Logaritmos

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

Definición 1.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Definición 1.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Ejemplos:

$$3^x = 81 \quad \Longrightarrow x = \log_3 81 = 4$$

Definición 1.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Ejemplos:

$$3^x = 81 \quad \Longrightarrow x = \log_3 81 = 4$$

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow x = \log_2 8 = 3$$

Definición 1.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Ejemplos:

$$3^x = 81 \quad \Longrightarrow x = \log_3 81 = 4$$

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow x = \log_2 8 = 3$$

$$5^x = \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow x = \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

Definición 1.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ a la solución de la ecuación $a^x = N$:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
3^x = 81 &\quad \Longrightarrow x = \log_3 81 = 4 \\
2^x = 8 &\quad \Longrightarrow x = \log_2 8 = 3 \\
5^x = \tfrac{1}{5} &\quad \Longrightarrow x = \log_5 \tfrac{1}{5} = -1 \\
3^x = \sqrt{3} &\quad \Longrightarrow x = \log_3 \sqrt{3} = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Definición 2.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Definición 2.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Ejemplos:

Definición 2.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Ejemplos:

$$\log_7 49 = 2 \qquad \text{ya que} \qquad 7^2 = 49$$

Definición 2.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Ejemplos:

$$\log_7 49 = 2 \qquad \text{ya que} \qquad 7^2 = 49$$

$$\log_5 125 = 3 \qquad \text{ya que} \qquad 5^3 = 125$$

Definición 2.

Definición

Sea a un número positivo. Se llama logaritmo en base a del número N y se representa mediante $\log_a N$ al exponente que hay que poner a a para obtener N.

Ejemplos:

$$\log_7 49 = 2 \qquad \text{ya que} \qquad 7^2 = 49$$

$$\log_5 125 = 3 \qquad \text{ya que} \qquad 5^3 = 125$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \qquad \text{ya que} \qquad 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

Primeras propiedades

Primeras propiedades

- Puesto que si $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, solamente existen los logaritmos de los números positivos.

Primeras propiedades

- Puesto que si $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, **solamente existen los logaritmos de los números positivos**.

Primeras propiedades

- Puesto que si $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, **solamente existen los logaritmos de los números positivos**.
- Puesto que para todo $a > 0$ e cumple que $a^0 = 1$, el logaritmo de 1 es igual a 0 en cualquier base:

$$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0$$

Primeras propiedades

- Puesto que si $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, **solamente existen los logaritmos de los números positivos**.
- Puesto que para todo $a > 0$ e cumple que $a^0 = 1$, **el logaritmo de 1 es igual a 0 en cualquier base**:

$$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0$$

Primeras propiedades

- Puesto que si $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, **solamente existen los logaritmos de los números positivos**.
- Puesto que para todo $a > 0$ e cumple que $a^0 = 1$, **el logaritmo de 1 es igual a 0 en cualquier base**:

$$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0$$

- Puesto que $a^1 = a$, el logaritmo de la base es igual a 1:

$$a^1 = a \Longleftrightarrow \log_a a = 1$$

Primeras propiedades

- Puesto que si $a > 0$ las potencias de a son positivas, la ecuación $a^x = N$ no tiene solución en el caso de que N sea negativo o cero. En consecuencia, **solamente existen los logaritmos de los números positivos**.
- Puesto que para todo $a > 0$ e cumple que $a^0 = 1$, **el logaritmo de 1 es igual a 0 en cualquier base**:

$$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0$$

- Puesto que $a^1 = a$, **el logaritmo de la base es igual a 1**:

$$a^1 = a \Longleftrightarrow \log_a a = 1$$

Logaritmo de un producto

Propiedad

El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

Logaritmo de un producto

Propiedad

El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración

Logaritmo de un producto

Propiedad

El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración

$$\left.\begin{array}{ll} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Logaritmo de un producto

Propiedad

El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \log_a M = x \quad \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y \quad \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \log_a(MN) &= \log_a\left(a^x a^y\right) = \log_a a^{x+y} \\ &= x + y = \log_a M + \log_a N \end{aligned}$$

Logaritmo de un cociente

Propiedad

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Logaritmo de un cociente

Propiedad

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demostración

Logaritmo de un cociente

Propiedad

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demostración

$$\left.\begin{array}{rl} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Logaritmo de un cociente

Propiedad

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demostración

$$\left.\begin{array}{rl} \log_a M = x & \Longrightarrow a^x = M \\ \log_a N = y & \Longrightarrow a^y = N \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \log_a \frac{M}{N} &= \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} \\ &= x - y = \log_a M - \log_a N \end{aligned}$$

Logaritmo de una potencia

Propiedad

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

Logaritmo de una potencia

Propiedad

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

Demostración

Logaritmo de una potencia

Propiedad

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\log_a M^n &= \log_a \overbrace{M \cdot M \cdot \ldots \cdot M}^{n \text{ factores}} \\
&= \overbrace{\log_a M + \log_a M + \ldots + \log_a M}^{n \text{ sumandos}} \\
&= n \log_a M
\end{aligned}$$

Logaritmo de una raíz

Propiedad

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

Logaritmo de una raíz

Propiedad

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

Demostración

Logaritmo de una raíz

Propiedad

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

Demostración

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[n]{M} &= \log_a M^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \log_a M\end{aligned}$$

Cambio de base

Propiedad

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Cambio de base

Propiedad

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración

Cambio de base

Propiedad

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

Cambio de base

Propiedad

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Cambio de base

Propiedad

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base a en esta última igualdad:

Cambio de base

Propiedad

Si conocemos los logaritmos en la base a, pueden calcularse los logaritmos en otra base b mediante:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demostración

Supongamos que queremos calcular $\log_b N$. Si llamamos x a este número:

$$\log_b N = x \Longrightarrow b^x = N$$

Aplicando el logaritmo base a en esta última igualdad:

$$\log_a b^x = \log_a N \Longrightarrow x \log_a b = \log_a N$$
$$\Longrightarrow x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Aplicaciones

1. *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.

Aplicaciones

1. *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.
   Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:
   $$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$

Aplicaciones

1. *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.
   Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:
   $$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$
2. *Obtener sin calculadora* $\log_{32} 16$.

Aplicaciones

1. *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.
   Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:
   $$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$

2. *Obtener sin calculadora* $\log_{32} 16$.
   Puesto que los dos números son potencias de 2, pasando a esta base:
   $$\log_{32} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 32} = \frac{4}{5}$$

Aplicaciones

1. *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.
   Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:
   $$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$
2. *Obtener sin calculadora* $\log_{32} 16$.
   Puesto que los dos números son potencias de 2, pasando a esta base:
   $$\log_{32} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 32} = \frac{4}{5}$$
3. *Demostrar que* $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N$.

Aplicaciones

1. *Calcular con una aproximación a las milésimas* $\log_5 60$.
   Puesto que la calculadora nos da los logaritmos neperianos:
   $$\log_5 60 = \frac{\ln 60}{\ln 5} \simeq 2{,}544$$

2. *Obtener sin calculadora* $\log_{32} 16$.
   Puesto que los dos números son potencias de 2, pasando a esta base:
   $$\log_{32} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 32} = \frac{4}{5}$$

3. *Demostrar que* $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N$.
   Cambiando a la base a:
   $$\log_{\frac{1}{a}} N = \frac{\log_a N}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a N}{-1} = -\log_a N$$

Simplificación entre exponenciales y logaritmos

Propiedad

Como consecuencia de la definición de logaritmo se cumple que:

$$a^{\log_a x} = x; \qquad \log_a a^x = x$$

Para logaritmos neperianos:

$$e^{\ln x} = x; \qquad \ln e^x = x$$

Simplificación entre exponenciales y logaritmos

Propiedad

Como consecuencia de la definición de logaritmo se cumple que:

$$a^{\log_a x} = x; \qquad \log_a a^x = x$$

Para logaritmos neperianos:

$$e^{\ln x} = x; \qquad \ln e^x = x$$

- Demostrar la propiedad del logaritmo de la potencia.

Simplificación entre exponenciales y logaritmos

Propiedad

Como consecuencia de la definición de logaritmo se cumple que:

$$a^{\log_a x} = x; \qquad \log_a a^x = x$$

Para logaritmos neperianos:

$$e^{\ln x} = x; \qquad \ln e^x = x$$

- Demostrar la propiedad del logaritmo de la potencia.

$$\log_a M^n = \log_a \left(a^{\log_a M}\right)^n = \log_a a^{n \log_a M} = n \log_a M$$

Simplificación entre exponenciales y logaritmos

Propiedad

Como consecuencia de la definición de logaritmo se cumple que:

$$a^{\log_a x} = x; \qquad \log_a a^x = x$$

Para logaritmos neperianos:

$$e^{\ln x} = x; \qquad \ln e^x = x$$

- Demostrar la propiedad del logaritmo de la potencia.

$$\log_a M^n = \log_a \left(a^{\log_a M}\right)^n = \log_a a^{n \log_a M} = n \log_a M$$

- Escribir a^x como una potencia de base e.

Simplificación entre exponenciales y logaritmos

Propiedad

Como consecuencia de la definición de logaritmo se cumple que:

$$a^{\log_a x} = x; \qquad \log_a a^x = x$$

Para logaritmos neperianos:

$$e^{\ln x} = x; \qquad \ln e^x = x$$

- Demostrar la propiedad del logaritmo de la potencia.

$$\log_a M^n = \log_a \left(a^{\log_a M}\right)^n = \log_a a^{n \log_a M} = n \log_a M$$

- Escribir a^x como una potencia de base e.

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

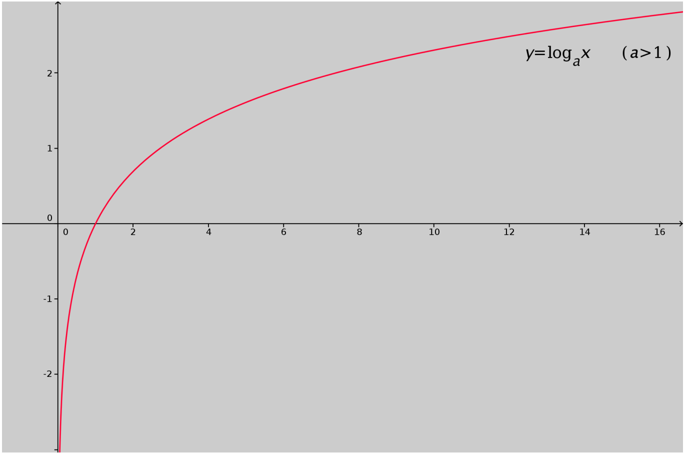
Funciones exponenciales y logarítmicas

- La gráfica de las funciones logarítmicas pasa por el punto $(1, 0)$ y tiene como asíntota el eje de ordenadas.

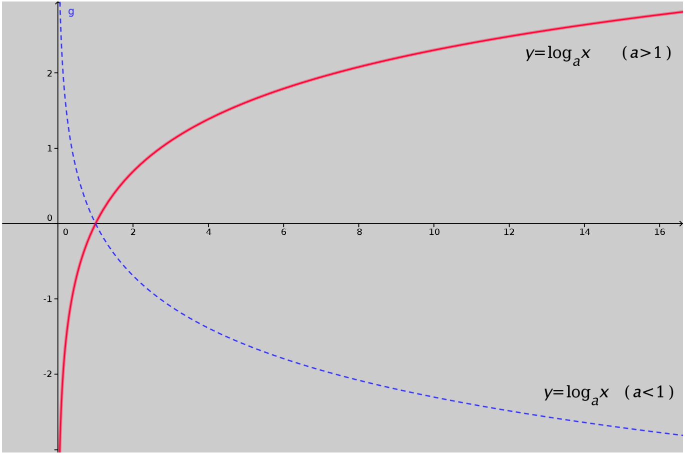
Funciones exponenciales y logarítmicas

- La gráfica de las funciones logarítmicas pasa por el punto $(1, 0)$ y tiene como asíntota el eje de ordenadas.
- La gráfica de las funciones exponenciales pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene como asíntota el eje de abscisas.

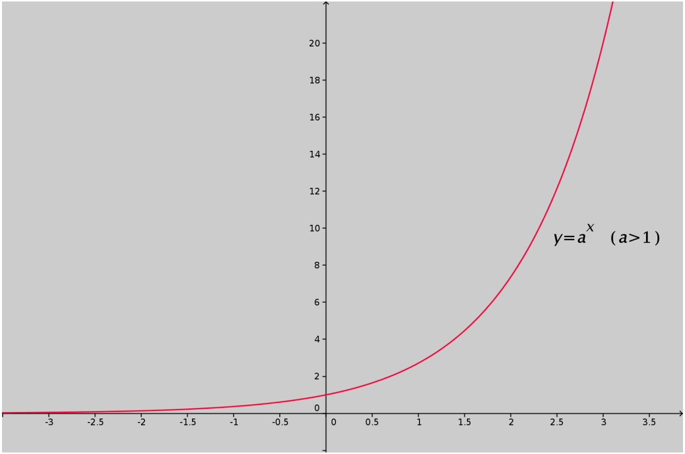
Funciones exponenciales y logarítmicas



Funciones exponenciales y logarítmicas



Gráfica de la función exponencial



Gráfica de la función exponencial