelas al eje de ordenadas forman un ángulo de 90 con el eje de abscisas y, por consiguiente, no tienen pendiente, puesto que la tangente de 90 no existe. A veces se dice que estas rectas tienen tangente infinita.

Para que la ecuación de una recta pueda escribirse en forma segmentaria, es preciso que la recta corte a los dos ejes en puntos distintos del origen. Por tanto, no podrán escribirse en forma segmentaria ni las rectas paralelas a cualquiera de los dos ejes ni las rectas que pasan por el origen.

Todas las rectas pueden expresarse mediante ecuaciones del tipo:

$$Ax + By + C = 0$$

Esta forma de escribir la ecuación de primer grado se llama **general o implícita** y todas las rectas tienen una ecuación que se puede escribir de esta manera. El problema es que es más difícil encontrar un significado par sus coeficientes A, B y C.

Cuando alguno de los coeficientes de la ecuación es cero, nos encontramos con los siguientes casos particulares:

- ⋄ Si $A = 0$ en la ecuación falta la incógnita x. La ecuación se suele escribir en la forma $y = y_0$ y se trata de rectas paralelas al eje de abscisas. En particular, la ecuación del eje X es $y = 0$.
- ⋄ Si $B = 0$ en la ecuación falta la incógnita y. En este caso se trata de rectas paralelas al eje de ordenadas que se suelen escribir en la forma $x = x_0$. La ecuación del eje de ordenadas es $x = 0$.
- ⋄ Si $C = 0$ la recta correspondiente pasa por el origen puesto que $(0, 0)$ es una solución de la ecuación. En particular, la recta $y = x$ se llama bisectriz del primer cuadrante y $y = -x$ bisectriz del segundo cuadrante.

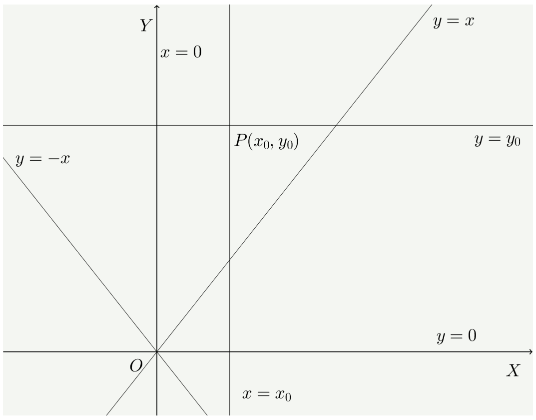


Figura 7.6: Casos particulares de la ecuación de la recta

Ejercicio 22. Calcular las ecuaciones de las paralelas a los ejes por el punto $P(1,3)$

La paralela al eje OX tiene de ecuación $y = 3$. La paralela al eje OY tiene de ecuación $x = 1$.

♠♠♠♠

Ejercicio 23. Calcular el punto de intersección de la recta $2x + 5y - 7 = 0$ con la bisectriz del primer cuadrante.

Para calcular la intersección de dos rectas hay que hallar la solución del sistema formado por sus ecuaciones. En este caso, el sistema es:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

sistema que tiene por solución el punto $P(1,1)$.

♠♠♠♠

7.5. Posición relativa de dos rectas.

Dos rectas o bien **se cortan o son paralelas**. Cuando dos rectas son paralelas forman el mismo ángulo con el eje de abscisas y, por consiguiente, tienen la misma pendiente (ver figura 7.7).

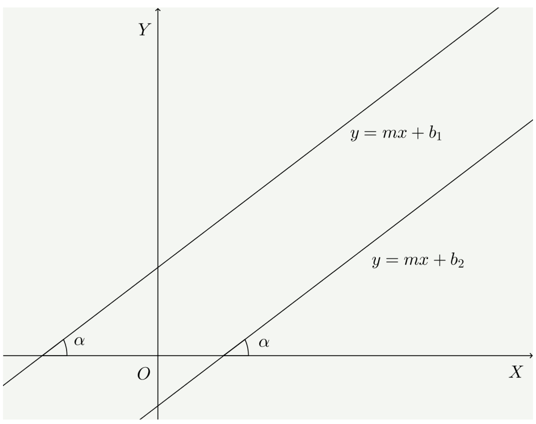


Figura 7.7: Rectas paralelas

Si las ecuaciones de las dos rectas están escritas en forma explícita o punto-pendiente podemos saber si son paralelas, simplemente comprobando si tienen o no la misma pendiente.

En el caso de que una recta esté escrita en forma implícita $Ax + By + C = 0$, podemos obtener su pendiente despejando la incógnita y:

$$Ax + By + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B} \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{A}{B}$$

Por tanto, si las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son paralelas, deben tener la misma pendiente y, por consiguiente:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Esta es la condición de paralelismo de dos rectas cuando sus ecuaciones están escritas en forma implícita. Si además sucede queda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones (una de ellas es igual a la otra multiplicada por un número). Las dos rectas tienen los mismos puntos y son, por tanto, coincidentes.

Ejercicio 24. Calcular la ecuación de la paralela a la recta $y = 2x - 5$ que pasa por el punto $P(3, -7)$.

Si es paralela, debe tener la misma pendiente $m = 2$. Como además pasa por el punto $P(3, -7)$, su ecuación es:

$$y + 7 = 2\,(x - 3)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 25. Calcular la ecuación de la paralela a la recta $3x - 5y + 8 = 0$ por el punto $A(1, 7)$.

Si la ecuación está dada en forma implícita podemos utilizar otro procedimiento (aunque podríamos calcular la pendiente de la recta dada y proceder como en el problema anterior). Puesto que los coeficientes A y B de la recta y su paralela son proporcionales, podemos suponer que son los mismos y las dos ecuaciones difieren simplemente en el coeficiente C. La recta que buscamos es:

$$3x - 5y + C = 0$$

Como la recta pasa por $A(1, 7)$ estos números son solución de la ecuación. Por tanto:

$$3 \cdot 1 - 5 \cdot 7 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 35 - 3 = 32$$

La ecuación de la paralela es $3x - 5y + 32 = 0$.

♠♠♠♠

7.6. Perpendicularidad de rectas

Sea la recta r de pendiente m y su perpendicular s con pendiente m' (ver figura 7.8). Vamos a ver qué relación hay entre las dos pendientes m y m'.

La pendiente m es la tangente del ángulo que forma la recta r con la horizontal en sentido positivo, es decir, en la figura 7.8:

$$m = \operatorname{tg}\varphi$$

Por otra parte, el ángulo α cumple:

$$\alpha = 180 - 90 - \varphi = 90 - \varphi \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(90 - \varphi) = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{m}$$

Pero el ángulo que forma la recta s con la dirección positiva del eje de abscisas no es α sino su suplementario $180 - \alpha$. Entonces, la pendiente m' es:

$$m' = \operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{m}$$

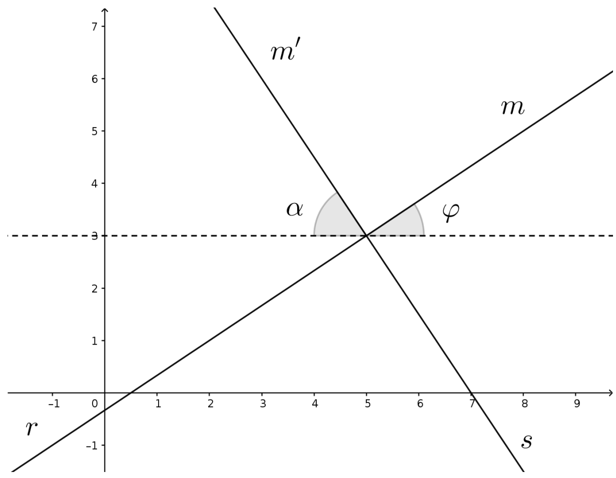


Figura 7.8: Rectas perpendiculares

Ejercicio 26. Calcular la ecuación de la recta perpendicular a $3x - 5y + 2 = 0$ por el punto $P(-2, 1)$.

La recta que nos dan tiene pendiente $m = \frac{3}{5}$. La pendiente de la perpendicular será entonces $m' = -\frac{5}{3}$. Puesto que pasa por $P(-2, 1)$ la ecuación de la perpendicular es:

$$y - 1 = -\frac{5}{3}(x + 2)$$

♠♠♠♠

Ejercicio 27. Calcular la mediatriz del segmento AB siendo $A(-1, 3)$ y $B(4, 1)$.

– Primer método:
  El punto medio del segmento AB tiene como coordenadas $P\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. La recta AB tiene pendiente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{4+1} = -\frac{2}{5}$$

  La mediatriz tiene pendiente $m' = \frac{5}{2}$ y su ecuación es:

$$y - 2 = \frac{5}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \ ; \qquad 2y - 4 = 5x - \frac{15}{2} \ ; \qquad 10x - 4y - 7 = 0$$

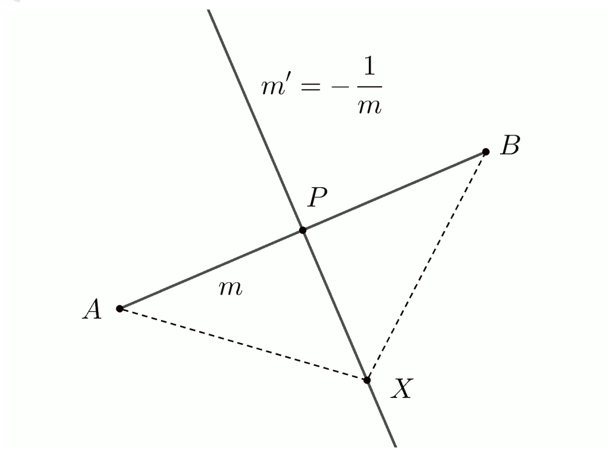


Figura 7.9: Ecuación de la mediatriz

– Segundo método:

Sea $X(x, y)$ un punto de la mediatriz. Su distancia a A es igual que su distancia a B:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1$$
$$2x + 1 - 6y + 9 = -8x + 16 - 2y + 1$$
$$10x - 4y - 7 = 0$$

♠♠♠♠

Tema 8

Funciones

8.1. Definiciones.

Una **función** f es una correspondencia que asocia a cada número real x (**variable independiente**) un único número real $f(x)$ (**variable dependiente**). La representación gráfica de la función f es la curva de ecuación $y = f(x)$ formada por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

El **dominio** o dominio de definición de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x. El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente $f(x)$.

Una función como $\cos^2 x$ puede considerarse como la aplicación sucesiva a la variable independiente x de la función $f(x) = \cos x$ y de la función $g(x) = x^2$. Esta operación consistente en aplicar sucesivamente dos funciones se llama composición de funciones y se representa por $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

En general, la composición de funciones no es conmutativa. Por ejemplo, es diferente $\cos^2 x$ que $\cos(x^2)$.

Dos funciones f y f^{-1} son **inversas** una de la otra si

$$f(x) = y \quad \Longrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \qquad \text{o bien} \qquad f \circ f^{-1}(x) = x$$

Son funciones inversas el cuadrado y la raíz cuadrada, el logaritmo y la exponencial o el arcoseno y el seno puesto queda

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x\ ; \qquad \ln e^x = e^{\ln x} = x\ ; \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arsen} x) = \operatorname{arsen}(\operatorname{sen} x) = x$$

La función inversa sirve para despejar el argumento de una función. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x^2 = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \sqrt{y} \\ \ln x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = e^y \\ e^x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \ln y \\ \cos x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \operatorname{arcos} y \end{aligned}$$

La función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

De forma similar, $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si para puntos x_1, x_2 en ese intervalo:

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

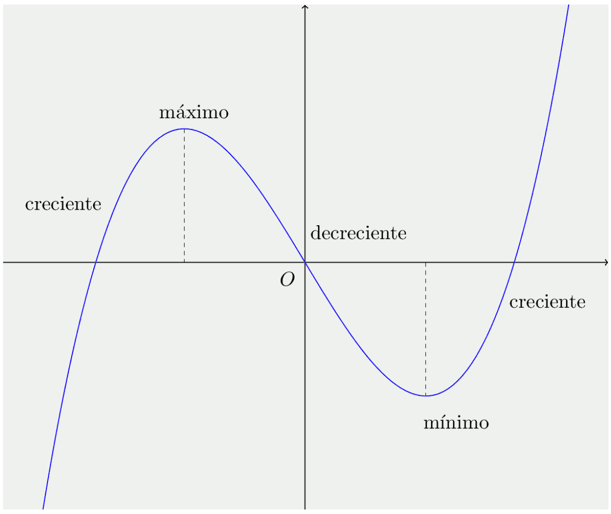


Figura 8.1: Intervalos de crecimiento y decrecimiento

La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto x_0 si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

También podemos clasificar los puntos de la gráfica de una función según que la tangente quede por encima o por debajo de la curva. Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**. Los puntos en que la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman **puntos de inflexión** de la curva. En estos puntos, la tangente atraviesa la curva.

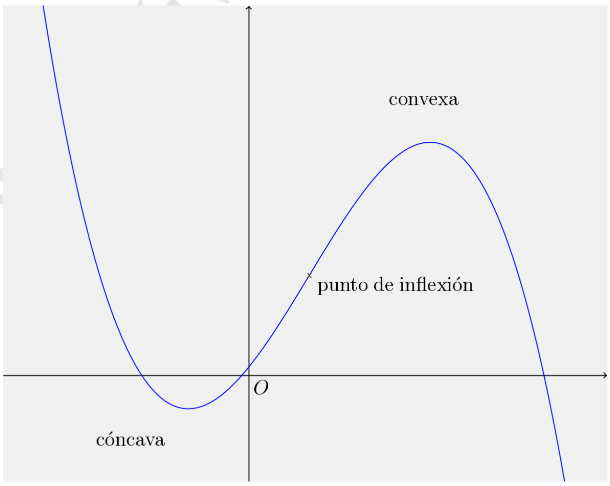


Figura 8.2: Intervalos de concavidad y convexidad

Si la tangente en un punto queda por encima de la curva, diremos que la función es **convexa** en ese punto y si queda por debajo diremos que la función es **cóncava**. Los puntos en que la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión de la curva. En estos puntos, la tangente atraviesa la curva.

Una función es **par** o **simétrica respecto al eje de ordenadas** si cumple que $f(-x) = f(x)$. Las funciones polinómicas que tienen solamente potencias pares son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Una función es **impar** o **simétrica respecto al origen** si cumple que $f(-x) = -f(x)$. Las funciones polinómicas que tienen solamente potencias impares son simétricas respecto al origen.

Una **función periódica** de período T es aquella cuyos valores se repiten a intervalos de longitud T, es decir que:

$$f(x+T) = f(x)$$

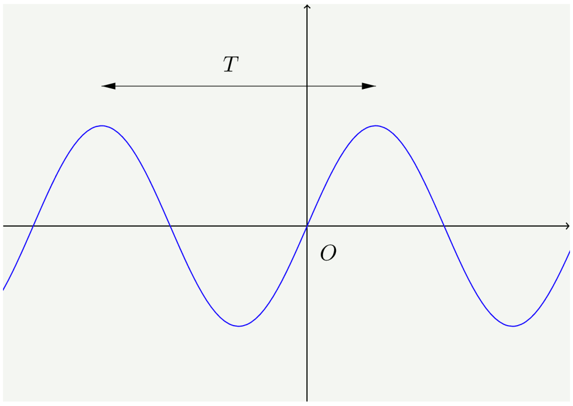


Figura 8.3: Función periódica

8.2. Funciones de primer y segundo grado.

Como vimos anteriormente, la representación gráfica de las funciones polinómicas de primer grado

$$f(x) = mx + b$$

es una línea recta de pendiente m y cuya ordenada en el origen es b.

La representación gráfica de la función polinómica de segundo grado o función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola. La parábola presenta un mínimo o un máximo según que el coeficiente de x^2 sea positivo o negativo. El máximo o mínimo de la función es el vértice de la parábola.

Las intersecciones de la parábola con los ejes se obtienen resolviendo el sistema formado por la ecuación de la parábola y la ecuación de los ejes.

$$OX: \begin{cases} y = ax^2 + bx + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad OY: \begin{cases} y = ax^2 + bx + c = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas del vértice se calculan de la siguiente forma: la abscisa del vértice es el punto medio de las intersecciones (si existen) con el eje OX. Una vez calculada la abscisa, se obtiene la ordenada sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,; \qquad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

Ejercicio 28. Representar gráficamente la función $y = x^2 - 5x - 14$.

El punto de intersección con el eje de ordenadas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(0, -14)$$

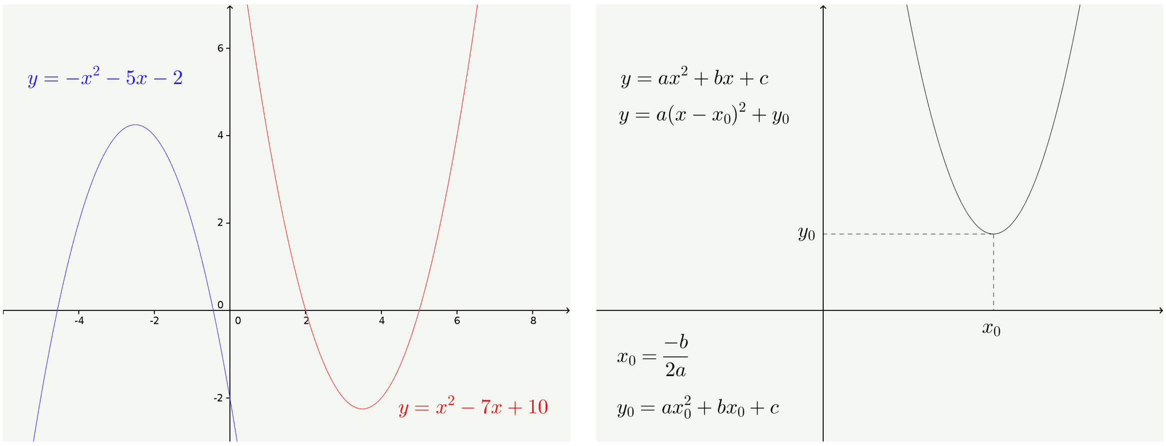


Figura 8.4: Función cuadrática

Los (posibles) puntos de intersección con el eje de abscisas se obtienen del sistema:

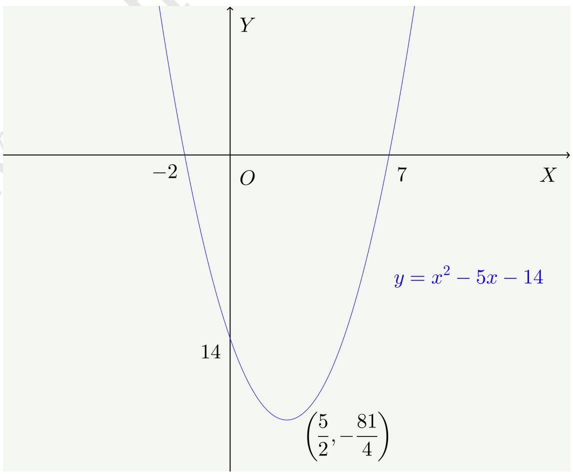
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 14 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

Hay dos puntos de intersección de abscisas -2 y 7. Los puntos son entonces $B_1(-2, 0)$ y $B_2(7, 0)$

El vértice tiene como coordenadas

$$x_0 = \frac{5}{2}; \qquad y_0 = \frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{2} - 14 = -\frac{81}{4}$$

Con estos datos, la representación gráfica sería:

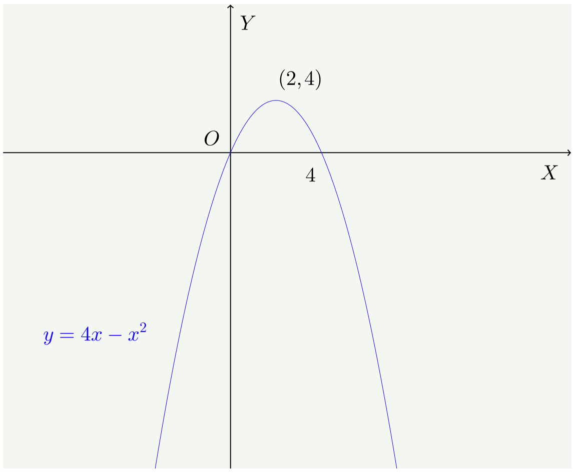


♠♠♠♠

Ejercicio 29. Representar gráficamente la función $y = 4x - x^2$.

Procediendo de forma similar al problema anterior resulta que la intersección con el eje OY es el punto $(0, 0)$, las intersecciones con el eje OX están en $(0, 0)$ y $(4, 0)$ y el vértice en $(2, 4)$.

La representación gráfica es:



Obsérvese que, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, la función presenta un máximo al contrario de lo que ocurría en el ejemplo anterior.

♠♠♠♠

8.3. Función de proporcionalidad inversa.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si su producto es constante. Las funciones definidas mediante ecuaciones del tipo:

$$y = \frac{k}{cx+d} \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** y la curva correspondiente es una **hipérbola**. Esta curva puede dibujarse calculando sus intersecciones con los ejes:

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ x = 0 \end{cases}$$

y sus **asíntotas**. Más adelante se verá cómo se pueden obtener las asíntotas de cualquier curva. Para la función de proporcionalidad inversa la asíntota vertical se obtiene igualando a cero el denominador y la asíntota horizontal dividiendo los coeficientes de x:

$$\text{asíntota horizontal: } y = \frac{a}{c} \qquad \text{asíntota vertical: } x = \frac{-d}{c}$$

Conocidas las asíntotas $x = x_0$ e $y = y_0$, la ecuación de la hipérbola puede escribirse en la forma:

$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$

donde se pone de manifiesto que las magnitudes inversamente proporcionales son $x - x_0$ e $y - y_0$.

Ejercicio 30. Representar gráficamente la función:

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

La asíntota vertical es $x - 3 = 0$, es decir, $x = 3$.

La asíntota horizontal es $y = 2$ (y igual al cociente de los coeficientes de x).

Calculamos las intersecciones con los ejes. El punto de intersección con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-5}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \implies A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

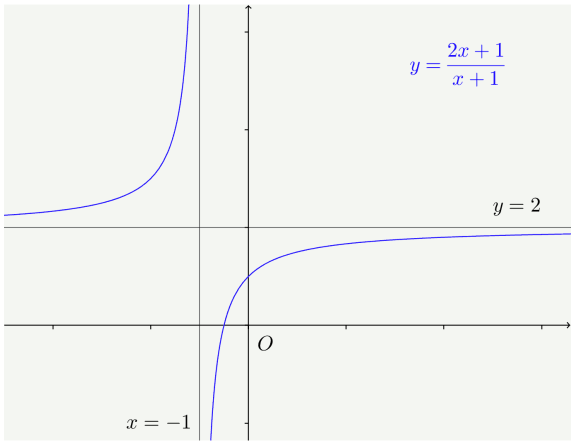
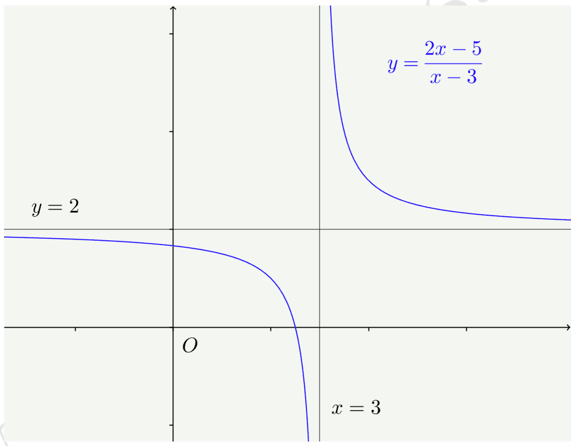


Figura 8.5: Función de proporcionalidad inversa

y el punto de intersección con el eje de ordenadas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-5}{x-3} \\ x = 0 \end{cases} \implies B\left(0, \frac{5}{3}\right)$$

Con estos datos, la gráfica de la función es la siguiente:



♠♠♠♠

8.4. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones definidas por $y = a^x$ donde a es un número positivo cualquiera se llaman **funciones exponenciales**. Sea cual sea el valor de a, la función puede escribirse en la base e, es decir como $y = e^{kx}$ con $k = \ln a$ positivo o negativo según que a sea mayor o menor que 1. Como características más importantes de estas funciones destaquemos las siguientes:

- ⋄ Sea cual sea el valor de x, e^{kx} es positivo.
- ⋄ El eje de abscisas, esto es la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $y = e^{kx}$ en $-\infty$ o $+\infty$ según sea k positivo o negativo.
- ⋄ La curva $y = e^{kx}$ no corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$.

Se llaman funciones logarítmicas las definidas por $f(x) = \log_a x$. Con ayuda de la fórmula del cambio de base de los logaritmos, cualquier función logarítmica puede expresarse como $y = k \cdot \ln x$, donde $\ln x$ es el

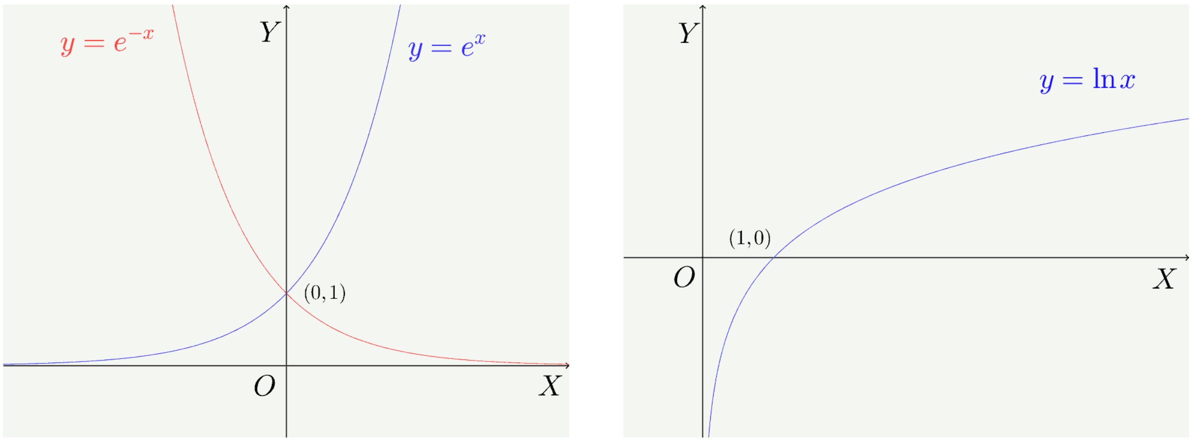


Figura 8.6: Funciones exponenciales y logarítmicas

logaritmo neperiano o sea el logaritmo en la base e. Como propiedades fundamentales de estas funciones citaremos:

- ⋄ Las funciones logarítmicas solo existen para x positivo.
- ⋄ La recta $x = 0$ (el eje de ordenadas) es asíntota vertical de $y = k \cdot \ln x$.
- ⋄ La curva $y = k \cdot \ln x$ no corta al eje de ordenadas. Corta al eje de abscisas en $(1, 0)$.

8.5. Funciones circulares.

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$ así como sus recíprocas cosecante, secante y cotangente, tienen la particularidad de que son periódicas, es decir toman valores iguales cada 2π radianes.

Como se ve (figura 8.7), las gráficas de las funciones seno y coseno son iguales pero desfasadas en $\frac{\pi}{2}$. La función tangente tiene asíntotas $x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ para $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

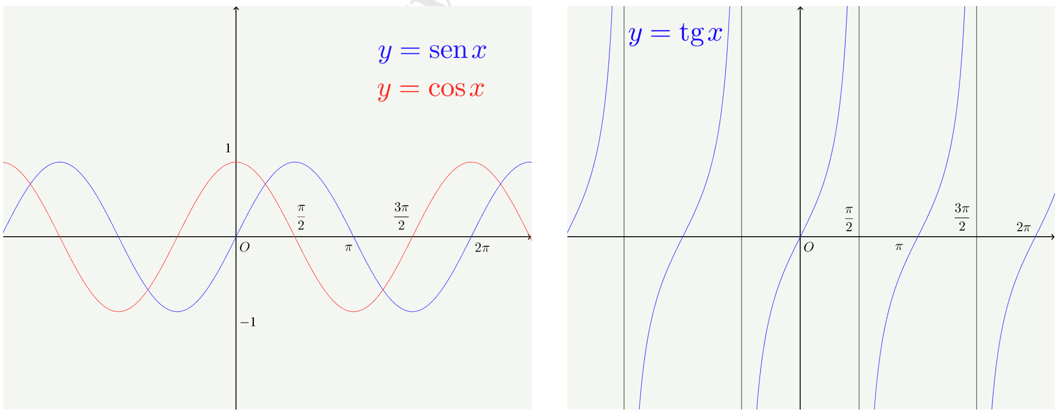


Figura 8.7: Funciones circulares

Las inversas de estas funciones se llaman arcoseno, arcocoseno y arcotangente. Estas funciones se definen de la siguiente manera:

- ⋄ $\operatorname{arsen} x$ es el ángulo (en radianes) comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno vale x.
- ⋄ $\operatorname{arcos} x$ es el ángulo comprendido entre 0 y π cuyo coseno vale x.
- ⋄ $\operatorname{artg} x$ es el ángulo comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuya tangente vale x.

Tema 9

Estadistica

9.1. Introducción

La Estadística trata de describir colectividades formadas por un gran número de objetos. El conjunto de los objetos que se estudian se denomina **población**. En ocasiones, el estudio se hace a partir de una **muestra**, esto es, cierto número de objetos tomados aleatoriamente de la población. El número de objetos de la población o de la muestra es su **tamaño**.

Sobre la población o sobre una muestra se mide una magnitud. Los valores que toma esta magnitud forman la **variable estadística**. Si la variable estadística toma valores numéricos se dice que es **cuantitativa**. Si no es así (por ejemplo si se estudia la raza de una población de gatos) la variable es **cualitativa**.

Una variable estadística cuantitativa puede tomar un número finito de valores o los infinitos valores comprendidos en un cierto intervalo. En el primer caso hablaremos de variable estadística **discreta** y en el segundo de variable **continua**. En realidad la variable nunca es estrictamente continua en el sentido explicado pues la precisión de los instrumentos de medida no permite apreciar infinitos valores. En la práctica, la variable será continua cuando pueda tomar un número muy elevado de valores; en este caso, los valores de la variable estadística se agrupan en intervalos.

9.2. Frecuencias

La **frecuencia** o frecuencia absoluta de un valor x de la variable estadística es el número de objetos de la población que presentan ese valor. Representaremos esta frecuencia por f. La frecuencia de un determinado valor dividido por el número de elementos de la población, esto es, la proporción de elementos de la población que presenta este valor es la **frecuencia relativa** que representaremos por h. Evidentemente se cumple que:

$$h = \frac{f}{N}$$

donde N es el número de objetos de la población.

La **frecuencia acumulada** F de un resultado x es el número de elementos de la población en los que la variable toma valores menores o iguales que x. Dividiendo por el número de elementos de la población se obtiene la **frecuencia acumulada relativa** H.

Los valores de la variable estadística y las correspondientes frecuencias se representan en las llamadas tablas de frecuencias, que tienen siguiente forma (se presentan dos tablas, una para variable discreta y otra para variable continua):

x	f	h	F	H
x_1	f_1	h_1	F_1	H_1
x_2	f_2	h_2	F_2	H_2
x_3	f_3	h_3	F_3	H_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	f_n	h_n	F_n	H_n

x	f	h	F	H
$[x_0, x_1)$	f_1	h_1	F_1	H_1
$[x_1, x_2)$	f_2	h_2	F_2	H_2
$[x_2, x_3)$	f_3	h_3	F_3	H_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[x_{n-1}, x_n)$	f_n	h_n	F_n	H_n

De las definiciones se deducen algunas condiciones que deben cumplir estos valores:

- ◇ La suma de todas las frecuencias debe ser igual al tamaño de la población o de la muestra.
- ◇ La última frecuencia acumulada también debe ser igual al tamaño de la población o de la muestra.
- ◇ La suma de las frecuencias relativas debe ser 1 y también la última frecuencia relativa acumulada.

También debe cumplirse que, por ejemplo:

$$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

es decir a la suma de las frecuencias absolutas anteriores. O también:

$$F_4 = f_4 + F_3$$

o sea, la frecuencia correspondiente más la frecuencia acumulada anterior. Relaciones similares deben cumplirse para las frecuencias relativas.

9.3. Gráficos estadísticos

Los valores de la variable estadística y sus frecuencias pueden representarse gráficamente de muchas maneras. Consideraremos solamente los más comunes.

Para variable discreta se utilizan los diagramas de barras. Los valores de la variable se indican sobre el eje de abscisas y sobre ellos se dibuja una barra de altura proporcional a la frecuencia. Pueden representarse de esta forma tanto las frecuencias absolutas como las frecuencias relativas o las frecuencias acumuladas:

Si la variable estadística es continua se utilizan los **histogramas** y los **polígonos de frecuencias acumuladas**. Un histograma consiste en representar los intervalos en que hemos dividido la variable sobre el eje de abscisas y, sobre él, se dibuja un rectángulo de área proporcional a la frecuencia correspondiente:

Los polígonos de frecuencias acumuladas (absolutas o relativas) se obtiene tomando como ordenada sobre el extremo derecho del intervalo la frecuencia acumulada correspondiente y uniendo los puntos así obtenidos mediante segmentos:

9.4. Mediana y cuartiles

Supongamos que todos los valores obtenidos de la variable estadística se ordenan de menor a mayor. La **mediana** será entonces el valor central, esto es, el valor que deja el mismo número de términos a su izquierda y a su derecha. Si el número de términos es par entonces se tomará como mediana la media de los valores centrales.

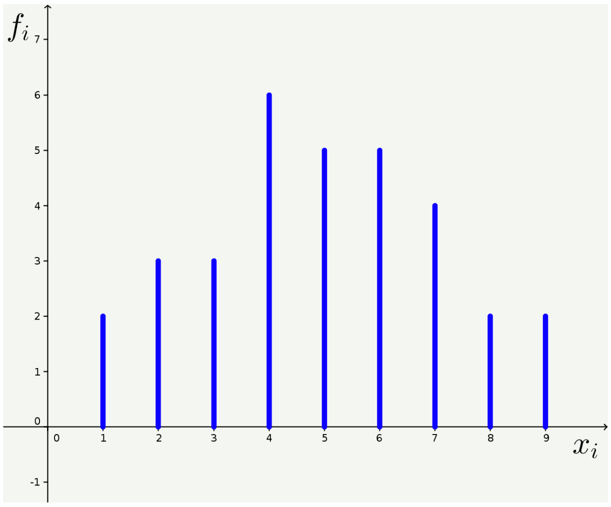


Figura 9.1: Diagrama de barras

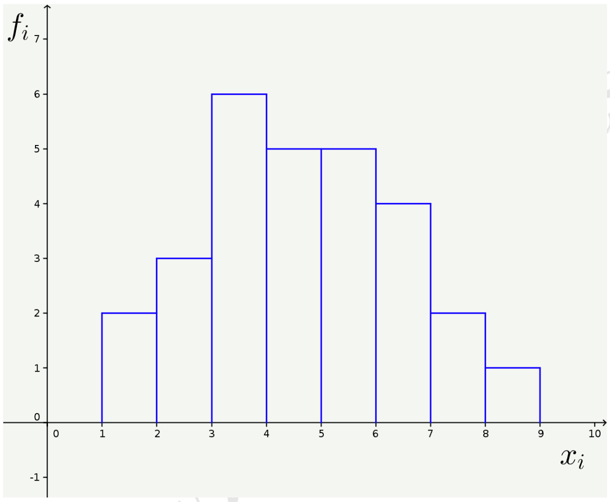


Figura 9.2: Histograma

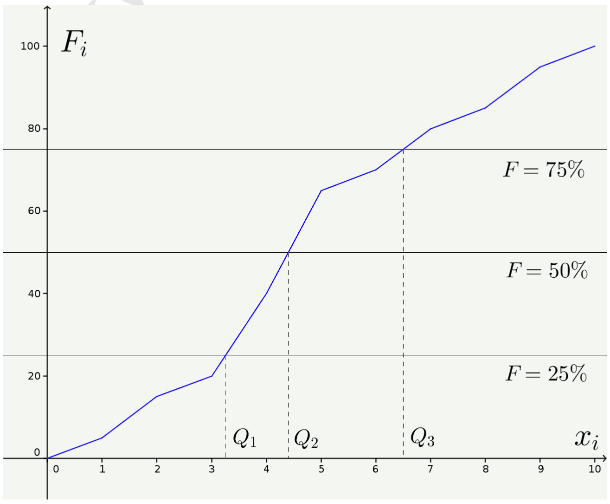


Figura 9.3: Polígono de frecuencias acumuladas

La mediana se puede obtener fácilmente a partir de la tabla de frecuencias relativas acumuladas. Si en la tabla aparece la frecuencia acumulada $0,50$ (o sea el $50\,\%$) entonces la mediana es la media entre el valor de la variable correspondiente a ese $0,50$ y el siguiente. Si no aparece en la tabla el valor $0,50$, entonces es el valor de la variable correspondiente al primer valor de la frecuencia acumulada relativa superior a $0,50$.

Si la variable es continua, esto es, si aparece dividida en intervalos, se puede localizar el intervalo mediano tal como se ha expuesto en el párrafo anterior. Una vez conocido este intervalo se tomará como mediana el valor de la variable correspondiente al $50\,\%$ en el polígono de frecuencias acumuladas relativas.

Si el intervalo mediano es (x_1, x_2) y a los extremos del intervalo les corresponden unas frecuencias acumuladas relativas H_1 y H_2, el valor de la mediana está dado por:

$$\text{Mediana} = x_1 + \frac{0,50 - H_1}{H_2 - H_1}(x_2 - x_1)$$

De forma similar, se llaman primero, segundo y tercer cuartil, los valores de la variable correspondientes a frecuencias acumuladas de $0,25$, $0,50$ y $0,75$, es decir, aquellos que dividen al conjunto de valores obtenidos en cuatro partes con el mismo número de términos. Se representan por Q_1, Q_2 y Q_3. El segundo cuartil coincide con la mediana. Pueden obtenerse por fórmulas similares a la mediana:

$$Q_1 = x_1 + \frac{0,25 - H_1}{H_2 - H_1}(x_2 - x_1)$$
$$Q_2 = x_1 + \frac{0,50 - H_1}{H_2 - H_1}(x_2 - x_1)$$
$$Q_3 = x_1 + \frac{0,75 - H_1}{H_2 - H_1}(x_2 - x_1)$$

donde (x_1, x_2) representa el intervalo en que se encuentra el cuartil y H_1 y H_2 las frecuencias relativas acumuladas en los extremos del intervalo.

9.5. Media y desviación típica

La media o media aritmética de una variable estadística se define como la suma de todos los valores de la variable dividido por el número de elementos de la población:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

La suma de todos los valores de la variable estadística se puede expresar mediante la suma de cada uno de los valores que toma por sus correspondientes frecuencias. Así:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \Sigma h_i x_i$$

donde se ha hecho uso de la relación $\frac{f_i}{N} = h_i$. En caso de que los datos aparezcan agrupados en intervalos, tomaremos como valor de la variable la marca de clase, es decir, el punto medio del intervalo.

La media es, como hemos visto, un número que cumple que $\Sigma x = N\bar{x}$, es decir, si todos los valores de la variable fuesen iguales a la media, su suma sería la misma. La media nos permite comparar dos poblaciones sobre las que se ha medido la misma magnitud pero no nos permite saber si los valores de la variable están próximos a la media o no. Por ejemplo, una media de cinco se puede obtener con dos cincos o con un diez y un cero.

Para saber cómo están distribuidos los valores en torno a la media son precisos otros parámetros. Estos son la **varianza** y la **desviación típica**. La varianza se define por:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \Sigma h_i (x_i - \bar{x})^2$$

y su raíz cuadrada o desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\Sigma h_i(x_i - \bar{x})^2}$$

Desarrollando el cuadrado de la diferencia, podemos encontrar otra expresión para la varianza:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{N} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2 + \Sigma f_i \bar{x}^2 - \Sigma 2 f_i x_i \bar{x}}{N} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} + \frac{\bar{x}^2 \Sigma f_i}{N} - \frac{2\bar{x}\Sigma f_i x_i}{N} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x} \\
&= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \\
&= \bar{x^2} - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

Esta expresión puede recordarse diciendo que la varianza es igual a la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media.

La media y la desviación típica tienen las siguientes propiedades:

- Si se suma el mismo número a todos los valores de la variable, la media queda incrementada en esa cantidad pero la desviación típica no varía.
- Si todos los valores de la variable se multiplican por el mismo número, la media y la desviación típica quedan multiplicados por ese número. La multiplicación de todos los valores por un número puede interpretarse como un cambio de unidades. Esta propiedad dice que la media y la desviación típica se expresan en las nuevas unidades.

El cociente de la desviación típica y la media se llama **coeficiente de variación**:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Para comparar un valor de la variable estadística con el resto de los valores obtenidos en una determinada población se utilizan las **puntuaciones típicas**. En estas se toma como valor cero el de la media y como unidad la desviación típica. El paso de la variable x al valor típico z se hace mediante la fórmula:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

o, despejando $x = \bar{x} + z\sigma$.

9.6. Ejemplo

Ejercicio. *En una encuesta sobre tráfico se ha preguntado a* 1000 *conductores sobre el número de multas recibidas. Se dispone de la siguiente información:*

Nº de conductores	180	280	150	200	110	80
Nº de multas	0	1	2	3	4	5

Hacer la tabla de frecuencias con los datos necesarios para calcular:

- *La mediana.*

- ⋄ *Los cuartiles y el rango intercuartílico.*
- ⋄ *La moda.*
- ⋄ *La media.*
- ⋄ *La desviación típica.*

Solución:

Construimos la tabla con las frecuencias, frecuencias acumuladas, productos de las frecuencias por los datos y productos de las frecuencias por los cuadrados de los datos.

x_i	f_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	180	180	0	0
1	280	460	280	280
2	150	610	300	600
3	200	810	600	1800
4	110	920	440	1760
5	80	1000	400	2000
Total	1000		2020	6440

Con estos datos tenemos:

- ⋄ La mediana sería el valor medio de los datos que, ordenados, ocupasen los lugares 500 y 501. A la vista de la tabls de frecuancias acumuladas, la mediana es $Q_2 = 2$.
- ⋄ De forma similar calculamos el primer cuartil (media entre los datos que ocupan el lugar 250 y 251) $Q_1 = 1$ y el tercer cuartil $Q_3 = 3$. El rango intercuartílico es $Q_3 - Q_1 = 2$.
- ⋄ La moda es el dato con mayor frecuancia. En este caso 1.
- ⋄ La media es la suma de los $f_i x_i$ dividido por el número de datos que es la suma de las f_i:

$$\bar{x} = \frac{2020}{1000} = 2{,}020$$

- ⋄ La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media:

$$\sigma^2 = \frac{6440}{1000} - \bar{x}^2 = 2,3596$$

y la desviación típica es la raíz de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{2,3596} = 1,5361$$

Tema 10

Combinatoria

10.1. Combinatoria.

La combinatoria es la parte de las Matemáticas que trata de las distintas agrupaciones que pueden formar colecciones finitas de objetos y, en particular, de obtener el número de las configuraciones posibles.

Problemas típicos de combinatoria serían calcular el número de diagonales de un polígono de n lados, o de cuántas maneras diferentes se pueden repartir cinco cartas de una baraja, etc.

Ejercicio 31. A una reunión asisten 20 personas. Antes de empezar la reunión se saludan todos dándose la mano. ¿Cuántos saludos han intercambiado?

Resolveremos este problema de dos formas diferentes.

Modo 1. Un asistente podría pensar que como él ha tenido que saludar a 19 personas (a todos menos a sí mismo), y dado que hay 20 personas, el número saludos es $20 \cdot 19 = 380$. Sin embargo, este resultado no es correcto. La razón es que procediendo de esta manera, cada saludo se ha contado dos veces: el saludo que han intercambiado A y B se ha contado entre los que hizo A y entre los que hizo B. Por consiguiente, el número de saludos es exactamente la mitad:

$$\frac{20 \cdot 19}{2} = 190.$$

Modo 2. Una forma de no contar los saludos repetidos sería la siguiente. Un asistente saluda a los 19 restantes y se retira. Se han completado así 19 saludos y quedan 19 personas. El siguiente asistente saluda a los 18 restantes y se retira. Ha efectuado 18 saludos y quedan 18 personas. Este proceso continúa hasta que solamente quede una persona, en ese momento se habrán saludado todas y el número de saludos ha sido:

$$19 + 18 + 17 + \ldots + 2 + 1 = 190.$$

En general, si se reúnen n personas y se saludan todas entre sí, el número total de saludos está dado por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esta fórmula, además de resolver el problema, proporciona un método para sumar determinada cantidad de números consecutivos.

♠♠♠♠

Para contar el número de agrupaciones en que se pueden disponer los elementos de una colección de objetos, se deben distinguir varias situaciones posibles:

- ◇ Que el orden en que aparecen los elementos sea relevante para decidir si las agrupaciones son iguales o no. Por ejemplo, el orden es importante para distinguir entre los posibles resultados de una carrera, sin embargo, en muchos juegos de cartas, no es importante el orden en que te van llegando las cartas al hacer el reparto.
- ◇ Que en una misma agrupación puedan aparecer elementos repetidos o no. Por ejemplo, si se van extrayendo cartas de una baraja con reemplazamiento (devolviendo la carta extraída al mazo después de la extracción), la misma carta puede aparecer varias veces. Si las extracciones sucesivas se hacen sin reemplazamiento, no pueden aparecer cartas repetidas.

10.2. Variaciones y permutaciones.

Vamos a considerar en primer lugar agrupaciones ordenadas de objetos en las que, además, los objetos no pueden aparecer repetidos. Lo que caracteriza a este tipo de agrupaciones es que aunque tengan los mismos elementos se consideran diferentes si los elementos están en distinto orden. Por ejemplo las palabras *cesto* y *coste* tienen las mismas letras, pero son diferentes.

El principio básico que se aplica para contar disposiciones de este tipo es el siguiente.

Regla del producto Supongamos que un objeto consta de dos partes diferentes, que la primera se puede elegir de p maneras y la segunda de q maneras distintas. Entonces, el número de objetos diferentes que pueden formarse es igual a pq. La regla del producto se extiende sin dificultad a objetos que constan de más de dos partes.

Ejercicio 32. ¿Cuántos menús diferentes se pueden hacer con 5 primeros platos, 6 segundos y 4 postres?

El número de menús es $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$. La razón es que con 5 primeros y 6 segundos se pueden formar 30 menús. Ahora, combinando cada uno de estos 30 con cada uno de los 4 postres se obtienen un total de 120 menús.

♠♠♠♠

Ejercicio 33. Se lanza un dado 3 veces y se van anotando las puntuaciones del primer, del segundo y del tercer lanzamiento. ¿Cuántos resultados diferente pueden obtenerse?

En el primer lanzamiento pueden obtenerse 6 resultados diferentes. Para cada uno de los resultados del primer lanzamiento pueden obtenerse 6 resultados para el segundo. Así, los resultados de los dos primeros lanzamientos se pueden producir de $6 \cdot 6 = 36$ maneras diferentes. Para cada uno de ellas, el resultado del tercer lanzamiento puede darse de 6 maneras. Por consiguiente, para los tres lanzamientos se tienen $36 \cdot 6 = 216$ resultados posibles.

♠♠♠♠

Aunque en muchos problemas de disposiciones ordenadas de objetos puede aplicarse la regla del producto, hay casos en que no sucede así. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 34. En una urna hay cuatro bolas: una roja, una verde y dos azules. Se extraen las cuatro bolas sucesivamente. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?

Para la primera extracción se pueden obtener tres resultados diferentes, bola roja, verde o azul. Sin embargo, para la segunda extracción no se puede decir cuántos resultados diferentes se pueden dar. En efecto, si en la primera extracción ha salido bola roja, en la segunda puede darse verde o azul, es decir 2 resultados. Pero si en la primera extracción ha salido azul, en la segunda pueden darse 3 resultados, roja, verde y azul. Así pues, en este caso no se puede aplicar la regla del producto.

Más adelante se verá cómo puede tratarse este tipo de problemas. De momento, escribiremos las 12 disposiciones diferentes que pueden obtenerse:

$$rvaa,\ rava,\ raav,\ vraa,\ vara,\ vaar,\ arva,\ avra,\ arav,\ avar,\ aarv,\ aavr.$$

♠♠♠♠

A continuación veremos algunos tipos de disposiciones de objetos que, por aparecer habitualmente en la resolución de muchos problemas, tienen una denominación especial.

De llaman **permutaciones** de n elementos distintos, a las distintas maneras en que se pueden ordenar estos n elementos. El número de permutaciones de elementos distintos puede deducirse de la regla del producto: el primer elemento puede elegirse de n formas diferentes, para cada una de ellas el segundo se puede elegir de $n-1$ formas, etc. El número de permutaciones de n elementos se representa por P_n y es igual a:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Al producto de todos los enteros comprendidos entre 1 y n se le llama *factorial* de n y se representa con el símbolo $n!$. Así pues, el número de permutaciones de n elementos distintos es $n!$.

Ejercicio 35. Calcular el número de maneras diferentes en que se puede ordenar un alfabeto de 26 letras.

$P_{26} = 26! = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdots 2 \cdot 1 = 403291461126605635584000000.$

♠♠♠♠

Si a partir de m elementos se forman disposiciones ordenadas de n elementos, se habla de **variaciones**. Si los elementos no pueden aparecer repetidos, las variaciones se llaman **ordinarias**; en caso contrario, es decir, si pueden repetirse, se llaman **variaciones con repetición**. Las variaciones con repetición se tratan en otro apartado.

Ejercicio 36. Formar las variaciones ordinarias y con repetición de tres elementos que pueden formarse con las letras del conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

Las variaciones ordinarias son:

$$\begin{array}{cccccccccccc} abc, & abd, & acb, & acd, & adb, & adc, & bac, & bad, & bca, & bcd, & bda, & bdc, \\ cab, & cad, & cba, & cbd, & cda, & cdb, & dab, & dac, & dba, & dbc, & dca, & dcb. \end{array}$$

Las variaciones con repetición son:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} aaa, & aab, & aac, & aad, & aba, & abb, & abc, & abd, & aca, & acb, & acc, & acd, & ada, & adb, & adc, & add, \\ baa, & bab, & bac, & bad, & bba, & bbb, & bbc, & bbd, & bca, & bcb, & bcc, & bcd, & bda, & bdb, & bdc, & bdd, \\ caa, & cab, & cac, & cad, & cba, & cbb, & cbc, & cbd, & cca, & ccb, & ccc, & ccd, & cda, & cdb, & cdc, & cdd, \\ daa, & dab, & dac, & dad, & dba, & dbb, & dbc, & dbd, & dca, & dcb, & dcc, & dcd, & dda, & ddb, & ddc, & ddd. \end{array}$$

♠♠♠♠

El número de variaciones ordinarias puede obtenerse a partir de la regla del producto. El primer elemento se puede elegir de m modos distintos, para cada uno de ellos, el segundo de $m-1$ modos, el tercero de $m-2$, etc. Llamando $V_{m,n}$ al número de variaciones de m elementos tomados de n en n, este número es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1),$$

es decir, al producto de n factores enteros decrecientes a partir del número m.

Si en la fórmula anterior se multiplica y divide por $(m-n)(m-n-1)\cdots 1$, resulta:

$$\begin{aligned} V_{m,n} &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\cdots 1}{(m-n)(m-n-1)\dots 1} \\ &= \frac{m!}{(m-n)!}. \end{aligned}$$

10.3. Combinaciones.

En muchos casos, el orden en que aparecen los distintos elementos no tiene importancia para la resolución de problema. Por ejemplo, cuando se mezclan 3 colores, el orden en que se haga la mezcla carece de relevancia para el resultado final. En el juego de la lotería primitiva, el orden en que se escogen los 6 números tampoco tiene importancia.

Sean m objetos distintos. Se llaman **combinaciones** de estos m elementos tomados de n en n, a los distintos conjuntos de n elementos que pueden formarse con los m elementos de partida, de tal forma que los conjuntos se distingan por tener elementos distintos, siendo irrelevante el orden en que estén colocados.

Por ejemplo con los 5 elementos del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, pueden formarse las siguientes combinaciones de 3 elementos:

$$\begin{array}{ccccc} \{a,b,c\}, & \{a,b,d\}, & \{a,b,e\}, & \{a,c,d\}, & \{a,c,e\}, \\ \{a,d,e\}, & \{b,c,d\}, & \{b,c,e\}, & \{b,d,e\}, & \{c,d,e\}. \end{array}$$

Para calcular el número de combinaciones, de nuevo es inaplicable la regla del producto. En este caso, por cada combinación de n elementos, pueden formarse $n!$ variaciones permutando los n objetos. Por ejemplo, con la primera combinación $\{a, b, c\}$ se pueden formar las siguientes 6 variaciones:

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba.$$

Por consiguiente, el número de variaciones de m elementos tomados de n en n es $n!$ veces mayor que el número de combinaciones. Llamando $C_{m,n}$ al número de combinaciones de los m elementos tomados de n en n, se tiene

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Ejercicio 37. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir 5 cartas de una baraja de 40 cartas sin que importe el orden? ¿En cuántas de ellas no está presente el as de oros? ¿En cuántas está presente el as de oros?

El número de maneras es el número de combinaciones de 40 elementos tomados de 5 en 5:

$$C_{40,5} = \frac{V_{40,5}}{5!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 658008.$$

Si el as de oros no está presente hay que formar grupos de 5 cartas con las 39 que quedan. El número de modos de elegir 5 cartas de 39 es:

$$C_{39,5} = \frac{V_{39,5}}{5!} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 575757.$$

Si el as de oros ha de estar presente deben elegirse 4 cartas entre las 39 restantes para completar el grupo de 5. El número de modos de elegir 4 de 39 cartas es:

$$C_{39,4} = \frac{V_{39,4}}{4!} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 82251.$$

Obsérvese que, como cabría esperar, la suma de los dos últimos resultados es igual al primero.

♠♠♠♠

10.4. Números combinatorios. Binomio de Newton.

En ocasiones se utiliza otra notación para el número de combinaciones. Los números combinatorios $\binom{m}{n}$ (se lee m sobre n), se definen de la siguiente forma:

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} C_{m,n} & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Los números combinatorios tienen dos propiedades importantes:

◇ $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.

Esta propiedad se entiende fácilmente con el siguiente ejemplo. Un examen consta de 10 preguntas de las que hay que contestar solamente 8. El número de maneras de escoger las preguntas es $C_{10,8} = \binom{10}{8}$. Ahora bien, es evidente que es lo mismo escoger las 8 preguntas que se van a contestar, que las 2 preguntas que no se van a contestar. Estas 2 preguntas se pueden escoger de $C_{8,2} = \binom{8}{2}$ maneras. Entonces debe ocurrir que

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2}.$$

Esta propiedad se puede interpretar como que el número de maneras de elegir los elementos que forman parte de una combinación es igual al número de manera de elegir los que quedan fuera de dicha combinación.

◇ $\dbinom{m}{n} = \dbinom{m-1}{n} + \dbinom{m-1}{n-1}$.

Esta propiedad permite obtener las combinaciones formadas con determinado número de elementos a partir de las combinaciones formadas con un elemento menos. El Ejemplo 37 puede ayudar a comprender esta propiedad. El número de combinaciones que se pueden formar con las 40 cartas de la baraja son $\binom{40}{5}$. Este número se puede considerar como suma de las $\binom{39}{5}$ en las que no está presente el as de oros y las $\binom{39}{4}$ en las que sí está presente. Resulta entonces:

$$\binom{40}{5} = \binom{39}{5} + \binom{39}{4}.$$

Aprovechando esta segunda propiedad, los números combinatorios pueden disponerse de la siguiente manera:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

que se conoce como triángulo de Tartaglia o de Pascal. En la primera fila aparecen los números combinatorios para $m = 1$, es decir $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$, en la segunda fila están los números combinatorios para $m = 2$, $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ y $\binom{2}{2}$, etc. Los números que aparecen en los extremos de cada fila son iguales a 1 y los demás se obtienen sumando los dos números que tiene encima (aquí es donde se aplica la segunda propiedad de los números combinatorios).

Las fórmulas del cuadrado del binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y del cubo:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

se generalizan con ayuda de los números combinatorios a la **fórmula de Newton**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Si en lugar de una suma queremos hallar la potencia de una diferencia, basta cambiar en la fórmula de Newton el signo más por menos en los términos en los que el exponente de b es impar.

10.5. Variaciones y permutaciones con repetición.

Vamos a considerar ahora agrupaciones ordenadas de objetos en las que estos pueden aparecer repetidos. El caso más sencillo es el de las **variaciones con repetición**. Éstas son iguales que las variaciones ordinarias salvo que los elementos pueden aparecer repetidos. De forma más precisa, supongamos que tenemos m objetos diferentes, se llaman variaciones con repetición de estos m elementos tomados de n en n a las distintas disposiciones de n elementos distintos o no, que pueden formarse a partir de los m elementos de partida, de forma que se diferencien por tener elementos distintos o por estar dispuestos en distinto orden.

Por ejemplo, las variaciones de los elementos $\{a, b\}$ tomados de 3 en 3, son:

$$aaa,\ aab,\ aba,\ baa,\ abb,\ bab,\ bba,\ bbb$$

Para calcular las variaciones con repetición puede aplicarse la regla del producto, el primer elemento puede elegirse de m formas distintas. Puesto que los elementos pueden repetirse, lo mismo ocurre con el segundo, el tercero, etc. Todos pueden elegirse de m formas. Por consiguiente:

$$VR_{m,n} = m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$$

Ejercicio 38. A partir de los elementos del conjunto $\{1, x, 2\}$, ¿cuántas variaciones de 14 elementos pueden formarse?

Se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14. El número de estas variaciones es:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$$

♠♠♠♠

Nos planteamos ahora el siguiente problema: con las letras de la palabra *parada*, ¿cuántas ordenaciones distintas podemos formar?. Si en la palabra no apareciesen letras repetidas, se trataría de permutaciones ordinarias. Puesto que la a se repite 3 veces se trata de **permutaciones con repetición**. El número de permutaciones en este caso lo indicaremos como $P_{6,3}$. Esto quiere decir que tenemos 6 elementos y uno de ellos se repite 3 veces.

En general, el número de permutaciones con repetición se expresa de la siguiente forma:

$$PR_{n,r_1,r_2,\ldots}$$

y así indicamos que tenemos n elementos de los cuales uno se repite r_1 veces, otro r_2 veces, etc. Podemos calcular el número de permutaciones con repetición de forma similar a como calculamos las combinaciones. Suponiendo que todos los elementos fuesen diferentes, el número de permutaciones sería $n!$. Si un elemento se repite r veces, por cada permutación con repetición hay $r!$ permutaciones ordinarias. de aquí que:

$$PR_{n,r_1,r_2,\ldots} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \, \ldots}$$

Por ejemplo, con las letras de la palabra *parada* pueden formarse las siguientes permutaciones:

$$PR_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$$

Ejercicio 39. Calcular el número de maneras de ordenar las 16 fichas del parchís.

Se trata de permutaciones con repetición de 16 elementos entre los que se repiten 4 veces las fichas rojas, 4 veces las fichas verdes, 4 veces las fichas amarillas y 4 veces las fichas azules. Por tanto, el número de permutaciones es:

$$PR_{16,4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!} = 63063000$$

♠♠♠♠

Tema 11

Probabilidad

11.1. Experimentos aleatorios. Probabilidad.

Los **experimentos aleatorios** tienen dos características:

- ◇ Si el experimento se realiza una vez, no puede predecirse el resultado.
- ◇ Si el experimento se repite muchas veces, pueden hacerse predicciones sobre las frecuencias de los distintos resultados

Por ejemplo, si se lanza un dado equilibrado, no puede predecirse si se va a obtener un cuatro o no. Sin embargo, si el dado se lanza muchas veces podemos decir que aproximadamente en una sexta parte de los lanzamientos se obtendrá cuatro.

Cuando decimos que en un experimento aleatorio un determinado resultado tiene **probabilidad** p, queremos decir que si el experimento se repite un número muy grande de veces, la frecuencia relativa de ese resultado es p.

En principio, hay dos formas de obtener la probabilidad de un resultado. La primera es repetir el experimento un número de veces muy grande y calcular la frecuencia relativa del resultado. Así se puede obtener por ejemplo, la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba.

El segundo método consiste en atender a la simetría del experimento. Por ejemplo, en el experimento consistente en lanzar un dado, si el dado es un cubo perfecto, la probabilidad de todos los resultados ha de ser la misma. Puesto que la suma de todas las frecuencias relativas debe ser 1, también la suma de las probabilidades de todos los resultados será igual a 1. De aquí deducimos que la probabilidad de un resultado particular debe ser igual a $\frac{1}{6}$.

11.2. Espacio muestral. Sucesos.

Definiremos ahora algunos conceptos que nos ayudarán a describir los experimentos aleatorios.

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados de un experimento aleatorio. Se suele representar mediante E o S. En el experimento de lanzar un dado, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si lanzamos dos monedas y miramos la cara superior (C cara o X cruz), el espacio muestral es:

$$E = \{CC, CX, XC, XX\}$$

y si se lanzan tres monedas:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

En otros experimentos el espacio muestral es muy complicado y resulta difícil escribirlo. Sin embargo, podemos aplicar las técnicas estudiadas en el tema anterior para contar sus elementos. Por ejemplo, sea el experimento consistente en extraer sin reemplazamiento cinco cartas de una baraja española. El número de elementos de este espacio muestral es:

$$\binom{40}{5} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 658008$$

Veremos más adelante que contar el número de elementos del espacio muestral es importante para calcular probabilidades.

Se llama **suceso** a un subconjunto del espacio muestral. Un suceso se suele representar mediante una letra mayúscula, mediante una descripción entrecomillada o enumerando sus elementos. Por ejemplo, el suceso consistente en obtener un número primo al lanzar un dado lo podemos indicar de la siguiente forma:

$$A = \text{«Obtener un número primo»} = \{2, 3, 5\}$$

El suceso que no contiene ningún resultado posible, se llama **suceso imposible** y se representa por $\varnothing$. El suceso imposible tiene probabilidad cero. El suceso que contiene todos los resultados, es decir E considerado como subconjunto de sí mismo, se llama **suceso seguro** y su probabilidad es igual a 1.

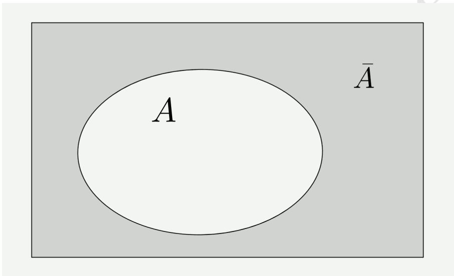


Figura 11.1: Suceso contrario

El **suceso contrario** de A está formado por los resultados que no están en A. Se representa por $\bar{A}$. En el ejemplo anterior:

$$\bar{A} = \{1, 4, 6\}$$

El suceso $A \cup B$ está formado por los resultados que están contenidos en A o en B (o en los dos). Por ejemplo:

$$A = \{1, 4, 6\}\ , \quad B = \{2, 4, 6\} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

El suceso $A \cup B$ se llama «A ó B» o «A unión B».

El suceso $A \cap B$ se llama «A y B» o «A intersección B» y está formado por los resultados que están contenidos en A y en B. En el ejemplo anterior:

$$A = \{1, 4, 6\}\ , \quad B = \{2, 4, 6\} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B = \{4, 6\}$$

Si dos sucesos no tienen ningún resultado común, es decir, cumplen que $A \cap B = \varnothing$, se llaman **incompatibles.**

Los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ cumplen las **leyes de Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}\ ; \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Los diagramas anteriores permiten visualizar las operaciones con sucesos. Conviene identificar la probabilidad del suceso con el área correspondiente para recordar las reglas de probabilidad que veremos en el siguiente apartado.

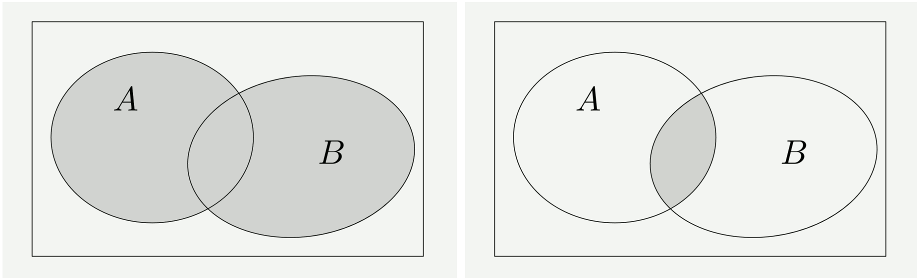


Figura 11.2: Unión e intersección de sucesos

11.3. Cálculo de probabilidades. Regla de la suma y del producto.

Consideraremos seguidamente algunos procedimientos para el cálculo de probabilidades. En primer lugar consideraremos el caso especial de los espacios equiprobables y, a continuación, algunas reglas de carácter general.

- **Espacios equiprobables**. Un espacio muestral se llama **equiprobable** si todos sus resultados tienen la misma probabilidad. Puesto que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1 se cumple que:

$$E = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} \text{ equiprobable} \quad \Longrightarrow \quad p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) = \cdots = p(a_n) = \frac{1}{n}$$

La probabilidad de un suceso que consta de m resultados es igual a $\frac{m}{n}$. Esta propiedad de los espacios equiprobables puede enunciarse de la siguiente forma (regla de Laplace):

$$p(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados posibles}}$$

Ejercicio 40. Calcular la probabilidad de que al repartir 4 cartas de una baraja de 40 cartas no haya ninguna figura.

El número de elementos del espacio muestral es $\binom{40}{4}$ y la cantidad de resultados favorables es el número de maneras de repartir de cuatro en cuatro las 28 cartas que no son figuras, es decir, $\binom{28}{4}$. La probabilidad que nos piden es:

$$p = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{40}{4}} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = 0{,}2240$$

♠♠♠♠

- **Probabilidad del suceso contrario.** De la interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa se desprende que la suma de la probabilidad de un suceso y la de su contrario debe ser igual a 1:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

En muchos casos de cálculo de probabilidades el procedimiento más fácil es calcular la probabilidad del suceso contrario y después aplicar la fórmula anterior:

Ejercicio 41. Calcular la probabilidad de que al repartir 4 cartas de una baraja de 40 se encuentre algún oro entre ellas.

Una forma de resolver este problema sería calcular la probabilidad de que haya un oro, de que haya dos, de que haya tres y de que haya cuatro y sumarlas. Un método más fácil es calcular la probabilidad de no encontrar ningún oro:

$$p(\text{«no hay ningún oro»}) = \frac{\binom{30}{4}}{\binom{40}{4}} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = 0,299868695$$

La probabilidad de que haya algún oro se obtiene por la regla del suceso contrario:

$$p(\text{«hay algún oro»}) = 1 - 0,299868695 = 0{,}700131305$$

♠♠♠♠

◇ **Regla de la suma.** Podemos calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$ por la regla de la suma:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Si los sucesos A y B son incompatibles (no pueden ocurrir a la vez en un experimento), entonces:

$$A, B \text{ incompatibles} \quad \Longrightarrow \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Ejercicio 42. Calcular la probabilidad de obtener uno o dos oros al extraer cuatro cartas de una baraja de 40 cartas.

Sea A el suceso consistente en sacar un oro y B el suceso consistente en sacar dos oros entre las cuatro cartas que se extraen. Por la regla de Laplace, sus probabilidades son:

$$p(A) = \frac{10 \cdot \binom{30}{3}}{\binom{40}{4}} = \frac{\frac{10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 0,44425$$

$$p(B) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{4}} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 30 \cdot 29}{2 \cdot 2}}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 0,21419$$

Puesto que los sucesos A y B son incompatibles (no pueden repartirse a la vez un oro y dos oros), la probabilidad de $A \cup B$ se obtiene sumando:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0,44425 + 0,21419 = 0,65844$$

♠♠♠♠

◇ **Regla del producto.** Vamos a ver que la probabilidad de $A \cap B$ puede calcularse como el producto de dos probabilidades. En efecto, multiplicando y dividiendo por $p(A)$ tenemos que:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

El segundo factor se llama **probabilidad de B condicionada a A** y se representa mediante $p(B|A)$:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esta probabilidad puede interpretarse como la probabilidad de B una vez que sabemos que ha sucedido A. Si ha sucedido A, el espacio muestral se ha reducido a los resultados de A y el suceso B a los resultados que tiene en común con A, es decir, a $A \cup B$.

La regla del producto la podemos escribir entonces como:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A)$$

Si la probabilidad de $A \cap B$ es igual al producto de las probabilidades de A y B, se dice que los dos sucesos son **independientes**:

$$A, B \text{ independientes} \quad \Longrightarrow \quad p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Esto equivale a decir que $p(B|A) = p(B)$ es decir que la probabilidad de B no se ve influida por el hecho de que A haya sucedido o no.

La regla del producto resulta muy útil en experimentos compuestos como, por ejemplo, extracciones consecutivas de cartas de una baraja como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 43. Calcular la probabilidad de que al repartir 4 cartas de una baraja de 40 cartas no haya ninguna figura.

Éste es un ejemplo que hemos resuelto anteriormente. Ahora encontraremos la misma solución por otro procedimiento.

Supongamos que las cartas se van sacando de la baraja una tras otra y sean A_1, A_2, A_3 y A_4 los sucesos «la primera carta no es figura», «la segunda carta no es figura», etc. La probabilidad de que ala primera carta no sea figura es $\frac{28}{40}$; si la primera carta no era figura, la probabilidad de que tampoco lo sea la segunda es $\frac{27}{39}$, etc. Aplicando la regla del producto tenemos que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{28}{40} \cdot \frac{27}{39} \cdot \frac{26}{38} \cdot \frac{25}{37} = 0{,}2240$$

♠♠♠♠